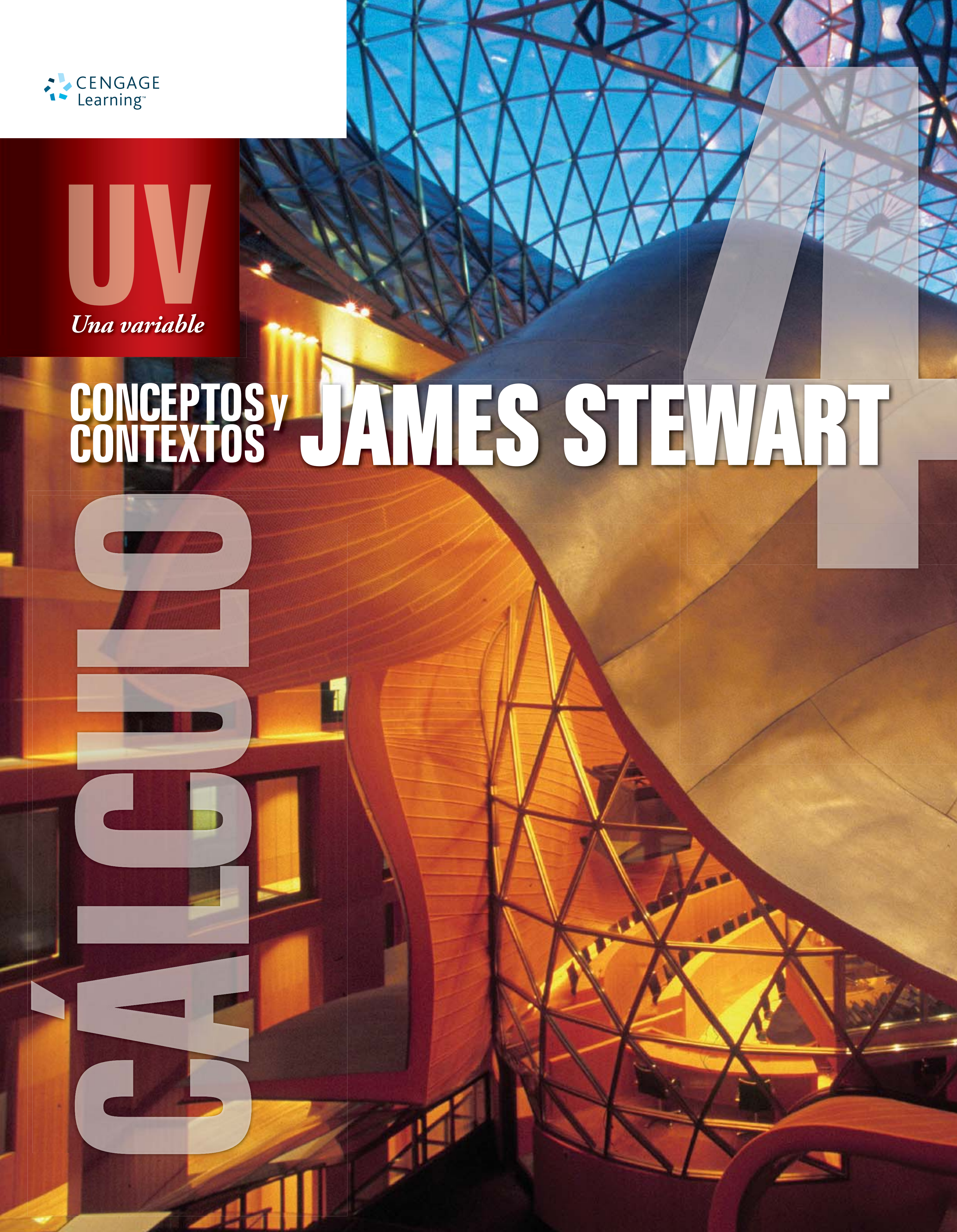
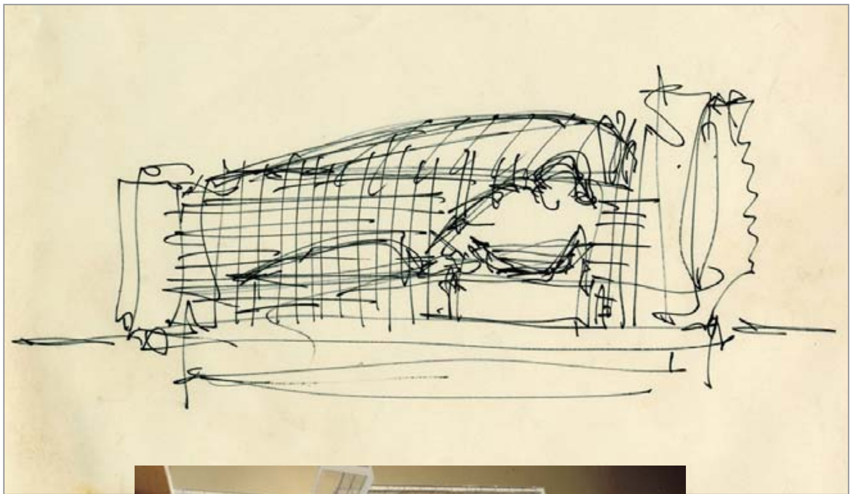

CENGAGE
Learning
UV
Una variable
CONCEPTOS y CONTEXTOS
JAMES STEWART
4
CÁLCULO

Cálculo de una variable

Conceptos y contextos | 4e

Cálculo y la arquitectura de curvas



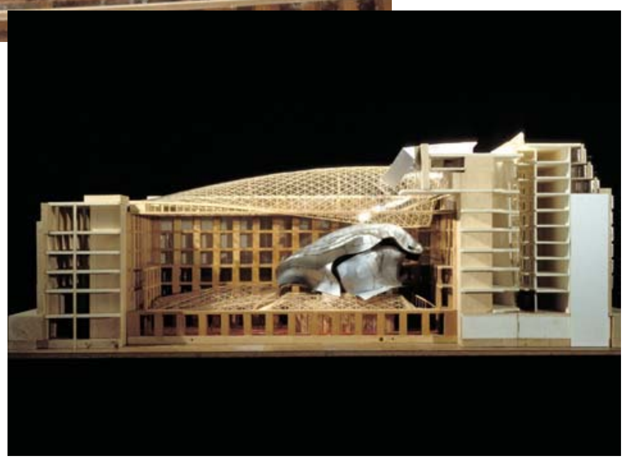
Cortesía de Frank O. Gehry

La fotografía de la portada muestra el DZ Bank de Berlín, diseñado y construido de 1995 a 2001 por Frank Gehry y Asociados. El atrio interior está dominado por una capa escultural de acero inoxidable de cuatro pisos que sugiere un animal prehistórico y aloja un espacio central de conferencias.

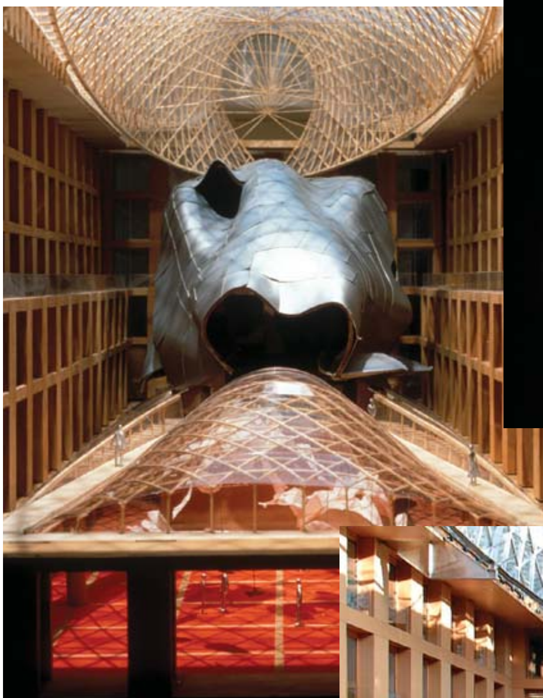
Sin la computadora, sería imposible construir las estructuras sumamente complejas que diseña Frank Gehry. El software CATIA que este arquitecto e ingenieros usan para producir los modelos en computadora está basado en principios de cálculo, es decir, ajustar curvas al enlazar rectas tangentes, asegurándose que la curvatura no es demasiado grande y controlando superficies paramétricas. “En consecuencia,” dice Gehry, “tenemos mucha libertad. Puedo jugar con formas.”

Cortesía de Frank O. Gehry

El proceso se inicia con bosquejos iniciales de Gehry, que se traducen en una sucesión de modelos físicos. (Cientos de modelos físicos diferentes se construyeron durante el diseño del edificio, primero con bloques básicos de madera que luego evolucionaron en formas más esculturales.) A continuación un ingeniero utiliza un digitalizador para registrar las coordenadas de una serie de puntos en un modelo físico. Los puntos digitalizados se alimentan en una computadora y el software CATIA se usa para enlazar estos puntos con curvas suaves. (Une curvas de modo que sus rectas tangentes coincidan; el lector puede usar la misma idea para diseñar las formas de letras del Proyecto de Laboratorio de la página 208 de este libro.) El arquitecto tiene considerable libertad para crear estas curvas, guiado por imágenes

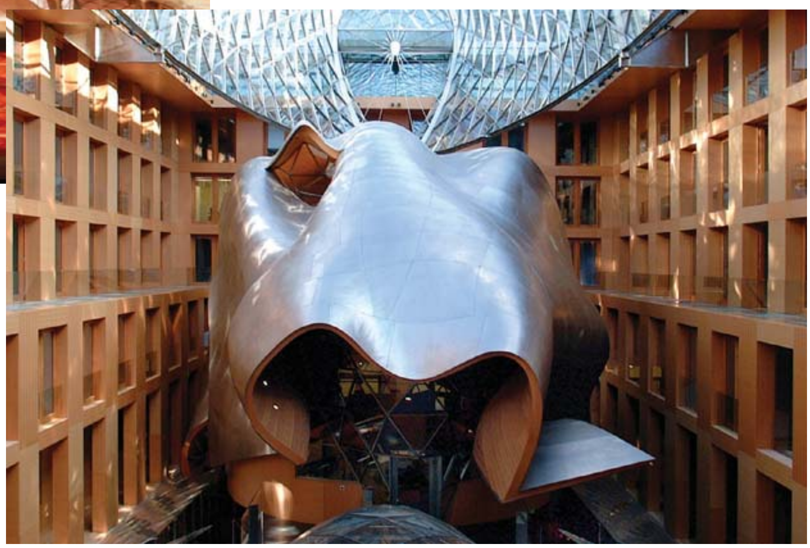


Cortesía de Frank O. Gehry



Cortesía de Frank O. Gehry

Cortesía de Frank O. Gehry



thomasmayerarchive.com

de la curva, su derivada y su curvatura. A continuación las curvas son enlazadas entre sí por una superficie paramétrica, y de nuevo el arquitecto puede hacerlo en numerosas formas posibles con la guía de imágenes de las características geométricas de la superficie.

El modelo CATIA se usa entonces para producir otro modelo físico, que, a su vez, sugiere modificaciones y lleva a más modelos de computadora y físicos.

El programa CATIA fue inventado en Francia por Dassault Systèmes, originalmente para diseñar aviones, y con posterioridad se empleó en la industria automotriz. Frank Gehry, debido a sus complejas formas esculturales, es el primero en usarlo en arquitectura; le ayuda a contestar su pregunta "¿Qué tan ondulado puede uno estar y todavía hacer un edificio?"

Cálculo de una variable

Conceptos y contextos | 4e

James Stewart
McMaster University
y
University of Toronto

Traducción:
Jorge Humberto Romo M.
Traductor Profesional

Revisión técnica:
Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional Interdisciplinaria
en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning™

Cálculo de una variable: Conceptos y contextos, Cuarta edición
James Stewart

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Pedro Turbay Garrido

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora editorial:
María Rosas López

Editor de desarrollo:
Sergio R. Cervantes González

Editor de producción:
Timoteo Eliosa García

Ilustrador:
Brian Betsill

Diseño de portada:
Irene Morris

Imagen de portada y página iv:
thomasmayerarchive.com

Composición tipográfica:
Servicios Editoriales 6Ns, S.A. de C.V.

Traducido del libro:
Single Variable Calculus:
Concepts and Contexts, Fourth Edition.
Publicado en inglés por
Cengage Learning/Brooks/Cole
© 2010
ISBN: 0-495-55972-5

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James
Cálculo de una variable:
Conceptos y contextos
Cuarta edición
ISBN-13: 978-607-481-398-2
ISBN-10: 607-481-398-1

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

A Li Li

Contenido

Prefacio xiii

Al estudiante xxiii

Exámenes de diagnóstico xxiv

thomasmayerarchive.com

Una vista previa al cálculo 3

1 Funciones y modelos 11

1.1 Cuatro formas de representar una función 12

1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales 25

1.3 Nuevas funciones a partir de funciones anteriores 37

1.4 Calculadoras graficadoras y computadoras 46

1.5 Funciones exponenciales 52

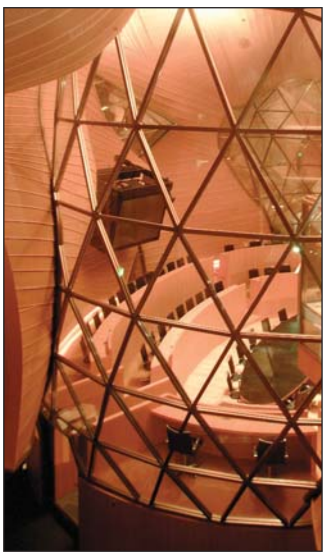
1.6 Funciones inversas y logaritmos 61

1.7 Curvas paramétricas 71

Proyecto de laboratorio ▪ Correr círculos alrededor de círculos 79

Repaso 80

Principios de resolución de problemas 83



thomasmayerarchive.com

2 Límites y derivadas 89

2.1 Los problemas de la tangente y la velocidad 90

2.2 El límite de una función 95

2.3 Cálculo de límites usando las leyes del límite 104

2.4 Continuidad 113

2.5 Límites que involucran el infinito 123

2.6 Derivadas y rapidez de cambio 135

Proyecto de investigación histórica ▪ Primeros métodos para hallar tangentes 145

2.7 La derivada como una función 146

2.8 ¿Qué dice f' acerca de f? 158

Repaso 164

Principios de resolución de problemas 169


thomasmayerarchive.com

3 Reglas de derivación 173

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales 174

Proyecto de aplicación ▪ Construcción de una “montaña rusa” mejor 183

3.2 Las reglas del producto y el cociente 183

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas 190

3.4 La Regla de la cadena 197

Proyecto de laboratorio ▪ Curvas de Bézier 208

Proyecto de aplicación ▪ ¿Dónde debe iniciar el descenso un piloto? 209

3.5 Derivación implícita 209

3.6 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas 216

3.7 Derivadas de funciones logarítmicas 221

Proyecto propuesto ▪ Funciones hiperbólicas 227

3.8 Rapidez de cambio en ciencias naturales y sociales 228

3.9 Aproximaciones lineales y diferenciales 240

Proyecto de laboratorio ▪ Polinomios de Taylor 247

Repaso 248

Principios de resolución de problemas 251


thomasmayerarchive.com

4 Aplicaciones de la derivada 255

4.1 Razones de cambio relacionadas 256

4.2 Valores máximos y mínimos 262

Proyecto de laboratorio ▪ El cálculo de los arcos iris 270

4.3 Derivadas y las formas de curvas 271

4.4 Graficando con cálculo *y* calculadoras 282

4.5 Formas indeterminadas y Regla de l’Hospital 290

Proyecto de investigación histórica ▪ Los orígenes de la Regla de l’Hospital 299

4.6 Problemas de optimización 299

Proyecto de aplicación ▪ La forma de una lata 311

4.7 Método de Newton 312

4.8 Antiderivadas 317

Repaso 323

Principios de resolución de problemas 327

thomasmayerarchive.com

5 Integrales 331

5.1 Áreas y distancias 332

5.2 La integral definida 343

5.3 Evaluación de integrales definidas 356

Proyecto de descubrimiento ▪ Funciones de área 366

5.4 El Teorema fundamental del cálculo 367

Proyecto de investigación histórica ▪ Newton, Leibniz y la invención del cálculo 374

5.5 La Regla de sustitución 375

5.6 Integración por partes 383

5.7 Técnicas adicionales de integración 389

5.8 Integración usando tablas y sistemas computarizados de álgebra 394

Proyecto de descubrimiento ▪ Patrones en integrales 400

5.9 Integración aproximada 401

5.10 Integrales impropias 413

Repaso 423

Principios de resolución de problemas 428

thomasmayerarchive.com

6 Aplicaciones de integración 431

6.1 Más acerca de áreas 432

6.2 Volúmenes 438

Proyecto de descubrimiento ▪ Giro en un plano inclinado 448

6.3 Volúmenes por capas cilíndricas 449

6.4 Longitud de arco 455

Proyecto de descubrimiento ▪ Concurso de longitud de arco 460

6.5 Valor promedio de una función 460

Proyecto de aplicación ▪ Dónde sentarse en el cine 464

6.6 Aplicaciones a la física e ingeniería 464

Proyecto de descubrimiento ▪ Tazas de café complementarias 475

6.7 Aplicaciones a la economía y la biología 476

6.8 Probabilidad 480

Repaso 487

Principios de resolución de problemas 491


Courtesy of Frank O. Gehry

7 Ecuaciones diferenciales 493

7.1 Modelado con ecuaciones diferenciales 494
7.2 Campos direccionales y el método de Euler 499
7.3 Ecuaciones separables 508
Proyecto de aplicación ▪ ¿Qué tan rápido se descarga un tanque? 517
Proyecto de aplicación ▪ ¿Qué es más rápido, subir o bajar? 518
7.4 Crecimiento y desintegración exponenciales 519
Proyecto de aplicación ▪ Cálculo y beisbol 529
7.5 La ecuación logística 530
7.6 Sistemas depredador-presa 540
Repaso 547
Principios de resolución de problemas 551


thomasmayerarchive.com

8 Sucesiones y series infinitas 553

8.1 Sucesiones 554
Proyecto de laboratorio ▪ Sucesiones logísticas 564
8.2 Series 565
8.3 Pruebas de la integral y de comparación; estimación de sumas 575
8.4 Otras pruebas de convergencia 585
8.5 Serie de potencias 592
8.6 Representaciones de funciones como series de potencias 598
8.7 Series de Taylor y de Maclaurin 604
Proyecto de laboratorio ▪ Un límite elusivo 618
Proyecto de investigación histórica ▪ Cómo descubrió Newton la serie del binomio 618
8.8 Aplicaciones de los polinomios de Taylor 619
Proyecto de aplicación ▪ Radiación de las estrellas 627
Repaso 628
Principios de resolución de problemas 631

Apéndices A1

A Intervalos, desigualdades y valores absolutos A2
B Geometría de coordenadas A7
C Trigonometría A17
D Definiciones precisas de límites A26
E Algunas demostraciones A35
F Notación sigma A37
G Integración de funciones racionales por fracciones parciales A43
H Coordenadas polares A51
I Números complejos A67
J Respuestas a ejercicios de número impar A76

Índice analítico A115

Prefacio

Cuando la primera edición de este libro apareció hace doce años, tenía lugar un acalorado debate por la reforma del cálculo. Problemas como son el uso de tecnología, la importancia del rigor y el papel de los descubrimientos contra el de la práctica estaban causando profundas divisiones en varios departamentos de matemáticas. Desde entonces, la retórica se ha calmado un poco a medida que reformadores y tradicionalistas se han dado cuenta que tienen una meta en común: hacer posible que el estudiante entienda y aprecie el cálculo.

Las primeras tres ediciones estaban destinadas a ser una síntesis de métodos de reforma y tradicionales para la enseñanza del cálculo. En esta cuarta edición continúo en esa trayectoria al destacar la comprensión conceptual por medio de métodos visuales, verbales, numéricos y algebraicos. Tengo la intención de llevar al estudiante el poder práctico del cálculo y la belleza intrínseca del tema.

El aspecto principal en que este libro difiere de mis libros de texto más tradicionales de cálculo es que es más moderno. Por ejemplo, no hay un capítulo completo sobre técnicas de integración; no demuestro tantos teoremas (vea la exposición sobre el rigor en la página xv); y el material sobre funciones trascendentales y sobre ecuaciones paramétricas está entrelazado en todo el libro, en lugar de tratarlo en capítulos separados. Los maestros que prefieren una cobertura más completa de temas tradicionales de cálculo deben ver mis libros *Calculus*, Sexta Edición, y *Calculus: Early Transcendentals*, Sexta Edición.

¿Qué hay de nuevo en la cuarta edición?

Los cambios son el resultado de hablar con mis colegas y estudiantes en la Universidad de Toronto y leer artículos científicos, así como por sugerencias de usuarios y revisores. A continuación veamos algunas de las numerosas mejoras que he incorporado en esta edición:

- Al principio del libro hay cuatro pruebas de diagnóstico, en Álgebra Básica, Geometría Analítica, Funciones y Trigonometría. Se dan respuestas y los estudiantes que no salgan bien son remitidos a donde deben buscar ayuda (Apéndices, secciones de repaso del Capítulo 1, así como a la página web stewartcalculus.com).
- La mayor parte de los ejemplos ahora tienen títulos.
- Parte del material se ha reescrito para obtener más claridad o mejor motivación. Vea, por ejemplo, la introducción a valores máximo y mínimo en las páginas 262-63 y la introducción a series en la página 565.
- Se han agregado nuevos ejemplos y se han ampliado las soluciones a algunos de los ejemplos existentes. Por ejemplo, he agregado detalles a la solución del Ejemplo 2.3.10 porque, cuando impartí clase de la Sección 2.3 el año pasado, observé que los estudiantes necesitan más guía cuando escriben desigualdades para el Teorema de Restricción.
- Se han vuelto a dibujar diversos bosquejos.
- Los datos en ejemplos y ejercicios se han actualizado para que sean más oportunos.
- En respuesta a peticiones de varios usuarios, el material que motiva la derivada es más breve: las anteriores secciones 2.6 y 2.7 se han combinado en una sola sección llamada ahora Derivadas y Magnitudes de Rapidez de Cambio.
- La sección sobre Magnitudes de Rapidez de Cambio en Ciencias Naturales y Sociales se ha pasado al Capítulo 3 (Sección 3.8) para incorporar más reglas de derivación.

- El material sobre funciones trigonométricas inversas ha sido consolidado en una sola sección diseñada para ese fin específico (3.6).
- Las secciones 4.6 y 4.7 anteriores se han unido en una sola sección, con un tratamiento más breve de problemas de optimización en finanzas y economía.
- Ahora hay toda una sección sobre volúmenes de capas cilíndricas (6.3).
- Las Secciones 8.7 y 8.8 se han fusionado en una sola sección. Ya antes había presentado la serie del binomio en su propia sección para destacar su importancia, pero me enteré que algunos maestros omitían esa sección y decidí incorporar la serie del binomio en la 8.7.
- Más del 25% de los ejercicios de cada capítulo son nuevos. Veamos unos pocos de mis favoritos: 2.5.46, 2.5.49, 2.8.6–7, 3.3.50, 3.5.45–48, 4.3.49–50, 5.2.47–49 y 8.2.35.
- También hay algunos buenos ejemplos nuevos en las secciones del Enfoque en la Resolución de Problemas. Vea, por ejemplo, el Problema 5 en la página 252, los Problemas 17 y 18 en la página 429, y el Problema 15 en la página 492 así como el Problema 13 en la página 632.
- El nuevo proyecto que está en la página 475, Tazas de Café Complementarias, proviene de un artículo de Thomas Banchoff en el que se preguntaba cuál de las dos tazas de café, cuyos perfiles convexos y cóncavos se ajustan perfectamente, contendría más café.

Características

Ejercicios conceptuales

La forma más importante para impulsar el entendimiento es por medio de problemas que asignamos. Con ese fin he ideado varios tipos de problemas. Algunos conjuntos de ejercicios empiezan con peticiones para que el estudiante explique los significados de los conceptos básicos de la sección. (Vea, por ejemplo, la primera pareja de ejercicios de las Secciones 2.2, 2.4, 2.5, 5.3 y 8.2. Con frecuencia los uso como base para explicaciones en clase. Del mismo modo, las secciones de repaso empiezan con una Revisión de Conceptos y un Cuestionario de Verdadero-Falso. Otros ejercicios prueban la comprensión de conceptos por medio de gráficas o tablas (vea Ejercicios 1.7.22–25, 2.6.17, 2.7.33–34, 3.8.5–6, 5.2.47–49, 7.1.11–13 y 8.7.2).

Otro tipo de ejercicios usa descripción verbal para probar la comprensión de conceptos (vea Ejercicios 2.4.10, 2.7.54, 2.8.9, 2.8.13–14 y 5.10.55). Valoro particularmente problemas que combinan y comparan métodos gráficos, numéricos y algebraicos (vea Ejercicios 2.5.38, 2.5.43–44, 3.8.25 y 7.5.2).

Dificultad gradual en conjuntos de ejercicios

Cada conjunto de ejercicios está graduado cuidadosamente, avanzando de ejercicios conceptuales básicos y problemas de desarrollo de experiencia hasta problemas más difíciles que comprenden aplicaciones y demostraciones.

Datos del mundo real

Mis asistentes y yo pasamos mucho tiempo buscando en bibliotecas, visitando compañías y oficinas de gobierno, buscando en la Internet datos interesantes y reales para introducir, motivar e ilustrar los conceptos de cálculo. En consecuencia, muchos de los ejemplos y ejercicios tratan de funciones definidas por esos datos numéricos o gráficas. Vea, por ejemplo, la Figura 1 de la Sección 1.1 (sismógrafos del terremoto de Northridge), el Ejercicio 5.1.14 (velocidad del transbordador espacial *Endeavour*), la Figura 5 en la Sección 5.3 (consumo de energía eléctrica en San Francisco), y el Ejemplo 5 de la Sección 5.9 (datos de tráfico en vínculos de Internet).

Proyectos

Una manera de involucrar estudiantes, para que aprendan de manera activa, es hacerlos trabajar en grupos en proyectos extendidos que dan una sensación de logro importante cuando se completan. Los *Proyectos de Aplicación* contienen aplicaciones diseñadas para despertar la imaginación del estudiante. El proyecto después de la Sección 3.1 pide a estudiantes que diseñen el primer ascenso y descenso en una montaña rusa. Los *Proyectos de Laboratorio* involucran tecnología; el proyecto que sigue a la Sección 3.4 muestra cómo usar curvas de Bézier para diseñar formas que representan letras para una impresora láser. Los *Proyectos de Investigación Histórica* piden a estudiantes comparar métodos actuales con los de los fundadores del cálculo, el método de Fermat para hallar tangentes, por ejemplo. Se dan bibliografías sugeridas. Los *Proyectos de Descubrimiento* anticipan resultados a estudiar después o tratan temas opcionales (funciones hiperbólicas) o estimulan el descubrimiento por medio del reconocimiento de modelos (vea el proyecto que sigue a la Sección 5.8). Se pueden hallar más proyectos en la *Guía del Maestro* (vea, por ejemplo, El Ejercicio de Grupo 5.1: Posición de Muestras) y también en los suplementos *CalcLabs*.

Rigor

Incluyo menos demostraciones que en mis libros más tradicionales, pero pienso que todavía merece la pena explicar a estudiantes la idea de una demostración y hacer una clara distinción entre una demostración y un argumento plausible. Lo importante, creo, es demostrar la forma de deducir algo que parece menos obvio a partir de algo que parece más obvio. Un buen ejemplo es el uso del Teorema del Valor Medio para demostrar el Teorema de Evaluación (Parte 2 del Teorema Fundamental de Cálculo). He seleccionado, por otra parte, no demostrar las pruebas de convergencia pero sí discutir de manera intuitiva que son verdaderas.

Resolución de problemas

Los estudiantes suelen tener dificultades con problemas para los cuales no hay un solo procedimiento bien definido para obtener la respuesta. Pienso que nadie ha mejorado gran cosa en la estrategia de cuatro etapas para resolución de problemas creada por George Polya y, de acuerdo con esto, al final del Capítulo 1 he incluido una versión de los principios de este autor que se aplican en todo el libro en forma explícita e implícita. (El logo RP destaca algunos de los casos explícitos.) Después de los otros capítulos he puesto secciones llamadas *Enfoque en la Resolución de Problemas*, que presenta ejemplos de cómo abordar problemas difíciles de cálculo. Al seleccionar los diversos problemas para estas secciones tengo en mente el siguiente consejo de David Hilbert: “Un problema matemático debería ser difícil para atraernos pero no inaccesible, para no frustrar nuestros esfuerzos.” Cuando pongo estos problemas difíciles en tareas y exámenes los califico en forma diferente. Aquí compenso a un estudiante por sus ideas hacia una resolución y porque reconoce cuáles principios en la resolución de problemas son relevantes.

Tecnología

La disponibilidad de tecnología no aminora la importancia de entender claramente los conceptos que sirven de base a las imágenes en pantalla, sino que la aumenta. Cuando se usan en forma apropiada, las calculadoras de gráficas y computadoras son poderosas herramientas para descubrir y entender esos conceptos. Supongo que el estudiante tiene acceso ya sea a una calculadora de gráficas o a un sistema computarizado de álgebra. El icono indica un ejercicio que definitivamente requiere el uso de esa tecnología, pero no quiere decir que una calculadora de gráficas no se pueda usar en los otros ejercicios también. El símbolo CAS está reservado para problemas en los que se requieren todos los recursos de un sistema computarizado de álgebra (por ejemplo Derive, Maple, Mathematica o la TI-89/92). No olvide que la tecnología no hace obsoletos al lápiz y papel porque cálculos y dibujos hechos manualmente se prefieren a veces a la tecnología para ilustrar y reforzar algunos conceptos. Maestros y estudiantes necesitan desarrollar su capacidad de determinar dónde es apropiado usar una máquina.

Herramientas para enriquecer™ el Cálculo

El TEC es un acompañante del libro y tiene la finalidad de enriquecer y complementar su contenido. (Ahora está accesible de la Internet en **www.stewartcalculus.com.**) Ideado por Harvey Keynes, Dan Clegg, Hubert Hohn y por mí, el TEC utiliza el método de descubrir y explorar. En algunas secciones del libro donde la tecnología es particularmente apropiada, iconos situados al margen dirigen a estudiantes a módulos TEC que dan un entorno de laboratorio, donde pueden explorar el tema en diferentes formas y a niveles diferentes. Los visuales son animaciones de figuras del texto; los módulos son actividades más elaboradas e incluyen ejercicios. Los maestros pueden escoger intervenir en varios niveles diferentes, que van desde simplemente estimular a estudiantes a usar los Visuales y Módulos para exploración independiente, hasta asignar ejercicios específicos de los incluidos en cada módulo, o para crear ejercicios adicionales, laboratorios y proyectos que hacen uso de los Visuales y Módulos.

Los TEC también incluyen *Sugerencias de Tareas* para ejercicios representativos (por lo general de número impar) en todas las secciones del texto, indicadas al imprimirse en rojo el número del ejercicio. Estas sugerencias por lo general se presentan en la forma de preguntas y tratan de imitar a un asistente de enseñanza que funciona como maestro silencioso. Están hechos para no revelar nada de la solución real de lo que como mínimo sería necesario para lograr un mayor avance.

WebAssign mejorado

La tecnología está teniendo impacto en la forma en que las tareas se asignan a estudiantes, en particular en grupos grandes. El uso de tareas en línea está aumentando y su atractivo depende de la facilidad de uso, precisión en calificaciones y en su confiabilidad. Con la cuarta edición hemos estado trabajando con la comunidad de cálculo y la WebAssign para crear un sistema de tareas en línea. Muchos de los ejercicios de cada sección se pueden asignar como tarea en línea, incluyendo formatos de respuesta libre, opción múltiple y de diversas partes. El sistema también incluye Ejemplos Activos, en los que los estudiantes son guiados en materiales didácticos paso a paso en los ejemplos del texto, con vínculos al libro de texto y a soluciones de video.

Sitio web: www.stewartcalculus.com

Este sitio web incluye lo siguiente.

- Repaso de álgebra
- Mentiras que mi Calculadora y Computadora me Dijeron
- Historia de las matemáticas, con vínculos a otros sitios web históricos mejores
- Temas adicionales (completos con conjuntos de ejercicios):
  Integrales trigonométricas, sustitución trigonométrica, estrategia para integración, estrategia para probar series, series de Fourier, fórmulas para el término del residuo en series de Taylor, ecuaciones diferenciales lineales, ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, ecuaciones lineales no homogéneas, aplicaciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden, uso de series para resolver ecuaciones diferenciales, rotación de ejes y (sólo para maestros) funciones hiperbólicas
- Vínculos, para cada capítulo, a recursos Web externos
- Problemas archivados (ejercicios de práctica que aparecieron en ediciones previas, junto con sus soluciones)
- Problemas Difíciles (algunos de las secciones de Enfoque en la Resolución de Problemas de ediciones anteriores)

Contenido

Exámenes de diagnóstico

El libro empieza con cuatro exámenes de diagnóstico, en álgebra básica, geometría analítica, funciones y trigonometría.

Una vista previa de cálculo

Éste es un repaso del tema e incluye una lista de preguntas para motivar el estudio de cálculo.

1 ■ Funciones y modelos

Desde el principio, se destacan representaciones múltiples de funciones: verbales, numéricas, visuales y algebraicas. Una exposición de modelos matemáticos lleva a un repaso de las funciones estándar, incluyendo funciones exponenciales y logarítmicas, desde estos cuatro puntos de vista. Se introducen curvas paramétricas en el primer capítulo, en parte para que se puedan dibujar curvas con facilidad, con tecnología, siempre que se necesiten en todo el texto. Esta primera colocación hace posible que en la Sección 3.4 se traten tangentes a curvas paramétricas y que la graficación de esas curvas se trate en la Sección 4.4.

2 ■ Límites y derivadas

El material sobre límites está motivado por una exposición previa de problemas de la tangente y velocidad. Se tratan límites desde puntos de vista descriptivos, gráficos, numéricos y algebraicos. (La definición precisa de un límite se encuentra en el Apéndice D para quienes deseen estudiarla.) Es importante no pasar de prisa por las Secciones 2.6–2.8, que tratan con derivadas (en especial con funciones definidas gráfica y numéricamente) antes de estudiar reglas de derivación en el Capítulo 3. Aquí los ejemplos y ejercicios exploran los significados de derivadas en varios contextos. La Sección 2.8 presagia, en forma intuitiva y sin fórmulas de derivación, el material sobre formas de curvas que se estudia con mayor profundidad en el Capítulo 4.

3 ■ Reglas de derivación

Todas las funciones básicas están derivadas aquí. Cuando se calculan derivadas en situaciones aplicadas, se pide a estudiantes que expliquen sus significados. Temas opcionales (funciones hiperbólicas, una primera introducción a polinomios de Taylor) se exploran en Proyectos de Descubrimiento y de Laboratorio. (En el sitio web los maestros pueden ver un tratamiento completo de funciones hiperbólicas.)

4 ■ Aplicaciones de la derivación

Los datos básicos respecto a valores extremos y formas de curvas se derivan usando el Teorema del Valor Medio como punto inicial. Graficar con tecnología destaca la interacción entre cálculo y calculadoras y el análisis de familias de curvas. Se dan algunos problemas de optimización sustancial, incluyendo una explicación de por qué es necesario levantar la cabeza 42° para ver la parte superior de un arco iris.

5 ■ Integrales

El problema del área y el problema de la distancia sirven para motivar la integral definida. He decidido hacer más fácil de entender la definición de una integral mediante el uso de subintervalos de igual ancho. Se hace hincapié en explicar los significados de las integrales en varios contextos y en calcular sus valores a partir de gráficas y tablas. No hay un capítulo separado sobre técnicas de integración, pero la sustitución y partes se tratan aquí y además otros métodos se estudian brevemente. A fracciones parciales se les da un tratamiento completo en el Apéndice G. El uso de sistemas computarizados de álgebra se explica en la Sección 5.8.

6 ■ Aplicaciones de integración

Se destacan métodos generales, no fórmulas. La meta es para que estudiantes puedan dividir una cantidad en partes pequeñas, calcular con sumas de Riemann y reconocer el límite como una integral. Hay más aplicaciones aquí que pueden de una manera realista tratarse en un curso dado. Los maestros deben seleccionar aplicaciones adecuadas para sus estudiantes y para las cuales tengan entusiasmo. Algunos maestros gustan de tratar coordenadas polares (Apéndice H) aquí; otros prefieren diferir este tema a cuando sea necesario en un tercer semestre (con la Sección 9.7 o poco antes de la Sección 12.4).

7 ■ Ecuaciones diferenciales

El modelado es el tema que unifica este tratamiento de introducción de ecuaciones diferenciales. Los campos de dirección y el método de Euler se estudian antes que ecuaciones separables se resuelvan explícitamente, de modo que los métodos cualitativo, numérico y analítico reciben igual consideración. Estos métodos se aplican a modelos exponenciales, logísticos y de otro tipo para crecimiento poblacional. Los modelos depredador-presa se usan para ilustrar sistemas de ecuaciones diferenciales.

8 ■ Sucesiones y series infinitas

Las demostraciones para la convergencia de series se consideran brevemente, con justificaciones intuitivas más que formales. Las estimaciones numéricas de sumas de series están basadas en qué prueba se usó para demostrar convergencia. El énfasis está en series y polinomios de Taylor y sus aplicaciones a la física. Las estimaciones de error incluyen las de calculadoras de gráficas.

Material auxiliar

Cálculo de una variable: Conceptos y contextos, Cuarta Edición, está apoyada por un conjunto completo de material auxiliar desarrollado bajo mi dirección. Cada parte se ha diseñado para aumentar la comprensión del estudiante y para facilitar una instrucción creativa. La tabla de las páginas xxi y xxii cita materiales auxiliares disponibles para maestros y estudiantes.

Reconocimientos

Agradezco a los siguientes revisores por compartir sus conocimientos y buen juicio conmigo. De todos he aprendido algo.

Revisores de la cuarta edición

Jennifer Bailey, *Colorado School of Mines*
Lewis Blake, *Duke University*
James Cook, *North Carolina State University*
Costel Ionita, *Dixie State College*
Lawrence Levine, *Stevens Institute of Technology*
Scott Mortensen, *Dixie State College*
Drew Pasteur, *North Carolina State University*
Jeffrey Powell, *Samford University*
Barbara Tozzi, *Brookdale Community College*
Kathryn Turner, *Utah State University*
Cathy Zucco-Tevelof, *Arcadia University*

Revisores de la edición anterior

Irfan Altas, *Charles Sturt University*
William Ardis, *Collin County Community College*
Barbara Bath, *Colorado School of Mines*
Neil Berger, *University of Illinois at Chicago*
Jean H. Bevis, *Georgia State University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Paul Wayne Britt, *Louisiana State University*
Judith Broadwin, *Jericho High School* (retired)
Charles Bu, *Wellesley University*
Meghan Anne Burke, *Kennesaw State University*
Robert Burton, *Oregon State University*
Roxanne M. Byrne, *University of Colorado at Denver*
Maria E. Calzada, *Loyola University–New Orleans*
Larry Cannon, *Utah State University*
Deborah Troutman Cantrell, *Chattanooga State Technical Community College*
Bem Cayco, *San Jose State University*
John Chadam, *University of Pittsburgh*
Robert A. Chaffer, *Central Michigan University*
Dan Clegg, *Palomar College*
Camille P. Cochrane, *Shelton State Community College*
James Daly, *University of Colorado*
Richard Davis, *Edmonds Community College*
Susan Dean, *DeAnza College*
Richard DiDio, *LaSalle University*
Robert Dieffenbach, *Miami University–Middletown*
Fred Dodd, *University of South Alabama*
Helmut Doll, *Bloomsburg University*
William Dunham, *Muhlenberg College*
David A. Edwards, *The University of Georgia*
John Ellison, *Grove City College*
Joseph R. Fiedler, *California State University–Bakersfield*
Barbara R. Fink, *DeAnza College*
James P. Fink, *Gettysburg College*
Joe W. Fisher, *University of Cincinnati*
Robert Fontenot, *Whitman College*
Richard L. Ford, *California State University Chico*
Laurette Foster, *Prairie View A & M University*
Ronald C. Freiwald, *Washington University in St. Louis*
Frederick Gass, *Miami University*
Gregory Goodhart, *Columbus State Community College*
John Gosselin, *University of Georgia*
Daniel Grayson, *University of Illinois at Urbana–Champaign*
Raymond Greenwell, *Hofstra University*
Gerrald Gustave Greivel, *Colorado School of Mines*
John R. Griggs, *North Carolina State University*
Barbara Bell Grover, *Salt Lake Community College*
Murli Gupta, *The George Washington University*
John William Hagood, *Northern Arizona University*
Kathy Hann, *California State University at Hayward*
Richard Hitt, *University of South Alabama*
Judy Holdener, *United States Air Force Academy*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
Barry D. Hughes, *University of Melbourne*
Mike Hurley, *Case Western Reserve University*
Gary Steven Itzkowitz, *Rowan University*
Helmer Junghans, *Montgomery College*
Victor Kaftal, *University of Cincinnati*
Steve Kahn, *Anne Arundel Community College*
Mohammad A. Kazemi, *University of North Carolina, Charlotte*
Harvey Keynes, *University of Minnesota*
Kandace Alyson Kling, *Portland Community College*
Ronald Knill, *Tulane University*

Stephen Kokoska, *Bloomsburg University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Doug Kuhlmann, *Phillips Academy*
David E. Kullman, *Miami University*
Carrie L. Kyser, *Clackamas Community College*
Prem K. Kythe, *University of New Orleans*
James Lang, *Valencia Community College–East Campus*
Carl Leinbach, *Gettysburg College*
William L. Lepowsky, *Laney College*
Kathryn Lesh, *University of Toledo*
Estela Llinas, *University of Pittsburgh at Greensburg*
Beth Turner Long, *Pellissippi State Technical Community College*
Miroslav Lovrić, *McMaster University*
Lou Ann Mahaney, *Tarrant County Junior College–Northeast*
John R. Martin, *Tarrant County Junior College*
Andre Mathurin, *Bellarmine College Prep*
R. J. McKellar, *University of New Brunswick*
Jim McKinney, *California State Polytechnic University–Pomona*
Richard Eugene Mercer, *Wright State University*
David Minda, *University of Cincinnati*
Rennie Mirollo, *Boston College*
Laura J. Moore-Mueller, *Green River Community College*
Scott L. Mortensen, *Dixie State College*
Brian Mortimer, *Carleton University*
Bill Moss, *Clemson University*
Tejinder Singh Neelon, *California State University San Marcos*
Phil Novinger, *Florida State University*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Stephen Ott, *Lexington Community College*
Grace Orzech, *Queen's University*
Jeanette R. Palmiter, *Portland State University*
Bill Paschke, *University of Kansas*
David Patocka, *Tulsa Community College–Southeast Campus*
Paul Patten, *North Georgia College*
Leslie Peek, *Mercer University*
Mike Pepe, *Seattle Central Community College*
Dan Pritikin, *Miami University*
Fred Prydz, *Shoreline Community College*
Denise Taunton Reid, *Valdosta State University*
James Reynolds, *Clarion University*
Hernan Rivera, *Texas Lutheran University*
Richard Rochberg, *Washington University*
Gil Rodriguez, *Los Medanos College*
David C. Royster, *University of North Carolina–Charlotte*
Daniel Russow, *Arizona Western College*
Dusty Edward Sabo, *Southern Oregon University*
Daniel S. Sage, *Louisiana State University*
N. Paul Schembari, *East Stroudsburg University*
Dr. John Schmeelk, *Virginia Commonwealth University*
Bettina Schmidt, *Auburn University at Montgomery*
Bernd S.W. Schroeder, *Louisiana Tech University*
Jeffrey Scott Scroggs, *North Carolina State University*
James F. Selgrade, *North Carolina State University*
Brad Shelton, *University of Oregon*
Don Small, *United States Military Academy–West Point*
Linda E. Sundbye, *The Metropolitan State College of Denver*
Richard B. Thompson, *The University of Arizona*
William K. Tomhave, *Concordia College*
Lorenzo Traldi, *Lafayette College*
Alan Tucker, *State University of New York at Stony Brook*
Tom Tucker, *Colgate University*
George Van Zwalenberg, *Calvin College*
Jianzhong Wang, *Sam Houston State University*
JingLing Wang, *Lansing Community College*
Dennis Watson, *Clark College*
Paul R. Wenston, *The University of Georgia*
Ruth Williams, *University of California–San Diego*
Clifton Wingard, *Delta State University*
Michael B. Ward, *Western Oregon University*
Stanley Wayment, *Southwest Texas State University*
Barak Weiss, *Ben Gurion University–Be'er Sheva, Israel*
Teri E. Woodington, *Colorado School of Mines*
James Wright, *Keuka College*

Además, me gustaría dar las gracias a Ari Brodsky, David Cusick, Alfonso Gracia-Saz, Emile LeBlanc, Joe May, Romaric Pujol, Norton Starr, Lou Talman y Gail Wolkowicz por su consejo y sugerencias; Al Shenk y Dennis Zill por permitirme usar ejercicios de sus textos de cálculo; COMAP por su permiso para usar material de proyectos; Alfonso Gracia-Saz, B. Hovinen, Y. Kim, Anthony Lam, Romaric Pujol, Felix Recio y Paul Sally por sus ideas para ejercicios; Dan Drucker por el proyecto de rodillo de hongo; y a Tom Farmer,

Fred Gass, John Ramsay, Larry Riddle, V. K. Srinivasan y Philip Straffin por sus ideas para este proyecto. Estoy agradecido con Dan Clegg, Jeff Cole y Tim Flaherty por elaborar el manuscrito de respuestas y sugerir formas para mejorar los ejercicios.

Asimismo, agradezco a quienes han colaborado en ediciones anteriores: Ed Barbeau, George Bergman, David Bleecker, Fred Brauer, Andy Bulman-Fleming, Tom DiCiccio, Martin Erickson, Garret Etgen, Chris Fisher, Stuart Goldenberg, Arnold Good, John Hagood, Gene Hecht, Victor Kaftal, Harvey Keynes, E. L. Koh, Zdislav Kovarik, Kevin Kreider, Jamie Lawson, David Leep, Gerald Leibowitz, Larry Peterson, Lothar Redlin, Peter Rosenthal, Carl Riehm, Ira Rosenholtz, Doug Shaw, Dan Silver, Lowell Smylie, Larry Wallen, Saleem Watson y Alan Weinstein.

También doy gracias a Stephanie Kuhns, Rebekah Million, Brian Betsill y Kathi Townes de figuras TECH por sus servicios de producción; Marv Riedesel y Mary Johnson por sus cuidadosas pruebas de las páginas; Thomas Mayer por la imagen de portada; y al siguiente personal de Brooks/Cole: Cheryll Linthicum, gerente editorial del proyecto de producción; Jennifer Jones, Angela Kim y Mary Anne Payumo, equipo de marketing; Peter Galuardi, editor de medios; Jay Campbell, editor de desarrollo en jefe; Jeannine Lawless, editora asociada; Elizabeth Neustaetter, asistente editorial; Bob Kauser, editor de permisos; Becky Cross, compradora de impresos/medios; Vernon Boes, director artístico; Rob Hugel, director de creaciones; e Irene Morris, diseñadora de portada. Todos ellos han realizado un trabajo excelente.

He tenido la suerte de haber trabajado con algunos de los mejores editores de matemáticas que existen en el medio desde hace más de tres décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst, Gary Ostedt, Bob Pirtle y ahora Richard Stratton. Muchas gracias a todos ellos.

JAMES STEWART

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para direcciones de correo electrónico:

Cengage Learning México y Centroamérica	clientes.mexicoca@cengage.com
Cengage Learning Caribe	clientes.caribe@cengage.com
Cengage Learning Cono Sur	clientes.conosur@cengage.com
Colombia	clientes.pactoandino@cengage.com

Las direcciones de los sitios web referidas a lo largo del texto no son administradas por Cengage Learning Latinoamérica, por lo que ésta no es responsable de los cambios para mantenerse al tanto de cualquier actualización.

Materiales auxiliares para maestros

PowerLecture CD-ROM with JoinIn and ExamView
ISBN 0-495-56049-9

Contiene todas las figuras del texto en formatos jpeg y PowerPoint, ecuaciones clave y tablas del texto, clases de PowerPoint preconstruidas completas y una versión electrónica de la Guía del Maestro. También contiene preguntas del sistema de respuestas personales JoinIn sobre TurningPoint y generación de pruebas de algoritmos ExamView. Vea a continuación descripciones completas.

TEC Tools for Enriching™ Calculus
de James Stewart, Harvey Keynes, Dan Clegg, y Hu Hohn

TEC *contiene un ambiente de laboratorio en el que el estudiante puede explorar temas seleccionados. TEC también incluye sugerencias de tareas para ejercicios representativos. En línea puede tener acceso a* www.stewartcalculus.com.

Instructor's Guide
de Douglas Shaw y James Stewart
ISBN 0-495-56047-2

Cada sección del texto principal se explica desde varios puntos de vista y contiene tiempo sugerido de distribución, puntos a recalcar, temas de discusión de texto, materiales esenciales para clase, sugerencias de taller/exposición, ejercicios de trabajo en grupo en una forma apropiada para folleto, y problemas sugeridos de tarea. Existe una versión electrónica en el CD-ROM PowerLecture.

Instructor's Guide for AP® Calculus
de Douglas Shaw
ISBN 0-495-56059-6

Tomando la perspectiva de optimizar la preparación para el examen AP, cada sección del texto principal se estudia desde varios puntos de vista y contiene tiempo sugerido de distribución, puntos a recalcar, cuestionarios diarios, materiales esenciales para clase, sugerencias de taller/exposición, ejercicios de trabajo en grupo en una forma apropiada para folleto, sugerencias para el examen AP y problemas de tarea sugeridos.

Complete Solutions Manual, Single Variable
de Jeffery A. Cole y Timothy J. Flaherty
ISBN 0-495-56060-X

Incluye soluciones dadas a todos los ejercicios del libro.

Printed Test Bank
de William Tomhave y Xuequi Zeng
ISBN 0-495-56123-1

Contiene material de opción múltiple y respuestas cortas que introducen directamente al texto.

ExamView

Crea, entrega y personaliza exámenes y guías de estudio (impresas y en línea) en minutos con este software didáctico y de evaluación en CD, fácil de usar. Incluye una generación algorítmica completa de problemas y preguntas del Printed Test Bank (Banco de Examen Impreso.)

JoinIn on TurningPoint

Mejore la forma en que sus estudiantes interactúan con usted, su clase y entre ellos. Brooks/Cole, Cengage Learning tiene ahora el gusto de ofrecerle su contenido específico de libro para Sistemas de Respuesta personalizados para Cálculo, de Stewart, permitiéndole al maestro transformar su clase y evaluar el avance de sus estudiantes con cuestionarios y encuestas instantáneos en clase. Comuníquese con su representante Cengage para tener más información acerca de JoinIn sobre TurningPoint y nuestras exclusivas soluciones de hardware en infrarrojos y radiofrecuencia.

Text-Specific DVDs
ISBN 0-495-56050-2

Juego de DVD de texto específico, disponible sin costo a quienes lo adopten. Cada disco presenta una lección de 10 a 20 minutos sobre resolución de problemas para cada sección del capítulo. Abarca cálculo de una variable y de varias variables.

Solution Builder
www.cengage.com/solutionbuilder

El Solution en línea permite fácilmente a maestros construir y guardar conjuntos de soluciones personales para imprimir o pegar en sitios web protegidos por medio de contraseña. Comuníquese con su representante local de ventas para más información sobre cómo obtener una cuenta para este recurso sólo para maestros.

Material auxiliar para maestros y estudiantes

eBook Option
ISBN 0-495-56121-5

Ya sea que prefiera un libro electrónico básico que se puede descargar del Internet, o un libro electrónico multimedia de la mejor calidad con opciones de búsqueda, frases destacadas y toma de notas, así como vínculos a videos y simulaciones, esta nueva edición ofrece una amplia gama de opciones de libro electrónico para ajustarse a la forma en que se desee leer e interactuar con el contenido.

Stewart Specialty Website
www.stewartcalculus.com

Contenido: Repaso de álgebra ▪ Temas adicionales ▪ Ejercicios archivados ▪ Problemas difíciles ▪ Vínculos en la Web ▪ Historia de las matemáticas ▪ Herramientas para Enriquecer el Cálculo (TEC).

|||| Recursos electrónicos |||| Recursos impresos

(La tabla continúa en la página xxii)

Enhanced WebAssign

Retroalimentación instantánea, precisión en calificación y facilidad de uso son sólo tres razones por las que WebAssign es el sistema de tareas de más amplio uso en educación superior. El sistema de entrega de tareas WebAssign permite al maestro entregar, recibir, calificar y registrar tareas vía la web. Y ahora, este sistema ya probado ha sido mejorado para incluir problemas de fin de sección de la obra Cálculo: Conceptos y Contextos, *de Stewart, incorporando ejercicios, ejemplos, formadores de experiencia de cuestionarios en video para promover un aprendizaje activo y dar la inmediata y relevante retroalimentación que desean los estudiantes.*

The Brooks/Cole Mathematics Resource Center Website

www.cengage.com/math

Cuando el maestro adopte un texto de matemáticas de Brooks/Cole de Cengage Learning, con sus alumnos tendrá acceso a una amplia variedad de recursos de enseñanza y aprendizaje. Este sitio web presenta todo de recursos específicos en libros a grupos de trabajo. Es una excelente forma de hacer que enseñanza y aprendizaje sean una experiencia interactiva y fascinante.

Maple CD-ROM

ISBN 0-495-01492-3 (Maple 10)
ISBN 0-495-39052-6 (Maple 11)

El Maple cuenta con una máquina de cálculo matemático avanzado y de alto rendimiento, con números y símbolos completamente integrados, todos ellos accesibles desde un ambiente de documento técnico WYS/WYG. Asequible para usarse junto con su libro de texto Cálculo de Stewart con descuento especial.

Recursos para estudiantes

TEC Tools for Enriching™ Calculus

de James Stewart, Harvey Keynes, Dan Clegg, y Hu Hohn

El TEC cuenta con un entorno de laboratorio en el que los estudiantes pueden explorar temas seleccionados; también incluye sugerencias de tareas para ejercicios representativos. Disponible en línea en www.stewartcalculus.com.

Study Guide, Single Variable

de Robert Burton y Dennis Garity

ISBN 0-495-56064-2

Contiene conceptos clave, experiencias a dominar, una breve exposición de las ideas de la sección, así como ejemplos resueltos con sugerencias de cómo hallar la solución.

Student Solutions Manual, Single Variable

de Jeffery A. Cole y Timothy J. Flaherty

ISBN 0-495-56061-8

Contiene soluciones resueltas por completo a todos los ejercicios de número impar dentro del texto, dando a estudiantes una forma de comprobar sus respuestas y asegura que tomaron los pasos correctos para llegar a una respuesta.

CalcLabs with Maple, Single Variable

de Robert J. Lopez
Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc.
(Emeritus Professor, Rose-Hulman Institute of Technology)
y Philip B. Yasskin
Department of Mathematics, Texas A&M University

ISBN 0-495-56062-6

CalcLabs with Mathematica, Single Variable

de Selwyn Hollis

ISBN 0-495-56063-4

Cada uno de estos manuales completos para laboratorio ayudarán a estudiantes a aprender a usar de manera eficiente las herramientas de tecnología con que cuenten. Cada laboratorio contiene ejercicios explicados con claridad, así como una variedad de laboratorios y proyectos para acompañar el texto.

A Companion to Calculus, Second Edition

de Dennis Ebersole, Doris Schattschneider, Alicia Sevilla, y Kay Somers

ISBN 0-495-01124-X

Escrito para mejorar la experiencia en álgebra y resolución de problemas a estudiantes que tomen un curso de cálculo, cada uno de los capítulos de este material tiene una clave para un tema de cálculo, dando así un antecedente de conceptos y técnicas específicas de álgebra para entender y resolver problemas de cálculo relacionados con ese tema. Está diseñado para cursos de cálculo que integran el repaso de conceptos de precálculo o para uso individual.

Linear Algebra for Calculus

de Konrad J. Heuvers, William P. Francis, John H. Kuisti, Deborah F. Lockhart, Daniel S. Moak, y Gene M. Ortner

ISBN 0-534-25248-6

Este extenso libro, diseñado para complementar el curso de cálculo, contiene una introducción y repaso a ideas básicas de álgebra lineal.

|||| Recursos electrónicos |||| Recursos impresos

Al estudiante

Leer un libro de cálculo es diferente a leer un periódico o una novela, incluso a un libro de física. No se desanime si tiene que leer un pasaje más de una vez para entenderlo. Debe tener lápiz, papel y calculadora a la mano para trazar un diagrama o hacer un cálculo.

Algunos estudiantes empiezan tratando de abordar sus problemas de tarea y leen el libro sólo si se atascan en un ejercicio. Sugiero que un plan mucho mejor es leer y entender una sección del libro antes de intentar resolver ejercicios. En particular, el lector debe observar las definiciones para ver el significado exacto de los términos. Y antes de leer cada ejemplo, sugiero que cubra la solución y trate de resolver el problema por sí mismo; obtendrá más de ver la solución si lo hace así.

Parte de la finalidad de este curso es capacitarlo para pensar de manera lógica. Aprenda a escribir las soluciones de los ejercicios en una forma enlazada y paso a paso con oraciones explicativas, no sólo una hilera de ecuaciones o fórmulas que no tienen conexión entre sí.

Las respuestas a los ejercicios de número impar aparecen al final del libro, en el Apéndice J. Algunos ejercicios piden una explicación o interpretación o descripción verbales. En tales casos no hay una sola forma correcta de expresar la respuesta, de modo que no se preocupe por no hallar la respuesta definitiva. Además, con frecuencia hay varias formas diferentes para expresar una respuesta numérica o algebraica, por lo que si su respuesta difiere de la mía no suponga de inmediato que está en un error. Por ejemplo, si la respuesta dada en la parte final del libro es $\sqrt{2} - 1$ y usted obtiene $1/(1 + \sqrt{2})$, entonces está bien y racionalizar el denominador demostrará que las respuestas son equivalentes.

El icono indica un ejercicio que definitivamente requiere el uso ya sea de una calculadora de gráficas o una computadora con software de gráficas. (La Sección 1.4 explica el uso de estos equipos de gráficas y algunos de los problemas que se pueden hallar.) Pero eso no significa que la calculadora de gráficas o la computadora no se puedan usar para comprobar su trabajo también en los otros ejercicios. El símbolo CAS está reservado para problemas en los que se requieren todos los recursos de un sistema computarizado de álgebra (por ejemplo Derive, Maple, Mathematica, o la TI-89/92).

También encontrará el símbolo ⊘, que le advierte para no cometer un error. He colocado este símbolo en el margen en situaciones donde he observado que una proporción grande de mis alumnos tiende a cometer el mismo error.

Herramientas para Enriquecer el Cálculo, que es un material adjunto a este libro de texto, se conoce por medio del símbolo **TEC** y se puede tener acceso a él desde www.stewartcalculus.com. Este material dirige al estudiante a módulos en los que puede explorar aspectos de cálculo para los que la computadora es particularmente útil. El TEC también contiene *Homework Hints* (Sugerencias de Tareas) para ejercicios representativos que están indicados al imprimirles el número en rojo: 15. Estas sugerencias de tarea plantean preguntas que permiten al estudiante avanzar hacia una solución sin darle en realidad la respuesta. El estudiante necesita seguir cada sugerencia de una manera activa con lápiz y papel para resolver los detalles. Si una sugerencia en particular no hace posible que el estudiante resuelva el problema, puede hacer clic para ver la siguiente sugerencia.

Un CD-ROM opcional que el profesor puede haberle pedido que compre es el *Interactive Video Skillbuilder,* que contiene videos de profesores que explican dos o tres de los ejemplos de cada sección del texto. También en el CD está un video en el que ofrezco consejos de cómo estudiar con éxito el curso de cálculo.

Recomiendo que el estudiante conserve este libro para consulta después que termine el curso. Debido a que es probable que el estudiante olvide algunos de los detalles específicos de cálculo, el libro le servirá como útil recordatorio cuando necesite usar cálculo en cursos subsiguientes. Y, como este libro contiene más material del que se pueda cubrir en cualquier curso, también puede servir como valioso recurso para un científico o ingeniero en su trabajo.

El cálculo es una materia fascinante, justamente considerada como uno de los grandes logros del intelecto humano. Espero que el lector descubra que no es sólo útil sino que también es intrínsecamente bello.

JAMES STEWART

Exámenes de diagnóstico

El éxito en cálculo depende en gran medida del conocimiento de las matemáticas que preceden al cálculo: álgebra, geometría analítica, funciones y trigonometría. Los siguientes exámenes tienen la intención de diagnosticar puntos débiles que el estudiante pueda tener en estos campos. Después de tomar cada uno de estos exámenes, el estudiante puede comprobar sus respuestas contra las respuestas dadas y, si es necesario, reforzar sus conocimientos al consultar el material de repaso sugerido.

A Examen de diagnóstico: Álgebra

1. Evalúe cada una de estas expresiones sin usar calculadora.

(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4}

(d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique cada una de estas expresiones. Escriba su respuesta sin exponentes negativos.

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$

(b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

(c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Desarrolle y simplifique.

(a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ (b) $(x + 3)(4x - 5)$

(c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (d) $(2x + 3)^2$

(e) $(x + 2)^3$

4. Factorice cada una de estas expresiones.

(a) $4x^2 - 25$ (b) $2x^2 + 5x - 12$

(c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (d) $x^4 + 27x$

(e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifique la expresión racional.

(a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ (b) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{2x + 1}$

(c) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ (d) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

6. Racionalice la expresión y simplifique.

(a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

7. Reescriba completando el cuadrado.

(a) x^2+x+1 (b) $2x^2-12x+11$

8. Resuelva la ecuación. (Encuentre sólo las soluciones reales.)

(a) $x+5=14-\frac{1}{2}x$ (b) $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x}$

(c) $x^2-x-12=0$ (d) $2x^2+4x+1=0$

(e) $x^4-3x^2+2=0$ (f) $3|x-4|=10$

(g) $2x(4-x)^{-1/2}-3\sqrt{4-x}=0$

9. Resuelva cada una de estas desigualdades. Escriba su respuesta usando notación de intervalos.

(a) $-4<5-3x\leqslant 17$ (b) $x^2<2x+8$

(c) $x(x-1)(x+2)>0$ (d) $|x-4|<3$

(e) $\dfrac{2x-3}{x+1}\leqslant 1$

10. Diga si cada una de estas ecuaciones es verdadera o falsa.

(a) $(p+q)^2=p^2+q^2$ (b) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

(c) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ (d) $\dfrac{1+TC}{C}=1+T$

(e) $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ (f) $\dfrac{1/x}{a/x-b/x}=\dfrac{1}{a-b}$

Respuestas al examen de diagnóstico A: Álgebra

1. (a) 81 (b) -81 (c) $\frac{1}{81}$
(d) 25 (e) $\frac{9}{4}$ (f) $\frac{1}{8}$

2. (a) $6\sqrt{2}$ (b) $48a^5b^7$ (c) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. (a) $11x-2$ (b) $4x^2+7x-15$
(c) $a-b$ (d) $4x^2+12x+9$
(e) $x^3+6x^2+12x+8$

4. (a) $(2x-5)(2x+5)$ (b) $(2x-3)(x+4)$
(c) $(x-3)(x-2)(x+2)$ (d) $x(x+3)(x^2-3x+9)$
(e) $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$ (f) $xy(x-2)(x+2)$

5. (a) $\dfrac{x+2}{x-2}$ (b) $\dfrac{x-1}{x-3}$
(c) $\dfrac{1}{x-2}$ (d) $-(x+y)$

6. (a) $5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

7. (a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ (b) $2(x-3)^2-7$

8. (a) 6 (b) 1 (c) $-3, 4$
(d) $-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (e) $\pm1, \pm\sqrt{2}$ (f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
(g) $\frac{12}{5}$

9. (a) $[-4, 3)$ (b) $(-2, 4)$
(c) $(-2, 0)\cup(1, \infty)$ (d) $(1, 7)$
(e) $(-1, 4]$

10. (a) Falso (b) Verdadero (c) Falso
(d) Falso (e) Falso (f) Verdadero

Si el estudiante tiene dificultad con estos problemas, puede consultar el Repaso de Álgebra en el sitio web www.stewartcalculus.com

B Examen de diagnóstico: Geometría analítica

1. Encuentre una ecuación para la recta que pasa por el punto $(2, -5)$ y

(a) tiene pendiente -3

(b) es paralela al eje x

(c) es paralela al eje y

(d) es paralela a la recta $2x - 4y = 3$

2. Encuentre una ecuación para el círculo que tiene centro $(-1, 4)$ y pasa por el punto $(3, -2)$.

3. Encuentre el centro y radio del círculo con ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

4. Sean $A(-7, 4)$ y $B(5, -12)$ puntos en el plano.

(a) Encuentre la pendiente de la recta que contiene a A y B.

(b) Encuentre una ecuación de la recta que pasa por A y B. ¿Cuáles son los puntos de cruce con los ejes?

(c) Encuentre el punto medio del segmento AB.

(d) Encuentre la longitud del segmento AB.

(e) Encuentre una ecuación del bisector perpendicular de AB.

(f) Encuentre una ecuación del círculo para el cual AB es un diámetro.

5. Trace la región del plano xy definida por la ecuación o desigualdades.

(a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$

(b) $|x| < 4$ y $|y| < 2$

(c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$

(d) $y \geqslant x^2 - 1$

(e) $x^2 + y^2 < 4$

(f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

Respuestas al examen de diagnóstico B: Geometría analítica

1. (a) $y = -3x + 1$ (b) $y = -5$

(c) $x = 2$ (d) $y = \frac{1}{2}x - 6$

2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 52$

3. Centro $(3, -5)$, radio 5

4. (a) $-\frac{4}{3}$

(b) $4x + 3y + 16 = 0$; cruce en -4 con eje x, cruce en $-\frac{16}{3}$ con eje y

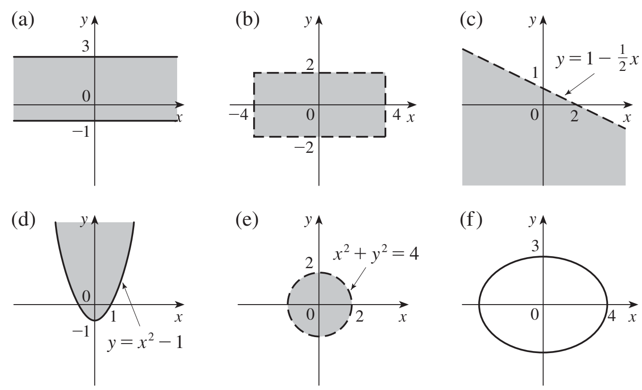
(c) $(-1, -4)$

(d) 20

(e) $3x - 4y = 13$

(f) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

5.



Si el estudiante tiene dificultad con estos problemas, puede consultar el Repaso de Geometría Analítica en el Apéndice B.

C Examen de diagnóstico: Funciones

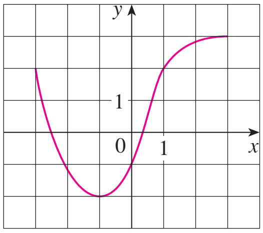


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. La gráfica de una función f aparece a la izquierda.
 (a) Exprese el valor de $f(-1)$.
 (b) Estime el valor de $f(2)$.
 (c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 2$?
 (d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.
 (e) Exprese el dominio e intervalo de f.

2. Si $f(x) = x^3$, evalúe el cociente de diferencia $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ y simplifique su respuesta.

3. Encuentre el dominio de la función.

(a) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$

4. ¿Cómo son las gráficas de las funciones obtenidas a partir de la gráfica de f?
 (a) $y = -f(x)$ (b) $y = 2f(x) - 1$ (c) $y = f(x - 3) + 2$

5. Sin usar calculadora, haga un dibujo aproximado de la gráfica.
 (a) $y = x^3$ (b) $y = (x + 1)^3$ (c) $y = (x - 2)^3 + 3$
 (d) $y = 4 - x^2$ (e) $y = \sqrt{x}$ (f) $y = 2\sqrt{x}$
 (g) $y = -2^x$ (h) $y = 1 + x^{-1}$

6. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

 (a) Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$. (b) Trace la gráfica de f.

7. Si $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 2x - 3$, encuentre cada una de las siguientes funciones.
 (a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

Respuestas al examen de diagnóstico C: Funciones

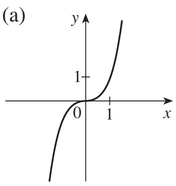
1. (a) -2 (b) 2.8
 (c) $-3, 1$ (d) $-2.5, 0.3$
 (e) $[-3, 3], [-2, 3]$

2. $12 + 6h + h^2$

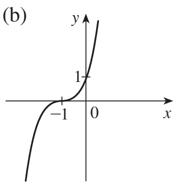
3. (a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$
 (b) $(-\infty, \infty)$
 (c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

4. (a) Refleje alrededor del eje x
 (b) Estire verticalmente por un factor de 2, a continuación desplace 1 unidad hacia abajo
 (c) Desplace 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba

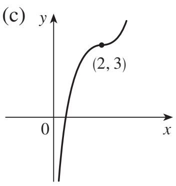
5. (a)



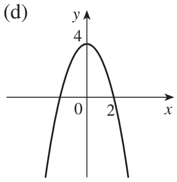
(b)



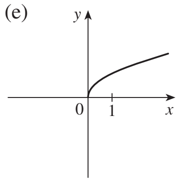
(c)



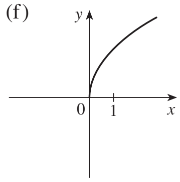
(d)



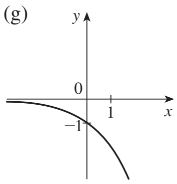
(e)



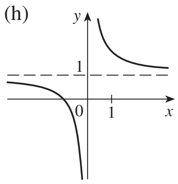
(f)



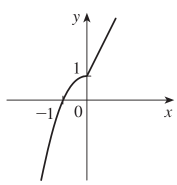
(g)



(h)



6. (a) $-3, 3$
 (b)



7. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
 (b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
 (c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

Si el estudiante tiene dificultad con estos problemas, debe ver las secciones 1.1–1.3 de este libro.

D Examen de diagnóstico: Trigonometría

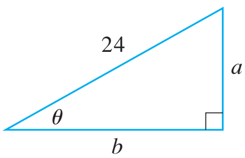


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

1. Convertir de grados a radianes.

(a) $300°$ (b) $-18°$

2. Convertir de radianes a grados.

(a) $5\pi/6$ (b) 2

3. Encuentre la longitud de un arco de círculo con radio 12 cm si el arco subtiende un ángulo central de $30°$.

4. Encuentre los valores exactos.

(a) $\tan(\pi/3)$ (b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$

5. Exprese las longitudes a y b de la figura en términos de θ.

6. Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x y y están entre 0 y $\pi/2$, evalúe $\operatorname{sen}(x + y)$.

7. Demuestre las identidades.

(a) $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

(b) $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

8. Encuentre todos los valores de x tales que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ y $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

9. Trace la gráfica de la función $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$ sin usar calculadora.

Respuestas al examen de diagnóstico D: Funciones

1. (a) $5\pi/3$ (b) $-\pi/10$

2. (a) $150°$ (b) $360°/\pi \approx 114.6°$

3. 2π cm

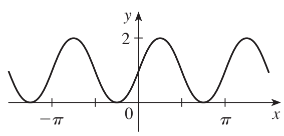
4. (a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2

5. (a) $24 \operatorname{sen}\theta$ (b) $24\cos\theta$

6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$

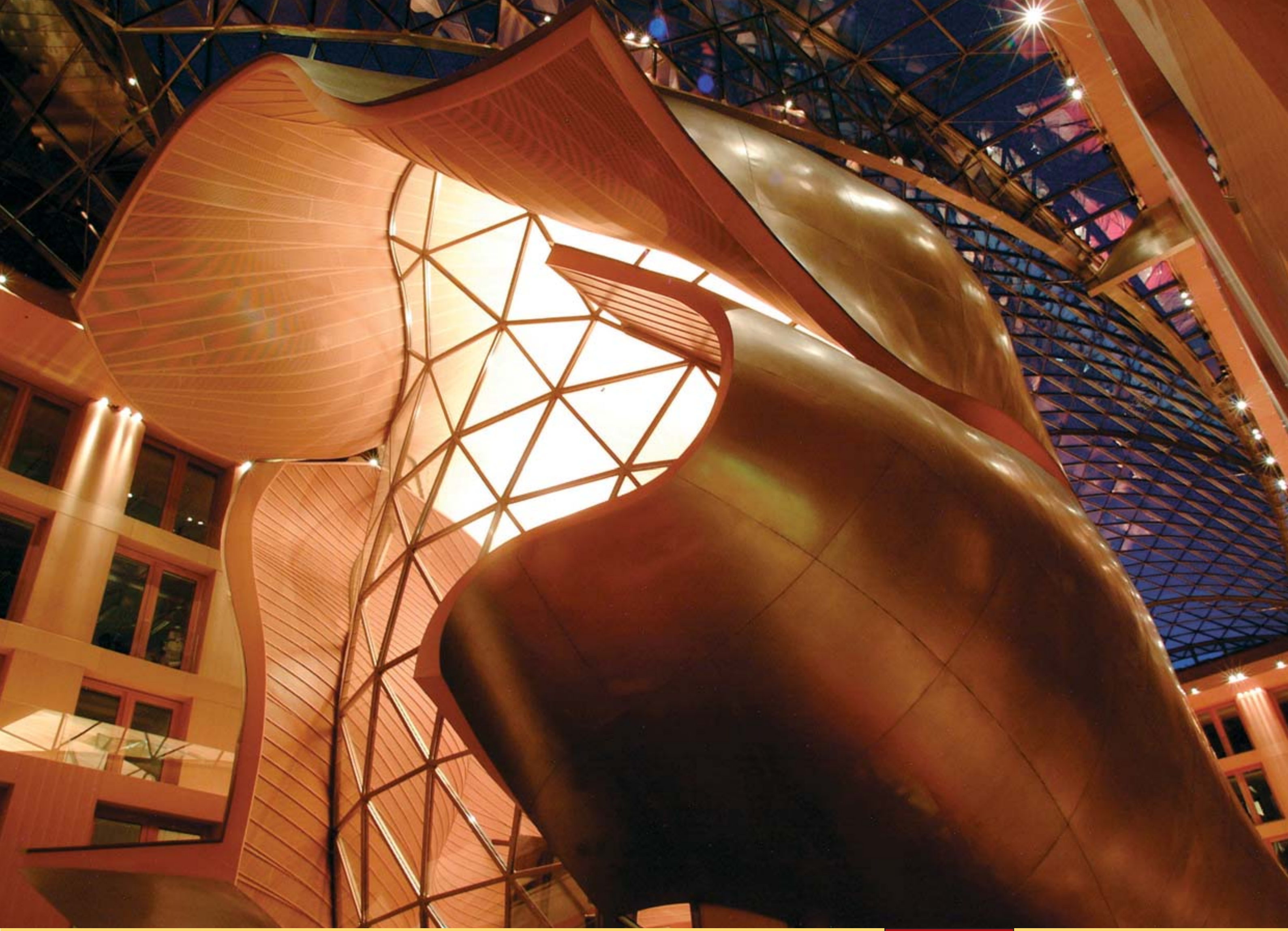
9.



Si el estudiante tiene dificultad con estos problemas, debe ver el Apéndice C de este libro.

Cálculo de una variable

Conceptos y contextos | 4e



thomasmayerarchive.com

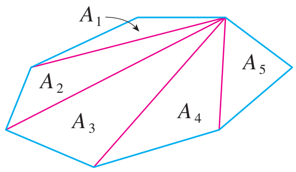
Una vista previa al cálculo

El cálculo es fundamentalmente diferente de las matemáticas que el lector ha estudiado antes: el cálculo es menos estático y más dinámico. Se ocupa de cambio y movimiento; se refiere a cantidades que consideran otras cantidades. Por esa razón puede ser útil tener una vista general del tema antes de empezar su estudio intensivo. Aquí damos una imagen de algunas de las principales ideas de cálculo, mostrando la forma en que el concepto de un límite aparece cuando tratamos de resolver una variedad de problemas.

El problema del área

Los orígenes del cálculo se remontan al menos 2500 años hasta los antiguos griegos, que encontraban áreas usando el “método de eliminaciones sucesivas.” Sabían cómo hallar el área A de cualquier polígono al dividirlo en triángulos como en la Figura 1 y sumando las áreas de estos triángulos.

Un problema mucho más difícil es hallar el área de una figura curva. El método griego de eliminaciones sucesivas era inscribir polígonos en la figura y circunscribir polígonos alrededor de la figura y luego aumentar el número de lados de los polígonos. La Figura 2 ilustra este proceso para el caso especial de un círculo con polígonos regulares inscritos.



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

FIGURA 1

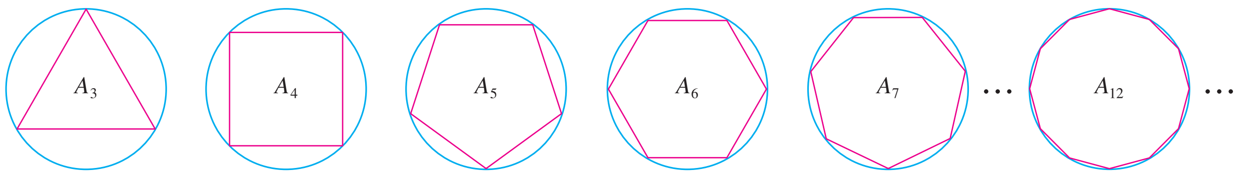


FIGURA 2

Sea A_n el área del polígono inscrito con n lados. A medida que n aumenta, se ve que A_n se acerca cada vez más al área del círculo. Decimos que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos, y escribimos

TEC En Preview Visual, es posible ver cómo polígonos inscritos y circunscritos aproximan el área de un círculo.

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Los griegos mismos no usaron límites en forma explícita pero, por razonamiento indirecto, Eudoxio (siglo V a.C.) usó el método de eliminaciones sucesivas para demostrar la conocida fórmula para el área de un círculo: $A = \pi r^2$.

Usaremos una idea similar en el Capítulo 5 para hallar áreas de regiones del tipo que se ve en la Figura 3. Aproximaremos el área deseada A por medio de áreas de rectángulos (como en la Figura 4), hacer que disminuya el ancho de los rectángulos y luego calcular A como el límite de estas sumas de áreas de rectángulos.

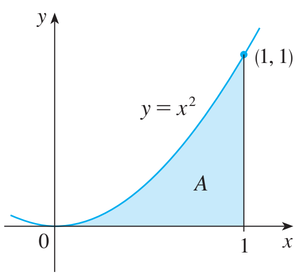


FIGURA 3

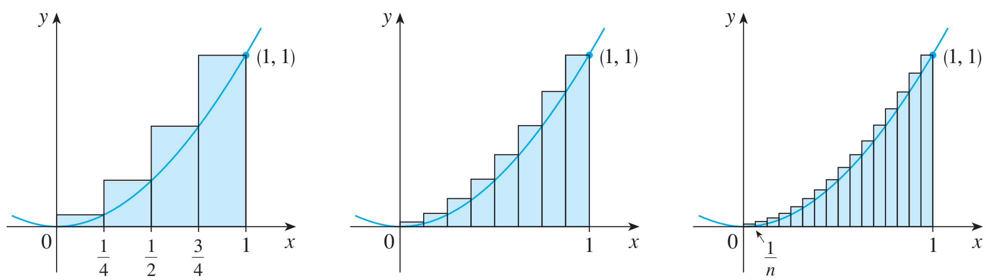


FIGURA 4

El problema del área es el problema central en la rama del cálculo llamada *cálculo integral*. Las técnicas que desarrollaremos en el Capítulo 5 para hallar áreas también hacen posible que calculemos el volumen de un sólido, la longitud de una curva, la fuerza del agua contra una represa, la masa y centro de gravedad de una varilla, y el trabajo realizado al sacar agua por bombeo de un tanque.

El problema de la tangente

Considere el problema de tratar de hallar una ecuación de la recta tangente t a una curva con ecuación $y = f(x)$ en un punto P determinado. (Daremos una definición precisa de una recta tangente en el Capítulo 2. Por ahora podemos considerarla como una recta que toca la curva en P como en la Figura 5.) Como sabemos que el punto P se encuentra en la recta tangente, podemos hallar la ecuación de t si conocemos su pendiente m. El problema es

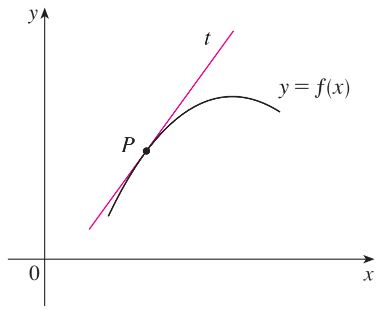


FIGURA 5
La recta tangente en P

que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente y sólo conocemos un punto, P, en t. Para manejar el problema primero necesitamos hallar una aproximación a m al tomar un punto cercano Q en la curva y calcular la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. De la Figura 6 vemos que

$$\boxed{1} \qquad m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora imagine que Q se mueve a lo largo de la curva hacia P como en la Figura 7. Se puede ver que la recta secante gira y se aproxima a la recta tangente como su posición límite. Esto significa que la pendiente m_{PQ} de la recta secante se acerca cada vez más a la pendiente m de la recta tangente. Escribimos

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

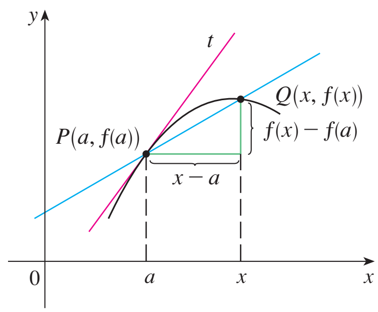


FIGURA 6
La recta secante PQ

y decimos que m es el límite de m_{PQ} cuando Q se aproxima a Q a lo largo de la curva. Como x se aproxima a a cuando Q se aproxima a P, podríamos también usar la Ecuación 1 para escribir

$$\boxed{2} \qquad m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

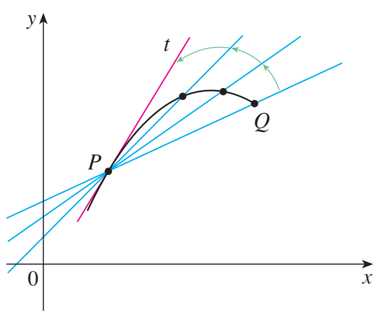


FIGURA 7
Rectas secantes que se aproximan a la recta tangente

En el Capítulo 2 se darán ejemplos específicos de este procedimiento.

El problema de la tangente ha dado lugar a la rama del cálculo llamada *cálculo diferencial*, que no fue inventada sino hasta más de 2000 años después del cálculo integral. Las principales ideas que hay detrás del cálculo diferencial se deben al matemático francés Pierre Fermat (1601–1665) y fueron desarrolladas por los matemáticos ingleses John Wallis (1616–1703), Isaac Barrow (1630–1667) e Isaac Newton (1642–1727), así como por el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646–1716).

Las dos ramas del cálculo y sus principales problemas, el problema del área y el problema de la tangente, parecen ser muy diferentes pero resulta que hay una relación muy estrecha entre ellos. El problema de la tangente y el problema del área son problemas inversos en un sentido que describiremos en el Capítulo 5.

Velocidad

Cuando vemos el velocímetro de un auto y leemos que el auto está corriendo a 48 millas/h, ¿qué nos indica esa información? Sabemos que si la velocidad permanece constante, entonces después de una hora habremos recorrido 48 millas. Pero si cambia la velocidad del auto, ¿qué significa decir que la velocidad en un instante determinado es 48 millas/h?

Para analizar esta pregunta, examinemos el movimiento de un auto que se desplaza a lo largo de una carretera recta y suponemos que podemos medir la distancia recorrida por el auto (en pies) a intervalos de 1 segundo como en la tabla siguiente:

t = Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distancia (ft)	0	2	9	24	42	71

Como primer paso para hallar la velocidad después que hayan transcurrido 2 segundos, encontramos el promedio de velocidad durante el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 4$:

$$\begin{aligned}\text{promedio de velocidad} &= \frac{\text{cambio en posición}}{\text{tiempo transcurrido}}\\ &= \frac{42 - 9}{4 - 2}\\ &= 16.5 \text{ ft/s}\end{aligned}$$

Del mismo modo, el promedio de velocidad en el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 3$ es

$$\text{promedio de velocidad} = \frac{24 - 9}{3 - 2} = 15 \text{ ft/s}$$

Tenemos la impresión que la velocidad en el instante $t = 2$ no puede ser muy diferente al promedio de velocidad durante un corto intervalo que empieza en $t = 2$. Entonces imaginemos que la distancia recorrida se ha medido a intervalos de 0.1 segundo como en la tabla siguiente:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	9.00	10.02	11.16	12.45	13.96	15.80

Entonces podemos calcular, por ejemplo, el promedio de velocidad en el intervalo [2, 2.5]:

$$\text{promedio de velocidad} = \frac{15.80 - 9.00}{2.5 - 2} = 13.6 \text{ ft/s}$$

Los resultados de estos cálculos se muestran en la tabla siguiente:

Intervalo	[2, 3]	[2, 2.5]	[2, 2.4]	[2, 2.3]	[2, 2.2]	[2, 2.1]
Promedio de velocidad (ft/s)	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

Los promedios de velocidad en intervalos sucesivamente más cortos parecen acercarse cada vez más a un número cercano a 10, y esperamos que la velocidad en exactamente $t = 2$ sea de unos 10 ft/s. En el Capítulo 2 definiremos la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento como el valor límite de los promedios de velocidad en intervalos cada vez más pequeños.

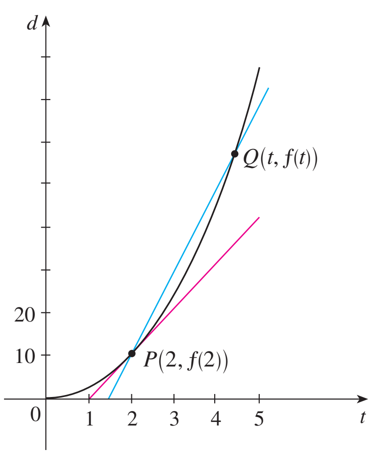


FIGURA 8

En la Figura 8 mostramos una representación gráfica del movimiento del auto al localizar la distancia recorrida como función del tiempo. Si escribimos $d = f(t)$, entonces $f(t)$ es el número de pies recorridos después de t segundos. El promedio de velocidad en el intervalo $[2, t]$ es

$$\text{promedio de velocidad} = \frac{\text{cambio en posición}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

que es igual a la pendiente de la recta secante PQ de la Figura 8. La velocidad v cuando $t = 2$ es el valor limitante de este promedio de velocidad cuando t se aproxima a 2; esto es,

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

y reconocemos de la Ecuación 2 que esto es lo mismo que la pendiente de la recta tangente a la curva en P.

Por tanto, cuando resolvemos el problema de la tangente en cálculo diferencial, también estamos resolviendo problemas relacionados a velocidades. Las mismas técnicas hacen posible que resolvamos problemas de magnitudes de rapidez de cambio en todas las ciencias naturales y sociales.

El límite de una sucesión

En el siglo V a.C. el filósofo griego Zenón de Elea planteó cuatro problemas, ahora conocidos como *paradojas de Zenón*, que tenían la intención de desafiar algunas de las ideas respecto al espacio y tiempo que prevalecían en aquel tiempo. La segunda paradoja de Zenón se refiere a una carrera entre el héroe griego Aquiles y una tortuga a la que se le da ventaja. Zenón dijo, como se ve en seguida, que Aquiles nunca podría rebasar a la tortuga: Suponga que Aquiles arranca en la posición a_1 y la tortuga en la posición t_1. (Vea Figura 9.) Cuando Aquiles llega al punto $a_2 = t_1$, la tortuga está más adelante en la posición t_2. Cuando Aquiles llega a $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3. Este proceso continúa indefinidamente y por tanto parece que la tortuga siempre estará a la cabeza. Pero esto desafía al sentido común.

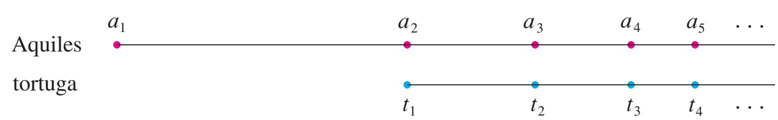


FIGURA 9

Una forma de explicar esta paradoja es con la idea de una *sucesión*. Las posiciones sucesivas de Aquiles (a_1, a_2, a_3, ...) o las posiciones sucesivas de la tortuga (t_1, t_2, t_3, ...) forman lo que se conoce como una sucesión.

En general, una sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto de números escritos en un orden definido. Por ejemplo, la sucesión

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

se puede describir dando la siguiente fórmula para el n-ésimo término:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

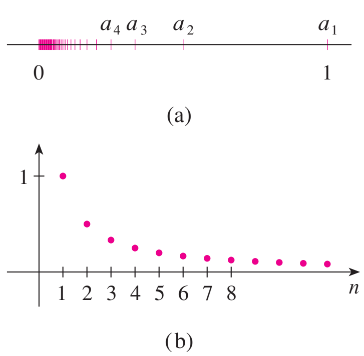


FIGURA 10

Podemos visualizar esta sucesión al localizar sus términos en una recta numérica como en la Figura 10(a) o al trazar su gráfica como en la Figura 10(b). Observe de cada una de estas imágenes que los términos de la sucesión $a_n = 1/n$ se acercan cada vez más a 0 cuando n aumenta. De hecho, podemos hallar términos tan pequeños como queramos al hacer n suficientemente grande. Decimos que el límite de la sucesión es 0 e indicamos esto al escribir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

En general, la notación

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

se usa si los términos a_n se aproximan al número L cuando n se hace grande. Esto significa que los números a_n se pueden acercar tanto como queramos al número L al tomar n suficientemente grande.

El concepto de límite de una sucesión se presenta siempre que usemos la representación decimal de un número real. Por ejemplo, si

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3.1 \\
a_2 &= 3.14 \\
a_3 &= 3.141 \\
a_4 &= 3.1415 \\
a_5 &= 3.14159 \\
a_6 &= 3.141592 \\
a_7 &= 3.1415926 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

entonces $$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

Los términos de esta sucesión son aproximaciones racionales a π.

Regresemos a la paradoja de Zenón. Las posiciones sucesivas de Aquiles y la tortuga forman las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{t_n\}$, donde $a_n < t_n$ para toda n. Se puede demostrar que ambas sucesiones tienen el mismo límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n$$

Es precisamente en este punto p donde Aquiles rebasa a la tortuga.

La suma de una serie

Otra de las paradojas de Zenón, como nos la relata Aristóteles, es la siguiente: "Un hombre de pie en un cuarto no puede caminar a la pared. Para hacerlo, primero tendría que recorrer la mitad de la distancia, luego la mitad de la distancia restante, y luego de nuevo la mitad de lo que reste. Este proceso siempre se puede continuar y nunca puede terminar." (Vea la Figura 11.)

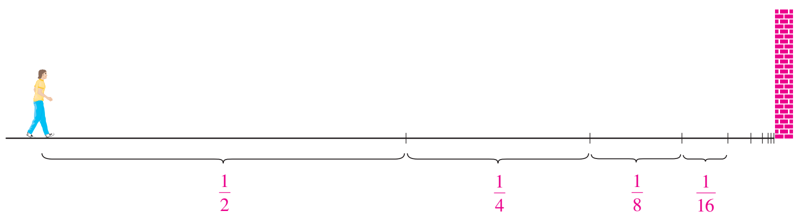


FIGURA 11

Desde luego, sabemos que el hombre en realidad llega a la pared, de modo que esto sugiere que quizá la distancia total se puede expresar como la suma de un número infinito de distancias más pequeñas como sigue:

3 $$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenón alegaba que no tiene sentido sumar un número infinito de números. Pero hay otras situaciones en las que implícitamente usamos sumas infinitas. Por ejemplo, en notación decimal, el símbolo $0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10{,}000} + \cdots$$

y entonces, en algún sentido, debe ser cierto que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10{,}000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

En forma más general, si d_n denota el n-ésimo dígito de la representación decimal de un número, entonces

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Por tanto algunas sumas infinitas, o series infinitas como se denominan, tienen significado. Pero debemos definir con todo cuidado lo que es la suma de una serie infinita.

Regresando a la serie de la Ecuación 3, denotamos por s_n la suma de los primeros n términos de la serie. Así,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0.5 \\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75 \\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875 \\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0.9375 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0.96875 \\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0.984375 \\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0.9921875 \\
&\ \vdots \\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0.99902344 \\
&\ \vdots \\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0.99998474
\end{aligned}$$

Observe que a medida que sumamos más y más términos, las sumas parciales se acercan cada vez más a 1. De hecho, se puede demostrar que al tomar n suficientemente grande (es decir, al sumar un número suficiente de términos de la serie), podemos hacer que la suma parcial s_n sea tan cercana como queramos al número 1. Por tanto, parece razonable decir que la suma de la serie infinita es 1 y escribir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

En otras palabras, la razón por la cual la suma de la serie es 1 es que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

En el Capítulo 8 discutiremos con más detalle estas ideas. Entonces usaremos la idea de Newton de combinar series infinitas con cálculo diferencial e integral.

Resumen

Hemos visto que el concepto de un límite surge al tratar de hallar el área de una región, la pendiente de una tangente a una curva, la velocidad de un auto, o la suma de una serie infinita. En cada caso el tema común es el cálculo de una cantidad como el límite de otras cantidades que se calculan con facilidad. Es la idea básica de un límite que separa al cálculo de otros campos de las matemáticas. De hecho, podríamos definir el cálculo como la parte de las matemáticas que se refiere a límites.

Después que Sir Isaac Newton inventara su versión del cálculo, la utilizó para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Hoy el cálculo se emplea para calcular las órbitas de satélites y naves espaciales, para predecir tamaños de población, estimar con qué rapidez suben o bajan precios del petróleo, para pronosticar condiciones atmosféricas, medir la respuesta cardiaca del corazón, calcular primas de seguros de vida y en una gran variedad de otros campos de actividad. Exploraremos algunos de estos usos del cálculo en este libro.

Para expresar un sentido de la importancia de este tema, terminamos esta vista previa con una lista de algunas de las preguntas que estaremos en aptitud de contestar si usamos cálculo:

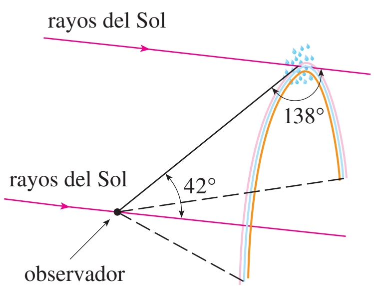
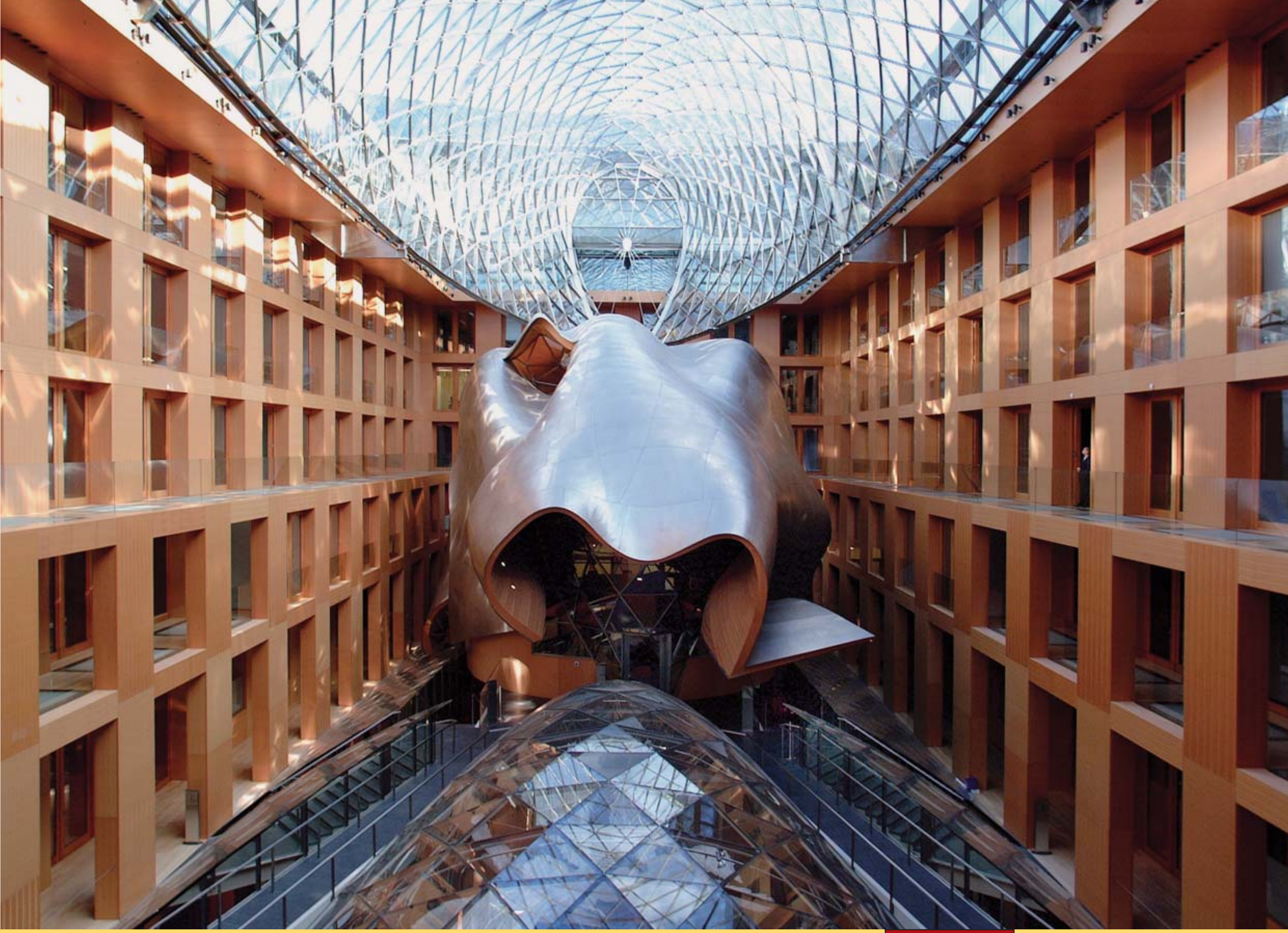


FIGURA 12

1. ¿Cómo podemos explicar el hecho, ilustrado en la Figura 12, que el ángulo de elevación de un observador hasta el punto más alto de un arco iris es de 42°? (Vea página 270.)
2. ¿Cómo podemos explicar las formas de latas de anaqueles de supermercados? (Vea página 311.)
3. ¿En dónde está el mejor lugar para sentarse en un cine? (Vea página 464.)
4. ¿A qué distancia de un aeropuerto debe iniciar el descenso un piloto? (Vea página 209.)
5. ¿Cómo podemos unir curvas para diseñar formas para representar letras en una impresora láser? (Vea página 208.)
6. ¿Dónde debe colocarse un jugador de cuadro para atrapar una pelota lanzada por un jardinero para hacer un tiro de relevo a la placa del *home* en beisbol? (Vea página 530.)
7. ¿Una pelota lanzada hacia arriba tarda más tiempo en alcanzar su máxima altura o en caer a su altura original? (Vea página 518.)



thomasmayerarchive.com

1 Funciones y modelos

Los temas fundamentales con los que trabajamos en Cálculo son las funciones. En este capítulo preparamos el camino al cálculo y explicamos las ideas básicas respecto a las funciones, sus gráficas y los modos de transformarlas y combinarlas. Destacamos que una función puede ser representada en diferentes formas: por una ecuación, en una tabla, por una gráfica o en palabras. Vemos los principales tipos de funciones que hay en cálculo y describimos el proceso de usar estas funciones como modelos matemáticos de fenómenos del mundo real. También estudiamos el uso de calculadoras graficadoras y programas de graficación por computadora y vemos que las ecuaciones paramétricas son el mejor método para graficar ciertos tipos de curvas.

1.1 Cuatro formas de representar una función

Las funciones aparecen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes.

A. El área A de un círculo depende de su radio. La regla que relaciona r y A está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r hay asociado un valor de A y decimos que A es una *función* de r.

B. La población humana P del mundo depende del tiempo t. La tabla proporciona estimaciones de la población $P(t)$ del mundo en el tiempo t, para ciertos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2{,}560{,}000{,}000$$

Pero para cada valor del tiempo t hay un valor correspondiente de P y decimos que P es una función de t.

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

C. El costo C de enviar por correo un sobre grande depende del peso w del sobre. Aun cuando no haya una fórmula sencilla que relacione w y C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a del suelo cuando se mide con un sismógrafo durante un terremoto es una función del tiempo t transcurrido. La Figura 1 muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió a Los Ángeles en 1994. Para un valor dado de t, la gráfica da un valor correspondiente de a.

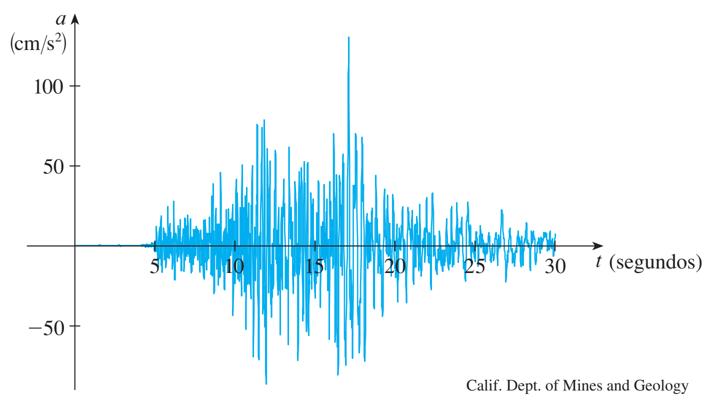


FIGURA 1
Aceleración vertical del suelo durante el terremoto de Northridge

Cada uno de estos ejemplos describe una regla por medio de la cual, dado un número (r, t, w o t), se asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso decimos que el segundo número es una función del primero.

> Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D, exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Por lo general consideramos funciones para las que los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. El conjunto D se llama **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f de x". El **rango** de f es el conjunto de todos los posibles valores de $f(x)$ cuando x recorre todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *rango* de f se llama **variable dependiente**. En el Ejemplo A, por ejemplo, r es la variable independiente y A es la variable dependiente.

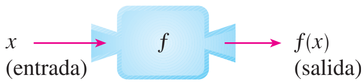


FIGURA 2
Diagrama de máquina para una función f

Es útil considerar una función como una **máquina** (véase la Figura 2). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra a la máquina, es aceptada como entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Entonces podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

Las funciones programadas de antemano en una calculadora son buenos ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla de raíz cuadrada en una calculadora calcula esa función. Usted presiona la tecla marcada $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$) e introduce la entrada x. Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; esto es, x no es una entrada aceptable y la calculadora puede indicar error. Si $x \geqslant 0$, aparecerá en la pantalla una *aproximación* a $\sqrt{x}$. Entonces, la tecla $\sqrt{x}$ en esa calculadora no es igual que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flechas** como en la Figura 3. Cada flecha enlaza un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

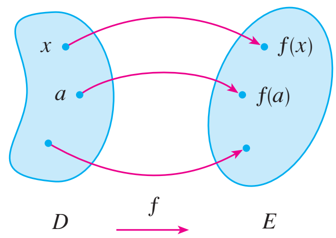


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio D, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que éstos son pares de entrada-salida.) En otras palabras, la gráfica de f está formada por todos los puntos (x, y) del plano de coordenadas tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f nos da una imagen útil del comportamiento o "historia de la vida" de una función. Como la coordenada y de cualquier punto (x, y) de la gráfica es $y = f(x)$, podemos leer el valor de $f(x)$ desde la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase Figura 4). La gráfica de f también nos permite representar el dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

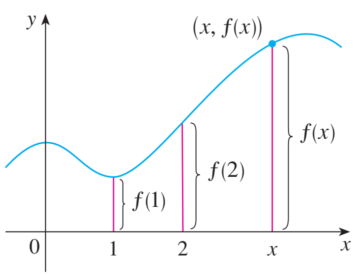


FIGURA 4

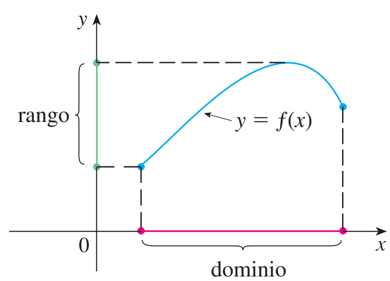


FIGURA 5

EJEMPLO 1 **Lectura de información de una gráfica** La gráfica de una función f se muestra en la Figura 6.

(a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.

(b) ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?

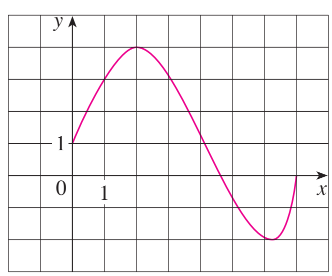


FIGURA 6

La notación para intervalos se proporciona en el Apéndice A.

SOLUCIÓN

(a) Vemos de la Figura 6 que el punto $(1, 3)$ está en la gráfica de f, de modo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que está arriba de $x = 1$ está 3 unidades arriba del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica está más o menos 0.7 unidades abajo del eje x, de modo que estimamos que $f(x) \approx -0.7$.

(b) Vemos que $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, de modo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores de -2 a 4, por lo cual el rango de f es

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

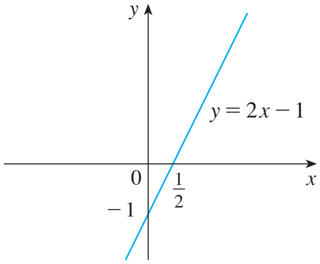


FIGURA 7

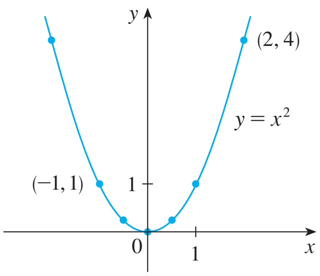


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace la gráfica y encuentre el dominio y rango de cada función.

(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN

(a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y reconocemos ésta como la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección y en -1. (Recuerde la forma de intersección y de la ecuación de una recta: $y = mx + b$. Véase el Apéndice B.) Esto hace posible que tracemos una parte de la gráfica de f en la Figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, de modo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, que denotamos por $\mathbb{R}$. La gráfica muestra que el rango es también $\mathbb{R}$.

(b) Como $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podríamos localizar los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$, junto con otros cuantos puntos en la gráfica, y unirlos para obtener la gráfica (Figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$, que representa una parábola (véase el Apéndice B). El dominio de g es $\mathbb{R}$. El rango de g consta de todos los valores de $g(x)$, es decir, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x y cualquier número positivo y es un cuadrado. Por tanto, el rango de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto se puede ver de la Figura 8.

EJEMPLO 3 **Evaluación del cociente de una diferencia**

Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalúe $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

SOLUCIÓN Primero evaluamos $f(a + h)$ al sustituir x con $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 - 5(a + h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a + h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

A continuación sustituimos en la expresión dada y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$

La expresión

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

del Ejemplo 3 recibe el nombre de **cociente de una diferencia** y se presenta con frecuencia en cálculo. Como veremos en el Capítulo 2, representa el promedio de rapidez de cambio de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$.

Representaciones de funciones

Hay cuatro posibles formas de representar una función:

- verbalmente (por una descripción en palabras)
- numéricamente (por una tabla de valores)
- visualmente (por una gráfica)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)

Si una función individual puede ser representada en las cuatro formas, con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para obtener una mejor idea de la función. (En el Ejemplo 2, por ejemplo, empezamos con fórmulas algebraicas y luego obtuvimos las gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más natural por un método que por otro. Con esto en mente, reexaminemos las cuatro situaciones que consideramos al principio de esta sección.

A. La representación más útil del área de un círculo como función de su radio, es probablemente la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aun cuando es posible compilar una tabla de valores o trazar una gráfica (la mitad de una parábola). Como un círculo tiene que tener un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$ y el rango es también $(0, \infty)$.

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

B. Nos dan una descripción de la función en palabras: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. La tabla de valores de la población mundial proporciona una representación cómoda de esta función. Si graficamos estos valores, obtenemos la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) de la Figura 9. También es una representación útil; la gráfica nos permite absorber todos los datos a la vez. ¿Y qué hay de nuestra fórmula? Por supuesto que es imposible idear una fórmula explícita que dé la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t, pero es posible hallar una expresión para una función que *aproxime* $P(t)$. De hecho, si se usan los métodos explicados en la Sección 1.5, obtenemos la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (0.008079266) \cdot (1.013731)^t$$

y la Figura 10 muestra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento poblacional. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que calcula el comportamiento de nuestra función dada. Veremos, no obstante, que las ideas del cálculo se pueden aplicar a una tabla de valores; una fórmula explícita no es necesaria.

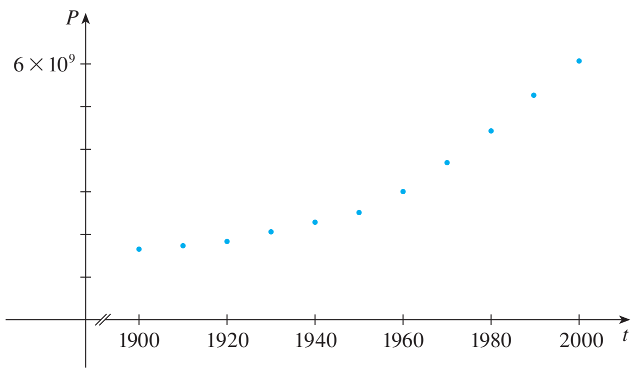


FIGURA 9

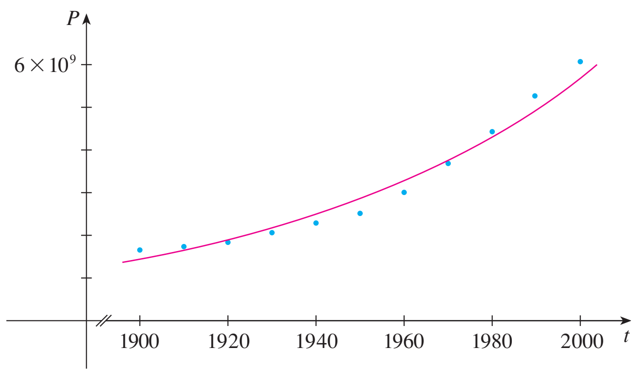


FIGURA 10

La función P es típica de las funciones que aparecen siempre que tratemos de aplicar cálculo al mundo real. Empezamos con una descripción verbal de una función. Entonces podemos construir una tabla de valores de la función, quizá de lecturas de un instrumento en un experimento científico. Aun cuando no tengamos un conocimiento completo de los valores de la función, veremos a lo largo del libro que todavía es posible ejecutar las operaciones de cálculo con base en esa función.

Una función definida por una tabla de valores se llama función *tabular*.

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leqslant 1$	0.83
$1 < w \leqslant 2$	1.00
$2 < w \leqslant 3$	1.17
$3 < w \leqslant 4$	1.34
$4 < w \leqslant 5$	1.51
⋮	⋮
$12 < w \leqslant 13$	2.87

C. De nuevo la función se describe en palabras: $C(w)$ es el costo de enviar por correo un sobre grande con peso w. La regla que el Servicio Postal de Estados Unidos utilizó hasta 2008 es como sigue: el costo es 83 centavos para una pieza de hasta 1 onza de peso, más 17 centavos por cada onza adicional (o parte de ésta) hasta 13 onzas. La tabla de valores mostrada al margen es la representación más cómoda para esta función, pero es posible trazar una gráfica (véase el Ejemplo 10).

D. La gráfica que se muestra en la Figura 1 es la representación más natural de la función de aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que podría compilarse una tabla de valores y hasta es posible crear una fórmula aproximada, pero todo lo que un geólogo necesita saber –amplitudes y patrones– se puede ver con toda facilidad desde la gráfica. (Lo mismo es cierto para los patrones que se ven en electrocardiogramas de pacientes enfermos del corazón y polígrafos para detección de mentiras.)

EJEMPLO 4 **Trazar una gráfica a partir de una descripción verbal** Al abrir una llave de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo haya estado corriendo el agua. Trace una gráfica de T como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió la llave.

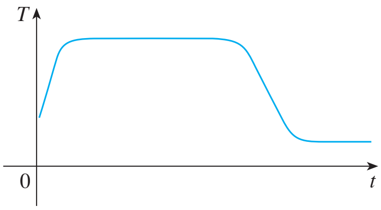


FIGURA 11

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente es cercana a la temperatura ambiente porque el agua ha estado en reposo en la tubería. Cuando el agua del tanque de agua caliente empieza a circular por la llave, T aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua caliente del tanque; cuando éste se descarga, T disminuye a la temperatura del agua de entrada. Esto hace posible que hagamos un trazo aproximado de T como función de t en la Figura 11.

En el siguiente ejemplo iniciamos con una descripción verbal de una función en una situación física y obtenemos una fórmula algebraica explícita. La capacidad de hacer esto es una técnica útil para resolver problemas de cálculo que piden valores máximo o mínimo de cantidades.

V **EJEMPLO 5** **Expresar un costo como una función** Un recipiente rectangular para almacenamiento, con su parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado; el de los lados, \$6. Exprese el costo de materiales como función del ancho de la base.

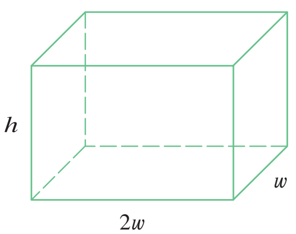


FIGURA 12

SOLUCIÓN Trazamos un diagrama como en la Figura 12 e introducimos una notación representando con w y $2w$ al ancho y longitud de la base, respectivamente, y con h la altura.

El área de la base es $(2w)w = 2w^2$, de modo que el costo del material para la base, en dólares, es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen área wh y los otros dos tienen área $2wh$, por lo cual el costo del material para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. El costo total es, por tanto,

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C como función sólo de w, necesitamos eliminar h y lo hacemos así usando el hecho de que el volumen es 10 m^3. Entonces,

$$w(2w)h = 10$$

que nos da

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Sustituyendo esto en la expresión para C, tenemos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por lo tanto la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como función de w.

RP Al establecer funciones aplicadas como en el Ejemplo 5, puede ser útil repasar los principios de resolución de problemas que estudiamos en la página 83, particularmente el *Paso 1: Entender el problema.*

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada función.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Convención de dominio
Si una función está dada por una fórmula y el dominio no se indica de manera explícita, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los cuales la fórmula tiene sentido y define a un número real.

SOLUCIÓN
(a) Como la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como número real), el dominio de f está formado por todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, de modo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Como

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

y la división entre 0 no está permitida, vemos que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Entonces el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que también podría escribirse en notación de intervalos como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿Qué curvas del plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta mediante la siguiente prueba.

Prueba de la recta vertical Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

La razón para la veracidad de la prueba de la recta vertical se puede ver en la Figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ intercepta una curva sólo una vez, en (a, b), entonces exactamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ intercepta la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

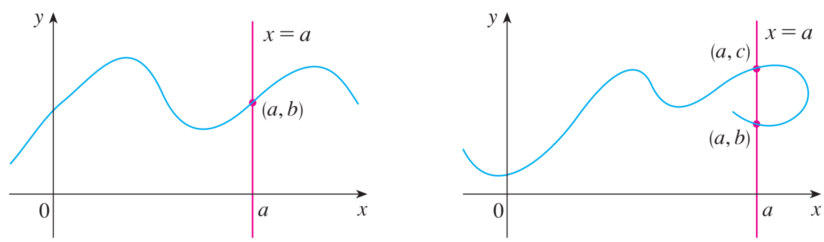


FIGURA 13

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que se ve en la Figura 14(a) no es la gráfica de una función de x porque, como se puede ver, hay rectas verticales que interceptan dos veces la parábola, pero ésta contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Observe que la ecuación $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, de modo que $y = \pm\sqrt{x+2}$. Entonces las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ [del Ejemplo 6(a)] y $g(x) = -\sqrt{x+2}$. [Véanse Figuras 14(b) y (c).] Observamos que si invertimos los papeles de x y y, entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ *define* a x como una función de y (con y como la variable independiente y x como la variable dependiente) y la parábola ahora aparece como la gráfica de la función h.

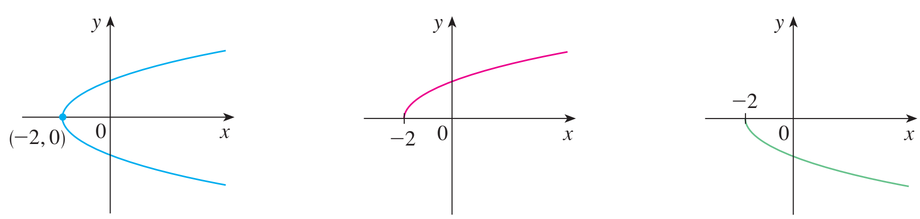


FIGURA 14 (a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

Funciones definidas por partes

Las funciones de los siguientes cuatro ejemplos están definidas por diferentes fórmulas en diferentes partes de sus dominios.

V EJEMPLO 7 Graficar una función definida por partes Una función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Evalúe $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función particular la regla es la siguiente: primero vea el valor de la entrada x. Si ocurre que $x \leqslant 1$, entonces el valor de $f(x)$ es $1 - x$. Por otra parte, si $x > 1$, entonces el valor de $f(x)$ es x^2.

Como $0 \leqslant 1$, tenemos $f(0) = 1 - 0 = 1$.

Como $1 \leqslant 1$, tenemos $f(1) = 1 - 1 = 0$.

Como $2 > 1$, tenemos $f(2) = 2^2 = 4$.

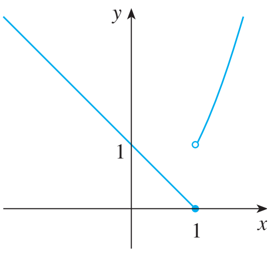


FIGURA 15

¿Cómo trazamos la gráfica de f? Observamos que si $x \leqslant 1$, entonces $f(x) = 1 - x$, de modo que la parte de la gráfica de f que está a la izquierda de la recta vertical $x = 1$ debe coincidir con la recta $y = 1 - x$, que tiene pendiente -1 e intersección y de 1. Si $x > 1$, entonces $f(x) = x^2$, de modo que la parte de la gráfica que está a la derecha de la recta $x = 1$ debe coincidir con la gráfica de $y = x^2$, que es una parábola. Esto hace posible que tracemos la gráfica en la Figura 15. El punto sólido indica que el punto $(1, 0)$ está incluido en la gráfica; el punto abierto indica que el punto $(1, 1)$ está excluido de la gráfica.

El siguiente ejemplo de una función definida por partes es la función de valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales. Las distancias siempre son positivas o 0, por lo cual tenemos

Para un repaso más amplio de valores absolutos, véase el Apéndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general, tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a && \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a && \text{si } a < 0 \end{aligned}}$$

(Recuerde que si a es negativa, entonces $-a$ es positiva.)

EJEMPLO 8 Trace la gráfica de la función de valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN De la exposición anterior sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

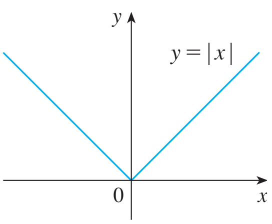


FIGURA 16

Usando el mismo método que en el Ejemplo 7, vemos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase Figura 16).

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f graficada en la Figura 17.

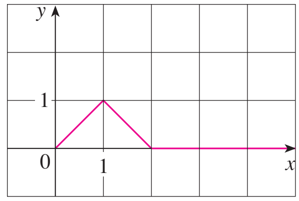


FIGURA 17

SOLUCIÓN La recta que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = 1$ e intersección y en $b = 0$, por lo cual su ecuación es $y = x$. Entonces, para la parte de la gráfica de f que une (0, 0) con (1, 1), tenemos

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Forma de punto-pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Véase Apéndice B.

La recta que pasa por (1, 1) y (2, 0) tiene pendiente $m = -1$, por lo cual su forma de punto pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{o bien} \qquad y = 2 - x$$

Por lo tanto tenemos $\qquad f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 < x \leqslant 2$

También vemos que la gráfica de f coincide con el eje x para $x > 2$. Si juntamos esta información, tenemos la siguiente fórmula de tres partes para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

EJEMPLO 10 **Gráfica de una función de correos** En el Ejemplo C al principio de esta sección consideramos el costo $C(w)$ de enviar por correo un sobre grande con peso w. En efecto, ésta es una función definida por partes porque, de la tabla de valores, tenemos

$$C(w) = \begin{cases} 0.83 & \text{si } 0 < w \leqslant 1 \\ 1.00 & \text{si } 1 < w \leqslant 2 \\ 1.17 & \text{si } 2 < w \leqslant 3 \\ 1.34 & \text{si } 3 < w \leqslant 4 \\ \vdots & \end{cases}$$

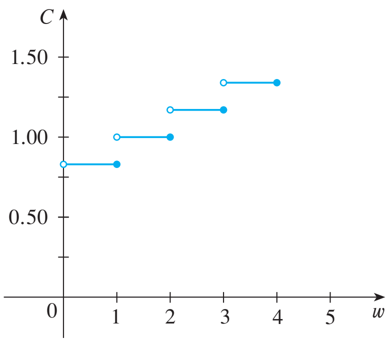


FIGURA 18

La gráfica se muestra en la Figura 18. Puede ver por qué las funciones semejantes a ésta se llaman **funciones escalón**, es decir, saltan de un valor al siguiente. Estas funciones se estudiarán en el Capítulo 2.

Simetría

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

La importancia geométrica de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase Figura 19). Esto significa que si hemos trazado la gráfica de f para $x \geqslant 0$, obtenemos toda la gráfica con sólo reflejar esta parte respecto al eje y.

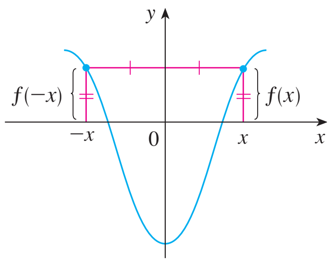


FIGURA 19 Una función par

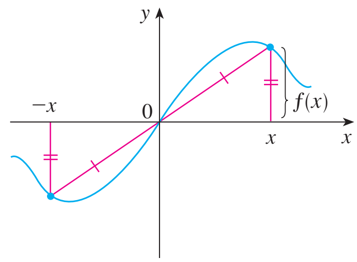


FIGURA 20 Una función impar

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen (véase Figura 20). Si ya tenemos la gráfica de f para $x \geqslant 0$, podemos obtener toda la gráfica al girar 180° esta parte alrededor del origen.

V EJEMPLO 11 Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de éstas.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una función impar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Por tanto, g es par.

(c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, concluimos que h no es par ni impar.

Las gráficas de las funciones del Ejemplo 11 se muestran en la Figura 21. Observe que la gráfica de h no es simétrica respecto al eje y ni respecto al origen.

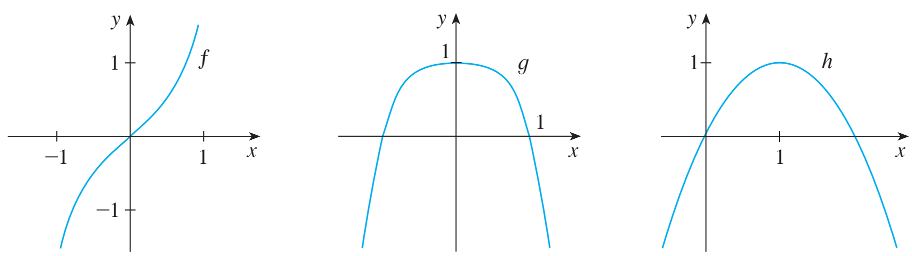


FIGURA 21 (a) (b) (c)

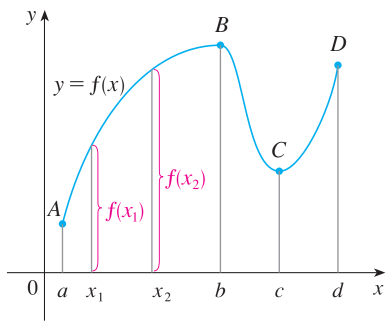


FIGURA 22

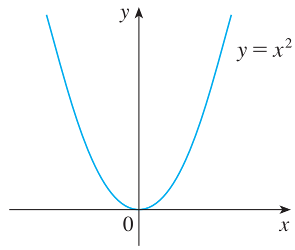


FIGURA 23

Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica que se ve en la Figura 22 sube de A a B, baja de B a C y sube otra vez de C a D. La función f se dice que es creciente en el intervalo $[a, b]$, decreciente en $[b, c]$ y otra vez creciente en $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son cualesquier dos números entre a y b con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Usamos esto como la propiedad de definición de una función creciente.

Una función f se llama **creciente** en un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** en I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 > x_2 \text{ en } I$$

En la definición de una función creciente es importante observar que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe satisfacerse para *todo* par de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

Se puede ver de la Figura 23 que la función $f(x) = x^2$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente en el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 Ejercicios

1. Se da la gráfica de una función f.

(a) Exprese el valor de $f(1)$.

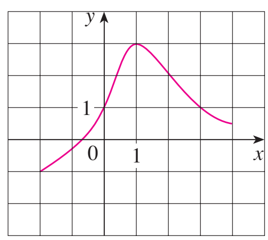
(b) Estime el valor de $f(-1)$.

(c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 1$?

(d) Estime el valor de x tal que $f(x) = 0$.

(e) Exprese el dominio y rango de f.

(f) ¿Sobre qué intervalo f es creciente?



2. Se dan las gráficas de f y g.

(a) Exprese los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.

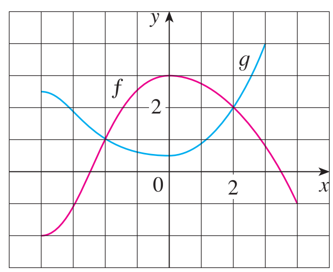
(b) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?

(c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.

(d) ¿En qué intervalos f es decreciente?

(e) Exprese el dominio y rango de f.

(f) Exprese el dominio y rango de g.



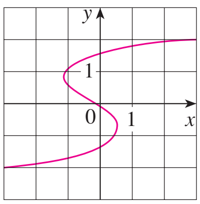
3. La Figura 1 fue registrada por un instrumento operado por el Departamento de Minas y Geología de California, en el Hospital Universitario de la Universidad del Sur de California (USC) en Los Ángeles. Úsela para estimar el rango de la función de aceleración vertical del suelo en la USC durante el terremoto de Northridge.

4. En esta sección estudiamos ejemplos de funciones ordinarias, de todos los días: la población es una función del tiempo, el costo del correo es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dé otros tres ejemplos de funciones que ocurren a diario que se describan verbalmente. ¿Qué se puede decir acerca del dominio y rango de cada una de las funciones? Si es posible, trace una gráfica aproximada de cada función.

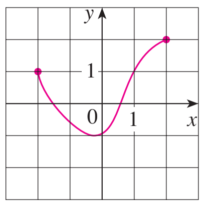
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

5–8 Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, exprese el dominio y rango de la función.

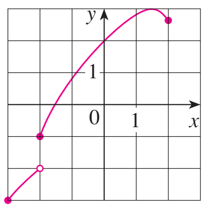
5.



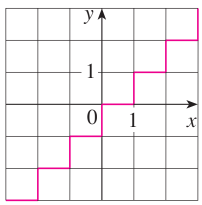
6.



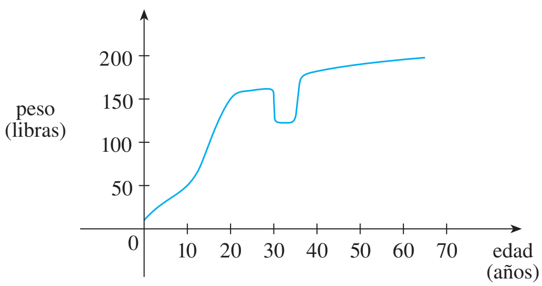
7.



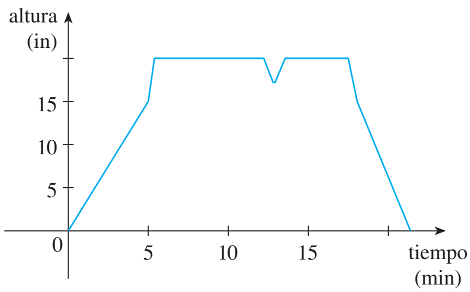
8.



9. La gráfica mostrada proporciona el peso de cierta persona como función de su edad. Describa con palabras la forma en que el peso de esta persona varía con el tiempo. ¿Qué piensa usted que ocurrió cuando esta persona tenía 30 años de edad?

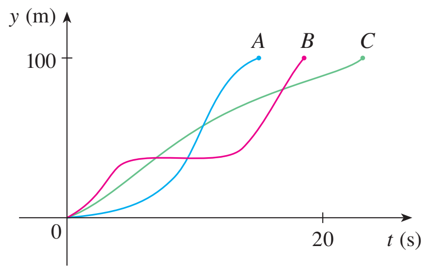


10. La gráfica muestra la altura del agua en una tina de baño como función del tiempo. Dé una descripción verbal de lo que piensa que ocurrió.



11. Una persona pone cubitos de hielo en un vaso, lo llena de agua fría y luego deja el vaso sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo. A continuación trace una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

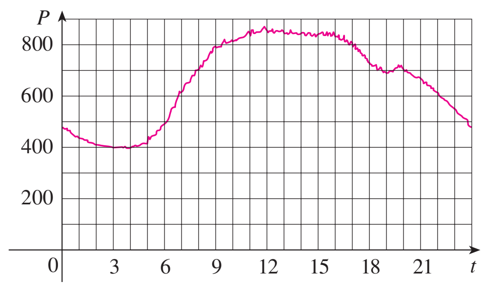
12. Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros. La gráfica describe la distancia recorrida como función del tiempo para cada corredor. Describa con palabras lo que la gráfica dice acerca de esta carrera ¿Quién ganó la carrera? ¿Todos los corredores terminaron la carrera?



13. La gráfica muestra el consumo de energía eléctrica para un día en septiembre en San Francisco. (P se mide en megawatts y t en horas empezando a medianoche.)

(a) ¿Cuál fue el consumo de energía eléctrica a las 6 a.m.? ¿Y a las 6 p.m.?

(b) ¿Cuándo fue más bajo el consumo de energía eléctrica? ¿Cuándo fue más alto? ¿Éstas parecen razonables?



Pacific Gas & Electric

14. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz diurna como función de la estación del año.

15. Trace una gráfica aproximada de la temperatura a la intemperie como función de la hora durante un día típico de primavera.

16. Trace una gráfica aproximada del valor de mercado de un auto nuevo como función del tiempo para un periodo de 20 años. Suponga que el auto está bien conservado.

17. Trace la gráfica de la cantidad de una marca particular de café vendido por una tienda como función del precio del café.

18. Una persona pone un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora, después de lo cual lo saca y lo deja enfriar antes de consumirlo. Describa cómo cambia la temperatura del pastel a medida que transcurre el tiempo y trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

19. El propietario de una casa poda su jardín todos los miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del pasto como función del tiempo en el curso de un periodo de cuatro semanas.

20. Un avión despega de un aeropuerto y aterriza una hora después en otro aeropuerto, a 400 millas de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión sale del edificio terminal,

sea $x(t)$ la distancia horizontal recorrida y sea $y(t)$ la altitud del avión.
(a) Trace una posible gráfica de $x(t)$.
(b) Trace una posible gráfica de $y(t)$.
(c) Trace una posible gráfica de la rapidez en relación con el suelo.
(d) Trace una posible gráfica de la velocidad vertical.

21. El número N (en millones) de suscriptores de teléfonos celulares en Estados Unidos se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados del año.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

(a) Use los datos para trazar una gráfica aproximada de N como función de t.
(b) Use su gráfica para estimar el número de suscriptores de teléfono celular a mediados de los años 2001 y 2005.

22. Las lecturas de temperatura T (en °F) se registraron cada dos horas desde la medianoche a las 2:00 p.m. en Baltimore, el 26 de septiembre de 2007. El tiempo t se midió en horas desde la medianoche.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	68	65	63	63	65	76	85	91

(a) Use las lecturas para trazar una gráfica aproximada de T como función de t.
(b) Use su gráfica para calcular la temperatura a las 11:00 a.m.

23. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encuentre $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ y $f(a+h)$.

24. Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene un volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire requerido para inflar el globo de un radio de r in a uno de $r + 1$ in.

25–28 Evalúe el cociente de una diferencia para la función dada. Simplifique su respuesta.

25. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\quad \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

26. $f(x) = x^3$, $\quad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

27. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

28. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

29–33 Encuentre el dominio de la función.

29. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 9}$

30. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + x - 6}$

31. $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

32. $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

33. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

34. Encuentre el dominio y rango y trace la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

35–46 Encuentre el dominio y trace la gráfica de la función.

35. $f(x) = 2 - 0.4x$

36. $F(x) = x^2 - 2x + 1$

37. $f(t) = 2t + t^2$

38. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

39. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

40. $F(x) = |2x + 1|$

41. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

42. $g(x) = |x| - x$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ -6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

47–52 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

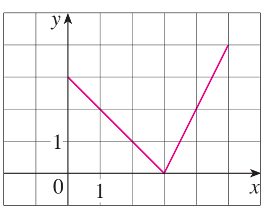
47. El segmento de recta que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$

48. El segmento de recta que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$

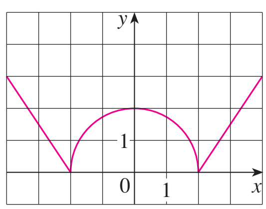
49. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$

50. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

51.



52.



53–57 Encuentre una fórmula para la función descrita y exprese su dominio.

53. Un rectángulo tiene perímetro de 20 m. Exprese el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

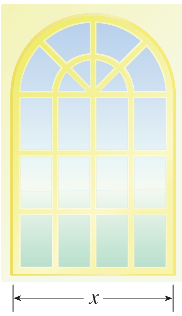
54. Un rectángulo tiene área de 16 m^2. Exprese el perímetro del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

55. Exprese el área de un triángulo equilátero como una función de la longitud de un lado.

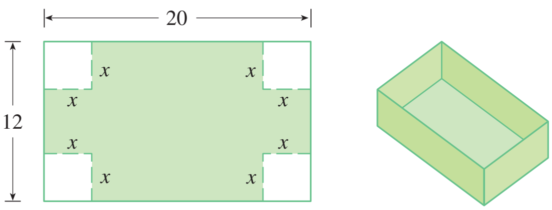
56. Exprese el área superficial de un cubo como función de su volumen.

57. Una caja rectangular abierta con volumen de 2 m^3, tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja como función de la longitud de un lado de la base.

58. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 ft, exprese el área A de la ventana como función del ancho x de la ventana.



59. Se ha de construir una caja abierta por arriba, a partir de una pieza rectangular de cartón con dimensiones de 12 in por 20 in, al cortar cuadrados iguales de lado x en cada esquina y luego doblar los lados como se ve en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x.



60. Una compañía que suministra electricidad cobra a sus clientes una tarifa base de \$10 al mes, más 6 centavos por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 1200 kWh y 7 centavos por kWh por todos los que pasen de 1200 kWh. Exprese el costo mensual E como función de la cantidad x de electricidad consumida. A continuación grafique la función E para $0 \leqslant x \leqslant 2000$.

61. En cierto país, el impuesto sobre la renta se evalúa como sigue. No hay impuesto sobre ingresos hasta de \$10,000. Cualquier ingreso que pase de \$10,000 se grava a una tasa de 10%, hasta un ingreso de \$20,000. Cualquier ingreso de más de \$20,000 se grava al 15%.

(a) Trace la gráfica de la tasa de impuesto R como función del ingreso I.

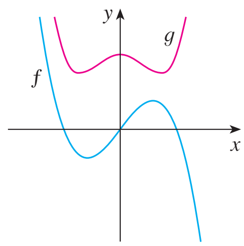
(b) ¿Cuánto impuesto se grava sobre un ingreso de \$14,000? ¿Y sobre \$26,000?

(c) Trace la gráfica del total de impuesto gravado T como función del ingreso I.

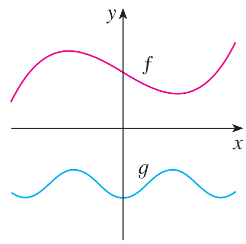
62. Las funciones del Ejemplo 10 y el Ejercicio 61(a) se llaman *funciones escalón* porque sus gráficas parecen escaleras. Dé otros dos ejemplos de funciones escalón que aparecen a diario.

63–64 Observe las gráficas de f y g siguientes. Determine si cada función es par, impar o ninguna de éstas. Explique su razonamiento.

63.



64.



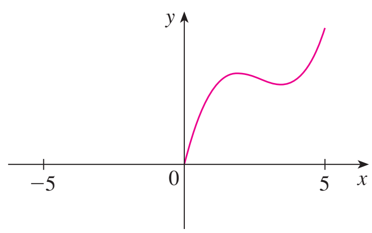
65. (a) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función par, ¿qué otro punto debe estar también en la gráfica?

(b) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función impar, ¿qué otro punto debe estar también en la gráfica?

66. Una función f tiene dominio $[-5, 5]$ y se ilustra una parte de su gráfica.

(a) Complete la gráfica de f si se sabe que f es par.

(b) Complete la gráfica de f si se sabe que f es impar.



67–72 Determine si f es par, impar o ninguna de éstas; si tiene calculadora graficadora, úsela para comprobar visualmente su respuesta.

67. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

68. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

69. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

70. $f(x) = x|x|$

71. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

72. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

73. Si f y g son funciones pares, ¿$f + g$ es par? Si f y g son funciones impares, ¿$f + g$ es impar? ¿Qué pasa si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

74. Si f y g son funciones pares ambas, ¿el producto fg es par? Si f y g son funciones impares ambas, ¿fg es impar? ¿Qué pasa si f es par y g es impar? Justifique sus respuestas.

1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones esenciales

Un **modelo matemático** es una descripción matemática (con frecuencia por medio de una función o una ecuación) de un fenómeno real como lo es el tamaño de una población, la demanda para un producto, la rapidez de un cuerpo en caída, la concentración de un producto en una reacción química, la esperanza de vida de una persona cuando nace o el costo de reducciones de emisiones. El propósito del modelo es entender el fenómeno y quizá hacer predicciones acerca de su futuro comportamiento.

La Figura 1 ilustra el proceso de un modelado matemático. Dado un problema real, nuestra primera tarea es formular un modelo matemático al identificar y dar nombre a las variables independiente y dependiente y hacer suposiciones que simplifiquen el fenómeno, lo suficiente para hacerlo matemáticamente manejable. Usamos nuestro conocimiento de la situación física y nuestros conocimientos matemáticos para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En situaciones donde no hay ley física que nos guíe, podría haber necesidad de recolectar datos (ya sea de una biblioteca o de Internet o realizando nuestros propios experimentos) y examinar los datos en la forma de una tabla para distinguir patrones. De esta representación numérica de una función podríamos obtener una representación gráfica si trazamos los datos. La gráfica podría hasta sugerir una fórmula algebraica apropiada en algunos casos.

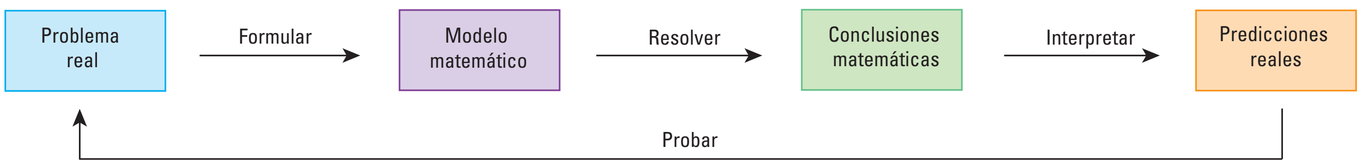


FIGURA 1 El proceso de modelado

La segunda etapa es aplicar las matemáticas que conocemos (por ejemplo el cálculo que desarrollamos en todo este libro) al modelo matemático que hemos formulado, para deducir conclusiones matemáticas. A continuación, en la tercera etapa, tomamos estas conclusiones matemáticas y las interpretamos como información acerca del fenómeno original real, ofreciendo explicaciones o haciendo predicciones. El paso final es probar nuestras predicciones al comprobarlas contra nuevos datos reales. Si las predicciones no se comparan bien con la realidad, necesitamos refinar nuestro modelo o formular un nuevo modelo y empezar el ciclo otra vez.

Un modelo matemático nunca es una representación completamente precisa de una situación física; es una *idealización*. Un buen modelo simplifica la realidad suficiente para permitir cálculos matemáticos pero es bastante preciso como para dar conclusiones valiosas. Es importante darse cuenta de las limitaciones del modelo. A fin de cuentas, la Madre Naturaleza tiene la última palabra.

Hay numerosos tipos diferentes de funciones que se pueden usar para modelar relaciones observadas en el mundo real. En lo que sigue, estudiamos el comportamiento y gráficas de estas funciones y damos ejemplos de situaciones apropiadamente modeladas por estas funciones.

Modelos lineales

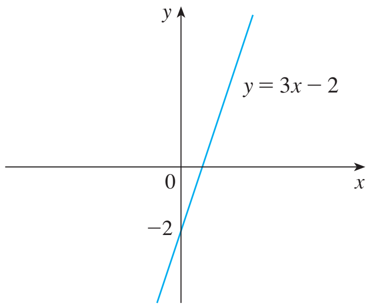
Hay un repaso de geometría de coordenadas y rectas en el Apéndice B.

Cuando decimos que y es una **función lineal** de x, queremos decir que la gráfica de la función es una recta, de modo que podemos usar la forma pendiente-intersección con y de la ecuación de una recta para escribir una fórmula para la función como

$$y = f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la intersección con y.

Una característica de las funciones lineales es que crecen a una razón constante. Por ejemplo, la Figura 2 muestra una gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ y una tabla de valores de muestra. Observe que siempre que x aumente en 0.1, el valor de $f(x)$ aumenta en 0.3. Por tanto, $f(x)$ aumenta tres veces más que x. Así, la pendiente de la gráfica $y = 3x - 2$, es decir 3, se puede interpretar como la rapidez de cambio de y con respecto a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

V EJEMPLO 1 Interpretación de la pendiente de un modelo lineal

(a) A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se dilata y se enfría. Si la temperatura del suelo es 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es 10°C, exprese la temperatura T (en °C) como función de la altitud h (en kilómetros), suponiendo que un modelo lineal es apropiado.

(b) Trace la gráfica de la función del inciso (a). ¿Qué representa la pendiente?

(c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

SOLUCIÓN

(a) Como estamos suponiendo que T es una función lineal de h, podemos escribir

$$T = mh + b$$

Nos indican que $T = 20$ cuando $h = 0$, de modo que

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

En otras palabras, la intersección con y es $b = 20$.

También nos indican que $T = 10$ cuando $h = 1$, y entonces

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

La pendiente de la recta es, por tanto, $m = 10 - 20 = -10$ y la función lineal requerida es

$$T = -10h + 20$$

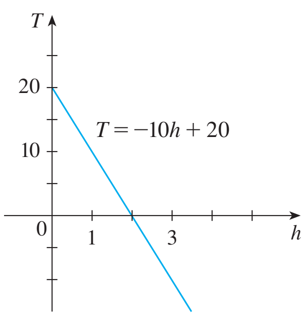


FIGURA 3

(b) La gráfica está trazada en la Figura 3. La pendiente es $m = -10°\text{C/km}$, y esto representa la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la altitud.

(c) A una altitud de $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -5°\text{C}$$

Si no hay ley física o principio para ayudarnos a formular un modelo, construimos un **modelo empírico**, que está basado por completo en la información recolectada. Buscamos una curva que se "ajuste" a la información en el sentido que capte la tendencia básica de los puntos que representan a los datos.

V EJEMPLO 2 **Un modelo de regresión lineal** La Tabla 1 contiene el promedio del nivel de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el observatorio Mauna Loa, de 1980 a 2006. Use los datos de la Tabla 1 para hallar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.

SOLUCIÓN Usamos los datos de la Tabla 1 para hacer la gráfica de dispersión en la Figura 4, donde t representa tiempo (en años) y C representa el nivel de CO_2 (en partes por millón, ppm).

TABLA 1

Año	Nivel de CO_2 (en ppm)	Año	Nivel de CO_2 (en ppm)
1980	338.7	1994	358.9
1982	341.1	1996	362.6
1984	344.4	1998	366.6
1986	347.2	2000	369.4
1988	351.5	2002	372.9
1990	354.2	2004	377.5
1992	356.4	2006	381.9

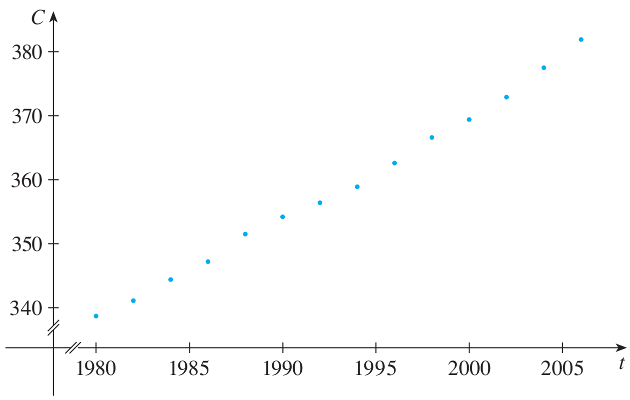


FIGURA 4 Gráfica de dispersión para el nivel promedio de CO_2

Observe que los puntos de datos parecen estar cerca de una recta, de modo que es natural escoger un modelo lineal en este caso. Pero hay numerosas rectas posibles que se aproximan a estos puntos de datos, y ¿cuál debemos usar? Una posibilidad es la recta que pasa por los puntos primero y último. La pendiente de esta recta es

$$\frac{381.9 - 338.7}{2006 - 1980} = \frac{43.2}{26} \approx 1.6615$$

y su ecuación es

$$C - 338.7 = 1.6615(t - 1980)$$

o bien

$$C = 1.6615t - 2951.07 \tag{1}$$

La ecuación 1 proporciona un posible modelo lineal para el nivel de dióxido de carbono; la gráfica se muestra en la Figura 5.

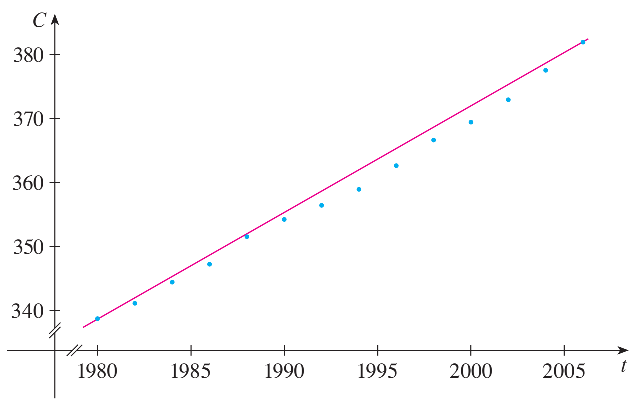


FIGURA 5
Modelo lineal que pasa por los puntos de datos primero y último

Observe que nuestro modelo proporciona valores más altos que casi todos los niveles reales de CO_2. Un mejor modelo lineal se obtiene por un procedimiento de estadística llamado *regresión lineal*. Si usamos una calculadora graficadora, introducimos los datos

Una computadora, o calculadora graficadora, encuentra la recta de regresión por el método de **mínimos cuadrados**, que es para minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos de datos y la recta. Los detalles se explican en la Sección 11.7.

de la Tabla 1 en el editor de datos y escogemos el comando de regresión lineal. (Con Maple usamos el comando fit[leastsquare] del paquete de estadística; con Mathematica usamos el comando Fit.) La máquina proporciona la pendiente e intersección con y de la recta de regresión como

$$m = 1.62319 \qquad b = -2876.20$$

Así que nuestro modelo de mínimos cuadrados para el nivel de CO_2 es

$$\boxed{2} \qquad C = 1.62319t - 2876.20$$

En la Figura 6 graficamos la recta de regresión y los puntos de datos. Comparando con la Figura 5, vemos que da un mejor ajuste que nuestro modelo lineal previo.

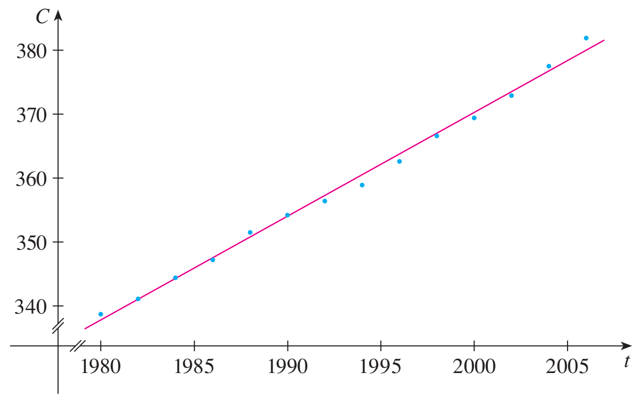


FIGURA 6
La recta de regresión

V EJEMPLO 3 Uso de un modelo lineal para predicción Use el modelo lineal dado por la Ecuación 2 para calcular el nivel promedio de CO_2 en 1987 y predecir el nivel para el año 2012. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo excederá el CO_2 el nivel de 400 partes por millón?

SOLUCIÓN Usando la Ecuación 2 con $t = 1987$, estimamos que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue de

$$C(1987) = (1.62319)(1987) - 2876.20 \approx 349.08$$

Éste es un ejemplo de *interpolación* porque hemos calculado un valor *entre* valores observados. (De hecho, el observatorio de Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue de 348.93 ppm, de modo que nuestra estimación es bastante precisa.)

Con $t = 2012$, obtenemos

$$C(2012) = (1.62319)(2012) - 2876.20 \approx 389.66$$

Por tanto, predecimos que el nivel promedio de CO_2 en el año 2012 será 389.7 ppm. Éste es un ejemplo de *extrapolación* porque hemos pronosticado un valor *fuera* de la región de observaciones. En consecuencia, estamos mucho menos seguros acerca de la precisión de nuestro pronóstico.

Usando la Ecuación 2, vemos que el nivel de CO_2 excede de 400 ppm cuando

$$1.62319t - 2876.20 > 400$$

Resolviendo esta desigualdad, tenemos

$$t > \frac{3276.20}{1.62319} \approx 2018.37$$

Por tanto pronosticamos que el nivel de CO_2 rebasará las 400 ppm hacia el año 2018. Esta predicción es riesgosa porque abarca un tiempo bastante remoto de nuestras observaciones. De hecho, vemos de la Figura 6 que la tendencia ha sido para que niveles de CO_2 aumenten más rápidamente en años recientes, de modo que el nivel podría exceder de las 400 ppm mucho antes de 2018.

Polinomios

Una función P se llama **polinomial** si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas **coeficientes** del polinomio. El dominio de cualquier polinomio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** del polinomio es n. Por ejemplo, la función

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

es un polinomio de grado 6.

Un polinomio de grado 1 es de la forma $P(x) = mx + b$ y es una función lineal. Un polinomio de grado 2 es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ y se llama **función cuadrática**. Su gráfica es siempre una parábola obtenida al desplazar la parábola $y = ax^2$, como veremos en la siguiente sección. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. (Véase Figura 7.)

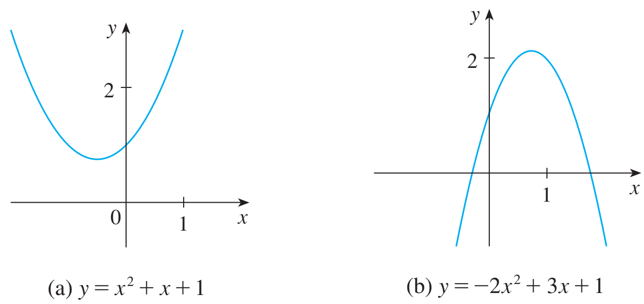


FIGURA 7
Las gráficas de funciones cuadráticas son parábolas.

Un polinomio de grado 3 es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

y se llama **función cúbica**. La Figura 8 muestra la gráfica de una función cúbica en el inciso (a) y gráficas de polinomios de grados 4 y 5 en los incisos (b) y (c). Veremos más adelante por qué las gráficas tienen estas formas.

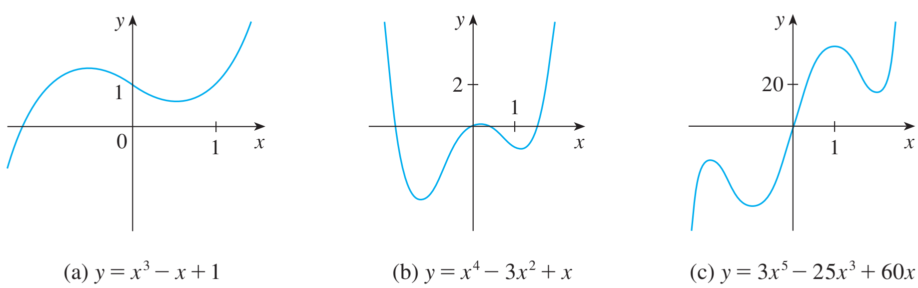


FIGURA 8

Por lo general se usan polinomios para modelar diversas cantidades que se presentan en ciencias naturales y sociales. Por ejemplo, en la Sección 3.8 explicaremos por qué los economistas con frecuencia usan un polinomio $P(x)$ para representar el costo de producir x unidades de un artículo. En el siguiente ejemplo usamos una función cuadrática para modelar la caída de una pelota.

TABLA 2

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EJEMPLO 4 Un modelo cuadrático Una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, 450 m sobre el suelo y su altura h por encima del suelo se registra a intervalos de 1 segundo en la Tabla 2. Encuentre un modelo para ajustar los datos y usar el modelo para predecir el tiempo en el que la pelota tocará el suelo.

SOLUCIÓN Trazamos una gráfica de dispersión de los datos en la Figura 9 y observamos que un modelo lineal es inapropiado. Pero se ve como si los puntos de datos pudieran estar en una parábola de modo que, por tanto, tratamos con un modelo cuadrático. Si usamos una calculadora graficadora o un sistema computarizado de álgebra (que emplea el método de mínimos cuadrados), obtenemos el siguiente modelo cuadrático:

$$\boxed{3} \qquad h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2$$

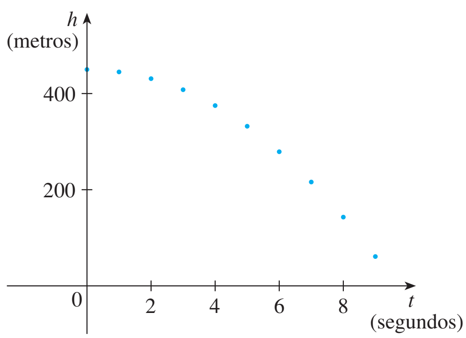


FIGURA 9
Gráfica de dispersión para la caída de una pelota

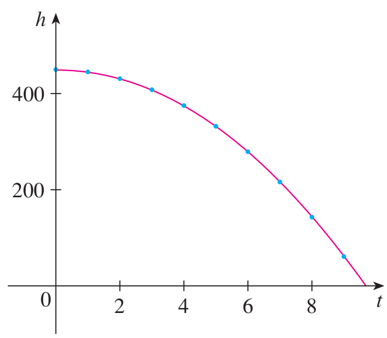


FIGURA 10
Modelo cuadrático para la caída de una pelota

En la Figura 10 trazamos la gráfica de la Ecuación 3 junto con los puntos de datos y vemos que el modelo cuadrático proporciona un muy buen ajuste.

La pelota cae al suelo cuando $h = 0$, de modo que resolvemos la ecuación cuadrática

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

La fórmula cuadrática da

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

La raíz positiva es $t \approx 9.67$, y predecimos que la pelota caerá al suelo después de 9.7 segundos.

Funciones de potencia

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama **función de potencia**. Consideramos varios casos.

(i) $a = n$, donde n es un entero positivo

Las gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 se muestran en la Figura 11. (Éstos son polinomios con sólo un término.) Ya conocemos la forma de las gráficas de $y = x$ (una recta que pasa por el origen con pendiente 1) y $y = x^2$ [una parábola, véase el Ejemplo 2(b) en la Sección 1.1].

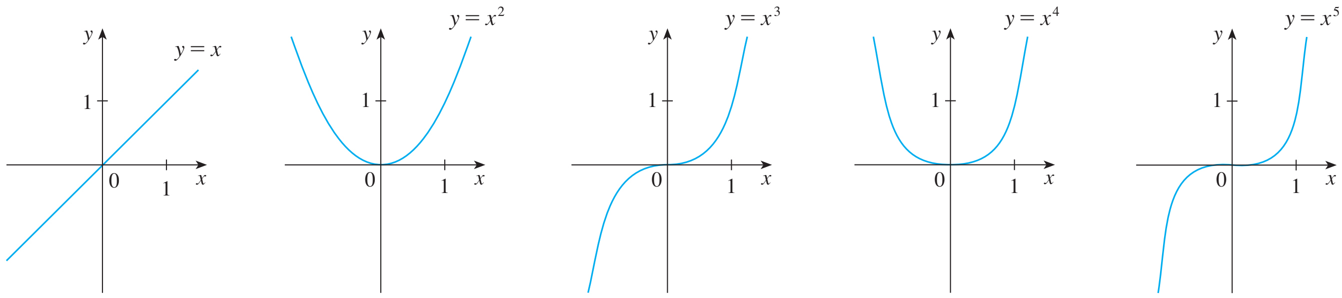


FIGURA 11 Gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. Si n es par, entonces $f(x) = x^n$ es una función par y su gráfica es semejante a la parábola $y = x^2$; si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ es una función impar y su gráfica es semejante a la de $y = x^3$. Observe de la Figura 12, sin embargo, que a medida que n aumenta, la gráfica de $y = x^n$ se hace más plana cerca de 0 y más empinada cuando $|x| \geqslant 1$. (Si x es pequeña, entonces x^2 es más pequeña, x^3 es todavía más pequeña, x^4 es más pequeña aún, y así sucesivamente.)

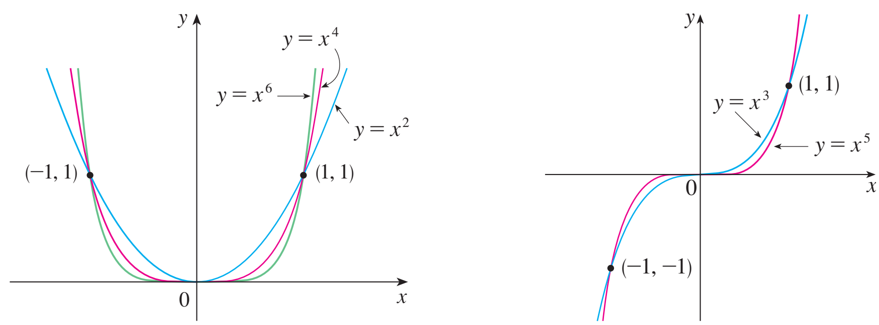


FIGURA 12
Familias de funciones de potencia

(ii) $a = 1/n$, donde n es un entero positivo

La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **función raíz**. Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cuyo dominio es $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. [Véase Figura 13(a).] Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es semejante a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$ tenemos la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (recuerde que todo número real tiene una raíz cúbica) y cuya gráfica se muestra en la Figura 13(b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar ($n > 3$) es semejante a la de $y = \sqrt[3]{x}$.

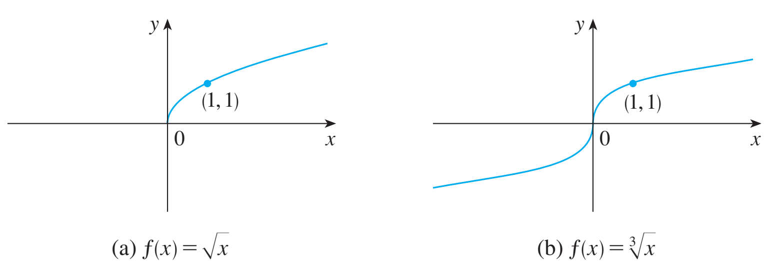


FIGURA 13
Gráficas de funciones raíz

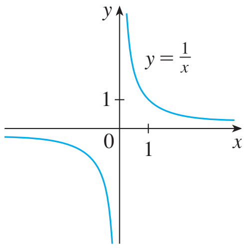


FIGURA 14
La función recíproca

(iii) $a = -1$

La gráfica de la **función recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ se muestra en la Figura 14. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$, o $xy = 1$, y es una hipérbola con los ejes de coordenadas como sus asíntotas. Esta función aparece en física y química en conexión con la Ley de Boyle que dice que, cuando la temperatura es constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

$$V = \frac{C}{P}$$

donde C es una constante. Así, la gráfica de V como función de P (véase Figura 15) tiene la misma forma general que la mitad derecha de la Figura 14.

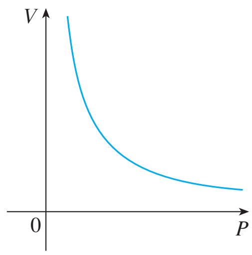


FIGURA 15
El volumen como función de la presión a temperatura constante

Otro ejemplo en el que se usa la función de potencia es para modelar un fenómeno físico como se estudia en el Ejercicio 26.

Funciones racionales

Una **función racional** f es una razón entre dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio está formado por todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo sencillo de una función racional es la función $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$; ésta es la función recíproca graficada en la Figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. Su gráfica se muestra en la Figura 16.

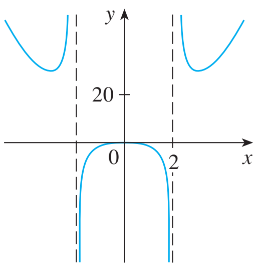


FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funciones algebraicas

Una función f recibe el nombre de **función algebraica** si se puede construir usando operaciones algebraicas (por ejemplo suma, resta, multiplicación, división y toma de raíces) empezando con polinomios. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica. Aquí vemos dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Cuando tracemos funciones algebraicas en el Capítulo 4, veremos que sus gráficas pueden tomar diversas formas. La Figura 17 ilustra algunas de las posibilidades.

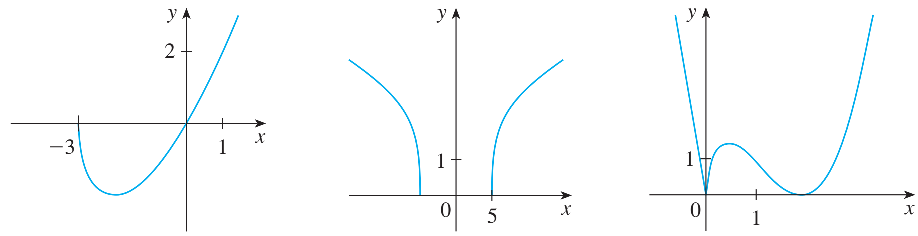


FIGURA 17

(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

Un ejemplo de una función algebraica se presenta en la teoría de relatividad. La masa de una partícula con velocidad v es

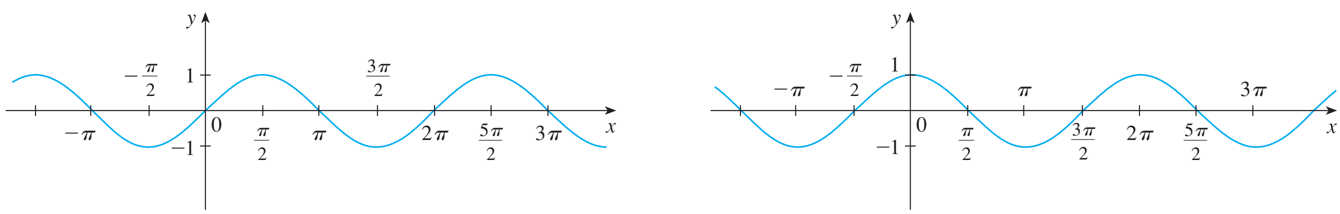
$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0 \times 10^5$ km/s es la rapidez de la luz en un vacío.

Funciones trigonométricas

Las páginas de referencia se encuentran al final del libro.

En la página de referencia 2 y en el Apéndice C hacemos un repaso de trigonometría y de las funciones trigonométricas. En cálculo, la convención es que siempre se usen medidas en radianes (excepto cuando se indique de otro modo). Por ejemplo, cuando usamos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es x. De esta forma, las gráficas de las funciones seno y coseno se muestran en la Figura 18.



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por tanto, para todos los valores de x, tenemos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

o bien, en términos de valores absolutos,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Del mismo modo, los ceros de la función seno se presentan en múltiplos enteros de π; esto es,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{cuando} \qquad x = n\pi \quad n \text{ un entero}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas y tienen periodo 2π. Esto significa que, para todos los valores de x,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

La naturaleza periódica de estas funciones las hace apropiadas para modelar fenómenos repetitivos como son las mareas, resortes en vibración y ondas de sonido. Por ejemplo, en el Ejemplo 4 en la Sección 1.3 veremos que un modelo razonable para el número de horas de luz diurna en Filadelfia t días después del 1 de enero está dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

La función tangente está relacionada a las funciones seno y coseno por la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

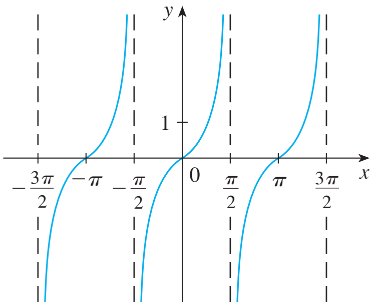
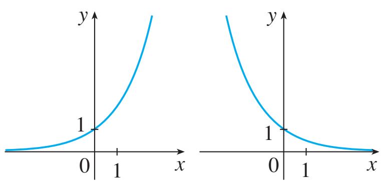


FIGURA 19
$y = \tan x$

y su gráfica se muestra en la Figura 19. No está definida siempre que $\cos x = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Su rango es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son las recíprocas de las funciones seno, coseno y tangente. Sus gráficas se muestran en el Apéndice C.



(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

FIGURA 20

Funciones exponenciales

Las **funciones exponenciales** son las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. Las gráficas $y = 2^x$ y $y = (0.5)^x$ se muestran en la Figura 20. En ambos casos, el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \infty)$.

Las funciones exponenciales se estudiarán en detalle en la Sección 1.5, y veremos que son útiles para modelar numerosos fenómenos naturales, como el crecimiento poblacional (si $a > 1$) y la desintegración radiactiva (si $a < 1$).

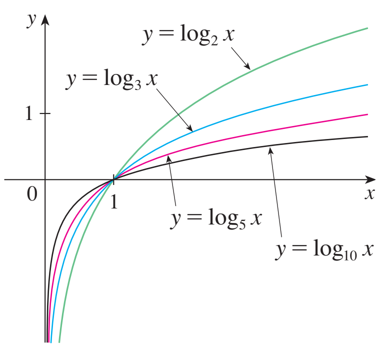


FIGURA 21

Funciones logarítmicas

Las **funciones logarítmicas** $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales. Éstas se estudiarán en la Sección 1.6. La Figura 21 presenta las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diversas bases. En cada caso, el dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$ y la función aumenta lentamente cuando $x > 1$.

EJEMPLO 5 Clasifique las siguientes funciones como uno de los tipos de funciones que hemos estudiado.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUCIÓN

(a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

(b) $g(x) = x^5$ es una función de potencia. (La x es la base.) Podríamos también considerarla como un polinomio de grado 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es una polinomial de grado 4.

1.2 Ejercicios

1–2 Clasifique cada función como una función de potencia, función raíz polinomial (indique su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. (a) $f(x) = \log_2 x$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$

(c) $h(x) = \dfrac{2x^3}{1 - x^2}$ (d) $u(t) = 1 - 1.1t + 2.54t^2$

(e) $v(t) = 5^t$ (f) $w(\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$

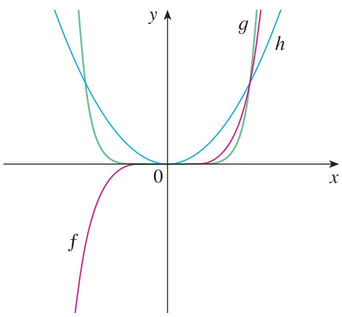
2. (a) $y = \pi^x$ (b) $y = x^\pi$

(c) $y = x^2(2 - x^3)$ (d) $y = \tan t - \cos t$

(e) $y = \dfrac{s}{1 + s}$ (f) $y = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

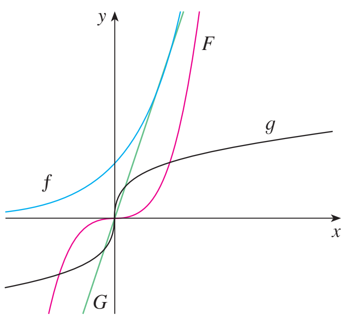
3–4 Relacione cada ecuación con su gráfica. Explique sus selecciones. (No use computadora o calculadora graficadora.)

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$

(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5. (a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y trace varios miembros de la familia.

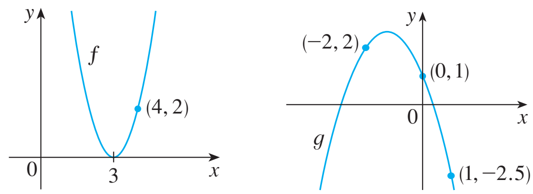
(b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y trace varios miembros de la familia.

(c) ¿Cuál función pertenece a ambas familias?

6. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Trace varios miembros de la familia.

7. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = c - x$? Trace varios miembros de la familia.

8. Encuentre expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran.



9. Encuentre una expresión para una función cúbica f si $f(1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

10. Estudios recientes indican que el promedio de temperatura de la superficie de nuestro planeta ha estado subiendo continuamente. Algunos científicos han modelado la temperatura por medio de la función lineal $T = 0.02t + 8.50$, donde T es temperatura en °C y t representa años desde 1900.

(a) ¿Qué representa la pendiente y la intersección de T?

(b) Use la ecuación para predecir el promedio de temperatura de la superficie del mundo en 2100.

11. Si la dosis recomendada de un medicamento para adultos es D (en mg), entonces para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, los farmacéuticos usan la ecuación $c = 0.0417D(a + 1)$. Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

(a) Encuentre la pendiente de la gráfica de c. ¿Qué representa?

(b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

12. El gerente de un mercado de cosas usadas sabe por experiencia que si cobra x dólares por un espacio de renta para el mercado, entonces el número y de espacios que puede rentar está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

(a) Trace una gráfica de esta función lineal. (Recuerde que el cobro de renta por espacio y el número de espacios rentados no pueden ser cantidades negativas.)

(b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con y y la intersección con x de la gráfica?

13. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.

(a) Trace una gráfica de esta función.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección en F y qué representa?

14. Jason sale de Detroit a las 2:00 p.m. y viaja en auto a una rapidez constante hacia el oeste por la carretera I-96. Pasa por Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 p.m.

(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

(b) Trace la gráfica de la ecuación del inciso (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

15. Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos por minuto a 70°F y 173 chirridos por minuto a 80°F.
(a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura T como función del número N de chirridos por minuto.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Qué representa?
(c) Si los grillos chirrían a 150 chirridos por minuto, calcule la temperatura.

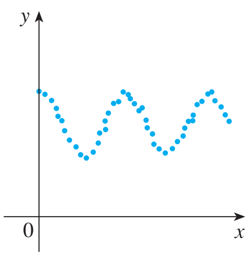
16. El gerente de una fábrica de muebles encuentra que cuesta \$2,200 fabricar 100 sillas en un día y \$4,800 producir 300 sillas en un día.
(a) Exprese el costo como una función del número de sillas producidas, suponiendo que es lineal. A continuación trace la gráfica.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
(c) ¿Cuál es la intersección con y de la gráfica y qué representa?

17. En la superficie del océano, la presión del agua es igual que la presión del aire sobre el agua, 15 lb/in^2. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/in^2 por cada 10 ft de descenso.
(a) Exprese la presión del agua como función de la profundidad debajo de la superficie del océano.
(b) ¿A qué profundidad es de 100 lb/in^2 la presión?

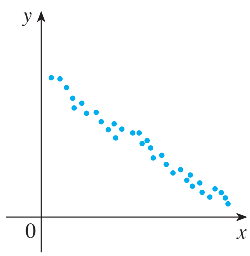
18. El costo mensual de usar un auto depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo le costó \$380 recorrer 480 millas y en junio le costó \$460 recorrer 800 millas.
(a) Exprese el costo mensual C como función de la distancia d recorrida, suponiendo que la relación lineal da un modelo apropiado.
(b) Use el inciso (a) para predecir el costo de recorrer 1500 millas al mes.
(c) Trace la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?
(d) ¿Qué representa la intersección C?
(e) ¿Por qué una función lineal da un modelo apropiado en esta situación?

19–20 Para cada gráfica de dispersión, determine qué tipo de función podría escoger como modelo para los datos. Explique sus elecciones.

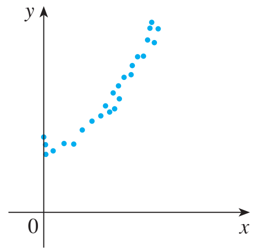
19. (a)



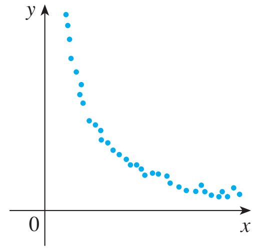
(b)



20. (a)



(b)



21. La tabla siguiente muestra porcentajes de úlcera péptica (de por vida, por 100 habitantes) para diversos ingresos familiares, según informa la National Health Interview Survey (Encuesta Nacional de Entrevistas de Salud).

Ingreso	Porcentaje de úlceras (por 100 habitantes)
\$4,000	14.1
\$6,000	13.0
\$8,000	13.4
\$12,000	12.5
\$16,000	12.0
\$20,000	12.4
\$30,000	10.5
\$45,000	9.4
\$60,000	8.2

(a) Haga una gráfica de dispersión de estos datos y determine si un modelo lineal es apropiado.
(b) Encuentre y grafique un modelo lineal usando los puntos de datos primero y último.
(c) Encuentre y grafique la recta de regresión de mínimos cuadrados.
(d) Use un modelo lineal en el inciso (c) para calcular el porcentaje de úlceras para un ingreso de \$25,000.
(e) De acuerdo con el modelo, ¿qué tan probable es que alguien con un ingreso de \$80,000 sufra de úlceras pépticas?
(f) ¿Piensa usted que sería razonable aplicar el modelo a alguien con un ingreso de \$200,000?

22. Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie parece estar relacionada con la temperatura. La tabla siguiente muestra las frecuencias de chirridos para varias temperaturas.

Temperatura (°F)	Frecuencia de chirridos (chirridos/min)	Temperatura (°F)	Frecuencia de chirridos (chirridos/min)
50	20	75	140
55	46	80	173
60	79	85	198
65	91	90	211
70	113		

(a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.
(b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
(c) Use el modelo lineal del inciso (b) para calcular la frecuencia de chirridos a 100°F.

23. La tabla siguiente muestra las alturas ganadoras para competencias olímpicas de salto con garrocha hasta el año 2000.

Año	Altura (m)	Año	Altura (m)
1896	3.30	1956	4.56
1900	3.30	1960	4.70
1904	3.50	1964	5.10
1908	3.71	1968	5.40
1912	3.95	1972	5.64
1920	4.09	1976	5.64
1924	3.95	1980	5.78
1928	4.20	1984	5.75
1932	4.31	1988	5.90
1936	4.35	1992	5.87
1948	4.30	1996	5.92
1952	4.55	2000	5.90

(a) Haga una gráfica de dispersión y determine si un modelo lineal es apropiado.
(b) Encuentre y grafique la recta de regresión.
(c) Use el modelo lineal para predecir la altura del salto de garrocha ganador en los Juegos Olímpicos de 2004, y compare con la altura ganadora real de 5.95 metros.
(d) ¿Es razonable usar el modelo para predecir la altura ganadora en los Juegos Olímpicos de 2100?

24. La tabla siguiente muestra el porcentaje de la población de Argentina que ha vivido en zonas rurales de 1955 a 2000. Encuentre un modelo para los datos y úselo para calcular el porcentaje rural en 1988 y 2002.

Año	Porcentaje (rural)	Año	Porcentaje (rural)
1955	30.4	1980	17.1
1960	26.4	1985	15.0
1965	23.6	1990	13.0
1970	21.1	1995	11.7
1975	19.0	2000	10.5

25. Use los datos de la tabla para modelar la población mundial en el siglo XX por medio de una función cúbica. A continuación use su modelo para calcular la población en el año 1925.

Año	Población (millones)	Año	Población (millones)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

26. La tabla siguiente muestra las distancias d medias (promedio) de los planetas desde el Sol (tomando la unidad de medición como la distancia de la Tierra al Sol) y sus periodos T (tiempo de revolución en años).

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784

(a) Ajuste un modelo de potencia a los datos.
(b) La Tercera Ley de Kepler del movimiento planetario expresa que

"El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media desde el Sol."

¿El modelo desarrollado por usted corrobora la Tercera Ley?

1.3 Nuevas funciones a partir de funciones anteriores

En esta sección iniciamos con las funciones básicas que estudiamos en la Sección 1.2 y obtenemos nuevas funciones al desplazar, estirar y reflejar sus gráficas. También mostramos la forma de combinar pares de funciones por medio de las operaciones aritméticas normales y por composición.

Transformaciones de funciones

Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de una función dada podemos obtener las gráficas de ciertas funciones relacionadas. Esto nos dará la capacidad de trazar manualmente y con rapidez las gráficas de numerosas funciones. También hará posible que escribamos ecuaciones para gráficas dadas. Consideremos primero las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es precisamente la gráfica de $y = f(x)$ desplazada hacia arriba una distancia de c unidades (porque cada coordenada y está aumentada en el mismo número c). Del mismo modo, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Por tanto, la gráfica de $y = f(x - c)$ es precisamente la gráfica de $y = f(x)$ desplazada c unidades a la derecha (véase Figura 1).

Desplazamientos verticales y horizontales Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba

$y = f(x) - c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo

$y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades a la derecha

$y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades a la izquierda

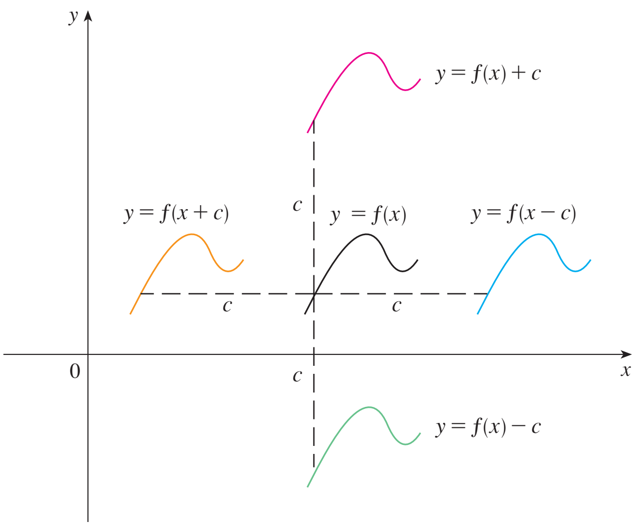


FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f

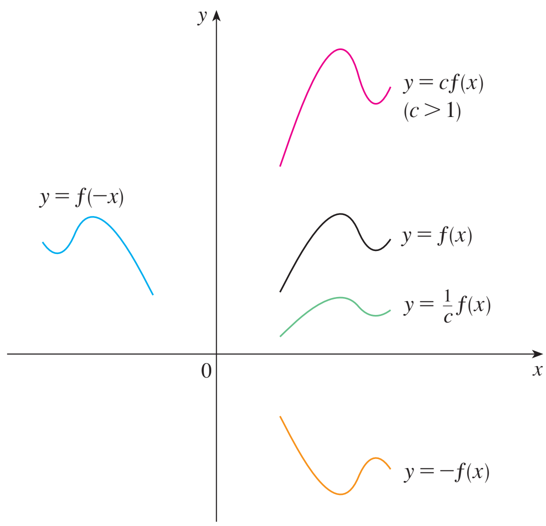


FIGURA 2
Alargamiento y reflexión de la gráfica de f

A continuación consideremos las transformaciones de **alargamiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ estirada en un factor de c en la dirección vertical (porque cada coordenada y está multiplicada por el mismo número c). La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ reflejada respecto al eje x porque el punto (x, y) es sustituido por el punto $(x, -y)$. (Véase la Figura 2 y la tabla siguiente, donde también se proporcionan los resultados de otras transformaciones de estiramiento, contracción y reflexión.)

Estiramiento y reflexión verticales y horizontales Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, estire la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c

$y = (1/c)f(x)$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c

$y = f(cx)$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c

$y = f(x/c)$, estire la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c

$y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ alrededor del eje x

$y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ alrededor del eje y

La Figura 3 ilustra estas transformaciones de estiramiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2 \cos x$ multiplicamos por 2 la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se estira verticalmente en un factor de 2.

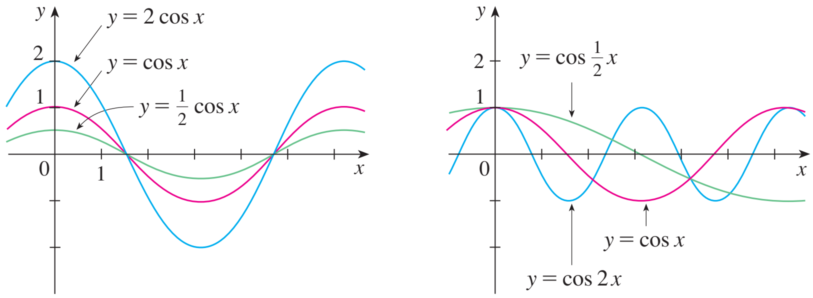
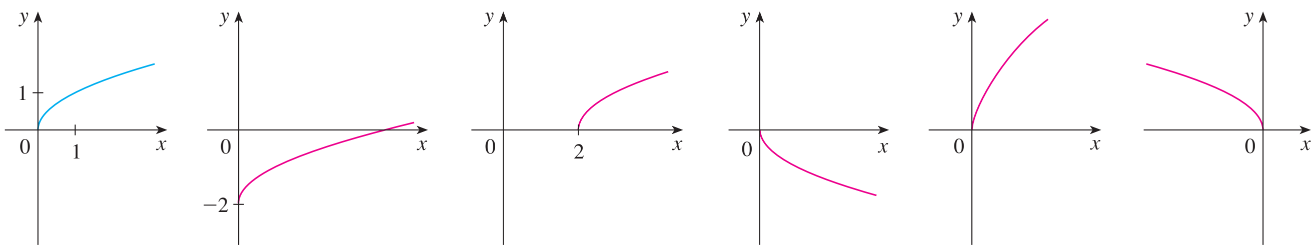


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 **Transformación de la función raíz** Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use transformaciones para graficar $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN La gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, obtenida de la Figura 13(a) en la Sección 1.2, se muestra en la Figura 4(a). En las otras partes de la figura trazamos $y = \sqrt{x} - 2$ al desplazar 2 unidades hacia abajo, $y = \sqrt{x - 2}$ al desplazar 2 unidades a la derecha, $y = -\sqrt{x}$ al reflejar alrededor del eje x, $y = 2\sqrt{x}$ al estirar verticalmente en un factor de 2, y $y = \sqrt{-x}$ al reflejar respecto al eje y.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x - 2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURA 4

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Completando el cuadrado, escribimos la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto significa que obtenemos la gráfica deseada si empezamos con la parábola $y = x^2$ y desplazar 3 unidades a la izquierda y después 1 unidad hacia arriba (véase Figura 5).

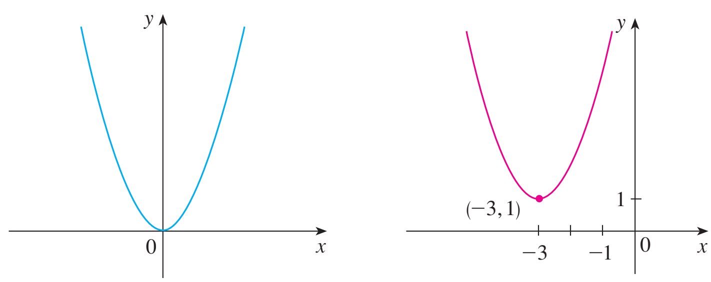


FIGURA 5 (a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

EJEMPLO 3 Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $y = \text{sen } 2x$ (b) $y = 1 - \text{sen } x$

SOLUCIÓN

(a) Obtenemos la gráfica de $y = \text{sen } 2x$ a partir de la de $y = \text{sen } x$ al comprimir horizontalmente en un factor de 2. (Véanse Figuras 6 y 7.) Así, mientras que el período de $y = \text{sen } x$ es 2π, el de $y = \text{sen } 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

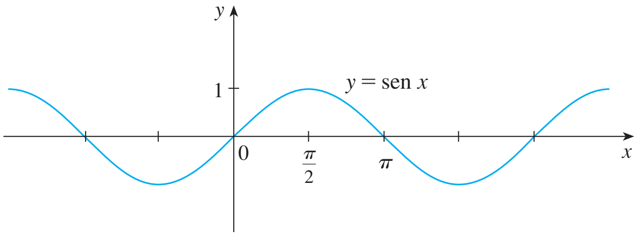


FIGURA 6

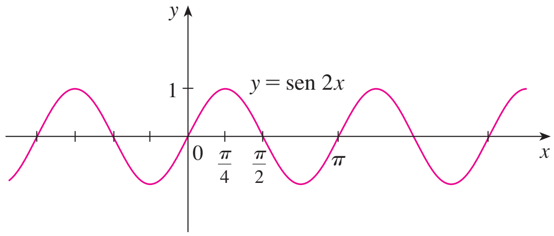
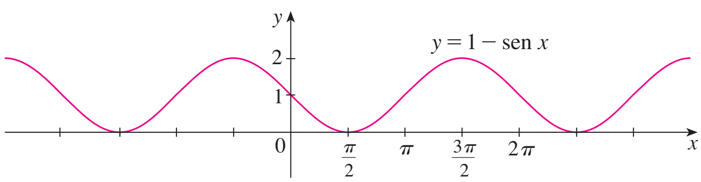


FIGURA 7

(b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \text{sen } x$, de nuevo empezamos con $y = \text{sen } x$. Reflejamos respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = -\text{sen } x$ y luego desplazamos 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \text{sen } x$. (Véase Figura 8.)

FIGURA 8



EJEMPLO 4 **Modelar la cantidad de luz diurna como función de la época del año** La Figura 9 muestra gráficas del número de horas de luz diurna como funciones de la época del año en varias latitudes. Dado que Filadelfia está situada a una latitud de aproximadamente 40°N, encuentre una función que modele la duración de luz diurna en Filadelfia.

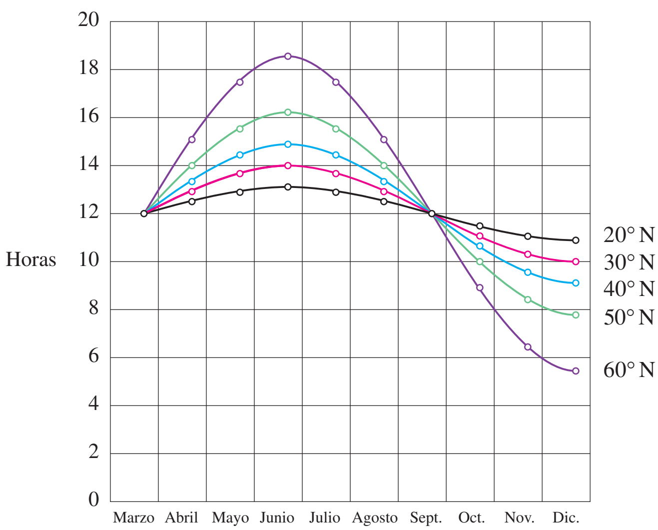


FIGURA 9

Gráfica de la duración de luz diurna del 21 de marzo al 21 de diciembre en varias latitudes

Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York: Silver, Burdett, 1935) page 40.

SOLUCIÓN Observe que cada curva se asemeja a una función seno desplazada y estirada. Al observar la curva azul vemos que, a la latitud de Filadelfia, la luz diurna dura unas 14.8 horas el 21 de junio y 9.2 el 21 de diciembre, de modo que la amplitud de la curva (el factor por el que hemos de estirar verticalmente la curva del seno) es $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

¿Por qué factor es necesario estirar horizontalmente la curva del seno si medimos el tiempo t en días? Como hay aproximadamente 365 días en un año, el periodo de nuestro modelo debería ser 365. Pero el periodo de $y = \operatorname{sen} t$ es 2π, por lo cual el factor de estiramiento horizontal es $c = 2\pi/365$.

También observamos que la curva inicia su ciclo el 21 de marzo, el octagésimo día del año, por lo cual tenemos que desplazar la curva 80 unidades a la derecha. Además, la desplazamos 12 unidades hacia arriba. Por tanto, modelamos la duración de la luz diurna en Filadelfia el t-ésimo día del año por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Otra transformación de algún interés es tomar el *valor absoluto* de una función. Si $y = |f(x)|$, entonces, de acuerdo con la definición de valor absoluto $y = f(x)$ cuando $f(x) \geqslant 0$ y $y = -f(x)$ cuando $f(x) < 0$. Esto nos dice cómo obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$: La parte de la gráfica que se encuentra arriba del eje x sigue siendo al misma; la parte que está abajo del eje x está reflejada respecto al eje x.

V EJEMPLO 5 El valor absoluto de una función

Trace la gráfica de la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN Primero graficamos la parábola $y = x^2 - 1$ en la Figura 10(a) al desplazar la parábola $y = x^2$ una unidad hacia abajo. Vemos que la gráfica está abajo del eje x cuando $-1 < x < 1$, por lo cual reflejamos la parte de la gráfica alrededor del eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ en la Figura 10(b).

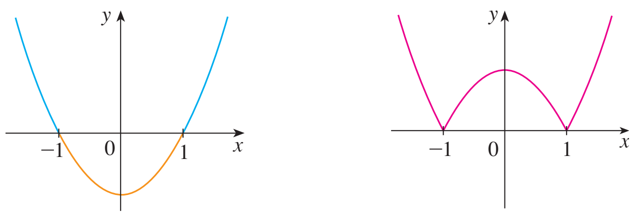


FIGURA 10 (a) $y = x^2 - 1$ (b) $y = |x^2 - 1|$

Combinaciones de funciones

Dos funciones f y g se pueden combinar para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g de un modo semejante a como sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números reales. Las funciones de suma y diferencia están definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el dominio de g es B, entonces el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque $f(x)$ y $g(x)$ tienen que estar definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$ y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, por lo cual el dominio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$.

Del mismo modo, las funciones producto y cociente están definidas por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es $A \cap B$, pero no podemos dividir entre 0 y por ello el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, entonces el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$ o bien $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Hay otra forma de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Por ejemplo, supongamos que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y es una función de u y

u es, a su vez, una función de x, se deduce que y es en última instancia una función de x. Calculamos esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

El procedimiento recibe el nombre de *composición* porque la nueva función está *compuesta* por las dos funciones dadas f y g.

En general, dadas dos funciones f y g cualesquiera, empezamos con un número x en el dominio de g y encontramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida al sustituir g en f. Se denomina *composición* (o *compuesta*) de f y g y está denotada por $f \circ g$ ("f círculo g").

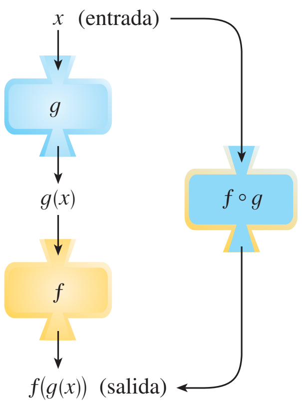


FIGURA 11
La máquina $f \circ g$ está compuesta de la máquina g (primera) y a continuación la máquina f.

Definición Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ también llamada la **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La Figura 11 muestra cómo representar $f \circ g$ en términos de máquinas.

EJEMPLO 6 **Composición de funciones** Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Nota: Usted puede ver del Ejemplo 6 que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y en segundo término se aplica f. En el Ejemplo 6, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y *después* eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *primero* eleva al cuadrado y *después* resta 3.

V **EJEMPLO 7** Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre cada función y su dominio.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Si $0 \leqslant a \leqslant b$, entonces $a^2 \leqslant b^2$.

Para que $\sqrt{x}$ esté definida debemos tener $x \geqslant 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debemos tener $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, es decir, $\sqrt{x} \leqslant 2$, o $x \leqslant 4$. Así tenemos $0 \leqslant x \leqslant 4$, por lo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geqslant 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. La primera desigualdad significa $x \leqslant 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$, o $2 - x \leqslant 4$, o $x \geqslant -2$. Así, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, por lo cual el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar primero h, luego g y después f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 8 Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$

Hasta aquí hemos empleado composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en cálculo a veces es útil *descomponer* una función complicada en unas más sencillas, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 **Descomposición de una función** Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la fórmula F dice: Primero sumar 9 a la x, luego tomar el coseno del resultado y finalmente elevar al cuadrado, por tanto, hacemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

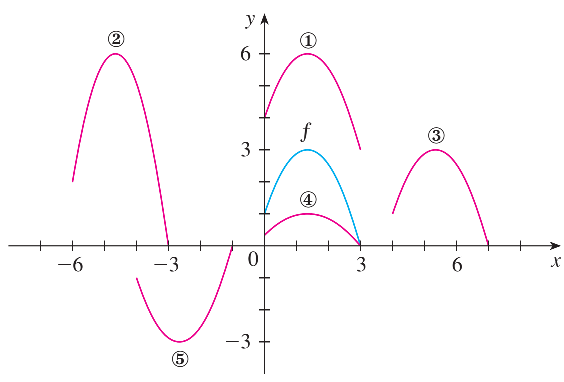
A continuación
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$

1.3 Ejercicios

1. Suponga que nos dan la gráfica de f. Escriba ecuaciones para las gráficas que se obtienen de la gráfica de f como sigue.
   (a) Desplace 3 unidades hacia arriba.
   (b) Desplace 3 unidades hacia abajo.
   (c) Desplace 3 unidades a la derecha.
   (d) Desplace 3 unidades a la izquierda.
   (e) Refleje respecto al eje x.
   (f) Refleje respecto al eje y.
   (g) Estire verticalmente en un factor de 3.
   (h) Contraiga verticalmente en un factor de 3.

2. Explique cómo se obtiene cada gráfica a partir de la gráfica de $y = f(x)$.
   (a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$
   (c) $y = 8f(x)$ (d) $y = f(8x)$
   (e) $y = -f(x) - 1$ (f) $y = 8f\left(\frac{1}{8}x\right)$

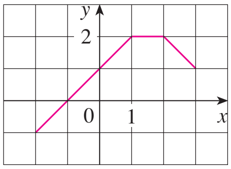
3. Dada la gráfica de $y = f(x)$, relacione cada ecuación con su gráfica y dé razones para sus elecciones.
   (a) $y = f(x - 4)$ (b) $y = f(x) + 3$
   (c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x + 4)$
   (e) $y = 2f(x + 6)$



4. Dada la gráfica de f, trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $y = f(x) - 2$ (b) $y = f(x - 2)$

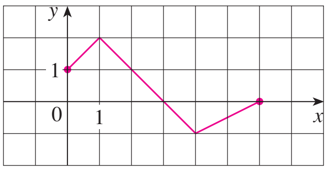
(c) $y = -2f(x)$ (d) $y = f\left(\frac{1}{3}x\right) + 1$



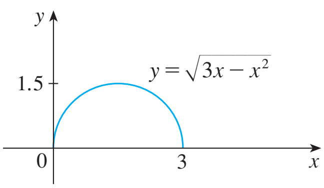
5. Dada la gráfica de f, úsela para graficar las siguientes funciones.

(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

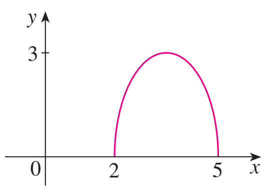
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



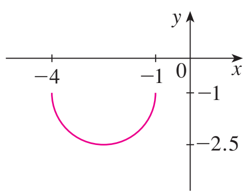
6–7 Dada la gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$, use transformaciones para crear una función cuya gráfica es como se muestra.



6.



7.



8. (a) ¿Cómo está relacionada la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$? Use su respuesta y la Figura 6 para trazar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$.

(b) ¿Cómo está relacionada la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Use su respuesta y la Figura 4(a) para trazar la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Grafique la función manualmente, no localizando los puntos sino empezando con la gráfica de una de las funciones estándar dadas en la Sección 1.2, y luego aplique las transformaciones apropiadas.

9. $y = -x^3$

10. $y = 1 - x^2$

11. $y = (x + 1)^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3$

13. $y = 1 + 2 \cos x$

14. $y = 4 \operatorname{sen} 3x$

15. $y = \operatorname{sen}(x/2)$

16. $y = \dfrac{1}{x - 4}$

17. $y = \sqrt{x + 3}$

18. $y = |x| - 2$

19. $y = \frac{1}{2}(x^2 + 8x)$

20. $y = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$

21. $y = |x - 2|$

22. $y = \dfrac{1}{4} \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

23. $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$

24. $y = |\cos \pi x|$

25. La ciudad de Nueva Orleans está situada a una latitud 30°N. Use la Figura 9 para hallar una función que modele el número de horas de luz diurna en Nueva Orleans, como función de la época del año. Para comprobar la precisión de su modelo, use el hecho de que en Nueva Orleans el 31 de marzo el Sol empieza a aparecer a las 5:51 a.m. y se pone a las 6:18 p.m.

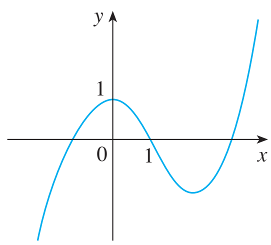
26. Una estrella variable es aquella cuya brillantez aumenta y disminuye alternativamente. Para la estrella variable más visible, Delta Cefeida, el tiempo entre periodos de máxima brillantez es de 5.4 días, el promedio de brillantez (o magnitud) de la estrella es 4.0 y su brillantez varía en ± 0.35 de magnitud. Encuentre la función que modele la brillantez de Delta Cefeida como función del tiempo.

27. (a) ¿Cómo está relacionada la gráfica de $y = f(|x|)$ con la gráfica de f?

(b) Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen} |x|$.

(c) Trace la gráfica de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use la gráfica dada de f para trazar la gráfica de $y = 1/f(x)$. ¿Cuáles características de f son las más importantes para trazar $y = 1/f(x)$? Explique en qué forma se usan.



29–30 Encuentre (a) $f + g$, (b) $f - g$, (c) fg y (d) f/g y exprese sus dominios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31–36 Encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, y (d) $g \circ g$ y sus dominios.

31. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

37–40 Encuentre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = 2x, \quad h(x) = x - 1$

38. $f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = 1 - x$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x-1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41–46 Exprese la función en la forma $f \circ g$.

41. $F(x) = (2x + x^2)^4$

42. $F(x) = \cos^2 x$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1+x}}$

45. $u(t) = \sqrt{\cos t}$

46. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

47–49 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

47. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$

48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

50. Use la tabla para evaluar cada función.

(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$

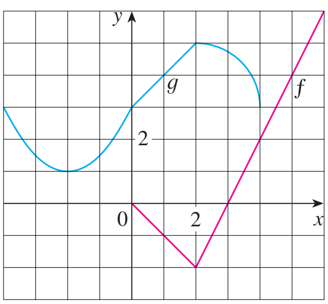
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

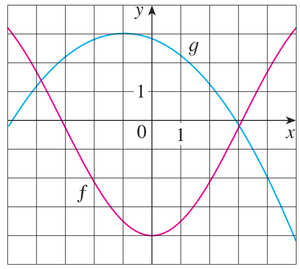
51. Use las gráficas dadas de f y g para evaluar cada expresión, o explique por qué no está definida.

(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$

(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



52. Use las gráficas dadas de f y g para calcular el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Use estas estimaciones para trazar una gráfica aproximada de $f \circ g$.



53. Una piedra se deja caer en un lago, creando una onda circular que se desplaza hacia fuera con una rapidez de 60 cm/s.

(a) Exprese el radio r de este círculo como función del tiempo t (en segundos).

(b) Si A es el área de este círculo como función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprétela.

54. Un globo esférico está siendo inflado y el radio del globo está aumentando a razón de 2 cm/s.

(a) Exprese el radio r del globo como función del tiempo t (en segundos).

(b) Si V es el volumen del globo como función del radio, encuentre $V \circ r$ e interprételo.

55. Un barco se mueve con una rapidez de 30 km/h paralelo a una costa recta. El barco está a 6 millas de la costa y pasa un faro al mediodía.

(a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco como función de d, la distancia que el barco ha navegado desde el mediodía; esto es, encuentre f para que $s = f(d)$.

(b) Exprese d como función de t, el tiempo transcurrido desde el mediodía; esto es, encuentre g para que $d = g(t)$.

(c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

56. Un avión está volando a una rapidez de 350 mi/h a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el tiempo $t = 0$.

(a) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado como función de t.

(b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d.

(c) Use composición para expresar s como función de t.

57. La **función de Heaviside** H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Se usa en el estudio de circuitos eléctricos para representar el súbito aumento de corriente eléctrica o voltaje, cuando se cierra instantáneamente un interruptor.

(a) Trace la gráfica de la función de Heaviside.

(b) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito si el interruptor se cierra en un tiempo $t = 0$ y se aplican 120 volts instantáneamente al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$.

(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito si el interruptor se cierra en el tiempo $t = 5$ segundos y se aplican

240 volts instantáneamente al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$. (Observe que iniciar en $t = 5$ corresponde a una traslación.)

58. La función de Heaviside definida en el Ejercicio 57 también se puede usar para definir la **función rampa** $y = ctH(t)$, que representa un aumento gradual en voltaje o corriente en un circuito.
(a) Trace la gráfica de la función rampa $y = tH(t)$.
(b) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ de un circuito si el interruptor se cierra en el tiempo $t = 0$ y el voltaje aumenta gradualmente a 120 volts en un intervalo de 60 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.
(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ de un circuito si el interruptor se cierra en el tiempo $t = 7$ segundos el voltaje aumenta gradualmente a 100 volts en un periodo de 25 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

59. Sean f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$. ¿$f \circ g$ también es una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?

60. Si una persona invierte x dólares al 4% de interés capitalizado anualmente, entonces la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es $A(x) = 1.04x$. Encuentre $A \circ A$, $A \circ A \circ A$ y $A \circ A \circ A \circ A$. ¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para la composición de n copias de A.

61. (a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense en qué operaciones tiene que realizar en la fórmula para g y terminar con la fórmula para h.)
(b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.

62. Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$, encuentre una función g tal que $g \circ f = h$.

63. Suponga que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿h es siempre una función par?

64. Suponga que g es una función impar y sea $h = f \circ g$. ¿h es siempre una función impar? ¿Qué pasa si f es impar? ¿Qué pasa si f es par?

1.4 Calculadoras graficadoras y computadoras

En esta sección suponemos que usted tiene acceso a una calculadora graficadora o computadora con programa para trazar gráficas. Veremos que el uso de estos equipos hace posible graficar funciones más complicadas y resolver problemas más complejos que de otro modo serían imposibles. También señalamos algunos de los inconvenientes que ocurren con estas calculadoras.

Las calculadoras graficadoras y las computadoras pueden dar gráficas muy precisas de funciones, pero en el Capítulo 4 veremos que sólo mediante el uso de cálculo podemos estar seguros que hemos descubierto todos los aspectos interesantes de una gráfica.

Una calculadora graficadora o computadora presenta una parte rectangular de la gráfica de una función en una **ventana de exhibición** o **pantalla de observación**, que llamaremos **rectángulo de observación**. La pantalla predeterminada con frecuencia da una imagen incompleta o confusa, de modo que es importante seleccionar con cuidado el rectángulo de observación. Si escogemos que los valores x varíen de un valor mínimo de $Xmin = a$ a un valor máximo de $Xmax = b$ y los valores y van de un mínimo de $Ymin = c$ a un máximo $Ymax = d$, entonces la parte visible de la gráfica se encuentra en el rectángulo

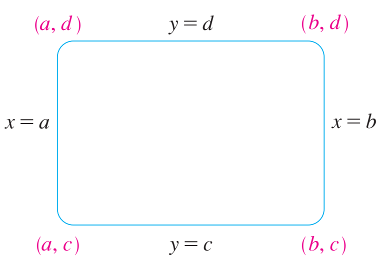


FIGURA 1
Rectángulo de observación $[a, b]$ por $[c, d]$

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

que se ve en la Figura 1. A este rectángulo le damos el nombre de *rectángulo de observación* $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

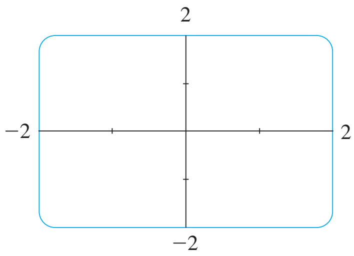
La máquina traza la gráfica de una función f de un modo muy parecido a como usted la trazaría. Localiza puntos de la forma $(x, f(x))$ para cierto número de valores de x igualmente espaciados entre a y b. Si un valor x no está en el dominio de f, o si $f(x)$ está fuera del rectángulo de observación, se mueve al siguiente valor x. La máquina enlaza cada punto al punto localizado precedente para formar una representación de la gráfica de f.

EJEMPLO 1 **Escoger un buen rectángulo de observación** Trace la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en cada uno de los siguientes rectángulos de observación.

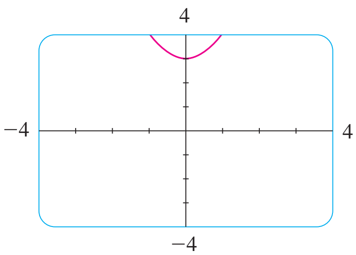
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$
(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

SOLUCIÓN Para el inciso (a) seleccionamos el intervalo al ajustar $Xmin = -2$, $Xmax = 2$, $Ymin = -2$ y $Ymax = 2$. La gráfica resultante se ve en la Figura 2(a). La ventana de observación está en blanco. Un momento de pensamiento proporciona la explicación: Observe que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, por lo que $x^2 + 3 \geqslant 3$ para toda x. Entonces, el rango de la función $f(x) = x^2 + 3$ es $[3, \infty)$. Esto significa que la gráfica de f está completamente fuera del rectángulo de observación $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

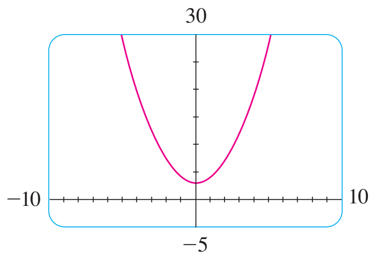
Las gráficas de los rectángulos de observación en los incisos (b), (c) y (d) se ven en la Figura 2. Observe que obtenemos una imagen más completa en los incisos (c) y (d), pero en el inciso (d) no está claro que la intersección con y sea 3.



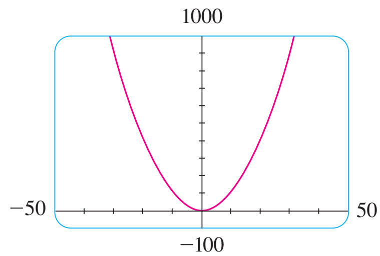
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$



(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$



(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$



(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

FIGURA 2 Gráficas de $f(x) = x^2 + 3$

Vemos del Ejemplo 1 que la selección de un rectángulo de observación puede hacer la gran diferencia en la apariencia de una gráfica. Con frecuencia es necesario cambiar a un rectángulo de observación más grande para obtener una imagen más completa, una vista más general, de la gráfica. En el siguiente ejemplo vemos que el conocimiento del dominio y rango de una función a veces nos da suficiente información para seleccionar un buen rectángulo de observación.

EJEMPLO 2 Determine un rectángulo de observación apropiado para la función $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ y úselo para graficar f.

SOLUCIÓN La expresión para $f(x)$ está definida cuando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Por tanto el dominio de f es el intervalo $[-2, 2]$. También

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

de modo que el rango de f es el intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Escogemos el rectángulo de observación de manera que el intervalo para x sea un poco más grande que el dominio y el intervalo para y sea más grande que el rango. Tomando el rectángulo de observación como $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtenemos la gráfica que se ve en la Figura 3.

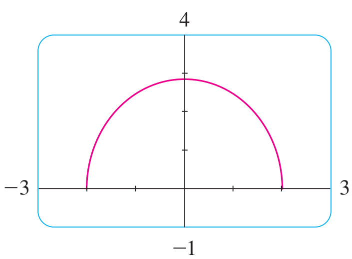


FIGURA 3
$y = \sqrt{8 - 2x^2}$

EJEMPLO 3 Grafique la función $y = x^3 - 150x$.

SOLUCIÓN Aquí el dominio es $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales. Eso no nos ayuda a escoger un rectángulo de observación. Experimentemos. Si empezamos con el rectángulo de observación $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obtenemos la gráfica que se ve en la Figura 4. Aparece en blanco, pero en realidad la gráfica es casi tan vertical que se confunde con el eje y.

Si cambiamos el rectángulo de observación a $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, obtenemos la imagen que se ve en la Figura 5(a). La gráfica parece estar formada por rectas verticales, pero sabemos que no puede ser correcta. Si vemos con cuidado mientras se escribe

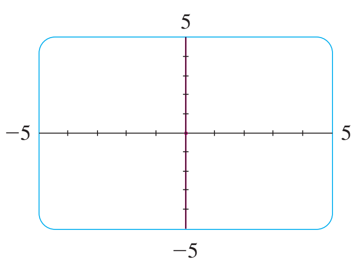


FIGURA 4

la gráfica, veremos que la gráfica sale de la pantalla y reaparece durante el proceso de graficación. Esto indica que necesitamos ver más en la dirección vertical, de modo que cambiamos el rectángulo de observación a $[-20, 20]$ por $[-500, 500]$. La gráfica resultante se muestra en la Figura 5(b). Todavía no revela todas las características principales de la función, de modo que intentamos con $[-20, 20]$ por $[-1000, 1000]$ en la Figura 5(c). Ahora tenemos más confianza en que hemos llegado a un rectángulo de observación apropiado. En el Capítulo 4 podremos ver que la gráfica que se ilustra en la Figura 5(c) en verdad revela todas las principales características de la función.

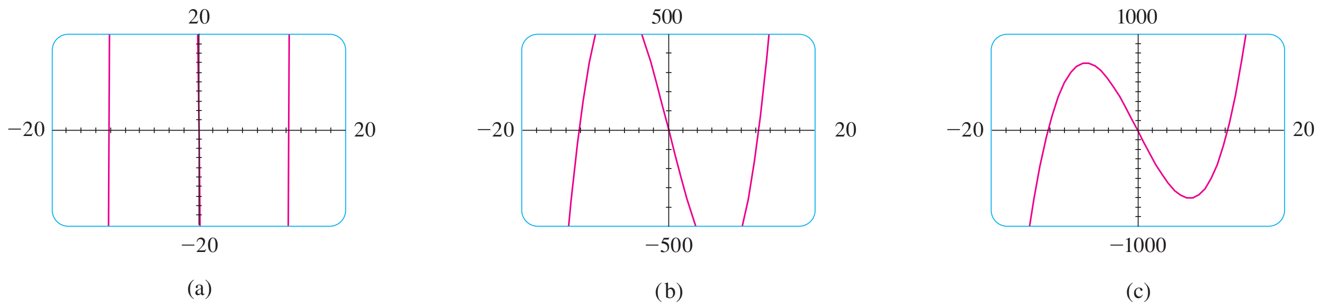
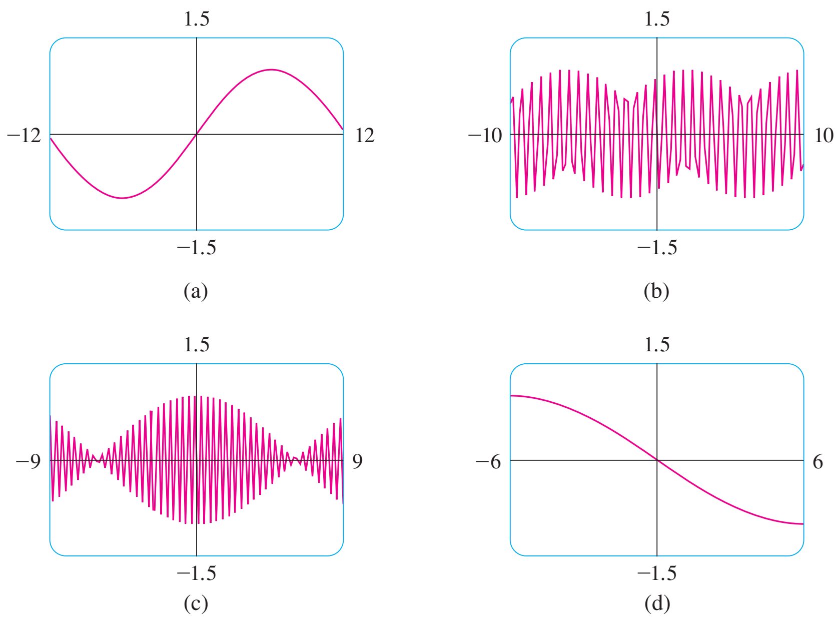


FIGURA 5 $y = x^3 - 150x$

V EJEMPLO 4 Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en un rectángulo de observación apropiado.

SOLUCIÓN La Figura 6(a) muestra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora usando el rectángulo de observación $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista la gráfica parece ser razonable, pero si cambiamos el rectángulo de observación a los que se ven en las partes siguientes de la Figura 6, las gráficas son muy diferentes. Algo extraño está pasando.



La apariencia de las gráficas de la Figura 6 depende de la máquina que se use. Las gráficas que usted obtenga con su propia calculadora podrían no ser como las de estas figuras, pero también serán bastante imprecisas.

FIGURA 6
Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en cuatro rectángulos de observación

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y hallar un rectángulo de observación apropiado, necesitamos hallar el periodo de la función $y = \text{sen } 50x$. Sabemos que la función $y = \text{sen } x$ tiene periodo 2π y la gráfica de $y = \text{sen } 50x$ está contraída horizontalmente en un factor de 50, de manera que el periodo de $y = \text{sen } 50x$ es

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

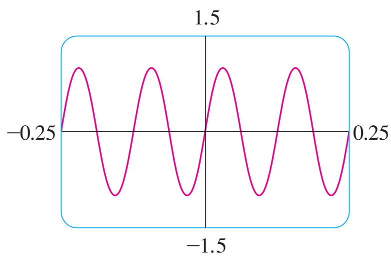


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen } 50x$

Esto sugiere que debemos trabajar sólo con valores pequeños de x para mostrar sólo unas pocas oscilaciones de la gráfica. Si escogemos el rectángulo de observación $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtenemos la gráfica que se ve en la Figura 7.

Ahora vemos lo que estaba mal en la Figura 6. Las oscilaciones de $y = \text{sen } 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora localiza puntos y los enlaza, pierde casi todos los puntos máximos y mínimos y por tanto da una impresión muy confusa de la gráfica.

Hemos visto que el uso de un rectángulo de observación inapropiado puede dar una impresión engañosa de la gráfica de una función. En los Ejemplos 1 y 3 resolvimos el problema al cambiar a un rectángulo de observación más grande. En el Ejemplo 4 tuvimos que hacer más pequeño el rectángulo de observación. En el siguiente ejemplo vemos una función para la cual no hay un rectángulo de observación que deje ver la verdadera forma de la gráfica.

V EJEMPLO 5 A veces una gráfica no es suficiente
Grafique la función $f(x) = \text{sen } x + \frac{1}{100} \cos 100x$.

SOLUCIÓN La Figura 8 muestra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora con rectángulo de observación de $[-6.5, 6.5]$ por $[-1.5, 1.5]$. Se parece bastante a la gráfica de $y = \text{sen } x$, pero quizá con algunas protuberancias de más. Si hacemos un acercamiento (zoom) sobre el rectángulo de observación $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$, podemos ver mucho más claramente la forma de estas protuberancias en la Figura 9. La razón de este comportamiento es que el segundo término, $\frac{1}{100} \cos 100x$, es muy pequeño en comparación con el primer término, sen x. Entonces, realmente necesitamos dos gráficas para ver la verdadera naturaleza de esta función.

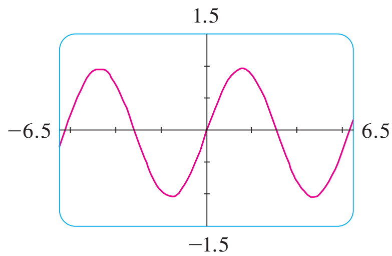


FIGURA 8

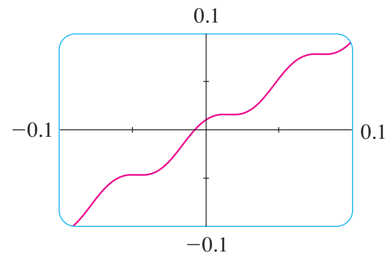


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Eliminar una recta extraña Trace la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

SOLUCIÓN La Figura 10(a) muestra la gráfica producida por una calculadora graficadora con un rectángulo de observación $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. Al unir puntos sucesivos en la gráfica, la calculadora produjo un segmento de recta muy inclinado de arriba a abajo de la pantalla, Ese segmento de recta no es verdaderamente parte de la gráfica. Observe que el dominio de la función $y = 1/(1 - x)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$. Podemos eliminar la recta extraña casi vertical si experimentamos con un cambio de escala. Cuando cambiamos al rectángulo de observación más pequeño de $[-4.7, 4.7]$ por $[-4.7, 4.7]$ en esta calculadora en particular, obtenemos la mucho mejor gráfica de la Figura 10(b).

Otra forma de evitar la recta extraña es cambiar el modo de graficar en la calculadora para que los puntos no se enlacen.

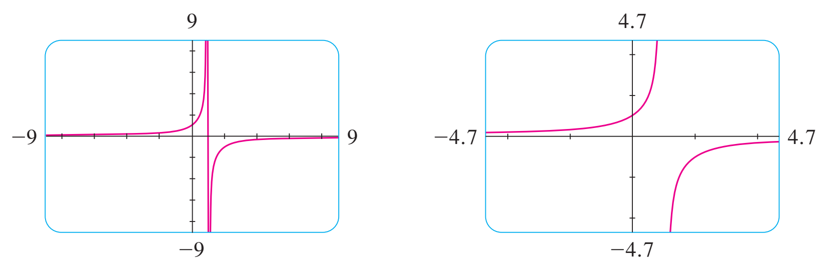


FIGURA 10 (a) (b)

EJEMPLO 7 Cómo obtener la gráfica completa de la función de raíz cúbica
Grafique la función $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUCIÓN Algunas calculadoras graficadoras exhiben la gráfica que se ve en la Figura 11, mientras que otras producen una gráfica como la de la Figura 12. Sabemos de la Sección 1.2 (Figura 13) que la gráfica de la Figura 12 es correcta y entonces, ¿qué pasó en la Figura 11? La explicación es que algunas máquinas calculan la raíz cúbica de x usando un logaritmo, que no está definido si x es negativa, por lo cual sólo se produce la mitad derecha de la gráfica.

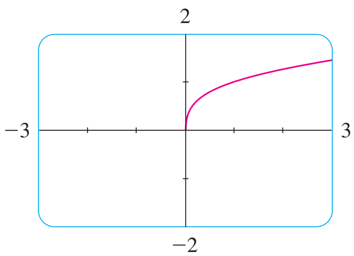


FIGURA 11

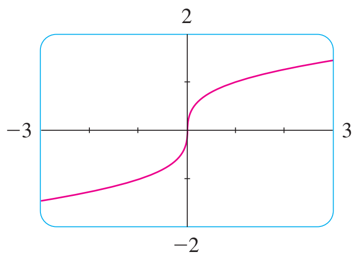


FIGURA 12

Usted puede obtener la gráfica correcta con Maple si primero escribe

```
with(RealDomain);
```

Usted debe experimentar con su propia máquina para ver cuál de estas dos gráficas se produce. Si obtiene la gráfica de la Figura 11, puede obtener la imagen correcta si grafica la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

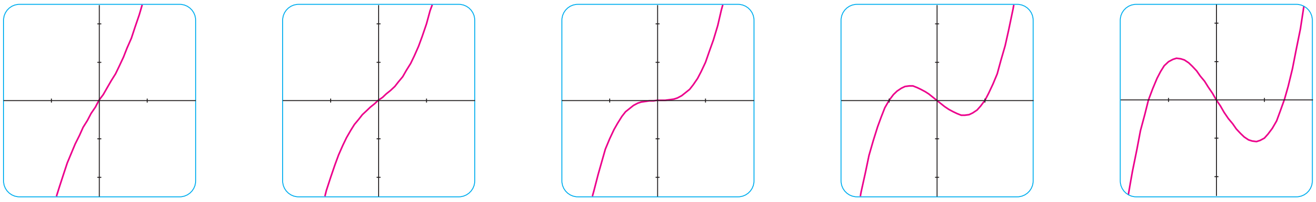
Observe que esta función es igual a $\sqrt[3]{x}$ (excepto cuando $x = 0$).

Para entender la forma en que la expresión para una función se relaciona con su gráfica, es útil graficar una **familia de funciones**, es decir, un conjunto de funciones cuyas ecuaciones están relacionadas. En el siguiente ejemplo graficamos miembros de una familia de polinomios cúbicos.

V EJEMPLO 8 Una familia de polinomios cúbicos Grafique la función $y = x^3 + cx$ para diversos valores del número c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando se cambia c?

TEC En Visual 1.4 usted puede ver una animación de la Figura 13.

SOLUCIÓN La Figura 13 muestra las gráficas de $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ y -2. Vemos que, para valores positivos de c, la gráfica aumenta de izquierda a derecha sin puntos máximo o mínimo (picos o valles). Cuando $c = 0$, la curva está plana en el origen. Cuando c es negativa, la curva tiene un punto máximo y un punto mínimo. Cuando c disminuye, el punto máximo se hace más alto y más bajo el punto mínimo.



(a) $y = x^3 + 2x$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^3 - x$ (e) $y = x^3 - 2x$

FIGURA 13
Varios miembros de la familia de funciones $y = x^3 + cx$, todos graficados en el rectángulo de observación $[-2, 2]$ por $[-2.5, 2.5]$

EJEMPLO 9 Resolución gráfica de una ecuación Encuentre la solución de la ecuación $\cos x = x$ correcta a dos lugares decimales.

SOLUCIÓN Las soluciones de la ecuación $\cos x = x$ son las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = \cos x$ y $y = x$. De la Figura 14(a) vemos que hay sólo una solución que se encuentra entre 0 y 1. Al hacer un acercamiento en el rectángulo de observación [0, 1] por [0, 1], vemos de la Figura 14(b) que la raíz está entre 0.7 y 0.8, por lo que hacemos un acercamiento más en el rectángulo de observación [0.7, 0.8] por [0.7, 0.8] en la Figura 14(c). Si movemos el cursor al punto de intersección de las dos curvas, o por inspección y el hecho de que la escala x es 0.01, vemos que la solución de la ecuación es aproximadamente 0.74. (Muchas calculadoras tienen integrada una función de intersección.)

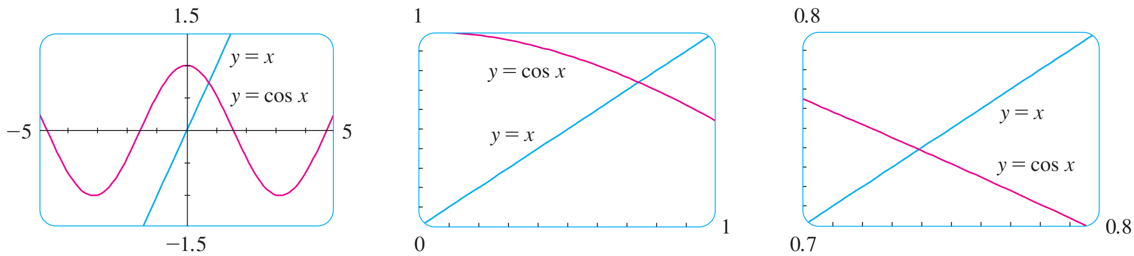


FIGURA 14
Localización de raíces de $\cos x = x$

(a) $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$
escala $x = 1$

(b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$
escala $x = 0.1$

(c) $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$
escala $x = 0.01$

1.4 Ejercicios

1. Use una calculadora graficadora o computadora para determinar cuál de los rectángulos de observación dados produce la gráfica más apropiada de la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$.
(a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$ (b) $[0, 10]$ por $[0, 2]$
(c) $[0, 10]$ por $[0, 10]$

2. Use una calculadora graficadora o computadora para determinar cuál de los rectángulos de observación dados produce la gráfica más apropiada de la función $f(x) = x^4 - 16x^2 + 20$.
(a) $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$ (b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-50, 50]$ por $[-50, 50]$ (d) $[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

3–14 Determine un rectángulo de observación apropiado para la función dada y úselo para trazar la gráfica.

3. $f(x) = x^2 - 36x + 32$
4. $f(x) = x^3 + 15x^2 + 65x$
5. $f(x) = \sqrt[4]{81 - x^4}$
6. $f(x) = \sqrt{0.1x + 20}$
7. $f(x) = x^3 - 225x$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$
9. $f(x) = \operatorname{sen}^2(1000x)$
10. $f(x) = \cos(0.001x)$
11. $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$
12. $f(x) = \sec(20\pi x)$
13. $y = 10 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 100x$
14. $y = x^2 + 0.02 \operatorname{sen} 50x$

15. (a) Trate de hallar un rectángulo de observación apropiado para $f(x) = (x - 10)^3 2^{-x}$.
(b) ¿Se necesita más de una ventana? ¿Por qué?

16. Grafique la función $f(x) = x^2\sqrt{30 - x}$ en un rectángulo de observación apropiado. ¿Por qué parece que falta parte de la gráfica?

17. Grafique la elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ al graficar las funciones cuyas gráficas son las mitades superior e inferior de la elipse.

18. Grafique la hipérbola $y^2 - 9x^2 = 1$ al graficar las funciones cuyas gráficas son las ramas superior e inferior de la hipérbola.

19–20 ¿Las gráficas se cruzan en el rectángulo de observación dado? Si éste es el caso, ¿cuántos puntos de intersección hay?

19. $y = 3x^2 - 6x + 1$, $y = 0.23x - 2.25$; $[-1, 3]$ por $[-2.5, 1.5]$

20. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

21–23 Encuentre todas las soluciones de la ecuación correctas a dos lugares decimales.

21. $x^4 - x = 1$
22. $\sqrt{x} = x^3 - 1$
23. $\tan x = \sqrt{1 - x^2}$

24. Vimos en el Ejemplo 9 que la ecuación $\cos x = x$ tiene exactamente una solución.
(a) Use una gráfica para demostrar que la ecuación $\cos x = 0.3x$ tiene tres soluciones y encuentre sus valores correctos a dos lugares decimales.
(b) Encuentre un valor aproximado de m tal que la ecuación $\cos x = mx$ tiene exactamente dos soluciones.

25. Use gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = 10x^2$ y $g(x) = x^3/10$ es finalmente más grande (esto es, más grande cuando x es muy grande).

26. Use gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = x^4 - 100x^3$ y $g(x) = x^3$ es finalmente más grande.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

27. ¿Para qué valores de x es verdad que $|\operatorname{sen} x - x| < 0.1$?

28. Grafique los polinomios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ y $Q(x) = 3x^5$ en la misma pantalla, primero usando el rectángulo de observación $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y luego cambiando a $[-10, 10]$ por $[-10{,}000, 10{,}000]$. ¿Qué observa de estas gráficas?

29. En este ejercicio consideramos la familia de funciones de raíz $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero positivo.

(a) Grafique las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[6]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de observación $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.

(b) Grafique las funciones $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de observación $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Véase Ejemplo 7.)

(c) Grafique las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla usando el rectángulo de observación $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.

(d) ¿Qué conclusiones se pueden hacer a partir de estas gráficas?

30. En este ejercicio consideramos la familia de funciones $f(x) = 1/x^n$, donde n es un entero positivo.

(a) Grafique las funciones $y = 1/x$ y $y = 1/x^3$ en la misma pantalla usando el rectángulo de observación $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.

(b) Grafique las funciones $y = 1/x^2$ y $y = 1/x^4$ en la misma pantalla usando el mismo rectángulo de observación que en el inciso (a).

(c) Grafique todas las funciones de los incisos (a) y (b) en la misma pantalla usando el rectángulo de observación $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.

(d) ¿Qué conclusiones se pueden sacar a partir de estas gráficas?

31. Grafique la función $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ para diversos valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c cambia?

32. Grafique la función $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ para varios valores de c. Describa la forma en que el cambio del valor de c afecta la gráfica.

33. Grafique la función $y = x^n 2^{-x}$, $x \geqslant 0$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. ¿Cómo cambia la gráfica cuando n aumenta?

34. Las curvas con ecuaciones

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

reciben el nombre de **curvas de nariz de bala**. Grafique algunas de estas curvas para ver por qué. ¿Qué pasa cuando c aumenta?

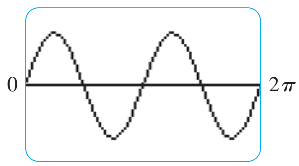
35. ¿Qué pasa a la gráfica de la ecuación $y^2 = cx^3 + x^2$ cuando c varía?

36. Este ejercicio explora el efecto de la función interior g en una función compuesta $y = f(g(x))$.

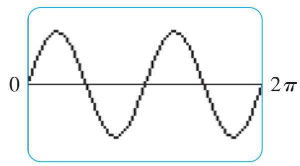
(a) Grafique la función $y = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)$ usando el rectángulo de observación $[0,400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Cómo difiere esta gráfica respecto de la gráfica de la función seno?

(b) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ usando el rectángulo de observación $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Cómo difiere esta gráfica respecto de la gráfica de la función seno?

37. La figura muestra las gráficas de $y = \operatorname{sen} 96x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ como aparece en la calculadora graficadora TI-83. La primera gráfica es imprecisa. Explique por qué las dos gráficas parecen idénticas. [*Sugerencia:* La ventana de gráficas de la TI-83 es de 95 pixeles de ancho. ¿Qué puntos específicos localiza la calculadora?]

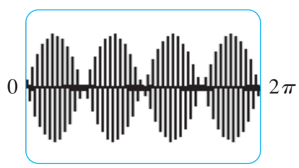


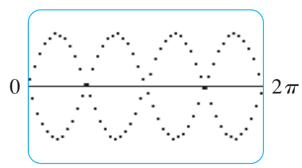
$y = \operatorname{sen} 96x$



$y = \operatorname{sen} 2x$

38. La primera gráfica de la figura es la de $y = \operatorname{sen} 45x$ como se ve en la calculadora graficadora TI-83. Es imprecisa y por tanto, para ayudar a explicar su aspecto, volvemos a localizar la curva en el modo de puntos en la segunda gráfica. ¿Cuáles dos curvas de seno parece estar graficando la calculadora? Demuestre que cada punto en la gráfica de $y = \operatorname{sen} 45x$ que la TI-83 escoge para localizar está de hecho en una de estas dos curvas. (La ventana de gráfica de la TI-83 es de 95 pixeles de ancho.)





1.5 Funciones exponenciales

La función $f(x) = 2^x$ se llama *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No debe confundirse con la función de potencia $g(x) = x^2$, en la que la variable es la base.

En general, una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva. Recordemos lo que esto significa.

Si $x = n$, un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Si $x = 0$, entonces $a^0 = 1$, y si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son enteros y $q > 0$, entonces

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Pero ¿cuál es el significado de a^x si x es un número irracional? Por ejemplo, ¿qué se quiere decir con $2^{\sqrt{3}}$ o 5^{π}?

Para ayudarnos a contestar esta pregunta primero vemos la gráfica de la función $y = 2^x$, donde x es racional. Una representación de esta gráfica se muestra en la Figura 1. Deseamos agrandar el dominio de $y = 2^x$ para incluir números racionales e irracionales.

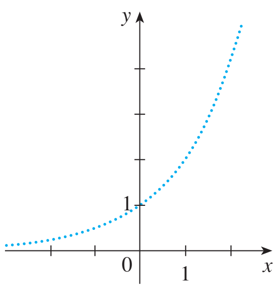


FIGURA 1
Representación de $y = 2^x$, x racional

Hay huecos en la gráfica de la Figura 1 correspondientes a valores irracionales de x. Deseamos llenar los huecos al definir $f(x) = 2^x$, donde $x \in \mathbb{R}$, de modo que f es una función creciente. En particular, como el número irracional $\sqrt{3}$ satisface

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

debemos tener

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

y sabemos lo que $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$ significan porque 1.7 y 1.8 son números racionales. Del mismo modo, si usamos mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, obtenemos mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$.

$$\begin{array}{rcl} 1.73 < \sqrt{3} < 1.74 & \Rightarrow & 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\ 1.732 < \sqrt{3} < 1.733 & \Rightarrow & 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\ 1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 & \Rightarrow & 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\ 1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 & \Rightarrow & 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \end{array}$$

Una prueba de este hecho está dada por J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1981). Para una versión en línea, véase

caltechbook.library.caltech.edu/197/

Se puede demostrar que hay exactamente un número que es mayor que todos los números

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

y menor que todos los números

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

Definimos $2^{\sqrt{3}}$ como este número. Usando el proceso precedente de aproximación podemos calcularlo correcto a seis lugares decimales:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

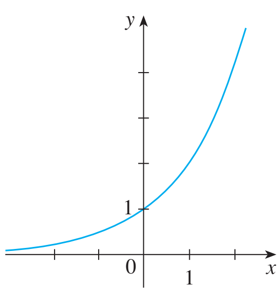


FIGURA 2
$y = 2^x$, x real

Del mismo modo, podemos definir 2^x (o a^x, si $a > 0$) donde x es cualquier número irracional. La Figura 2 muestra la forma en que los huecos de la Figura 1 se han llenado para completar la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Las gráficas de miembros de la familia de funciones $y = a^x$ se muestran en la Figura 3 para varios valores de la base a. Observe que todas estas gráficas pasan por el mismo punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Observe también que cuando la base a se hace más grande, la función exponencial crece más rápidamente (para $x > 0$).

Si $0 < a < 1$, entonces a^x se aproxima a 0 cuando x se hace grande. Si $a > 1$, entonces a^x se aproxima a 0 cuando x disminuye pasando a valores negativos. En ambos casos el eje x es una asíntota horizontal. Estos temas se estudian en la Sección 2.5.

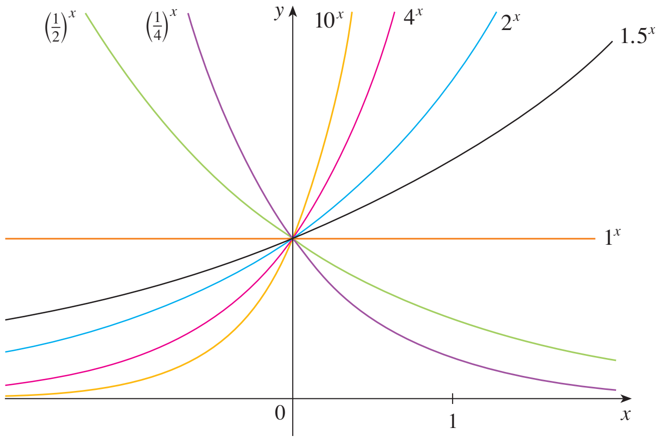


FIGURA 3

Se puede ver de la Figura 3 que hay básicamente tres clases de funciones exponenciales $y = a^x$. Si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece; si $a = 1$, es una constante; y si $a > 1$, aumenta. Estos tres casos están ilustrados en la Figura 4. Observe que si $a \neq 1$, entonces la función exponencial $y = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Observe también que, como $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, la gráfica de $y = (1/a)^x$ es precisamente el reflejo de la gráfica de $y = a^x$ respecto al eje y.

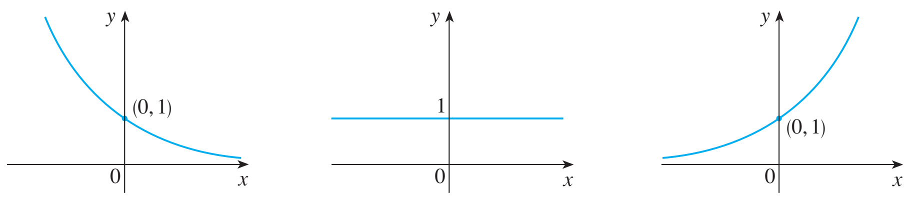


FIGURA 4 (a) $y = a^x,\ 0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x,\ a > 1$

Una razón para la importancia de la función exponencial se encuentra en las siguientes propiedades. Si x y y son números racionales, entonces estas leyes son bien conocidas de álgebra elemental. Se puede demostrar que permanecen verdaderas para números reales arbitrarios x y y.

www.stewartcalculus.com

Para repaso y práctica usando las Leyes de Exponentes, haga clic en *Review of Algebra*.

Leyes de Exponentes Si a y b son números positivos y x y y son cualesquier números reales, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 **Reflejo y desplazamiento de una función exponencial** Trace la gráfica de la función $y = 3 - 2^x$ y determine su dominio y rango.

Para un repaso de reflejo y desplazamiento de gráficas, véase la Sección 1.3.

SOLUCIÓN Primero reflejamos la gráfica de $y = 2^x$ [mostrada en las Figuras 2 y 5(a)] respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = -2^x$ en la Figura 5(b). A continuación desplazamos la gráfica de $y = -2^x$ hacia arriba 3 unidades para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ en la Figura 5(c). El dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es $(-\infty, 3)$.

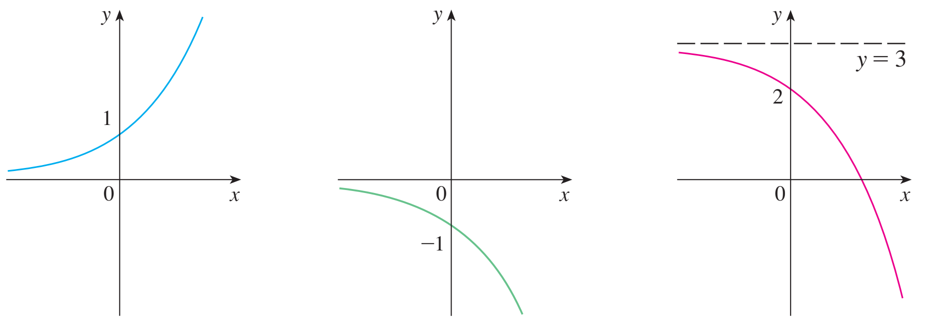


FIGURA 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$

V EJEMPLO 2 **Una función exponencial contra una función de potencia** Use una calculadora graficadora para comparar la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función de potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál función crece más rápidamente cuando x es grande?

SOLUCIÓN La Figura 6 muestra ambas funciones graficadas en el rectángulo de observación $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que las gráficas se cruzan tres veces, pero para $x > 4$ la gráfica de $f(x) = 2^x$ permanece arriba de la gráfica de $g(x) = x^2$. La Figura 7 da una vista más completa y muestra que para valores grandes de x, la función exponencial $y = 2^x$ crece mucho más rápidamente que la función de potencia $y = x^2$.

El Ejemplo 2 muestra que $y = 2^x$ aumenta más rápidamente que $y = x^2$. Para demostrar precisamente con qué rapidez aumenta $f(x) = 2^x$, realicemos el siguiente experimento de pensamiento. Suponga que empezamos con una hoja de papel de un milésimo de pulgada de grueso y lo doblamos 50 veces a la mitad. Cada vez que doblemos a la mitad ese papel, el grosor del papel se duplica y el grosor del papel resultante sería de $2^{50}/1000$ in. ¿Qué tan grueso es esto? ¡Resulta ser más de 17 millones de millas!

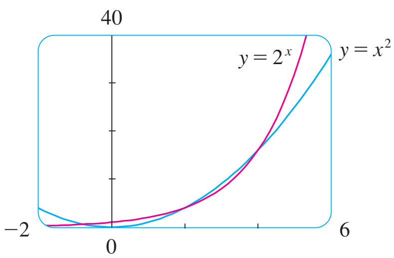


FIGURA 6

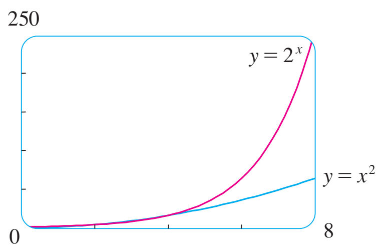


FIGURA 7

Aplicaciones de funciones exponenciales

La función exponencial se presenta con frecuencia en modelos matemáticos de la naturaleza y en la sociedad. Aquí indicamos brevemente cómo aparece en la descripción del crecimiento poblacional. En capítulos posteriores seguiremos éstas y otras aplicaciones con mayor detalle.

Primero consideremos una población de bacterias en un medio nutriente homogéneo. Suponga que al muestrear la población a ciertos intervalos se determina que ésta se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1000$, entonces tenemos

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Parece ser de este modelo que, en general,

$$P(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

Esta función de población es un múltiplo constante de la función exponencial $y = 2^t$, de modo que exhibe el rápido crecimiento que observamos en las Figuras 2 y 7. Bajo condiciones ideales (espacio y nutrición ilimitados y sin enfermedades) este crecimiento exponencial es típico de lo que en realidad ocurre en la naturaleza.

¿Qué pasa con la población humana? La Tabla 1 presenta datos para la población mundial en el siglo XX y la Figura 8 muestra la correspondiente gráfica de dispersión.

TABLA 1

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

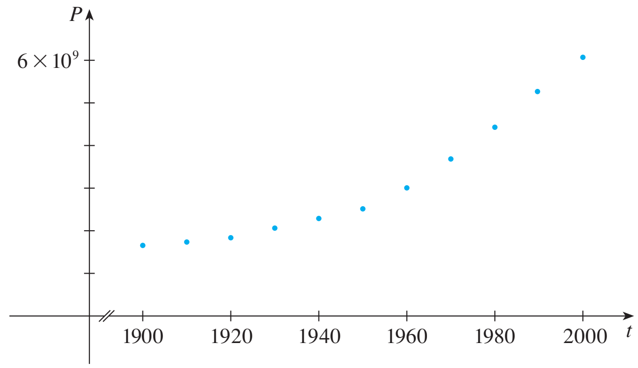


FIGURA 8 Gráfica de dispersión para el crecimiento de la población mundial

El patrón de los puntos de datos de la Figura 8 sugiere crecimiento exponencial, de modo que usamos una calculadora graficadora con funciones de regresión exponencial para aplicar el método de mínimos cuadrados y obtener el modelo exponencial

$$P = (0.008079266) \cdot (1.013731)^t$$

La Figura 9 muestra la gráfica de esta función exponencial junto con los puntos de datos originales. Vemos que la curva exponencial se ajusta razonablemente bien a los datos. El periodo de crecimiento poblacional relativamente lento está explicado por las dos guerras mundiales y la gran depresión de la década de 1930.

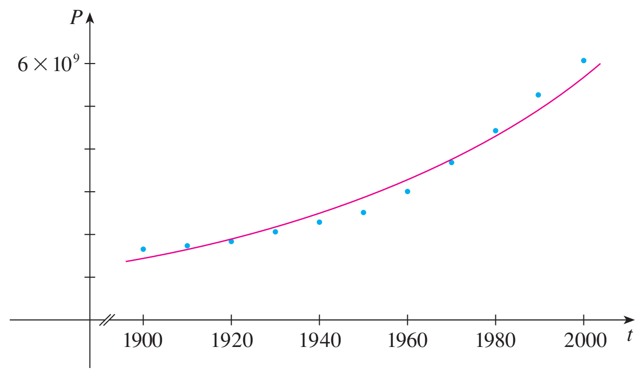


FIGURA 9
Modelo exponencial para el crecimiento poblacional

V EJEMPLO 3 La *vida media* del estroncio 90, ^{90}Sr, es de 25 años. Esto significa que la mitad de cualquier cantidad dada de ^{90}Sr se desintegrará en 25 años.

(a) Si una muestra de ^{90}Sr tiene una masa de 24 mg, encuentre una expresión para la masa $m(t)$ que permanezca después de t años.

(b) Encuentre la masa restante después de 40 años, correcta al miligramo más cercano.

(c) Use una calculadora graficadora para graficar $m(t)$ y úsela para calcular el tiempo necesario para que la masa se reduzca a 5 mg.

SOLUCIÓN

(a) La masa es inicialmente de 24 mg y se reduce a la mitad durante cada periodo de 25 años, por lo que

$$m(0) = 24$$

$$m(25) = \frac{1}{2}(24)$$

$$m(50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$$

$$m(100) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$$

De este patrón, parece que la masa restante después de t años es

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24 \cdot 2^{-t/25} = 24 \cdot (2^{-1/25})^t$$

Ésta es una función exponencial con base $a = 2^{-1/25} = 1/2^{1/25}$.

(b) La masa que queda después de 40 años es

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-40/25} \approx 7.9 \text{ mg}$$

(c) Usamos una computadora o calculadora graficadora para graficar la función $m(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$ en la Figura 10. También graficamos la recta $m = 5$ y usamos el cursor para calcular $m(t) = 5$ cuando $t \approx 57$. Por tanto, la masa de la muestra se reducirá a 5 mg después de unos 57 años.

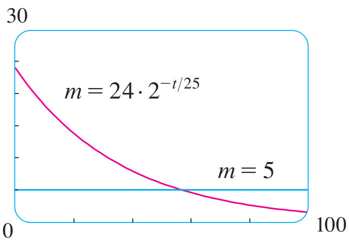


FIGURA 10

El número e

De todas las bases posibles para una función exponencial, hay una que es la más conveniente para fines de cálculo. La selección de una base a está influida por la forma en que la gráfica de $y = a^x$ cruza el eje y. Las Figuras 11 y 12 muestran las rectas tangentes a las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto $(0, 1)$. (Las rectas tangentes se definirán precisamente en la Sección 2.6. Para los fines presentes, usted puede considerar la recta tangente a una gráfica exponencial en un punto como la recta que toca la gráfica sólo en ese punto.) Si medimos las pendientes de estas rectas tangentes en $(0, 1)$, encontramos que $m \approx 0.7$ para $y = 2^x$ y $m \approx 1.1$ para $y = 3^x$.

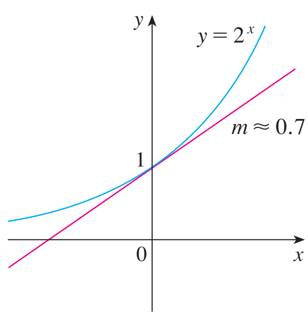


FIGURA 11

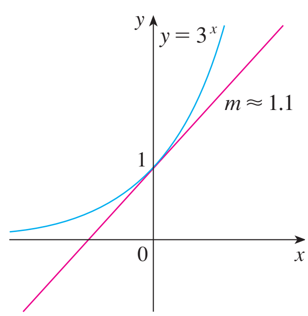


FIGURA 12

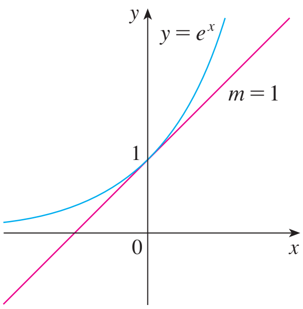


FIGURA 13
La función exponencial natural cruza el eje y con una pendiente de 1.

TEC Module 1.5 hace posible graficar funciones exponenciales con diversas bases y sus rectas tangentes para calcular más cercanamente el valor de a para el cual la tangente tiene pendiente 1.

Resulta, como veremos en el Capítulo 3, que algunas de las fórmulas de cálculo se simplifican grandemente si escogemos la base a de modo que la pendiente de la recta tangente a $y = a^x$ en (0, 1) sea *exactamente* 1. (Véase la Figura 13.) De hecho, *hay* ese número y está denotado por la letra e. (Esta notación fue escogida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.) En vista de las Figuras 11 y 12, no es de sorprender que el número e se encuentre entre 2 y 3 y la gráfica de $y = e^x$ se encuentre entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Véase la Figura 14.) En el Capítulo 3 veremos que el valor de e, correcto a cinco lugares decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

A la función $f(x) = e^x$ se le llama **función exponencial natural**.

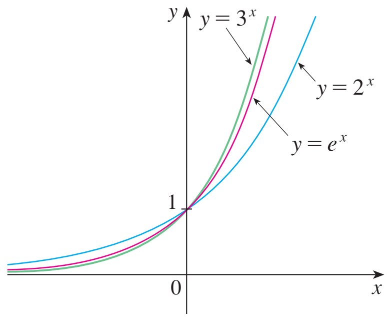


FIGURA 14

V EJEMPLO 4 **Transformación de la función exponencial natural** Grafique la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ de las Figuras 13 y 15(a) y reflejamos alrededor del eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ en la Figura 15(b). (Observe que la gráfica cruza el eje y con una pendiente de -1). A continuación comprimimos la gráfica verticalmente en un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en la Figura 15(c). Por último, desplazamos la gráfica hacia abajo una unidad para obtener la gráfica deseada en la Figura 15(d). El dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es $(-1, \infty)$.

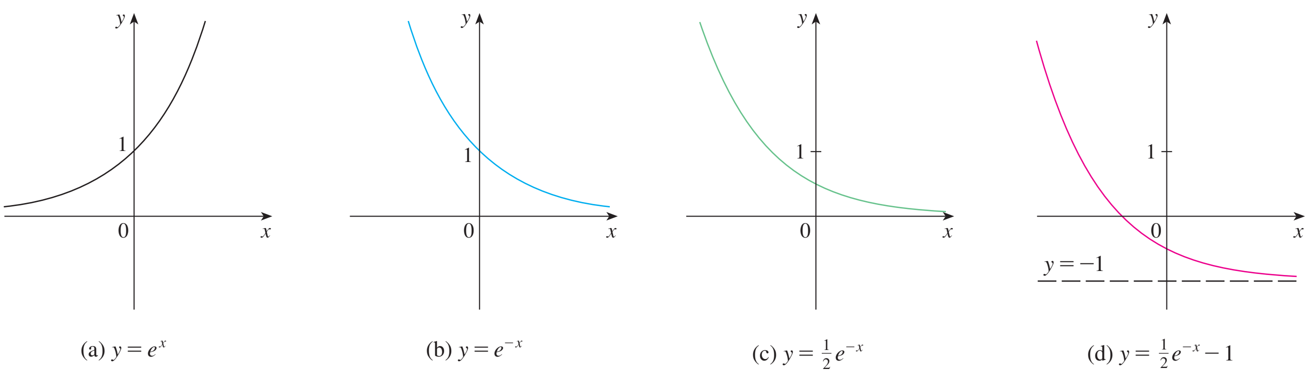


FIGURA 15

¿Cuánto piensa usted que hemos de movernos a la derecha para que la altura de la gráfica de $y = e^x$ pase de un millón? El siguiente ejemplo demuestra el rápido crecimiento de esta función al dar una respuesta que podría sorprender a cualquiera.

EJEMPLO 5 **Las funciones exponenciales se hacen muy rápidas** Use una calculadora graficadora para hallar los valores de x para los que $e^x > 1{,}000{,}000$.

SOLUCIÓN En la Figura 16 graficamos la función $y = e^x$ y la recta horizontal $y = 1{,}000{,}000$. Vemos que estas curvas se cruzan cuando $x \approx 13.8$. Entonces $e^x > 10^6$ cuando $x > 13.8$. Es quizá sorprendente que los valores de la función exponencial han pasado ya un millón cuando x es sólo 14.

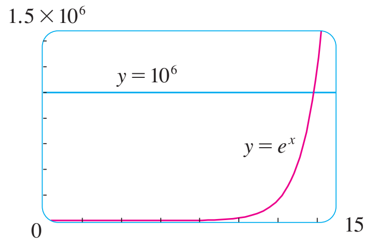


FIGURA 16

1.5 Ejercicios

1–4 Use la Ley de Exponentes para reescribir y simplificar la expresión.

1. (a) $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2. (a) $8^{4/3}$ (b) $x(3x^2)^3$

3. (a) $b^8(2b)^4$ (b) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

4. (a) $\dfrac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

5. (a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $a > 0$.
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) Si $a \neq 1$, ¿cuál es el rango de esta función?
(d) Trace la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada uno de los siguientes casos.
(i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

6. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) ¿Cuál es un valor aproximado para e?
(c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

7–10 Grafique las funciones dadas en una pantalla común. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

7. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

8. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

9. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

10. $y = 0.9^x$, $y = 0.6^x$, $y = 0.3^x$, $y = 0.1^x$

11–16 Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función. No use calculadora. Sólo use las gráficas dadas en las Figuras 3 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la Sección 1.3.

11. $y = 10^{x+2}$

12. $y = (0.5)^x - 2$

13. $y = -2^{-x}$

14. $y = e^{|x|}$

15. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

16. $y = 2(1 - e^x)$

17. Comenzando con la gráfica de $y = e^x$, escriba la ecuación de la gráfica que resulte de
(a) desplazar 2 unidades hacia abajo
(b) desplazar 2 unidades a la derecha
(c) reflejar respecto al eje x
(d) reflejar respecto al eje y
(e) reflejar respecto al eje x y luego respecto al eje y

18. Empezando con la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica que resulte de
(a) reflejar respecto a la recta $y = 4$
(b) reflejar respecto a la recta $x = 2$

19–20 Encuentre el dominio de cada función.

19. (a) $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$ (b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{e^{\cos x}}$

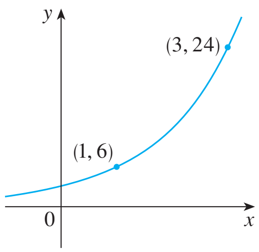
20. (a) $g(t) = \operatorname{sen}(e^{-t})$ (b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

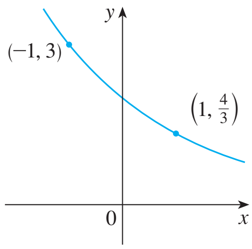
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

21–22 Encuentre la función exponencial $f(x) = Ca^x$ cuya gráfica está dada.

21.



22.



23. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x \left(\frac{5^h - 1}{h} \right)$$

24. Supongamos que a usted le ofrecen un trabajo que dura un mes. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago prefiere?
- I. Un millón de dólares al fin de mes.
- II. Un centavo el primer día del mes, dos centavos el segundo día, cuatro centavos el tercer día, y, en general 2^{n-1} centavos el n-ésimo día.

25. Suponga que las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ se trazan en una cuadrícula de coordenadas donde la unidad de medida es 1 in. Demuestre que, a una distancia de 2 ft a la derecha del origen, la altura de la gráfica de f es 48 ft pero la altura de la gráfica de g es de unas 265 millas.

26. Compare las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5^x$ al graficar ambas funciones en varios rectángulos de observación. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas correctos a un lugar decimal. ¿Qué función crece más rápidamente cuando x es grande?

27. Compare las funciones $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = e^x$ al graficar f y g en varios rectángulos de observación. ¿Cuándo es que la gráfica de g finalmente rebasa la gráfica de f?

28. Use una gráfica para calcular los valores de x tales que $e^x > 1{,}000{,}000{,}000$.

29. Bajo condiciones ideales, se sabe que cierta población de bacterias se duplica dada tres horas. Suponga que hay inicialmente 100 bacterias.
(a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
(b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
(c) Calcule el tamaño de la población después de 20 horas.
(d) Grafique la función de población y calcule el tiempo para que la población llegue a 50,000.

30. Un cultivo de bacterias empieza con 500 bacterias y se duplica en tamaño cada media hora.
(a) ¿Cuántas bacterias hay después de 3 horas?
(b) ¿Cuántas bacterias hay después de t horas?
(c) ¿Cuántas bacterias hay después de 40 minutos?
(d) Grafique la función de población y calcule el tiempo para que la población llegue a 100,000.

31. La vida media del bismuto 210, ^{210}Bi, es 5 días.
(a) Si una muestra tiene una masa de 200 mg, encuentre la cantidad restante después de 15 días.
(b) Encuentre la cantidad restante después de t días.
(c) Calcule la cantidad restante después de 3 semanas.
(d) Use una gráfica para calcular el tiempo necesario para que la masa se reduzca a 1 mg.

32. Un isótopo de sodio, ^{24}Na, tiene una vida media de 15 horas. Una muestra de este isótopo tiene masa de 2 g.
(a) Encuentre la cantidad restante después de 60 horas.
(b) Encuentre la cantidad restante después de t horas.
(c) Calcule la cantidad restante después de 4 días.
(d) Use una gráfica para calcular el tiempo necesario para que la masa se reduzca a 0.01 g.

33. Use una calculadora graficadora con funciones de regresión exponencial para modelar la población mundial con los datos de 1950 a 2000 de la Tabla 1 en la página 56. Use el modelo para calcular la población en 1993 y para predecir la población del año 2010.

34. La tabla siguiente muestra la población de Estados Unidos, en millones, para los años 1900-2000. Use una calculadora graficadora con funciones de regresión exponencial para modelar esa población desde 1900. Use el modelo para calcular la población en 1925 y para predecir la población en los años 2010 y 2020.

Año	Población	Año	Población
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150		

35. Si se grafica la función

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

se verá que f parece ser una función impar. Demuéstrelo.

36. Grafique varios miembros de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando cambia b? ¿Cómo cambia cuando cambia a?

1.6 Funciones inversas y logaritmos

La Tabla 1 da información de un experimento en el que un cultivo de bacterias empezó con 100 de ellas en un medio nutriente limitado; el tamaño de la población bacterial se registró a intervalos de una hora. El número N de bacterias es una función del tiempo t: $N = f(t)$.

Supongamos, sin embargo, que la bióloga cambia su punto de vista y se interesa en el tiempo necesario para que la población llegue a varios niveles. En otras palabras, ella está considerando a t como función de N. Esta función recibe el nombre de *función inversa* de f, denotada por f^{-1}, y se lee "f inversa". Así, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo necesario para que el nivel de población llegue a N. Los valores de f^{-1} se pueden hallar al leer la Tabla 1 de derecha a izquierda o al consultar la Tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$ porque $f(6) = 550$.

TABLA 1 N como función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población en el tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLA 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo para llegar a N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

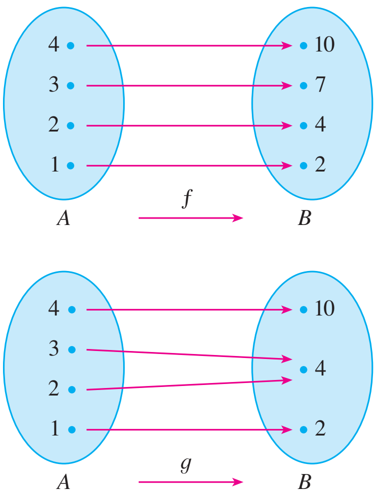


FIGURA 1
f es biunívoca; g no lo es

No todas las funciones tienen inversas. Comparemos las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la Figura 1. Observe que f nunca toma el mismo valor dos veces (dos entradas cualesquiera en A tienen diferentes salidas), mientras que g toma el mismo valor dos veces (tanto 2 como 3 tienen la misma salida, 4). En símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

pero $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Las funciones que comparten esta propiedad con f se denominan *funciones biunívocas.*

En el lenguaje de entradas y salidas, esta definición dice que f es biunívoca si cada salida corresponde a sólo una entrada.

1 Definición Una función f recibe el nombre de **función biunívoca** si nunca toma el mismo valor dos veces; esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

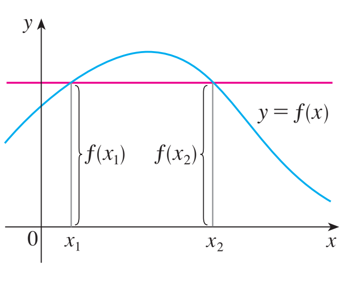


FIGURA 2
Esta función no es biunívoca porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos de la Figura 2 que hay los números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es biunívoca. Por tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es biunívoca.

Prueba de la recta horizontal Una función es biunívoca si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

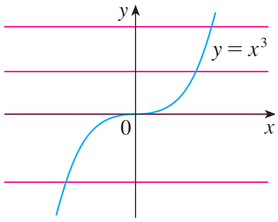


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es biunívoca.

V EJEMPLO 1 ¿Es biunívoca la función $f(x) = x^3$?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es biunívoca.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 3 vemos que ninguna recta horizontal cruza la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, f es biunívoca.

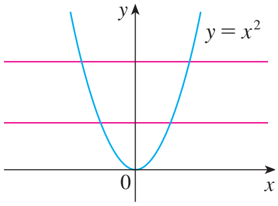


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ no es biunívoca.

V EJEMPLO 2 ¿Es biunívoca la función $g(x) = x^2$?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es biunívoca porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

y por tanto 1 y -1 tienen la misma salida.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es biunívoca.

Las funciones biunívocas son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

2 Definición Sea f una función biunívoca con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

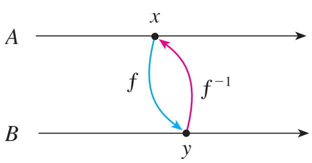


FIGURA 5

Esta definición dice que si f asigna un elemento x en y, entonces f^{-1} asigna un elemento de y en x. (Si f no fuera biunívoca, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.) El diagrama de flechas de la Figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Observe que

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque si $y = x^3$, entonces

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

PRECAUCIÓN No confundir el -1 de f^{-1} con un exponente. Así

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ podría, no obstante, escribirse como $[f(x)]^{-1}$,

V EJEMPLO 3 Evaluación de una función inversa Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$, y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1} tenemos

$$f^{-1}(7) = 3 \qquad \text{porque} \qquad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(5) = 1 \qquad \text{porque} \qquad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \qquad \text{porque} \qquad f(8) = -10$$

El diagrama de la Figura 6 aclara la forma en que f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

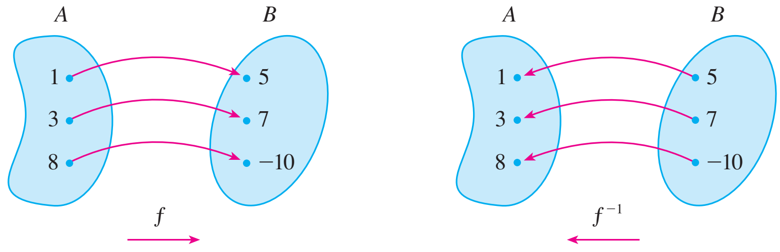


FIGURA 6
La función inversa invierte entradas y salidas

La letra x se usa tradicionalmente como la variable independiente, de modo que cuando nos concentramos en f^{-1} más que en f, por lo general invertimos los papeles de x y de y en la definición 2 y escribimos

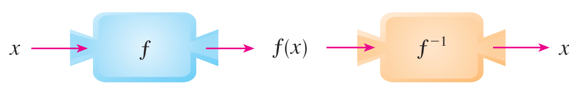
3 $$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

Al sustituir por y en la definición 2 y sustituir por x en (3), obtenemos las siguientes **ecuaciones de cancelación**:

4 $$\boxed{\begin{array}{ll} f^{-1}(f(x)) = x & \text{para toda } x \text{ en } A \\ f(f^{-1}(x)) = x & \text{para toda } x \text{ en } B \end{array}}$$

La primera ecuación de cancelación dice que si empezamos con x, aplicamos f, y luego aplicamos f^{-1}, llegamos de nuevo a x, donde empezamos (véase el diagrama de máquina de la Figura 7). Entonces, f^{-1} deshace lo que f hace. La segunda ecuación dice que f deshace lo que f^{-1} hace.

FIGURA 7



Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y así las ecuaciones de cancelación se convierten en

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones simplemente dicen que la función cúbica y la función de raíz cúbica se cancelan entre sí cuando se aplican en sucesión.

Veamos ahora cómo calcular funciones inversas. Si tenemos una función $y = f(x)$ y podemos despejar x de esta ecuación en términos de y, entonces de acuerdo con la definición 2 debemos tener $x = f^{-1}(y)$. Si deseamos llamar x a la variable independiente, entonces intercambiamos x y y llegando a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 Forma de hallar la función inversa de una función biunívoca f

Paso 1 Escribir $y = f(x)$.

Paso 2 Despejar x de esta ecuación en términos de y (si es posible).

Paso 3 Expresar f^{-1} como una función de x, intercambiar x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

V EJEMPLO 4 Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN De acuerdo con (5) primero escribimos

$$y = x^3 + 2$$

A continuación despejamos x de esta ecuación:

$$x^3 = y - 2$$

$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Por último, intercambiamos x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Por tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

En el Ejemplo 4, observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Elevar al cubo, luego sumar 2"; f^{-1} es la regla "Restar 2, luego tomar la raíz cúbica."

El principio de intercambiar x y y para hallar la función inversa también nos da el método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Como $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Pero obtenemos el punto (b, a) a partir de (a, b) al reflejar respecto a la recta $y = x$. (Véase la Figura 8.)

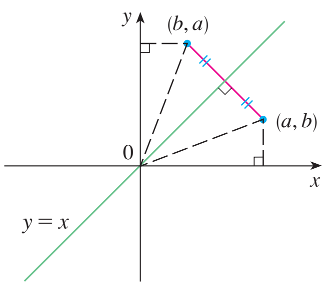


FIGURA 8

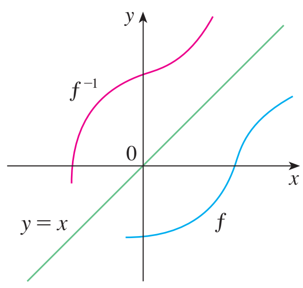


FIGURA 9

Por tanto, como se ilustra en la Figura 9:

La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f respecto a la recta $y = x$.

EJEMPLO 5 Trazo de una función y su inversa Trace las gráficas de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ y su función inversa usando los mismos ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN Primero trazamos la curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (la mitad superior de la parábola $y^2 = -1 - x$, o $x = -y^2 - 1$) y luego reflejamos respecto a la recta $y = x$ para obtener la gráfica de f^{-1}. (Véase la Figura 10.) Como prueba de nuestra gráfica, observe que

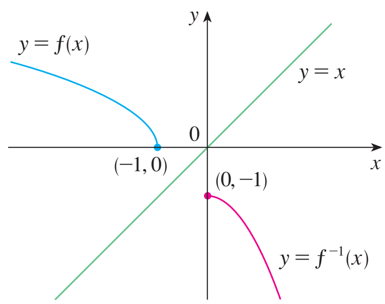


FIGURA 10

la expresión para f^{-1} es $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $x \geqslant 0$. Por tanto la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = -x^2 - 1$ y esto parece razonable de la Figura 10.

Funciones logarítmicas

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función exponencial $f(x) = a^x$ es creciente o decreciente y entonces es biunívoca por la prueba de la recta horizontal. En consecuencia, tiene una función inversa f^{-1}, que recibe el nombre de **función logarítmica con base *a*** y está denotada por $\log_a$. Si usamos la formulación de una función inversa dada por (3),

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

entonces tenemos

6
$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Por tanto, si $x > 0$, entonces $\log_a x$ es el exponente al cual la base a debe elevarse para dar x. Por ejemplo, $\log_{10} 0.001 = -3$ porque $10^{-3} = 0.001$.

Las ecuaciones de cancelación (4), cuando se aplican a las funciones $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se convierten en

7
$$\boxed{\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} &= x \quad \text{para toda } x > 0 \end{aligned}}$$

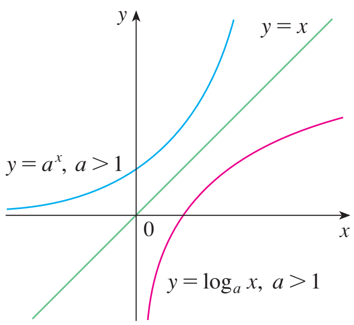


FIGURA 11

La función logarítmica $\log_a$ tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$. Su gráfica es la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ respecto a la recta $y = x$.

La Figura 11 muestra el caso donde $a > 1$. (Las funciones logarítmicas más importantes tienen base $a > 1$.) El hecho de que $y = a^x$ es una función muy rápidamente creciente para $x > 0$ se refleja en el hecho de que $y = \log_a x$ es una función muy lentamente creciente para $x > 1$.

La Figura 12 muestra las gráficas de $y = \log_a x$ con diversos valores de la base $a > 1$. Como $\log_a 1 = 0$, las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

Las siguientes propiedades de funciones logarítmicas se siguen de las correspondientes propiedades de funciones exponenciales dadas en la Sección 1.5.

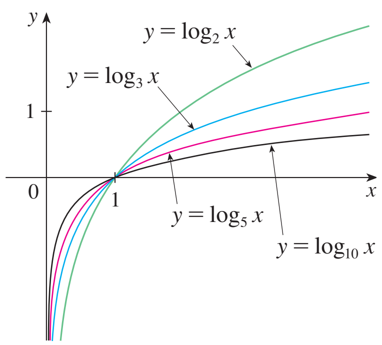


FIGURA 12

> **Leyes de logaritmos** Si x y y son números positivos, entonces
>
> **1.** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
>
> **2.** $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
>
> **3.** $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (donde r es cualquier número real)

EJEMPLO 6 Use las leyes de logaritmos para evaluar $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUCIÓN Usando la ley 2, tenemos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$.

Logaritmos naturales

Notación para logaritmos

Casi todos los libros de texto de cálculo y las ciencias, así como calculadoras, usan la notación $\ln x$ para el logaritmo natural y $\log x$ para el "logaritmo común", $\log_{10}x$. En la literatura más avanzada de matemáticas y ciencias y en lenguajes de computadoras, no obstante, la notación $\log x$ por lo general denota el logaritmo natural.

De todas las posibles bases a para logaritmos, veremos en el Capítulo 3 que la opción más conveniente de una base es el número e, que se definió en la Sección 1.5. El logaritmo con base e se denomina **logaritmo natural** y tiene una notación especial:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Si ponemos $a = e$ y sustituimos $\log_e$ con "ln" en (6) y (7), entonces las propiedades de definición de la función de logaritmo natural se convierten en

8
$$\boxed{\ln x = y \iff e^y = x}$$

9
$$\boxed{\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} &= x \qquad x > 0 \end{aligned}}$$

En particular, si hacemos $x = 1$, obtenemos

$$\boxed{\ln e = 1}$$

EJEMPLO 7 Encuentre x si $\ln x = 5$.

SOLUCIÓN 1 De (8) vemos que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Por tanto $x = e^5$.

(Si usted tiene problemas para trabajar con la notación "ln", simplemente sustitúyala con $\log_e$. Entonces la ecuación se convierte en $\log_e x = 5$; así, por la definición de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUCIÓN 2 Empiece con la ecuación

$$\ln x = 5$$

y aplique la función exponencial para ambos lados de la ecuación:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Pero la segunda ecuación de cancelación en (9) dice que $e^{\ln x} = x$. Por tanto, $x = e^5$.

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$.

SOLUCIÓN Tomamos logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación y usamos (9):

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

Como el logaritmo natural se encuentra en calculadoras científicas, podemos aproximar la solución: a cuatro lugares decimales, $x \approx 0.8991$.

V EJEMPLO 9 Uso de las leyes de logaritmos Exprese $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como un solo logaritmo.

SOLUCIÓN Usando las leyes 3 y 1 de logaritmos, tenemos

$$\begin{aligned}\ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2}\\ &= \ln a + \ln\sqrt{b}\\ &= \ln\left(a\sqrt{b}\right)\end{aligned}$$

La siguiente fórmula muestra que los logaritmos con cualquier base se pueden expresar en términos del logaritmo natural.

10 Fórmula para cambio de base Para cualquier número positivo a ($a \neq 1$), tenemos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Entonces, de (6), tenemos $a^y = x$. Tomando logaritmos naturales de ambos lados de esta ecuación, obtenemos $y \ln a = \ln x$. Por tanto,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Las calculadoras científicas cuentan con una tecla para logaritmos naturales, de modo que la Fórmula 10 hace posible que usemos una calculadora para calcular un logaritmo con cualquier base (como se muestra en el ejemplo siguiente). Del mismo modo, la Fórmula 10 nos permite graficar cualquier función logarítmica en una calculadora graficadora o computadora (Véanse Ejercicios 43 y 44).

EJEMPLO 10 Evaluar $\log_8 5$ correcto a seis lugares decimales.

SOLUCIÓN La Fórmula 10 da

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$

EJEMPLO 11 Interpretar una función inversa En el Ejemplo 3 de la Sección 1.5 demostramos que la masa del ^{90}Sr que permanece de una muestra de 24 mg después de t años es $m = f(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Encuentre la inversa de esta función e interprétela.

SOLUCIÓN Necesitamos despejar t de la ecuación $m = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Empezamos por aislar el exponencial y tomar logaritmos naturales de ambos lados

$$\begin{aligned}2^{-t/25} &= \frac{m}{24}\\ \ln\left(2^{-t/25}\right) &= \ln\left(\frac{m}{24}\right)\\ -\frac{t}{25}\ln 2 &= \ln m - \ln 24\\ t &= -\frac{25}{\ln 2}(\ln m - \ln 24) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)\end{aligned}$$

Por tanto, la función inversa es

$$f^{-1}(m) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

Esta función proporciona el tiempo necesario para que la masa se desintegre a m miligramos. En particular, el tiempo necesario para que la masa se reduzca a 5 mg es

$$t = f^{-1}(5) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln 5) \approx 56.58 \text{ años}$$

Esta respuesta concuerda con la estimación gráfica que hicimos en el Ejemplo 3(c) en la Sección 1.5.

Gráfica y crecimiento del logaritmo natural

Las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función de logaritmo natural, se muestran en la Figura 13. Como la curva $y = e^x$ cruza el eje y con una pendiente de 1, se deduce que la curva reflejada $y = \ln x$ cruza el eje x con pendiente de 1.

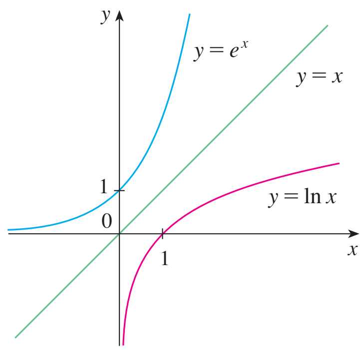


FIGURA 13
La gráfica de $y = \ln x$ es la reflexión de la gráfica de $y = e^x$ respecto a la recta $y = x$

En común con todas las otras funciones logarítmicas con base mayor a 1, el logaritmo natural es una función creciente definida en $(0, \infty)$ y el eje y es una asíntota vertical. (Esto significa que los valores de $\ln x$ se hacen muy negativos a medida que x se aproxima a 0.)

EJEMPLO 12 **Desplazar la función de logaritmo natural**

Trace la gráfica de la función $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUCIÓN Empezamos con la gráfica de $y = \ln x$ como se proporciona en la Figura 13. Usando las transformaciones de la Sección 1.3, la desplazamos 2 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2)$ y luego la desplazamos 1 unidad hacia abajo para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Véase la Figura 14.)

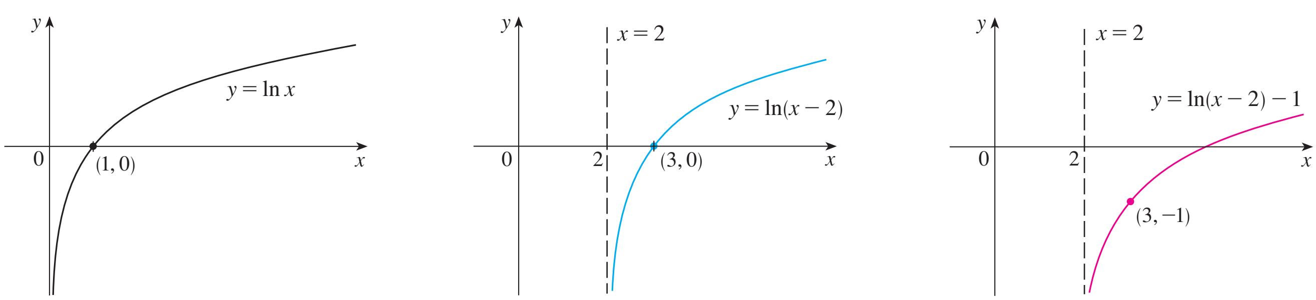


FIGURA 14

Aun cuando $\ln x$ es una función creciente, crece *muy* lentamente cuando $x > 1$. De hecho, $\ln x$ crece más lentamente que cualquier potencia positiva de x. Para ilustrar este hecho, comparamos valores aproximados de las funciones $y = \ln x$ y $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ en la siguiente tabla y los graficamos en las Figuras 15 y 16. Se puede ver que inicialmente las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ crecen con magnitudes comparables, pero en última instancia la función raíz sobrepasa con mucho al logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10,000	100,000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

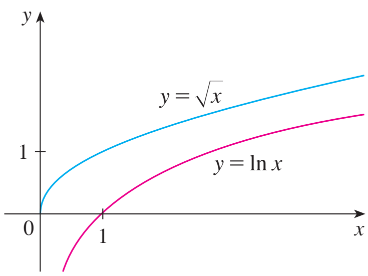


FIGURA 15

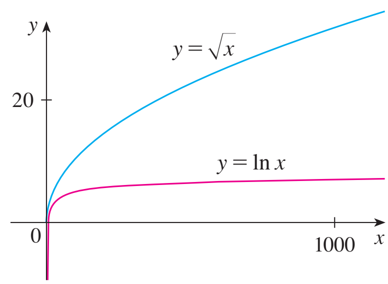


FIGURA 16

1.6 Ejercicios

1. (a) ¿Qué es una función biunívoca?
(b) ¿Cómo se puede decir de la gráfica de una función si es biunívoca?

2. (a) Suponga que f es una función biunívoca con dominio A y rango B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el rango de f^{-1}?
(b) Dada la fórmula para f, ¿cómo se encuentra una fórmula para f^{-1}?
(c) Dada la gráfica de f, ¿cómo se encuentra la gráfica de f^{-1}?

3–14 Una función está dada por una tabla de valores, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si es biunívoca.

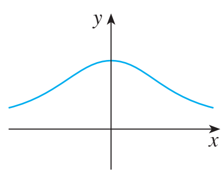
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

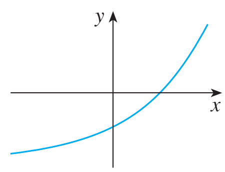
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0	1.9	2.8	3.5	3.1	2.9

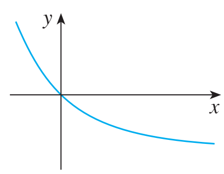
5.



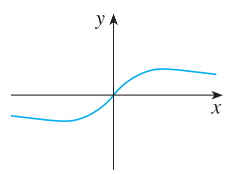
6.



7.



8.



9. $f(x) = x^2 - 2x$

10. $f(x) = 10 - 3x$

11. $g(x) = 1/x$

12. $g(x) = \cos x$

13. $f(t)$ es la altura de un balón de futbol t segundos después de patearlo.

14. $f(t)$ es la estatura de una persona a una edad t.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

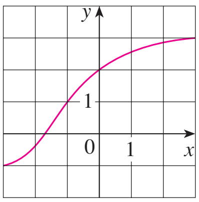
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

15. Si f es una función biunívoca tal que $f(2) = 9$, ¿cuál es $f^{-1}(9)$?

16. Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, encuentre $f^{-1}(3)$ y $f(f^{-1}(2))$.

17. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, encuentre $g^{-1}(4)$.

18. Tenemos la gráfica de f.
(a) ¿Por qué f es biunívoca?
(b) ¿Cuáles son el dominio y rango de f^{-1}?
(c) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(2)$?
(d) Calcule el valor de $f^{-1}(0)$.



19. La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geqslant -459.67$, exprese la temperatura C (grados Celsius) como función de la temperatura F (Fahrenheit). Encuentre una fórmula para la función inversa e interprétela. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

20. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz en un vacío. Encuentre la función inversa de f y explique su significado.

21–26 Encuentre una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

22. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$

24. $y = x^2 - x, \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

25. $y = \ln(x + 3)$

26. $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

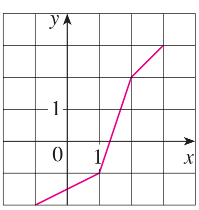
27–28 Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y úsela para graficar f^{-1}, f y la recta $y = x$ en la misma pantalla. Para comprobar su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones alrededor de la recta.

27. $f(x) = x^4 + 1, \quad x \geqslant 0$

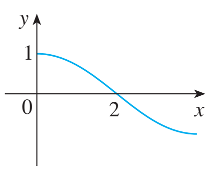
28. $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Use la gráfica dada de f para trazar la gráfica de f^{-1}.

29.



30.



31. Sea $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(a) Encuentre f^{-1}. ¿Cómo está relacionada con f?
(b) Identifique la gráfica de f y explique su respuesta al inciso (a).

32. Sea $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
(a) Encuentre g^{-1}. ¿Cómo está relacionada con g?
(b) Grafique g. ¿Cómo explica usted su respuesta al inciso (a)?

33. (a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_a x$?
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) ¿Cuál es el rango de esta función?
(d) Trace la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.

34. (a) ¿Cuál es el logaritmo natural?
(b) ¿Cuál es el logaritmo común?
(c) Trace las gráficas de la función de logaritmo natural y la función exponencial natural con un conjunto común de ejes.

35–38 Encuentre el valor exacto de cada expresión.

35. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

36. (a) $\ln(1/e)$ (b) $\log_{10}\sqrt{10}$

37. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

38. (a) $e^{-2\ln 5}$ (b) $\ln\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

39–41 Exprese la cantidad dada como un solo logaritmo.

39. $\ln 5 + 5\ln 3$

40. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2\ln c$

41. $\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln x - \ln \operatorname{sen} x$

42. Use la Fórmula 10 para evaluar cada logaritmo correcto a seis lugares decimales.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8.4$

43–44 Use la Fórmula 10 para graficar las funciones dadas en una pantalla común. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

43. $y = \log_{1.5} x, \quad y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = e^x, \quad y = 10^x$

45. Suponga que la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en una cuadrícula coordenada donde la unidad de medida es 1 in. ¿Cuántas millas a la derecha del origen tenemos que movernos antes que la altura de la curva llegue a 3 ft?

46. Compare las funciones $f(x) = x^{0.1}$ y $g(x) = \ln x$ al graficar f y g en diversos rectángulos de observación. ¿Cuándo es que la gráfica de f finalmente rebasa a la gráfica de g?

47–48 Haga un dibujo aproximado de la gráfica de cada función. No use calculadora; sólo use las gráficas dadas en las Figuras 12 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la Sección 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

49–52 De cada una de las siguientes ecuaciones, despeje x.

49. (a) $e^{7-4x} = 6$ (b) $\ln(3x - 10) = 2$

50. (a) $\ln(x^2 - 1) = 3$ (b) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

51. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

52. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, donde $a \neq b$

53–54 De cada una de las siguientes ecuaciones, despeje x.

53. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

54. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

55–56 Encuentre (a) el dominio de f y (b) f^{-1} y su dominio.

55. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$ **56.** $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

CAS **57.** Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es biunívoca. A continuación use un sistema computarizado de álgebra (SCA) para hallar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (El SCA producirá tres posibles expresiones. Explique por qué dos de ellas son irrelevantes en este contexto.)

CAS **58.** (a) Si $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$, use un sistema computarizado de álgebra para hallar una expresión para $g^{-1}(x)$.
(b) Use la expresión del inciso (a) para graficar $y = g(x)$, $y = x$, y $y = g^{-1}(x)$ en la misma pantalla.

59. Si una población de bacterias empieza con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, entonces el número de bacterias después de t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$. (Véase el Ejercicio 29 de la Sección 1.5.)
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuándo llegará a 50,000 la población?

60. Cuando se acciona el flash de una cámara, las baterías inmediatamente empiezan a recargar el condensador del flash, que almacena una carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La máxima capacidad de carga es Q_0 y t se mide en segundos.)
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuánto tiempo tarda para recargar el condensador a 90% de capacidad si $a = 2$?

61. Comenzando con la gráfica de $y = \ln x$, encuentre la ecuación de la gráfica que resulta de
(a) desplazar 3 unidades hacia arriba
(b) desplazar 3 unidades a la izquierda
(c) reflejar respecto al eje x
(d) reflejar respecto al eje y
(e) reflejar respecto a la recta $y = x$
(f) reflejar respecto al eje x y luego respecto a la recta $y = x$
(g) reflejar respecto al eje y y luego respecto a la recta $y = x$
(h) desplazar 3 unidades a la izquierda y luego reflejar respecto a la recta $y = x$

62. (a) Si desplazamos una curva a la izquierda, ¿qué pasa a su reflexión respecto a la recta $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$, donde f es una función biunívoca.
(b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

1.7 Curvas paramétricas

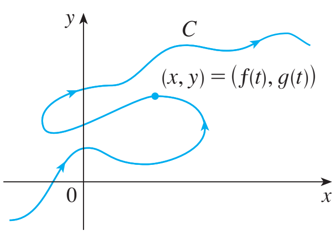


FIGURA 1

Imagine que una partícula se mueve a lo largo de la curva C que se muestra en la Figura 1. Es imposible describir C por medio de una ecuación de la forma $y = f(x)$ porque C no pasa la prueba de la recta vertical. Pero las coordenadas x y y de la partícula son funciones del tiempo y por ello podemos escribir $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Este par de ecuaciones con frecuencia es una forma conveniente de describir una curva y dar lugar a la siguiente definición.

Suponga que x y y están dadas como funciones de una tercera variable t (llamada **parámetro**) por las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(llamadas **ecuaciones paramétricas**). Cada valor de t determina un punto (x, y), que podemos localizar en un plano de coordenadas. Cuando t varía, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varía y traza una curva C, que llamamos **curva paramétrica**. El parámetro t no necesariamente representa tiempo y, de hecho, podríamos usar una letra que no sea t para el parámetro. Pero en numerosas aplicaciones de curvas paramétricas, t denota tiempo y por tanto podemos interpretar $(x, y) = (f(t), g(t))$ como la posición de una partícula en el tiempo t.

EJEMPLO 1 Graficar una curva paramétrica Trace e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUCIÓN Cada valor de t da un punto en la curva, como se muestra en la tabla. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$, $y = 1$ y por tanto el punto correspondiente es (0, 1). En la Figura 2 localizamos los puntos (x, y) determinados por diversos valores del parámetro t y los unimos para obtener una curva.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

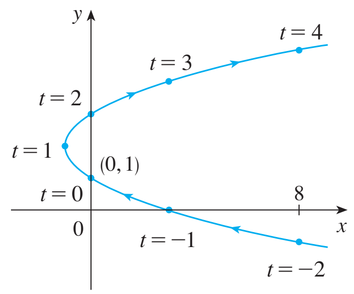


FIGURA 2

Una partícula cuya posición sea dada por las ecuaciones paramétricas se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas cuando t aumenta. Observe que los puntos consecutivos marcados en la curva aparecen a intervalos iguales en tiempo pero no a iguales distancias. Esto es porque la partícula reduce su rapidez y luego acelera cuando t aumenta.

De la Figura 2 se ve que la curva trazada por la partícula puede ser una parábola. Esto puede confirmarse al eliminar el parámetro t como sigue. Obtenemos $t = y - 1$ de la segunda ecuación y sustituimos en la primera ecuación. Esto da

Esta ecuación en x y y describe *dónde* ha estado la partícula, pero no nos dice *cuándo* la partícula estaba en un punto en particular. Las ecuaciones paramétricas tienen una ventaja: nos indican *cuándo* la partícula estaba en un punto. También indican la *dirección* del movimiento.

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

y por ello la curva representada por las ecuaciones paramétricas dadas es la parábola $x = y^2 - 4y + 3$.

No se puso ninguna restricción en el parámetro t en el Ejemplo 1, de modo que supusimos que t podría ser cualquier número real, pero a veces restringimos t a estar en un intervalo finito. Por ejemplo, la curva paramétrica

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

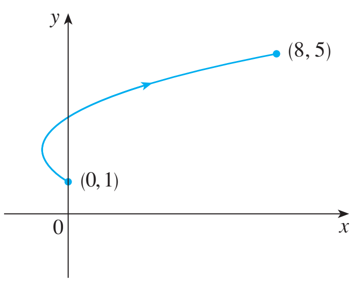


FIGURA 3

que se muestra en la Figura 3 es la parte de la parábola del Ejemplo 1 que se inicia en el punto (0, 1) y termina en el punto (8, 5). La punta de flecha indica la dirección en la que la curva está trazada cuando t aumenta de 0 a 4.

En general, la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tiene **punto inicial** $(f(a), g(a))$ y **punto terminal** $(f(b), g(b))$.

V EJEMPLO 2 Identificar una curva paramétrica ¿Qué curva está representada por las siguientes ecuaciones paramétricas?

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

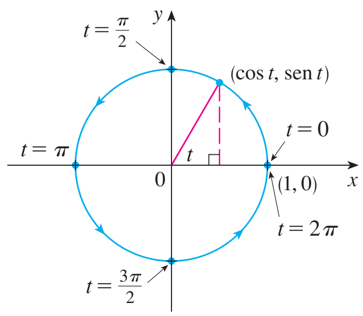


FIGURA 4

SOLUCIÓN Si localizamos puntos, se ve que la curva es una circunferencia. Podemos confirmar esta impresión al eliminar t. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Así, el punto (x, y) se mueve en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Observe que, en este ejemplo, el parámetro t se puede interpretar como el ángulo (en radianes) que se muestra en la Figura 4. Cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se mueve una vez alrededor del círculo en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj empezando desde el punto (1, 0).

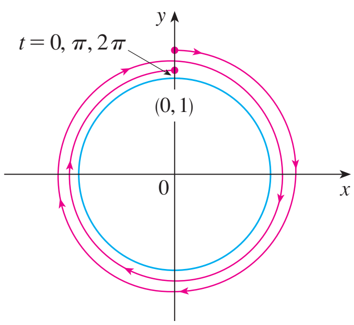


FIGURA 5

EJEMPLO 3 ¿Cuál curva está representada por las ecuaciones paramétricas dadas?

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN De nuevo tenemos

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

de modo que las ecuaciones paramétricas otra vez representan la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Pero, cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ empieza en (0, 1) y se mueve *dos veces* alrededor del círculo en la dirección de giro de las manecillas de un reloj, como se indica en la Figura 5.

Los Ejemplos 2 y 3 muestran que diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden representar la misma curva. Así, distinguimos entre una *curva*, que es un conjunto de puntos, y una *curva paramétrica*, en la que los puntos están trazados de una forma particular.

EJEMPLO 4 Encuentre ecuaciones paramétricas para la circunferencia con centro (h, k) y radio r.

SOLUCIÓN Si tomamos las ecuaciones de la circunferencia unitaria del Ejemplo 2 y multiplicamos las expresiones de x y y por r, obtenemos $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$. Se puede verificar que estas ecuaciones representan una circunferencia con radio r y centro en el origen trazadas en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj. Ahora nos desplazamos h unidades en la dirección x y k unidades en la dirección y y obtenemos ecuaciones paramétricas de la circunferencia (Figura 6) con centro (h, k) y radio r:

$$x = h + r \cos t \qquad y = k + r \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

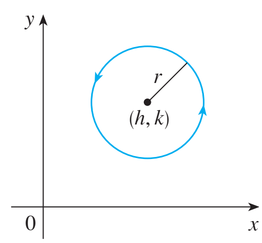


FIGURA 6
$x = h + r\cos t,\ y = k + r \operatorname{sen} t$

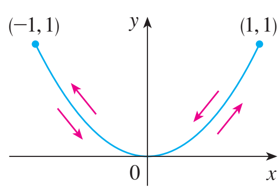


FIGURA 7

V EJEMPLO 5 Trace la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$.

SOLUCIÓN Observe que $y = (\operatorname{sen} t)^2 = x^2$ y por tanto el punto (x, y) se mueve en la parábola $y = x^2$. Pero obsérvese también que, como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$, tenemos $-1 \leqslant x \leqslant 1$, y las ecuaciones paramétricas representan sólo la parte de la parábola para la cual $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Como sen t es periódico, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ se mueve en un sentido y otro infinitamente, con frecuencia a lo largo de la parábola de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$. (Véase Figura 7.)

TEC Module 1.7A da una animación de la relación entre movimiento a lo largo de una curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ y movimiento a lo largo de las gráficas de f y g como funciones de t. Hacer clic en TRIG dará la familia de curvas paramétricas

$$x = a \cos bt \qquad y = c \operatorname{sen} dt$$

Si se escogen $a = b = c = d = 1$ y se hace clic en **animate**, usted verá la forma en que las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ se relacionan con la circunferencia del Ejemplo 2. Si se escoge $a = b = c = 1$, $d = 2$, se verán gráficas como las de la Figura 8. Al hacer clic en **animate** o mover el cursor a la derecha, se puede ver en la clave de colores cómo es que el movimiento a lo largo de las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} 2t$ corresponde al movimiento a lo largo de la curva paramétrica, que recibe el nombre de **figura de Lissajous**.

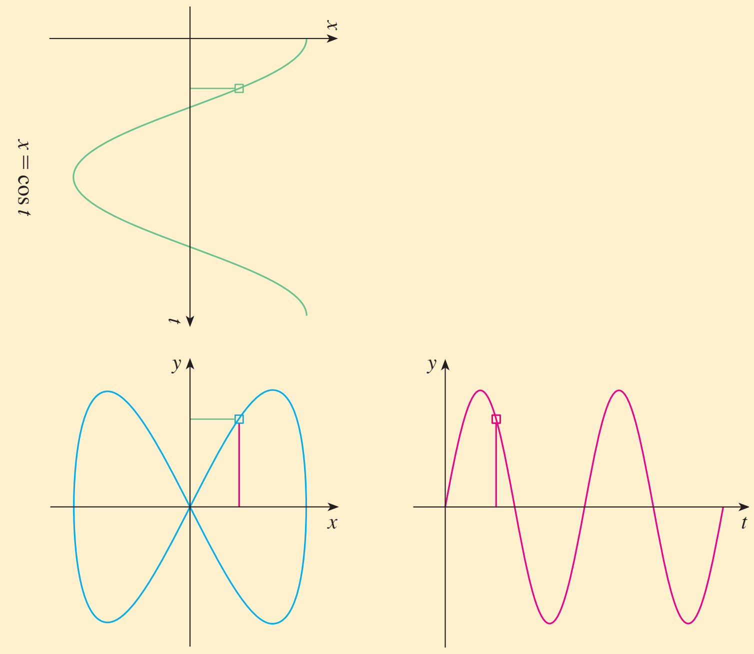


FIGURA 8 $x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} 2t$ $\qquad$ $y = \operatorname{sen} 2t$

Calculadoras graficadoras

Casi todas las calculadoras graficadoras y programas de gráficas para computadora pueden usarse para graficar curvas definidas por ecuaciones paramétricas. De hecho, es instructivo observar una curva paramétrica al ser trazada por una calculadora graficadora porque los puntos son localizados en orden cuando aumentan los valores del parámetro correspondiente.

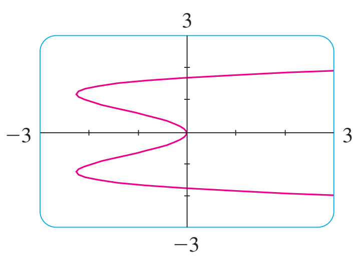


FIGURA 9

EJEMPLO 6 **Graficar x como función de y**

Use una calculadora graficadora para graficar la curva $x = y^4 - 3y^2$.

SOLUCIÓN Si el parámetro es $t = y$, entonces tenemos las ecuaciones

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Usando estas ecuaciones paramétricas para graficar la curva, obtenemos la Figura 9. Sería posible despejar y de la ecuación dada ($x = y^4 - 3y^2$) como cuatro funciones de x y graficarlas individualmente, pero las ecuaciones paramétricas proporcionan un método mucho más fácil.

En general, si necesitamos graficar una ecuación de la forma $x = g(y)$, podemos usar las ecuaciones paramétricas

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Observe también que las curvas con ecuaciones $y = f(x)$ (con las que estamos más familiarizados, gráficas de funciones) también pueden ser consideradas como curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = f(t)$$

Las calculadoras graficadoras son particularmente útiles cuando se trazan curvas complicadas. Por ejemplo, las curvas mostradas en las Figuras 10, 11 y 12 serían prácticamente imposibles de producir a mano.

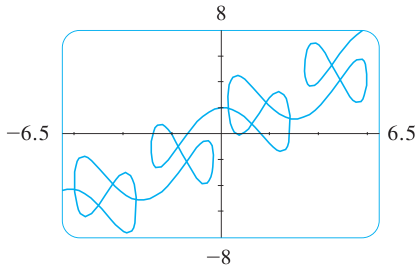


FIGURA 10
$x = t + 2 \operatorname{sen} 2t$
$y = t + 2 \cos 5t$

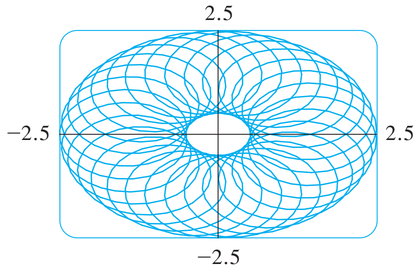


FIGURA 11
$x = 1.5 \cos t - \cos 30t$
$y = 1.5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 30t$

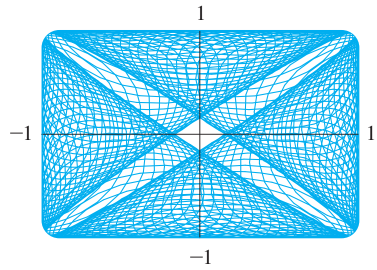


FIGURA 12
$x = \operatorname{sen}(t + \cos 100t)$
$y = \cos(t + \operatorname{sen} 100t)$

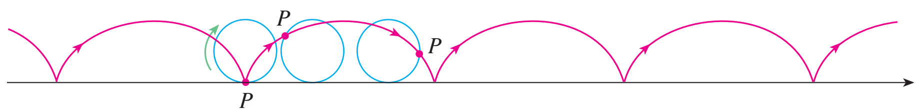
Uno de los usos más importantes de curvas paramétricas es en el diseño asistido por computadora (CAD). En el Proyecto de Laboratorio después de la Sección 3.4 investigaremos curvas paramétricas especiales, llamadas **curvas de Bézier**, que se usan extensamente en manufacturas, en especial en la industria automotriz. Estas curvas también se usan para especificar las formas de letras y otros símbolos en impresoras láser.

El cicloide

TEC Una animación del Module 1.7B muestra cómo se forma el cicloide cuando se mueve el círculo.

EJEMPLO 7 Deducir ecuaciones paramétricas para un cicloide La curva trazada por un punto P en la circunferencia de un círculo, cuando el círculo rueda a lo largo de una recta, recibe el nombre de **cicloide** (véase Figura 13). Si el círculo tiene radio r y rueda a lo largo del eje x y si una posición de P es el origen, encuentre ecuaciones paramétricas para el cicloide.

FIGURA 13



SOLUCIÓN Escogemos como parámetro el ángulo de rotación θ del círculo ($\theta = 0$ cuando P está en el origen). Supongamos que el círculo ha girado θ radianes. Como el círculo ha estado en contacto con la recta, vemos de la Figura 14 que la distancia que ha rodado desde el origen es

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

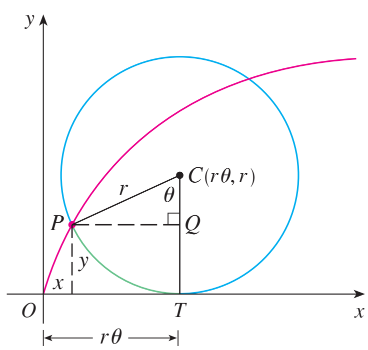


FIGURA 14

Por tanto, el centro del círculo es $C(r\theta, r)$. Sean (x, y) las coordenadas de P. Entonces, de la Figura 14 vemos que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del cicloide son

$$\boxed{1} \qquad x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Un arco del cicloide proviene de una rotación del círculo y así está descrito por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Aun cuando las Ecuaciones 1 se derivaron de la Figura 14, que ilustra el caso donde $0 < \theta < \pi/2$, se puede ver que estas ecuaciones todavía son válidas para otros valores de θ (véase Ejercicio 37).

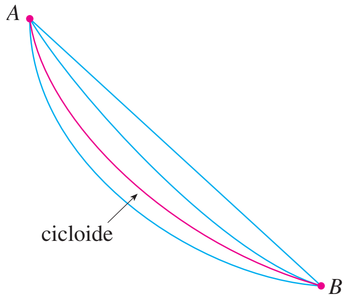


FIGURA 15

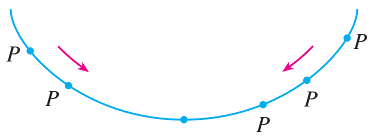


FIGURA 16

Aun cuando es posible eliminar el parámetro θ de las Ecuaciones 1, la resultante ecuación cartesiana en x y y es muy complicada y no es tan conveniente para trabajar como lo son las ecuaciones paramétricas.

Una de las primeras personas en estudiar el cicloide fue Galileo, quien propuso que podían construirse puentes en forma de cicloides y trató de hallar el área bajo un arco de un cicloide. Después esta curva apareció en relación con el **problema braquistocrono**: hallar la curva a lo largo de la cual una partícula se deslizará en el tiempo más corto (bajo la influencia de la gravedad) desde un punto A a un punto B más bajo no directamente debajo de A. El matemático suizo John Bernoulli, que planteó este problema en 1696, demostró que entre todas las posibles curvas que enlazan A y B, como en la Figura 15, la partícula tomará el mínimo tiempo deslizarse de A a B si la curva es parte de un arco invertido de un cicloide.

El físico holandés Huygens ya había demostrado que el cicloide también es una solución al **problema tautocrono**; esto es, sin importar en dónde se coloque la partícula P en un cicloide invertido, toma el mismo tiempo deslizarse al fondo (véase Figura 16). Huygens propuso que los relojes de péndulo (que él inventó) deberían oscilar en arcos de cicloide porque entonces el péndulo tomaría el mismo tiempo para hacer una oscilación completa si oscila en un arco ancho o en uno pequeño.

1.7 Ejercicios

1–4 Trace la curva con el uso de ecuaciones paramétricas para localizar puntos. Indique con una flecha la dirección en la que la curva se traza cuando t aumenta.

1. $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

2. $x = t^2, \quad y = t^3 - 4t, \quad -3 \leqslant t \leqslant 3$

3. $x = \cos^2 t, \quad y = 1 - \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

4. $x = e^{-t} + t, \quad y = e^t - t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

5–8
(a) Trace la curva con el uso de las ecuaciones paramétricas para localizar puntos. Indique con una flecha la dirección en la que la curva se traza cuando t aumenta.
(b) Elimine el parámetro para hallar una ecuación cartesiana de la curva.

5. $x = 3t - 5, \quad y = 2t + 1$

6. $x = 1 + 3t, \quad y = 2 - t^2$

7. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

8. $x = t^2, \quad y = t^3$

9–16
(a) Elimine el parámetro para hallar una ecuación cartesiana de la curva.
(b) Trace la curva e indique con una flecha la dirección en la que la curva se traza cuando el parámetro aumenta.

9. $x = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta, \quad y = \cos \frac{1}{2}\theta, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

10. $x = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad y = 2 \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

11. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi/2$

12. $x = \tan^2\theta, \quad y = \sec\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

13. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1$

14. $x = e^t - 1, \quad y = e^{2t}$

15. $x = \operatorname{sen}\theta, \quad y = \cos 2\theta$

16. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geqslant 1$

17–20 Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado.

17. $x = 3 + 2\cos t, \quad y = 1 + 2\operatorname{sen} t, \quad \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

18. $x = 2\operatorname{sen} t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

19. $x = 5\operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

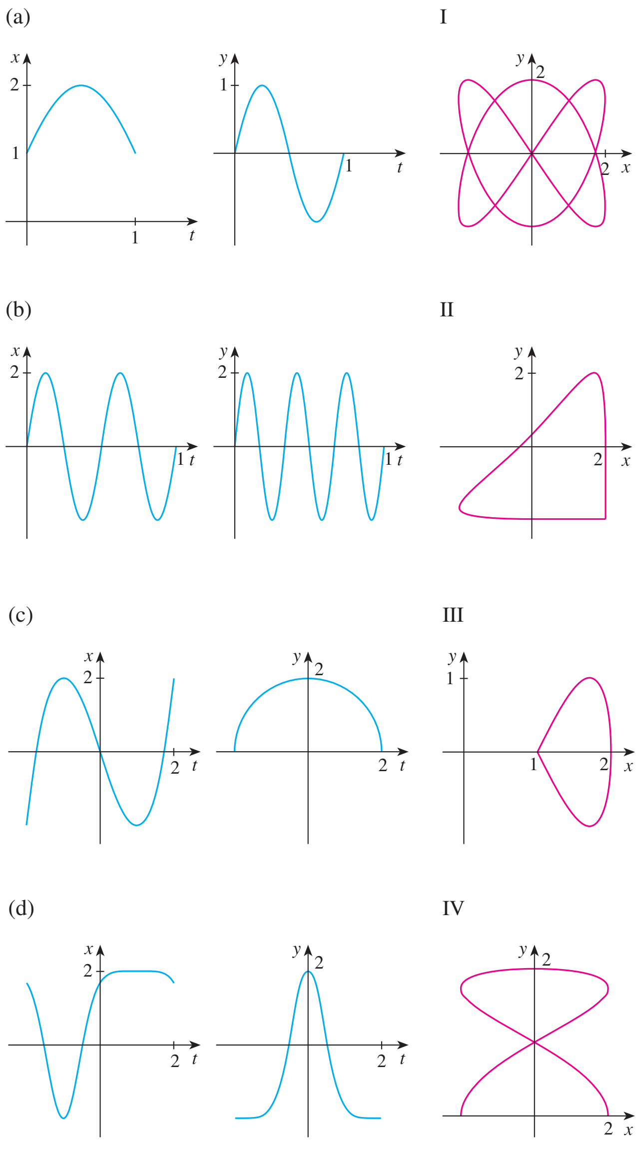
20. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

21. Suponga que una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde el intervalo de f es $[1, 4]$ y el intervalo de g es $[2, 3]$. ¿Qué se puede decir acerca de la curva?

22. Relacione las gráficas de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en (a)-(d) con las curvas paramétricas marcadas del I al IV. Dé razones para sus selecciones.

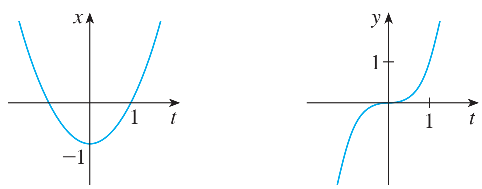
Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

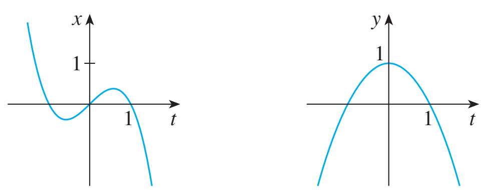


23–25 Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para trazar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en la que la curva se traza cuando t aumenta.

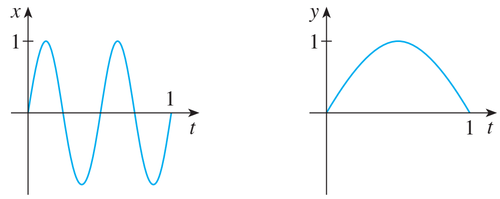
23.



24.

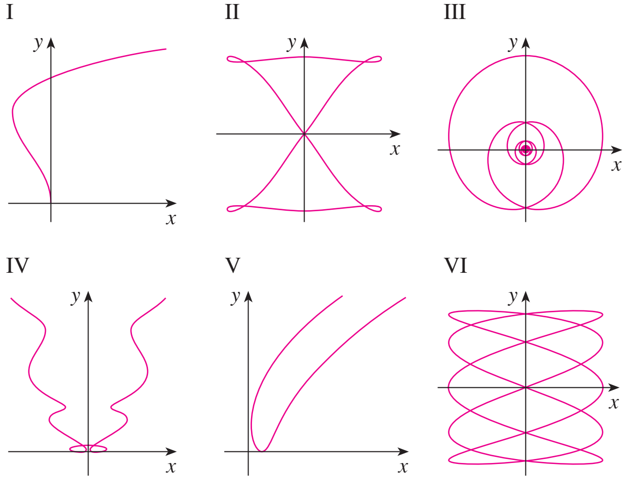


25.



26. Relacione las ecuaciones paramétricas con las gráficas marcadas I-VI. Dé razones para sus selecciones. (No use calculadora graficadora.)

(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$
(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$
(c) $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 2t)$
(d) $x = \cos 5t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$
(e) $x = t + \operatorname{sen} 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$
(f) $x = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$



27. Grafique la curva $x = y - 2 \operatorname{sen} \pi y$.

28. Grafique las curvas $y = x^3 - 4x$ y $x = y^3 - 4y$ y encuentre sus puntos de intersección correctos a un lugar decimal.

29. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, describen el segmento de recta que enlaza los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Encuentre ecuaciones paramétricas para representar el segmento de recta de $(-2, 7)$ a $(3, -1)$.

30. Use calculadora graficadora y el resultado del Ejercicio 29(a) para trazar el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(1, 5)$.

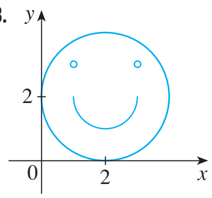
31. Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve a lo largo de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ en la forma descrita.

(a) Una vez en sentido de giro de las manecillas de un reloj, empezando en $(2, 1)$
(b) Tres veces en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, empezando en $(2, 1)$
(c) A la mitad de la circunferencia, en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, empezando en $(0, 3)$

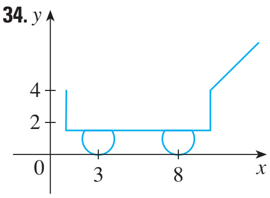
32. (a) Encuentre ecuaciones paramétricas para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugerencia:* Modifique las ecuaciones de la circunferencia del Ejemplo 2.]
(b) Use estas ecuaciones paramétricas para graficar la elipse cuando $a = 3$ y $b = 1, 2, 4$ y 8.
(c) ¿Cómo cambia la forma de la elipse a medida que b varía?

33–34 Use calculadora graficadora o computadora para reproducir la imagen.

33.



34.



35–36 Compare las curvas representadas por las ecuaciones paramétricas. ¿Cómo difieren?

35. (a) $x = t^3, \quad y = t^2$ (b) $x = t^6, \quad y = t^4$
(c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

36. (a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$
(c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

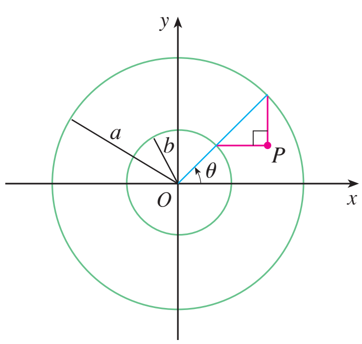
37. Deduzca las Ecuaciones 1 para el caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

38. Sea P un punto en una distancia d desde el centro de un círculo de radio r. La curva trazada por P cuando el círculo gira a lo largo de una recta se llama **trocoide**. (Considere el movimiento de un punto en un rayo de una rueda de bicicleta.) El cicloide es el caso especial de un trocoide con $d = r$. Usando el mismo parámetro θ que para el cicloide y, suponiendo que la recta es el eje x y $\theta = 0$ cuando P está en uno de sus puntos más bajos, demuestre que las ecuaciones paramétricas del trocoide son

$$x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Trace el trocoide para los casos $d < r$ y $d > r$.

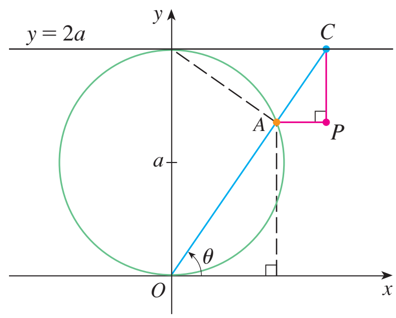
39. Si a y b son números fijos, encuentre ecuaciones paramétricas para la curva que está formada por todas las posiciones posibles del punto P de la figura, usando el ángulo θ como el parámetro. Entonces elimine el parámetro e identifique la curva.



40. Una curva, llamada **bruja de Maria Agnesi**, consta de todas las posiciones posibles del punto P de la figura. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva se pueden escribir como

$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$

Trace la curva.



41. Suponga que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

y la posición de una segunda partícula está dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(a) Grafique las trayectorias de ambas partículas. ¿Cuántos puntos de intersección hay?
(b) ¿Son todos estos puntos *puntos de colisión*? En otras palabras, ¿Las partículas estan siempre en el mismo lugar al mismo timpo? Si es así, encuentre los puntos de colisión.
(c) Describa qué sucede si la trayectoria de la segunda partícula está dada por:

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

42. Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo, a un ángulo α sobre la horizontal y se supone que la resistencia del aire es insignificante, entonces su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 m/s^2).
(a) Si un cañón es disparado con $\alpha = 30°$ y $v_0 = 500$ m/s, ¿cuándo caerá el proyectil al suelo? ¿A qué distancia del cañón caerá al suelo? ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la bala?
(b) Use una calculadora graficadora para comprobar las respuestas al inciso (a). A continuación grafique la trayectoria del proyectil para otros valores diversos del ángulo α para ver dónde cae al suelo. Resuma lo que encuentre.
(c) Demuestre que la trayectoria es parabólica al eliminar el parámetro.

43. Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. ¿Cómo cambia la forma cuando c aumenta? Ilustre al graficar varios miembros de la familia.

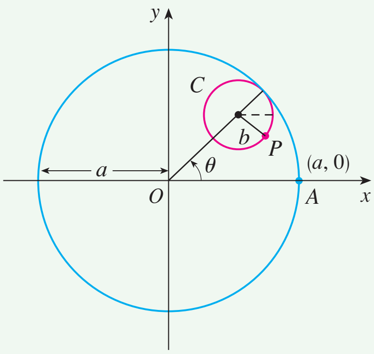
44. Las **curvas de catástrofe de cola de golondrina** están definidas por las ecuaciones paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$.

Grafique varias de estas curvas. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Cómo cambian cuando c aumenta?

45. Las curvas con ecuaciones $x = a$ sen nt, $y = b \cos t$ se denominan **figuras de Lissajous**. Investigue la forma en que estas curvas varían cuando a, b y n varían. (Tome n como un entero positivo.)

46. Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen } t - \text{sen } ct$, donde $c > 0$. Empiece haciendo que c sea un entero positivo y vea lo que sucede a la forma cuando c aumenta. A continuación explore algunas de las posibilidades que se presentan cuando c es una fracción.

PROYECTO DE LABORATORIO — Correr círculos alrededor de círculos



TEC Observe el Module 1.7B para ver cómo es que hipocicloides y epicicloides son formados por el movimiento de círculos en rotación.

En este proyecto investigamos familias de curvas, llamadas *hipocicloides* y *epicicloides*, que se generan por el movimiento de un punto en un círculo que gira dentro o fuera de otro círculo.

1. Un **hipocicloide** es una curva trazada por un punto fijo P en un círculo C de radio b cuando C rueda en el interior de un círculo con centro O y radio a. Demuestre que si la posición inicial de P es $(a, 0)$ y el parámetro θ se escoge como en la figura, entonces las ecuaciones paramétricas del hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right) \qquad y = (a - b)\,\text{sen}\,\theta - b\,\text{sen}\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right)$$

2. Use calculadora graficadora (o la gráfica interactiva del Module 1.7B TEC) para trazar las gráficas de hipocicloides con un entero positivo a y $b = 1$. ¿Cómo es que el valor de a afecta a la gráfica? Demuestre que si tomamos $a = 4$, entonces las ecuaciones paramétricas del hipocicloide se reducen a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\,\text{sen}^3\theta$$

Esta curva se llama **hipocicloide de cuatro cúspides**, o **astroide**.

3. Ahora intente $b = 1$ y $a = n/d$, una fracción donde n y d no tienen factor común. Primero sea $n = 1$ y trate de determinar gráficamente el efecto del denominador d en la forma de la gráfica. Entonces deje variar n al tiempo que d se mantiene constante. ¿Qué ocurre cuando $n = d + 1$?

4. ¿Qué ocurre si $b = 1$ y a es irracional? Experimente con un número irracional como $\sqrt{2}$ o $e - 2$. Tome valores cada vez más grandes para θ y especule sobre lo que ocurriría si fuéramos a graficar el hipocicloide para todos los valores reales de θ.

5. Si el círculo C rueda en el *exterior* del círculo fijo, la curva trazada por P se denomina **epicicloide**. Encuentre ecuaciones paramétricas para el epicicloide.

6. Investigue las posibles formas para epicicloides. Use métodos similares a los Problemas 2-4.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1 Repaso

Verificación de conceptos

1. (a) ¿Qué es una función? ¿Cuáles son su dominio y rango?
   (b) ¿Qué es la gráfica de una función?
   (c) ¿Cómo se puede saber si una curva determinada es la gráfica de una función?

2. Examine cuatro formas de representar una función. Ilustre su análisis con ejemplos.

3. (a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo se puede saber si una función es par al ver su gráfica?
   (b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo se puede saber si una función es impar al ver su gráfica?

4. ¿Qué es una función creciente?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

6. Dé un ejemplo de cada tipo de función.
   (a) Función lineal (b) Función de potencia
   (c) Función exponencial (d) Función cuadrática
   (e) Polinomio de grado 5 (f) Función racional

7. Trace manualmente, en los mismos ejes, las gráficas de las siguientes funciones.
   (a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
   (c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Trace manualmente un dibujo aproximado de la gráfica de cada función.
   (a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \tan x$
   (c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
   (e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
   (g) $y = \sqrt{x}$

9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
   (a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
   (b) ¿Cuál es el dominio de fg?
   (c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

11. Suponga que nos dan la gráfica de f. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de la gráfica de f como sigue.
    (a) Desplazar 2 unidades hacia arriba.
    (b) Desplazar 2 unidades hacia abajo.
    (c) Desplazar 2 unidades a la derecha.
    (d) Desplazar 2 unidades a la izquierda.
    (e) Reflejar 2 unidades respecto al eje x.
    (f) Reflejar 2 unidades respecto al eje y.
    (g) Estirar verticalmente en un factor de 2.
    (h) Contraer verticalmente en un factor de 2.
    (i) Estirar horizontalmente en un factor de 2.
    (j) Contraer horizontalmente en un factor de 2.

12. (a) ¿Qué es una función biunívoca? ¿Cómo se puede saber si una función es biunívoca al ver su gráfica?
    (b) Si f es una función biunívoca, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo se obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

13. (a) ¿Qué es una curva paramétrica?
    (b) ¿Cómo se traza una curva paramétrica?
    (c) ¿Por qué una curva paramétrica podría ser más útil que una curva de la forma $y = f(x)$?

Preguntas de verdadero-falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.

3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.

4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Una recta vertical cruza la gráfica de una función en más de un punto.

6. Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.

7. Si f es biunívoca, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

8. Siempre se puede dividir entre e^x.

9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.

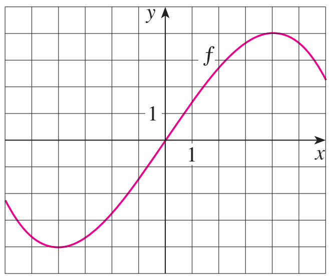
10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

11. Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

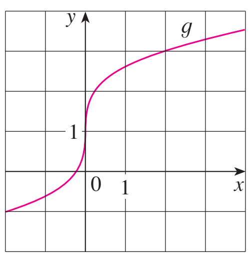
12. Las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^4$ tienen la misma gráfica que $x = t^3$, $y = t^6$.

Ejercicios

1. Sea f la función cuya gráfica aparece a continuación.
(a) Calcule el valor de $f(2)$.
(b) Calcule los valores de x tales que $f(x) = 3$.
(c) Exprese el dominio de f.
(d) Exprese el rango de f.
(e) ¿En qué intervalo es creciente f?
(f) ¿Es f biunívoca? Explique.
(g) ¿Es f par, impar, o no es par ni impar? Explique



2. A continuación se muestra la gráfica de g.
(a) Exprese el valor de $g(2)$.
(b) ¿Por qué es g biunívoca?
(c) Calcule el valor de $g^{-1}(2)$.
(d) Calcule el dominio de g^{-1}.
(e) Trace la gráfica de g^{-1}.



3. Si $f(x) = x^2 - 2x + 3$, evalúe el cociente de diferencia

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

4. Trace una gráfica aproximada del rendimiento de una cosecha como función de la cantidad de fertilizante que se use.

5–8 Encuentre el dominio y rango de la función. Escriba su respuesta en notación de intervalos.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$

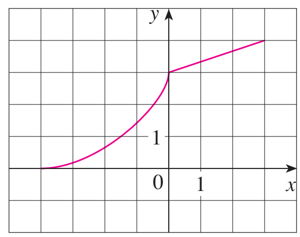
6. $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$

8. $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Suponga que nos dan la gráfica de f. Describa la forma en que las gráficas de las siguientes funciones se pueden obtener a partir de la gráfica de f.
(a) $y = f(x) + 8$
(b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 1 + 2f(x)$
(d) $y = f(x - 2) - 2$
(e) $y = -f(x)$
(f) $y = f^{-1}(x)$

10. Nos dan la gráfica de f. Trace las gráficas de las siguientes funciones.
(a) $y = f(x - 8)$
(b) $y = -f(x)$
(c) $y = 2 - f(x)$
(d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
(e) $y = f^{-1}(x)$
(f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 Use transformaciones para trazar la gráfica de la función.

11. $y = -\operatorname{sen} 2x$

12. $y = 3\ln(x - 2)$

13. $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$

14. $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

16. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determine si f es par, impar, o no es par ni impar.
(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
(b) $f(x) = x^3 - x^7$
(c) $f(x) = e^{-x^2}$
(d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica está formada por un segmento de recta del punto $(-2, 2)$ al punto $(-1, 0)$ junto con la mitad superior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como una composición de tres funciones.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

21. La esperanza de vida mejoró considerablemente en el siglo XX. La siguiente tabla muestra la esperanza de vida al nacer (en años) de hombres nacidos en Estados Unidos. Use una gráfica de dispersión para escoger un tipo apropiado de modelo. Use su modelo para predecir la esperanza de vida de un hombre nacido en el año 2010.

Año de nacimiento	Esperanza de vida	Año de nacimiento	Esperanza de vida
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

22. Un fabricante de aparatos pequeños para el hogar encuentra que cuesta \$9000 producir 1000 tostadores por semana y \$12,000 producir 1500 tostadores por semana.
(a) Exprese el costo como función del número de tostadores producidos, suponiendo que es lineal. A continuación trace la gráfica.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
(c) ¿Cuál es la intersección con y de la gráfica y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, encuentre $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encuentre el valor exacto de cada expresión.
(a) $e^{2 \ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

26. De cada una de estas ecuaciones despeje x.
(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$
(c) $e^{e^x} = 2$

27. La vida media del paladio 100, ^{100}Pd, es de cuatro días. (Por tanto, la mitad de cualquier cantidad dada de ^{100}Pd se desintegrará en cuatro días.) La masa inicial de una muestra es un gramo.
(a) Encuentre la masa restante después de 16 días.
(b) Encuentre la masa $m(t)$ restante después de t días.
(c) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(d) ¿Cuándo se reducirá la masa a 0.01 g?

28. La población de cierta especie en un ambiente limitado con población inicial de 100 y capacidad de carga de 1000 es

$$P(t) = \frac{100{,}000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años.
(a) Grafique esta función y calcule cuánto tarda la población en llegar a 900.
(b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(c) Use la función inversa para hallar el tiempo necesario para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso (a).

29. Grafique miembros de la familia de funciones $f(x) = \ln(x^2 - c)$ para diversos valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c cambia?

30. Grafique las tres funciones $y = x^a$, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ en la misma pantalla para dos o tres valores de $a > 1$. Para valores grandes de x, ¿cuál de estas funciones tiene los valores más grandes y cuál tiene los valores más pequeños?

31. (a) Trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = e^t$, $y = \sqrt{t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, e indique con una flecha la dirección en la que la curva se traza cuando t aumenta.
(b) Elimine el parámetro para hallar una ecuación cartesiana de la curva.

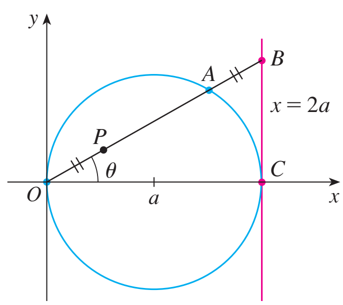
32. (a) Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, medio recorrido alrededor del círculo $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, de arriba a abajo.
(b) Use las ecuaciones del inciso (a) para graficar la trayectoria semicircular.

33. Use ecuaciones paramétricas para graficar la función

$$f(x) = 2x + \ln x$$

y su función inversa en la misma pantalla.

34. (a) Encuentre ecuaciones paramétricas para el conjunto de todos los puntos P determinados como se muestra en la figura, tales que $|OP| = |AB|$. Esta curva recibe el nombre de **cisoide de Diocles**, en honor al sabio griego Diocles que introdujo el cisoide como método gráfico para construir el borde de un cubo cuyo volumen es el doble del de un cubo determinado.)
(b) Use la descripción geométrica de la curva para trazar manualmente un bosquejo aproximado de la curva. Compruebe su trabajo mediante el uso de las ecuaciones paramétricas para graficar la curva.



Principios de resolución de problemas

No hay reglas duras ni rápidas que aseguren el éxito en la resolución de problemas, pero es posible hacer un compendio de algunos pasos generales en este proceso y dar algunos principios que pueden ser útiles en la resolución de ciertos problemas. Estos pasos y principios son sólo sentido común explícito. Han sido adoptados del libro de George Polya *Cómo Resolverlo*.

1 Entender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de entenderlo claramente. Hágase las siguientes preguntas:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades dadas?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para numerosos problemas es útil

trazar un diagrama

e identificar en el diagrama las cantidades dadas y las pedidas.

Por lo general es necesario

introducir notación apropiada

Al escoger símbolos para las incógnitas con frecuencia usamos letras como a, b, c, m, n, x y y, pero en algunos casos ayuda usar iniciales como símbolos sugerentes; por ejemplo V para volumen o t para tiempo.

2 Pensar en un plan

Encuentre una conexión entre la información dada y la incógnita que haga posible calcular ésta. A veces ayuda preguntarse explícitamente: "¿Cómo puedo relacionar la información dada con la incógnita?" Si de inmediato no se ve una conexión, las siguientes ideas pueden ser útiles para idear un plan.

Trate de reconocer algo conocido Relacione la situación dada a un conocimiento previo. Vea la incógnita y trate de recordar un problema más conocido que tenga una incógnita semejante.

Trate de reconocer patrones Algunos problemas se resuelven si se reconoce que está presente algún tipo de patrón. Éste podría ser geométrico, numérico o algebraico. Si se observa regularidad o repetición en un problema, se podría adivinar cuál es el patrón que continúa y luego demostrarlo.

Use analogía Trate de considerar un problema análogo, es decir, un problema semejante, un problema relacionado, pero que sea más fácil que el problema original. Si se puede resolver el problema semejante o más sencillo, entonces podría darle los indicios necesarios para resolver el problema original, más difícil. Por ejemplo, si un problema comprende números muy grandes, primero podría intentar con un problema similar con números más pequeños. O bien, si el problema es de geometría tridimensional, se podría buscar un problema semejante en geometría de dos dimensiones. O si el problema con el que se inicia es general, primero se podría intentar con un caso especial.

Introduzca algo adicional A veces puede ser necesario introducir algo nuevo, una ayuda auxiliar, para hacer la conexión entre lo dado y la incógnita. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, la ayuda auxiliar podría ser una nueva recta trazada en un diagrama. En un problema más algebraico podría ser una nueva incógnita que esté relacionada con la incógnita original.

Tome casos A veces tenemos que partir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno de los casos. Por ejemplo, a veces tenemos que usar esta estrategia al trabajar con valor absoluto.

Trabaje a la inversa A veces es útil imaginar que el problema está resuelto y trabaje a la inversa, paso a paso, hasta llegar a la información dada. Entonces se pueden invertir los pasos y con ello construir una solución al problema original. Este procedimiento se usa por lo general al resolver ecuaciones. Por ejemplo, al resolver la ecuación $3x - 5 = 7$, suponemos que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabajamos a la inversa. Sumamos 5 a cada lado de la ecuación y luego dividimos cada lado entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada uno de estos pasos se puede invertir, hemos resuelto el problema.

Establezca metas intermedias En un problema complejo a veces es útil establecer metas intermedias (en las que la situación deseada se cumple sólo en forma parcial). Si primero podemos llegar a estas metas, entonces podemos trabajar en ellas para llegar a nuestra meta final.

Razonamiento indirecto A veces es apropiado atacar un problema en forma indirecta. Al usar prueba por contradicción para demostrar que P implica Q, suponemos que P es verdadera y Q es falsa y tratamos de ver por qué no puede ocurrir esto. A veces tenemos que usar esta información y llegar a una contradicción a lo que absolutamente sabemos que es cierto.

Inducción matemática Al demostrar enunciados que contienen un entero positivo n, a veces es útil usar el siguiente principio:

Principio de inducción matemática Sea S_n un enunciado acerca del entero positivo n. Suponga que

1. S_1 es verdadera.
2. S_{k+1} es verdadera siempre que S_k sea verdadera.

Entonces S_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Esto es razonable porque, como S_1 es verdadera, se deduce de la condición 2 (con $k = 1$) que S_2 es verdadera. Entonces, usando la condición 2 con $k = 2$, vemos que S_3 es verdadera. De nuevo, usando la condición 2, esta vez con $k = 3$, tenemos que S_4 es verdadera. Este procedimiento se puede seguir indefinidamente.

3 Lleve a cabo el plan

En el Paso 2 se ideó un plan. Al realizar el plan tenemos que comprobar cada etapa del plan y escribir los detalles que demuestren que cada una de las etapas es correcta.

4 Vea hacia atrás

Habiendo completado nuestra solución, es bueno verla de nuevo a la inversa, en parte para ver si hemos cometido errores en la solución y para ver si podemos pensar en una forma más fácil de resolver el problema. Otra razón para ver hacia atrás es que nos familiariza con el método de solución y esto puede ser útil para resolver un problema futuro. Descartes decía, “Todo problema que resolví se convirtió en una regla que me sirvió después para resolver otros problemas.”

Estos principios de resolución de problemas se ilustran en las páginas siguientes. Antes que usted vea las soluciones, trate de resolver por sí mismo estos problemas, consultando estos Principios de Resolución de Problemas si se queda atorado. Puede encontrar que es útil consultar esta sección de vez en cuando al resolver ejercicios de los capítulos restantes de este libro.

EJEMPLO 1 Exprese la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con área de 25 m^2 como función de su perímetro P.

RP Entender el problema

SOLUCIÓN Primero ordenamos la información al identificar la cantidad desconocida y los datos:

Incógnita: hipotenusa h

Cantidades dadas: perímetro P, área 25 m^2

RP Trazar un diagrama

Es útil trazar un diagrama y lo hacemos en la Figura 1.

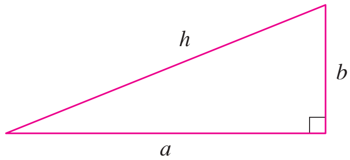


FIGURA 1

RP Relacionar lo dado con la incógnita

RP Introducir algo extra

Para relacionar las cantidades dadas con la incógnita, introducimos dos variables adicionales a y b, que son las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Esto hace posible expresar la condición dada, que es que el triángulo es rectángulo, por el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Las otras relaciones entre las variables se obtienen al escribir expresiones para el área y perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Como P está dada, observe que ahora tenemos tres ecuaciones con las tres incógnitas a, b y h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

RP Relacionar con lo conocido

Aun cuando tenemos el número correcto de ecuaciones, no son fáciles de resolver en forma sencilla. Pero si usamos la estrategia de resolución de problemas para reconocer algo conocido, entonces podemos resolver estas ecuaciones mediante un método más fácil. Veamos los lados derechos de las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Estas expresiones recuerdan algo conocido? Observe que contienen los ingredientes de una fórmula conocida:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Usando esta idea, expresamos $(a + b)^2$ en dos formas. De las Ecuaciones 1 y 2 tenemos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

De la Ecuación 3 tenemos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Por tanto

$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Ésta es la expresión necesaria para h como función de P.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, a veces es necesario usar el principio de resolución de problemas de *tomar casos* cuando se trabaje con valores absolutos.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

SOLUCIÓN Recuerde la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se deduce que

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Análogamente

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{si } x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

RP Tome casos

Estas expresiones demuestran que debemos considerar tres casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

Caso I Si $x < -2$, tenemos

$$|x - 3| + |x + 2| < 11$$

$$-x + 3 - x - 2 < 11$$

$$-2x < 10$$

$$x > -5$$

Caso II Si $-2 \leqslant x < 3$, la desigualdad dada se convierte en

$$-x + 3 + x + 2 < 11$$

$$5 < 11 \qquad \text{(siempre verdadera)}$$

Caso III Si $x \geqslant 3$, la desigualdad se convierte en

$$x - 3 + x + 2 < 11$$

$$2x < 12$$

$$x < 6$$

Combinando los casos I, II y III, vemos que la desigualdad se satisface cuando $-5 < x < 6$. Por tanto, la solución es el intervalo $(-5, 6)$.

En el ejemplo siguiente primero calculamos la respuesta al ver casos especiales y reconocer un patrón. A continuación demostramos nuestra conjetura por inducción matemática.

Al usar el Principio de Inducción Matemática, seguimos tres pasos:

Paso 1 Demostrar que S_n es verdadera cuando $n = 1$.

Paso 2 Suponer que S_n es verdadera cuando $n = k$ y deducimos que S_n es verdadera cuando $n = k + 1$.

Paso 3 Concluimos que S_n es verdadera para toda n por el Principio de Inducción Matemática.

EJEMPLO 3 Si $f_0(x) = x/(x + 1)$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

RP Analogía: Intentar un problema similar, más sencillo

SOLUCIÓN Empezamos por hallar fórmulas para $f_n(x)$ para los casos especiales $n = 1$, 2 y 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0\big(f_0(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0\big(f_1(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0\big(f_2(x)\big) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

RP Buscar un patrón

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Observamos un patrón: El coeficiente de x del denominador de $f_n(x)$ es $n + 1$ en los tres casos que hemos calculado. Por tanto, hacemos el cálculo de que, en general,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Para demostrar esto, usamos el Principio de Inducción Matemática. Ya hemos verificado que (4) es verdadera para $n = 1$. Suponga que es verdadera para $n = k$, es decir,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

Entonces $\quad f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\dfrac{x}{(k+1)x+1}\right)$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Esta expresión demuestra que (4) es verdadera para $n = k + 1$. Por tanto, por inducción matemática, es verdadera para todos los enteros positivos n.

Problemas

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo tiene longitud 4 cm. Exprese la longitud de la altitud perpendicular a la hipotenusa como función de la longitud de la hipotenusa.

2. La altitud perpendicular a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 12 cm. Exprese la longitud de la hipotenusa como función del perímetro.

3. Resuelva la ecuación $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Resuelva la desigualdad $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Trace la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Trace la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.

7. Trace la gráfica de la ecuación $x + |x| = y + |y|$.

8. Trace la gráfica de la ecuación $x^4 - 4x^2 - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.

9. Trace la región del plano formada por todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leqslant 1$.

10. Trace la región del plano formada por todos los puntos (x, y) tales que

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$

11. Evalúe $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5) \cdots (\log_{31} 32)$.

12. (a) Demuestre que la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ es una función impar.
(b) Encuentre la función inversa de f.

13. Resuelva la desigualdad $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.

14. Use razonamiento indirecto para demostrar que $\log_2 5$ es un número irracional.

15. Una automovilista inicia un viaje. Para la primera mitad de la distancia, conduce a un paso razonable de 30 mi/h; la segunda mitad, a 60 mi/h. ¿Cuál es el promedio de su rapidez en este viaje?

16. ¿Es cierto que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

17. Demuestre que si n es un entero positivo, entonces $7^n - 1$ es divisible entre 6.

18. Demuestre que $1 + 3 + 5 + \cdots (2n - 1) = n^2$.

19. Si $f_0(x) = x^2$ y $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

20. (a) Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una expresión para $f_n(x)$ y use inducción matemática para demostrarlo.
(b) Grafique f_0, f_1, f_2, f_3 en la misma pantalla y describa los efectos de composición repetida.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

thomasmayerarchive.com

Límites y derivadas

2

En *Una vista previa al cálculo* (página 3) vimos cómo la idea de un límite es la base de diversas ramas del cálculo. Así, es apropiado iniciar nuestro estudio del cálculo investigando límites y sus propiedades. El tipo especial de límite que se usa para hallar tangentes y velocidades da lugar a la idea central del cálculo diferencial, la derivada. Vemos cómo las derivadas pueden interpretarse como las magnitudes de rapidez de cambio en diversas situaciones y sabemos la forma en que la derivada de una función proporciona información acerca de la función original.

2.1 Los problemas de la tangente y la velocidad

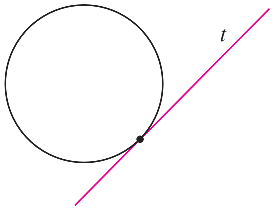
En esta sección vemos cómo aparecen los límites cuando tratamos de hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

El problema de la tangente

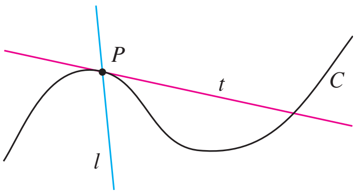
La palabra *tangente* se deriva de la palabra latina *tangens*, que significa "tocar". Entonces una tangente a una curva es una recta que toca la curva. En otras palabras, una recta tangente debe tener la misma dirección que la curva en el punto de contacto. ¿Cómo puede precisarse esta idea?

Para una circunferencia podríamos simplemente seguir a Euclides y decir que una tangente es una recta que toca a la circunferencia sólo una vez, como en la Figura 1(a); para curvas más complicadas esta definición es inadecuada. La Figura 1(b) muestra las dos rectas l y t que pasan por un punto P en una curva C. La recta l interseca a C sólo una vez, pero de seguro que no se asemeja a lo que pensamos de una tangente. La recta t, por otra parte, se ve como una tangente pero interseca a C dos veces.

Para ser específicos, veamos el problema de hallar una recta t tangente a la parábola $y = x^2$ en el ejemplo siguiente.



(a)



(b)

FIGURA 1

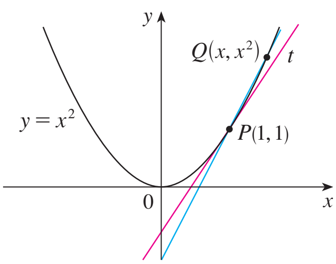


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN Podremos hallar la ecuación de la recta tangente t en cuanto conozcamos su pendiente m. La dificultad es que conocemos sólo un punto, P, en t, mientras que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente. Pero observe que podemos calcular una aproximación a m si escogemos un punto cercano $Q(x, x^2)$ en la parábola (como en la Figura 2) y calculamos la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. [Una **recta secante**, de la palabra latina *secans*, que significa cortar, es una recta que cruza una curva más de una vez.]

Escogemos $x \neq 1$ de modo que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$ tenemos

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Las tablas al margen muestran los valores de m_{PQ} para diversos valores de x cercanos a 1. Cuanto más cercana sea Q a P, más cercana será x a 1 y, como se ve en las tablas, más cercana será m_{PQ} a 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

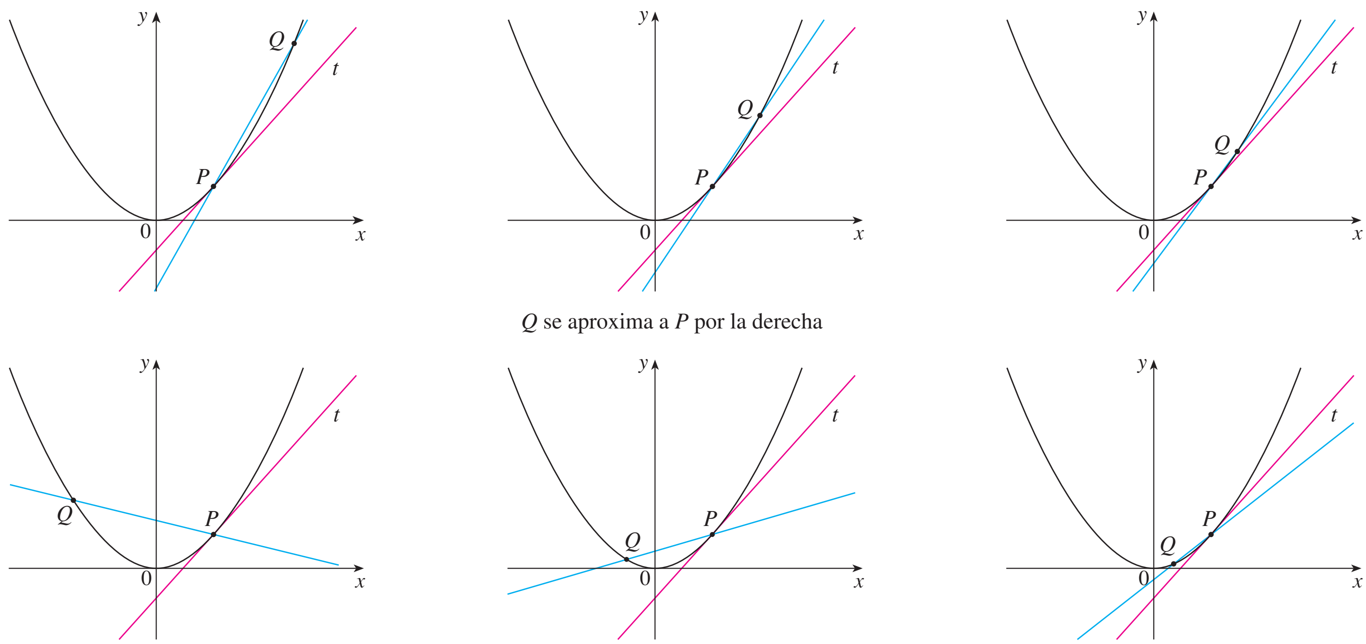
Decimos que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes y expresamos esto simbólicamente con

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Suponiendo que la pendiente de la recta tangente es ciertamente 2, usamos la forma de punto-pendiente de la ecuación de una recta (véase el Apéndice B) para escribir la ecuación de la recta tangente que pasa por (1, 1) como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

La figura 3 ilustra el proceso de tendencia al límite que ocurre en este ejemplo. Como Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las rectas secantes correspondientes rotan sobre P y aproximan la recta tangente t.



Q se aproxima a P por la derecha

Q se aproxima a P por la izquierda

FIGURA 3

TEC En el Visual 2.1 se puede ver cómo funciona el proceso de la Figura 3 para funciones adicionales

Numerosas funciones que se presentan en ciencias no están descritas por ecuaciones explícitas; están definidas por datos experimentales. El siguiente ejemplo muestra cómo calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esa función.

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

V EJEMPLO 2 Calcular la pendiente de una recta tangente a partir de datos experimentales El flash de una cámara opera almacenando carga en un condensador y descargándola de súbito cuando se dispara el flash. Los datos de la tabla describen la carga Q que queda en el condensador (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos después de disparar el flash). Use los datos para trazar la gráfica de esta función y calcule la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [*Nota:* La pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica que fluye del condensador al foco del flash (medida en microamperes).]

SOLUCIÓN En la Figura 4 localizamos los datos dados y los usamos para trazar una curva que aproxima la gráfica de la función.

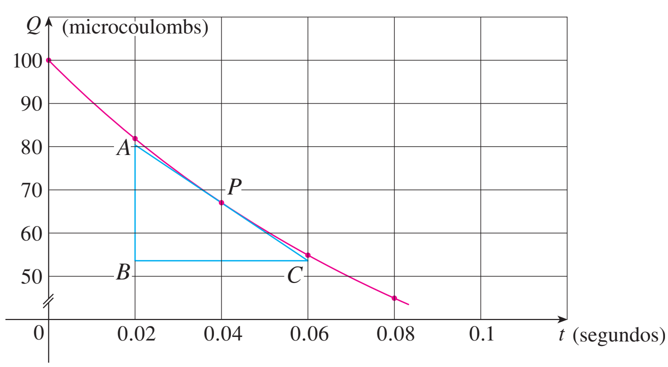


FIGURA 4

Dados los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ en la gráfica, encontramos que la pendiente de la recta secante PR es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

La tabla de la izquierda muestra los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. De esta tabla podríamos esperar que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre entre -742 y -607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más cercanas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

Por tanto, por este método, calculamos que la pendiente de la recta tangente es -675.

Otro método es trazar una aproximación a la recta tangente en P y medir los lados del triángulo ABC, como en la Figura 4. Esto proporciona un cálculo de la pendiente de la recta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$

El significado físico de la respuesta del Ejemplo 2 es que la corriente eléctrica que fluye del condensador al foco del flash, después de 0.04 segundos, es alrededor de −670 microamperes.

El problema de la velocidad

Si observa el velocímetro de un auto cuando viaja en el tráfico citadino, se ve que la aguja no está estática mucho tiempo; esto es, la velocidad del auto no es constante. Suponemos, al ver el velocímetro, que el auto tiene una velocidad definida en cada momento, pero ¿cómo se define la velocidad "instantánea"? Investiguemos el ejemplo de una pelota en caída.

La Torre CN de Toronto fue la estructura autoestable más alta del mundo durante 32 años.

V **EJEMPLO 3** **Velocidad de una pelota cayendo** Suponga que una pelota se deja caer desde la cubierta superior de observación de la Torre CN de Toronto, 450 m sobre el suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.

SOLUCIÓN Por experimentos realizados hace cuatro siglos, Galileo descubrió que la distancia recorrida por cualquier cuerpo en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo que haya estado cayendo. (Este modelo para caída libre no toma en cuenta la resistencia del aire.) Si la distancia recorrida después de t segundos es denotada por $s(t)$ y medida en metros, entonces la ley de Galileo está expresada por la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para hallar la velocidad después de 5 s es que estamos trabajando con un solo instante de tiempo ($t = 5$), de modo que no existe intervalo en este caso. No obstante, podemos aproximar la cantidad deseada si calculamos el promedio de velocidad en el breve intervalo de un décimo de segundo de $t = 5$ a $t = 5.1$:

$$\begin{aligned}\text{velocidad promedio} &= \frac{\text{cambio en posición}}{\text{tiempo transcurrido}}\\ &= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}\\ &= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}\end{aligned}$$

La tabla siguiente muestra los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio en periodos sucesivamente más cortos.

Intervalo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53.9
$5 \leqslant t \leqslant 5.1$	49.49
$5 \leqslant t \leqslant 5.05$	49.245
$5 \leqslant t \leqslant 5.01$	49.049
$5 \leqslant t \leqslant 5.001$	49.0049

Se ve que a medida que acortamos el tiempo, la velocidad promedio se acerca más a 49 m/s. La **velocidad instantánea** cuando $t = 5$ se define como el valor límite de estas velocidades promedio en periodos cada vez más cortos que se inician en $t = 5$. Así, la velocidad (instantánea) después de 5 s es

$$v = 49 \text{ m/s}$$

Se puede tener la impresión de que los cálculos empleados para resolver este problema son muy semejantes a los usados antes en esta sección para hallar tangentes. De hecho, hay una estrecha relación entre el problema de la tangente y el problema de hallar velocidades. Si trazamos la gráfica de la función de distancia de la pelota (como en la Figura 5) y consideramos los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ en la gráfica, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

que es la misma que la velocidad promedio en el intervalo $[a, a + h]$. Por tanto, la velocidad en el tiempo $t = a$ (el límite de estas velocidades promedio a medida que h se aproxima a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

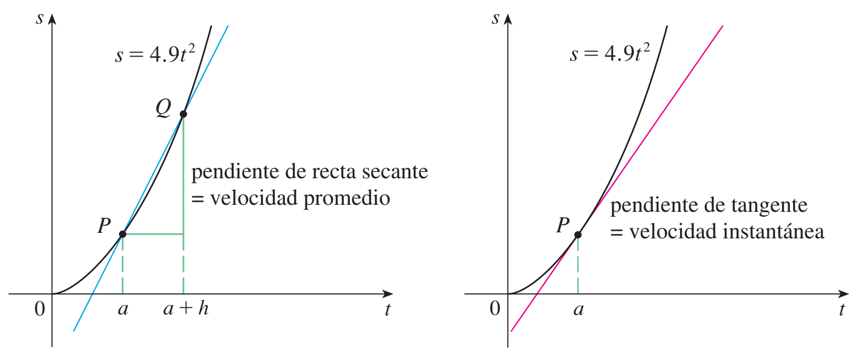


FIGURA 5

Los Ejemplos 1 y 3 muestran que para resolver problemas de tangente y velocidad debemos hallar límites. Después de estudiar métodos para calcular límites en las siguientes cuatro secciones, regresaremos a los problemas de hallar tangentes y velocidades en la Sección 2.6.

2.1 Ejercicios

1. Un tanque contiene 1000 galones de agua que se descargan del fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen V de agua restante en el tanque (en galones) después de t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

(a) Si P es el punto (15, 250) en la gráfica de V, encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto en la gráfica con $t = 5, 10, 25$ y 30.
(b) Estime la pendiente de la recta tangente en P al promediar las pendientes de dos rectas secantes.
(c) Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P. (Esta pendiente representa la rapidez a la que el agua sale del tanque después de 15 minutos.)

2. Un monitor cardiaco se usa para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. Compila el número de pulsaciones después de t minutos. Cuando se grafican los datos de la tabla, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en pulsaciones por minuto.

t (mín)	36	38	40	42	44
Pulsaciones	2530	2661	2806	2948	3080

El monitor estima este valor al calcular la pendiente de una recta secante. Use los datos para estimar la frecuencia cardiaca del paciente después de 42 minutos usando la recta secante entre los puntos con los valores dados de t.
(a) $t = 36$ y $t = 42$ (b) $t = 38$ y $t = 42$
(c) $t = 40$ y $t = 42$ (d) $t = 42$ y $t = 44$
¿Cuáles son sus conclusiones?

3. El punto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ se encuentra en la curva $y = x/(1 + x)$.
(a) Si Q es el punto $(x, x/(1 + x))$, use su calculadora para hallar la pendiente de la recta secante PQ (correcta a seis lugares decimales) para los siguientes valores de x:
(i) 0.5 (ii) 0.9 (iii) 0.99 (iv) 0.999
(v) 1.5 (vi) 1.1 (vii) 1.01 (viii) 1.001
(b) Usando los resultados del inciso (a), calcule el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Usando la pendiente del inciso (b), encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

4. El punto $P(0.5, 0)$ se encuentra en la curva $y = \cos \pi x$.
(a) Si Q es el punto $(x, \cos \pi x)$, use su calculadora para hallar la pendiente de la recta secante PQ (correcta a seis lugares decimales) para los siguientes valores de x:
(i) 0 (ii) 0.4 (iii) 0.49 (iv) 0.499
(v) 1 (vi) 0.6 (vii) 0.51 (viii) 0.501
(b) Usando los resultados del inciso (a), calcule el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
(c) Usando la pendiente del inciso (b), encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 0)$.
(d) Trace la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

5. Si una pelota se lanza al aire con una velocidad de 40 ft/s, su altura en pies t segundos más tarde está dada por $y = 40t - 16t^2$.
(a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que se inicia cuando $t = 2$ y dura
(i) 0.5 segundo (ii) 0.1 segundo
(iii) 0.05 segundo (iv) 0.01 segundo
(b) Calcule la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

6. Si una piedra se lanza hacia arriba en Marte, con una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después está dada por $y = 10t - 1.86t^2$.
(a) Estime la velocidad promedio en los intervalos dados:
(i) [1, 2] (ii) [1, 1.5] (iii) [1, 1.1]
(iv) [1, 1.01] (v) [1, 1.001]
(b) Calcule la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

7. La tabla muestra la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

(a) Encuentre la velocidad promedio para cada periodo:
(i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]
(b) Use la gráfica de s como función de t para calcular la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

8. El desplazamiento (en centímetros) de una partícula que se mueve hacia delante y atrás en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio durante cada periodo:
(i) [1, 2] (ii) [1, 1.1]
(iii) [1, 1.01] (iv) [1, 1.001]
(b) Estime la velocidad instantánea de la partícula cuando $t = 1$.

9. El punto $P(1, 0)$ se encuentra en la curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.
(a) Si Q es el punto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante PQ (correcta a cuatro lugares decimales) para $x = 2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ y 0.9. ¿Las pendientes parecen aproximarse a un límite?
(b) Use una gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes del inciso (a) no están cerca de la pendiente de la recta tangente en P.
(c) Al escoger rectas secantes apropiadas, calcule la pendiente de la recta tangente en P.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

2.2 El límite de una función

Habiendo visto en la sección anterior cómo aparecen límites cuando deseamos hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, ahora llevamos nuestra atención a límites en general y a métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investiguemos el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x cercanos a 2. La tabla siguiente da valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2 pero no iguales a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

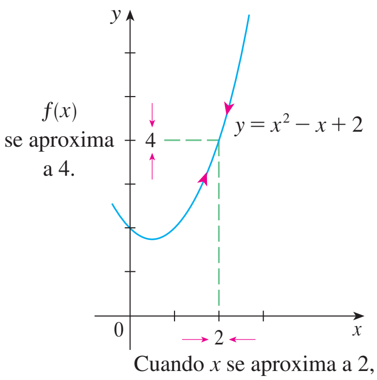


FIGURA 1

De la tabla y gráfica de f (una parábola) mostradas en la Figura 1, vemos que cuando x es cercana a 2 (en cualquiera de los lados de 2), $f(x)$ es cercana a 4. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ sean tan cercanos a 4 como queramos al tomar x suficientemente cerca de 2. Expresamos esto si decimos "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x se aproxima a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, usamos la siguiente notación.

1 Definición Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos "el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es igual a L"

si podemos hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a L (tan cerca de L como queramos) al tomar x suficientemente cercana a a (en cualquier lado de a) pero no igual a a.

Más o menos, esto dice que los valores de $f(x)$ tienden a acercarse cada vez más al número L a medida que x se acerque más y más al número a (desde cualquier lado de a) pero $x \neq a$.

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

que por lo general se lee "$f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a".

Observe la frase “pero $x \neq a$” en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a, nunca consideramos $x = a$. En realidad, no es necesario incluso definir $f(x)$ cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo f se define *cerca* de a.

La Figura 2 muestra las gráficas de estas tres funciones. Observe que, en el inciso (c), $f(a)$ no está definida y, en el inciso (b), $f(a) \neq L$. Pero, en cada caso, cualquiera que sea lo que ocurra en a, es verdadero que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

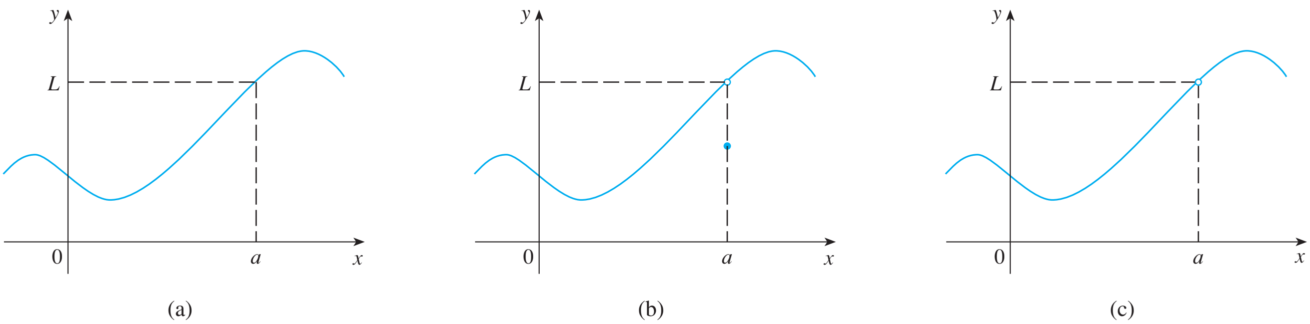


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 **Calcular un límite a partir de valores numéricos** Calcule el valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

SOLUCIÓN Observe que la función $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que consideramos valores de x que sean cercanos pero no iguales a a.

Las tablas de la izquierda dan valores de $f(x)$ (correctos a seis lugares decimales) para valores de x que se aproximan a 1 (pero no son iguales a 1). Con base en los valores de las tablas, hacemos el cálculo de que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

El Ejemplo 1 está ilustrado por la gráfica de f en la Figura 3. Ahora cambiemos f ligeramente al darle el valor 2 cuando $x = 1$ y llamar g a la función resultante:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g todavía tiene el mismo límite cuando x se aproxima a 1. (Vea Figura 4.)

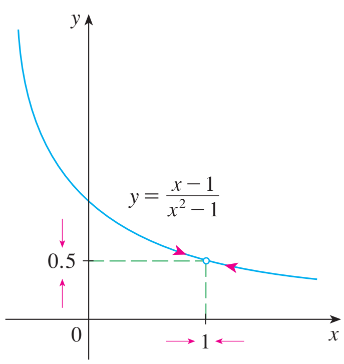


FIGURA 3

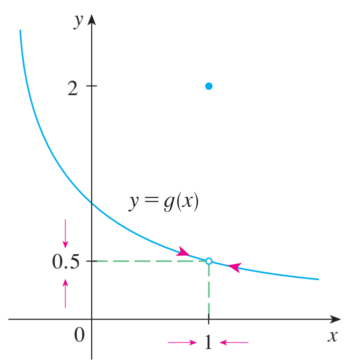


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Calcule el valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN La tabla contiene valores de la función para diversos valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

A medida que t se aproxima a 0, los valores de la función parecen aproximarse a 0.1666666… y por tanto intuimos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

En el Ejemplo 2, ¿qué hubiera pasado si hubiéramos tomado valores de t todavía más pequeños? La tabla que se ve al margen muestra los resultados de una calculadora; usted puede ver que algo extraño parece estar pasando.

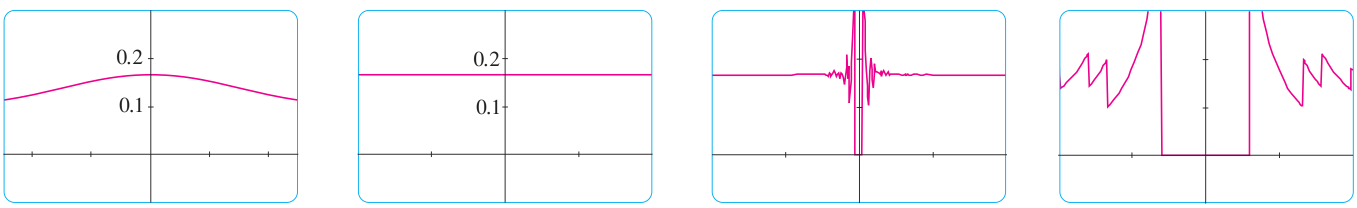
Si intenta estos cálculos en su propia calculadora podría obtener valores diferentes, pero a final de cuentas obtendría el valor 0 si hace que t sea suficientemente pequeña. ¿Significa esto que la respuesta es realmente 0 en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como demostraremos en la siguiente sección. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2 + 9}$ es muy cercano a 3 cuando t es pequeña. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeña, un valor de calculadora para $\sqrt{t^2 + 9}$ es 3.000… hasta el número de dígitos que la calculadora pueda llevar.)

www.stewartcalculus.com
Para una explicación más completa de por qué las calculadoras a veces dan valores falsos, haga clic en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, vea la sección llamada *The Perils*

Algo similar pasa cuando intentamos graficar la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

del Ejemplo 2 en una calculadora graficadora o computadora. Los incisos (a) y (b) de la Figura 5 muestran gráficas bastante precisas de f y cuando usamos el modo *trace* (si lo tiene) podemos estimar fácilmente que el límite es alrededor de $\frac{1}{6}$. Pero, si hacemos demasiado acercamiento como en los incisos (c) y (d), entonces resultan gráficas imprecisas, otra vez debido a problemas con la sustracción.



(a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ (b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

FIGURA 5

EJEMPLO 3 Intuya el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Usando una calculadora (y recuerde que, si $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen} x$ significa el seno cuya medida en *radianes* es x), construimos una tabla de valores correcta a ocho lugares decimales. De la tabla a la izquierda y la gráfica de la Figura 6 intuimos que

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Este cálculo es correcto en realidad, como demostraremos en el Capítulo 3 usando un argumento geométrico.

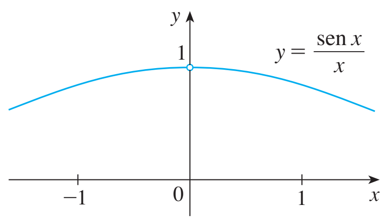


FIGURA 6

EJEMPLO 4 **Una función con comportamiento oscilante** Investigue $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Otra vez, la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Si evaluamos la función para algunos valores pequeños de x, obtenemos

$$f(1) = \operatorname{sen}\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Sistemas computarizados de álgebra

Los sistemas computarizados de álgebra (CAS, por sus siglas en inglés) tienen comandos que calculan límites. Para evitar los tipos de problemas demostrados en los Ejemplos 2, 4 y 5, no encuentran límites por experimentación numérica. En cambio, usan técnicas más refinadas como por ejemplo el cálculo de series infinitas. Si usted tiene acceso a un CAS, use el comando *limit* para calcular los límites en los ejemplos de esta sección y comprobar su respuesta en los ejercicios de este capítulo.

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información podríamos estar tentados a intuir que

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez nuestro cálculo es erróneo. Observe que aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para infinitamente muchos valores de x que se aproximan a 0. La gráfica de f está dada en la Figura 7.

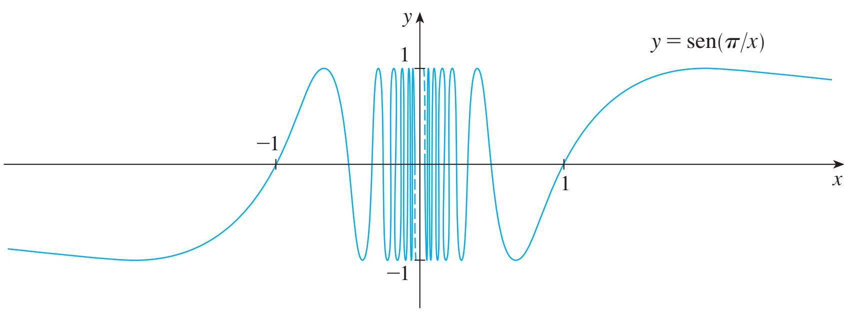


FIGURA 7

Las líneas interrumpidas cerca del eje y indican que los valores de sen(π/x) oscilan entre 1 y -1 con frecuencia infinita cuando x se aproxima a 0. (Use una calculadora graficadora para graficar f y hacer un acercamiento hacia el origen varias veces. ¿Qué observa?

Debido a que los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo cuando x se aproxima a 0,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000} \right)$.

SOLUCIÓN Al igual que antes, construimos una tabla de valores. De la primera tabla al margen se ve que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000} \right) = 0$$

Pero si perseveramos con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000} \right) = 0.000100 = \frac{1}{10{,}000}$$

Más adelante veremos que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$; entonces se deduce que el límite es 0.0001.

Los Ejemplos 4 y 5 ilustran algunas de las dificultades para intuir el valor de un límite. Es fácil intuir lo erróneo de un valor si usamos valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como lo demuestra el análisis después del Ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores erróneos. En la siguiente sección, no obstante, desarrollaremos métodos eficientes para calcular límites.

V EJEMPLO 6 **Un límite que no existe** La función H de Heaviside está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

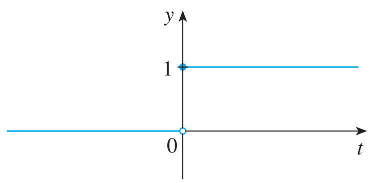


FIGURA 8
La función de Heaviside

[Esta función recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se conecte en un tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la Figura 8.

Cuando t se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay un solo número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxime a 0. Por tanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.

Límites laterales

Ya vimos en el Ejemplo 6 que $H(t)$ se aproxima a 0 cuando t se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ se aproxima a 1 cuando t se aproxima a 0 por la derecha. Indicamos esta situación simbólicamente si escribimos

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que consideramos sólo valores de t que sean menores a 0. Del mismo modo, "$t \to 0^+$" indica que consideramos sólo valores de t que sean mayores a 0.

2 Definición Escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y decimos que el **límite del lado izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda**] es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ sean arbitrariamente cercanos a L al tomar x cercano lo suficiente a a y x menor que a.

Observe que la Definición 2 difiere de la Definición 1 sólo en que requerimos que x sea menor que a. Del mismo modo, si pedimos que x sea mayor que a, obtenemos "el **límite del lado derecho de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** es igual a L" y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Entonces el símbolo "$x \to a^+$" significa que consideramos sólo $x > a$. Estas definiciones están ilustradas en la Figura 9.

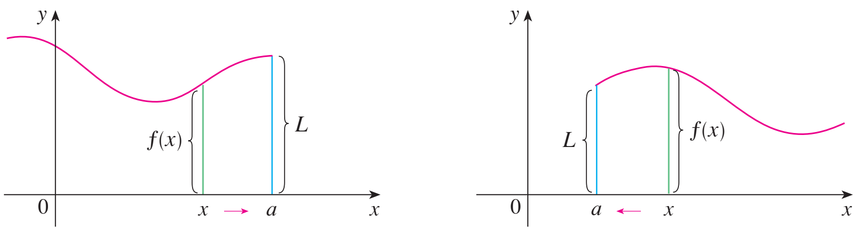


FIGURA 9

(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la Definición 1 con las definiciones de límites laterales, vemos que lo siguiente es verdadero.

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

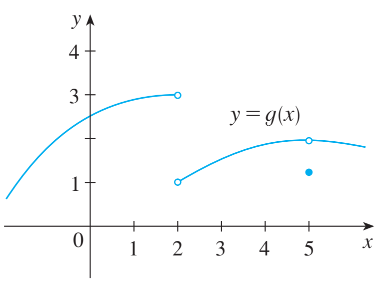


FIGURA 10

V EJEMPLO 7 Límites laterales a partir de una gráfica La gráfica de una función g se muestra en la Figura 10. Úsela para expresar los valores (si existen) de lo siguiente:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN De la gráfica vemos que los valores de $g(x)$ se aproximan a 3 cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, pero se aproximan a 1 cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Por tanto

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Como los límites izquierdo y derecho son diferentes, concluimos de (3) que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

La gráfica también muestra que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Esta vez los límites izquierdo y derecho son iguales y entonces, por (3), tenemos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

SOLUCIÓN A medida que x se acerca a 0, x^2 también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Véase la tabla al margen.) En realidad, se ve en la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ mostrada en la Figura 11 que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes al tomar x cercana lo suficiente a 0. Entonces los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, por lo cual $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe.

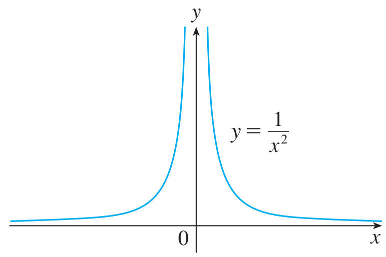


FIGURA 11

Al principio de esta sección consideramos la función $f(x) = x^2 - x + 2$ y, con base en evidencia numérica y gráfica, vimos que

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

De acuerdo con la Definición 1, esto significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer tan cercanos a 4 como queramos, siempre que tomemos x suficientemente cercana a 2. En el siguiente ejemplo usamos métodos gráficos para determinar qué tan cerca es suficientemente cerca.

EJEMPLO 9 Si $f(x) = x^2 - x + 2$, ¿qué tan cerca de 2 tiene que estar x para asegurar que $f(x)$ esté dentro de una distancia de 0.1 del número 4?

SOLUCIÓN Si la distancia de $f(x)$ a 4 es menor a 0.1, entonces $f(x)$ está entre 3.9 y 4.1, por lo que el requisito es que

$$3.9 < x^2 - x + 2 < 4.1$$

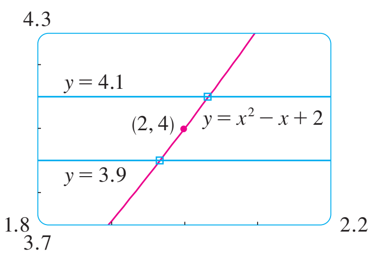


FIGURA 12

Entonces necesitamos determinar los valores de x tales que la curva $y = x^2 - x + 2$ está entre las rectas horizontales $y = 3.9$ y $y = 4.1$. Graficamos la curva y rectas cerca del punto (2, 4) en la Figura 12. Con el cursor, estimamos que la coordenada x del punto de intersección de la recta $y = 3.9$ y la curva $y = x^2 - x + 2$ es aproximadamente 1.966. Del mismo modo, la curva cruza la recta $y = 4.1$ cuando $x \approx 2.033$. Por tanto, redondeando para estar seguros, concluimos que

$$3.9 < x^2 - x + 2 < 4.1 \quad \text{cuando} \quad 1.97 < x < 2.03$$

Por tanto, $f(x)$ está dentro de una distancia 0.1 de 4 cuando x está dentro de una distancia 0.03 de 2.

La idea que hay detrás del Ejemplo 9 se puede usar para formular la definición precisa de un límite que se estudia en el Apéndice D.

2.2 Ejercicios

1. Explique en sus propias palabras qué significa la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que este enunciado sea verdadero y todavía $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique lo que significa decir que

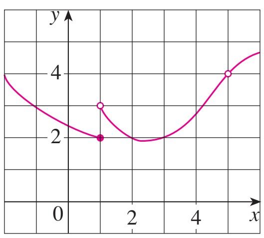
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación, ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Use la gráfica dada de f para expresar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

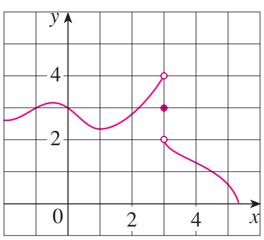
(d) $\lim_{x \to 5} f(x)$ (e) $f(5)$



4. Use la gráfica dada de f para expresar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$

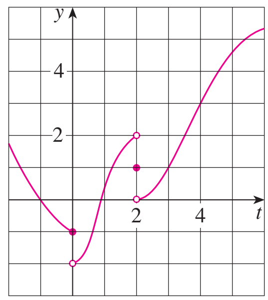


5. Use la gráfica dada de f para expresar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \to 4} g(t)$



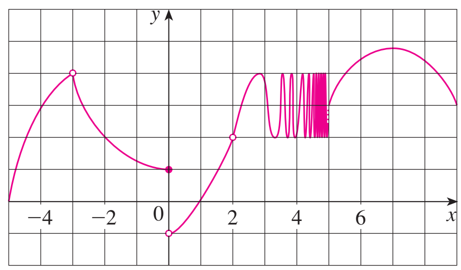
6. Use la gráfica dada de la función h para expresar el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$



7–8 Trace la gráfica de la función y úsela para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

7. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > \pi \end{cases}$

9–11 Use la gráfica de la función f para expresar el valor de cada límite, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

9. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

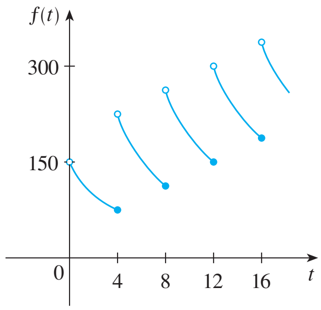
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - 2\cos 2x}}{x}$

12. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo después de t horas. Encuentre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

y explique la importancia de estos límites laterales.



13–16 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

13. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2, \quad f(0) = 1$

14. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2,$

$f(0) = -1, \quad f(3) = 1$

15. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to -2} f(x) = 2,$

$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

16. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = 3,$

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

17–20 Intuya el valor del límite (si existe) al evaluar la función en los números dados (correcto a seis lugares decimales).

17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}, \quad x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001,$

$1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$

$x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999,$

$-2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$

19. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{5t} - 1}{t}, \quad t = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

20. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^5 - 32}{h},$

$h = \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$

21–24 Use una tabla de valores para estimar el valor del límite. Si tiene calculadora graficadora, úsela para confirmar gráficamente su resultado.

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

23. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

25. (a) Al graficar la función $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ y hacer acercamiento (zoom) hacia el punto donde la gráfica cruza el eje y, estime el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Compruebe su respuesta en el inciso (a) al evaluar $f(x)$ para valores de x que se aproximen a 0.

26. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\, \pi x}$$

al graficar la función $f(x) = (\text{sen}\, x)/(\text{sen}\, \pi x)$. Exprese su respuesta correcta a dos lugares decimales.

(b) Compruebe su respuesta en el inciso (a) al evaluar $f(x)$ para valores de x que se aproximen a 0.

27. (a) Estime el valor del límite $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$ a cinco lugares decimales. ¿Le parece conocido este número?

(b) Ilustre el inciso (a) graficando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

28. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$ en el punto $(0, 1)$ es $\lim_{x\to 0} (2^x - 1)/x$. Estime la pendiente a tres lugares decimales.

29. (a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05, e intuya el valor de

$$\lim_{x\to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000} \right)$$

(b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Intuya otra vez.

30. (a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.

(b) Intuya el valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

(c) Evalúe $h(x)$ para valores sucesivamente más pequeños de x hasta que al final se llegue a un valor de 0 para $h(x)$. ¿Todavía tiene usted confianza en que su estimación en el inciso (b) es correcto? Explique por qué finalmente obtuvo valores de 0. (En la Sección 4.5 se explicará un método para evaluar el límite.)

(d) Grafique la función h en el rectángulo de observación $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. A continuación haga un acercamiento hacia el punto donde la gráfica cruza el eje y para estimar el límite de $h(x)$ cuando x se aproxima a 0. Continúe haciendo acercamientos hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso (c).

31. Use una gráfica para determinar qué tan cerca de 2 tenemos que llevar x para asegurar que $x^3 - 3x + 4$ está dentro de una distancia de 0.2 del número 6. ¿Qué pasa si insistimos en que $x^3 - 3x + 4$ está dentro 0.1 de 6?

32. (a) Use evidencias numérica y la gráfica para intuir el valor del límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) ¿Qué tan cerca de 1 debe estar x para asegurar que la función del inciso (a) está dentro de una distancia de 0.5 de su límite?

2.3 Cálculo de límites usando las leyes del límite

En la Sección 2.2 usamos calculadoras y gráficas para calcular los valores de límites, pero vimos que estos métodos no siempre llevan a la respuesta correcta. En esta sección usamos las siguientes propiedades, llamadas *Leyes de los Límites*, para calcular límites.

Leyes de los Límites Suponga que c es una constante y existen los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces,

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Estas cinco leyes se pueden expresar verbalmente como sigue:

Ley de la suma

1. El límite de una suma es la suma de los límites.

Ley de la diferencia

2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

Ley del múltiplo constante

3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

Ley del producto

4. El límite de un producto es el producto de los límites.

Ley del cociente

5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0.)

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ es cercana a L y $g(x)$ es cercana a M, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ es cercana a $L + M$. Esto nos da una base intuitiva para creer que la Ley 1 es verdadera. Todas estas leyes se pueden demostrar con el uso de la definición precisa de un límite. En el Apéndice E damos la prueba de la Ley 1.

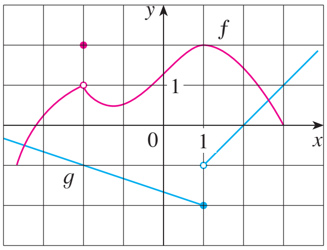


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Use las Leyes de los Límites y las gráficas de f y g de la Figura 1 para evaluar los siguientes límites, si existen.

(a) $\lim\limits_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

(a) De las gráficas de f y g vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(Por la ley 1)} \\ &= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(Por la ley 3)} \\ &= 1 + 5(-1) = -4 \end{aligned}$$

(b) Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe porque los límites izquierdo y derecho son diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Por tanto, podemos usar la Ley 4 para el límite deseado. Pero *podemos* usar la Ley 4 para los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

Los límites izquierdo y derecho no son iguales, por lo cual $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ no existe.

(c) Las gráficas muestran que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como el límite del denominador es 0, no podemos usar la Ley 5. El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a 0 mientras que el numerador se aproxima a un número diferente de 0.

Si usamos repetidamente la Ley del Producto con $g(x) = f(x)$, obtenemos la ley siguiente.

Ley de potencias

6. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$ donde n es un entero positivo.

Al aplicar estas seis leyes del límite, necesitamos usar dos límites especiales:

7. $\lim\limits_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim\limits_{x \to a} x = a$

Estos límites son obvios desde un punto de vista intuitivo (expréselos en palabras o trace gráficas de $y = c$ y $y = x$).

Si ahora ponemos $f(x) = x$ en la Ley 6 y usamos la Ley 8, obtenemos otro límite especial útil.

9. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo

Un límite similar se cumple para raíces como sigue.

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo

(Si n es par, suponemos que $a > 0$.)

Más generalmente, tenemos la siguiente ley.

Ley de la raiz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo

[Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

EJEMPLO 2 Evalúe los siguientes límites y justifique cada paso.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por Leyes 2 y 1)} \\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por 3)} \\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(por 9, 8 y 7)} \\ &= 39 \end{aligned}$$

(b) Empezamos por usar la Ley 5, pero su uso está justificado plenamente sólo en la etapa final cuando vemos que existen los límites del numerador y denominador y el límite del denominador no es 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} && \text{(por Ley 5)} \\ &= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} && \text{(por 1, 2 y 3)} \\ &= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{(por 9, 8 y 7)} \\ &= -\frac{1}{11} \end{aligned}$$

Nota: Si hacemos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habríamos obtenido la respuesta correcta en el Ejemplo 2(a) al sustituir 5 por x. Del mismo modo, la sustitución directa da la respuesta correcta en el inciso (b). Las funciones del Ejemplo 2 son una función con polinomio y una racional, y un uso similar de las Leyes del Límite demuestra que la sustitución directa siempre funciona para estas funciones (vea Ejercicios 43 y 44). Expresamos este hecho como sigue.

Propiedad de la sustitución directa Si f es una función polinomial o una racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Newton y los límites

Isaac Newton nació el día de Navidad en 1642, año en que murió Galileo. Cuando entró a la Universidad de Cambridge en 1661 Newton no sabía mucho de matemáticas, pero aprendió rápidamente leyendo las obras de Euclides y Descartes y asistiendo a conferencias de Isaac Barrow. Cambridge estuvo cerrado debido a la peste bubónica en 1665 y 1666, y Newton regresó a casa a reflexionar sobre lo que había aprendido. Aquellos dos años fueron sorprendentemente productivos porque en aquel tiempo hizo cuatro de sus principales descubrimientos: (1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; (2) su trabajo sobre cálculo diferencial e integral; (3) sus leyes del movimiento y ley de gravitación universal; y (4) sus experimentos con prismas sobre la naturaleza de la luz y el color. Por el temor a controversias y a críticas, se negaba a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, por recomendación del astrónomo Halley, que Newton publicó *Principia Mathematica*. En esta obra, el tratado científico más importante jamás escrito, Newton enunció su versión de cálculo y la usó para investigar la mecánica, dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de planetas y cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en los cálculos de áreas y volúmenes hechos por sabios de la antigua Grecia, por ejemplo Eudoxio y Arquímedes. Aun cuando algunos aspectos de la idea de un límite están explícitos en su "método de agotamiento", Eudoxio y Arquímedes nunca formularon de manera explícita el concepto de un límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, inmediatos precursores de Newton en la creación del cálculo, no usaron realmente límites. Fue Isaac Newton el primero en hablar explícitamente sobre límites. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se aproximan más que por cualquier diferencia dada." Newton expresó que el límite era el concepto básico en cálculo, pero se dejó a matemáticos posteriores como Cauchy aclarar las ideas de Newton acerca de límites.

Las funciones con la Propiedad de Sustitución Directa se denominan *continuas en a* y se estudiarán en la Sección 2.4. No obstante, no todos los límites pueden ser evaluados por sustitución directa, como muestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 **La sustitución directa no siempre funciona** Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No podemos hallar el límite al sustituir $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Ni podemos aplicar la Ley del Cociente, porque el límite del denominador es 0. En cambio necesitamos hacer un poco de álgebra preliminar. Factorizamos el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x se aproxima a 1, tenemos $x \neq 1$ y por tanto $x - 1 \neq 0$. Por tanto, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

El límite en este ejemplo apareció en la Sección 2.1 cuando estábamos tratando de hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1).

Nota: En el Ejemplo 3 pudimos calcular el límite al sustituir la función dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por una función más sencilla, $g(x) = x + 1$, con el mismo límite. Esto es válido porque $f(x) = g(x)$ excepto cuando $x = 1$, y al calcular un límite cuando x se aproxima a 1 no consideramos lo que ocurre cuando x es en realidad *igual* a 1. En general, tenemos el siguiente dato útil.

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, siempre que existan los límites.

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} g(x)$ donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Aquí g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor de un límite cuando x se aproxima a 1 no depende del valor de la función en 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, tenemos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

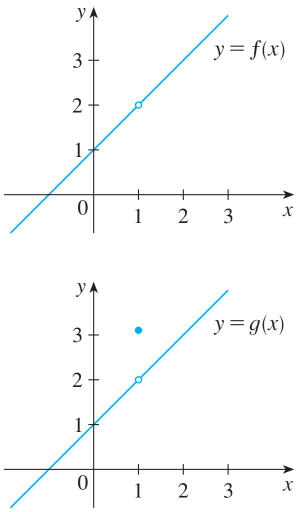


FIGURA 2
Gráficas de las funciones f (del Ejemplo 3) y g (del Ejemplo 4)

Observe que los valores de las funciones de los Ejemplos 3 y 4 son idénticos excepto cuando $x = 1$ (véase la Figura 2) y por tanto tienen el mismo límite cuando x se aproxima a 1.

V EJEMPLO 5 Encuentre un límite al simplificar la función Evalúe $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si definimos

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

entonces, como en el Ejemplo 3, no podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ al hacer $h = 0$ porque $F(0)$ no está definida. Pero, si simplificamos $F(h)$ algebraicamente, encontramos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que consideramos sólo $h \neq 0$ cuando hacemos que h se aproxime a 0.) Así,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

EJEMPLO 6 Cálculo de un límite por racionalización Encuentre $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar de inmediato la Ley del Cociente, porque el límite del denominador es 0. Aquí el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} \\
&= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Este cálculo confirma el trabajo de cálculo que hicimos en el Ejemplo 2 en la Sección 2.2.

Algunos límites se calculan mejor si primero encontramos los límites por la izquierda y por la derecha. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que descubrimos en la Sección 2.2. Dice que existe un límite si y sólo si ambos límites laterales existen y son iguales.

1 Teorema $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Cuando calculamos límites laterales, usamos el hecho de que las Leyes del Límite también se cumplen para límites laterales.

EJEMPLO 7 **Hallar un límite al calcular límites por la izquierda y por la derecha** Demuestre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El resultado del Ejemplo 7 se ve plausible de la Figura 3.

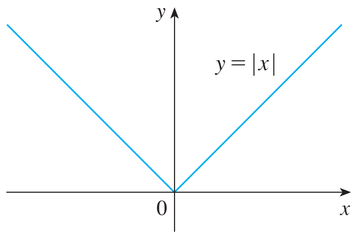


FIGURA 3

Como $|x| = x$ para $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ y así

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

Por tanto, por el Teorema 1,

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

V **EJEMPLO 8** Demuestre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

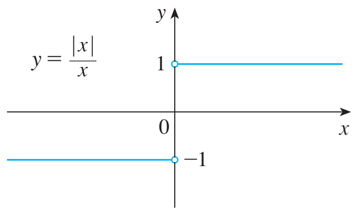


FIGURA 4

Como los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, se deduce del Teorema 1 que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la Figura 4 y apoya los límites laterales que encontramos.

Otras notaciones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. La función de entero máximo a veces recibe el nombre de *función de nivel mínimo*.

EJEMPLO 9 La **función de entero máximo** está definida por $[\![x]\!]$ = el entero máximo que sea menor o igual a x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN La gráfica de la función de entero máximo se muestra en la Figura 5. Como $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^+} 3 = 3$$

Como $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tenemos

$$\lim_{x\to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^-} 2 = 2$$

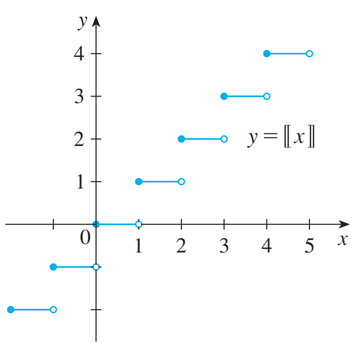


FIGURA 5
Función de entero máximo

Como estos límites laterales no son iguales, $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ no existe por el Teorema 1.

Los siguientes dos teoremas aportan dos propiedades adicionales de límites. Ambos pueden demostrarse usando la definición precisa de un límite del Apéndice D.

2 **Teorema** Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x es cercana a a (excepto posiblemente en a) y los límites de f y g existen cuando x se aproxima a a, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 **Teorema de la compresión** Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x es cercana a a (excepto posiblemente en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

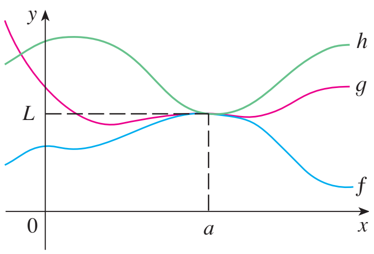


FIGURA 6

El Teorema de Compresión, que a veces recibe el nombre de Teorema de Interpolación o Teorema de Contracción, se ilustra en la Figura 6. Nos dice que si $g(x)$ está atrapada entre $f(x)$ y $h(x)$ cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces g es forzada a tener el mismo límite L en a.

V **EJEMPLO 10** **Cómo comprimir una función** Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Primero observamos que **no podemos** usar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (vea Ejemplo 4 en la Sección 2.2).

En lugar de esto aplicamos el Teorema de Compresión y por tanto necesitamos hallar una función f menor a $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y una función h mayor a g tal que $f(x)$ y $h(x)$ se aproximen a 0. Para hacer esto usamos nuestro conocimiento de la función seno. Como la función seno de cualquier número está entre -1 y 1, podemos escribir

4
$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

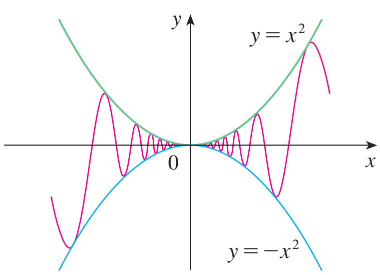


FIGURA 7
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Cualquier desigualdad continúa siendo verdadera cuando se multiplique por un número positivo. Sabemos que $x^2 \geqslant 0$ para toda x y por tanto, al multiplicar por x^2 cada lado de las desigualdades de (4) obtenemos

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

como se ilustra en la Figura 7. Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, y $h(x) = x^2$ en el Teorema de Compresión, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

2.3 Ejercicios

1. Dado que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 0$$

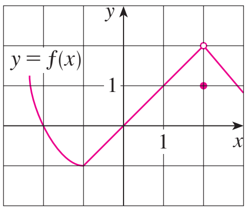
encuentre los límites que existen. Si no existe el límite, explique por qué.

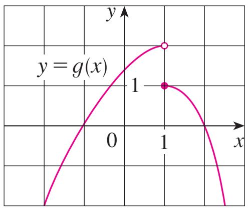
(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Se dan las gráficas de f y g. Úselas para evaluar cada límite, si existe; si no existe, explique por qué.





(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–7 Evalúe el límite y justifique cada paso al indicar la Ley(es) de los Límites apropiada.

3. $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{t \to -1} (t^2 + 1)^3 (t + 3)^5$

5. $\lim_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

8. (a) ¿Qué está mal en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) En vista del inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

9–24 Evalúe el límite, si existe.

9. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

10. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

11. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

12. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

13. $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

14. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

16. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

17. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

18. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

19. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

20. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

21. $\lim_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

22. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right)$

23. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$

24. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

25. (a) Calcule el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

graficando la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

(b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0 e intuya el valor del límite.

(c) Use la Ley de los Límites para demostrar que su intuición es correcta.

26. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ a dos lugares decimales.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite a cuatro lugares decimales.

(c) Use las Leyes de los Límites para hallar el valor exacto del límite.

27. Use el Teorema de Compresión para demostrar que $\lim_{x \to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre al graficar las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ en la misma pantalla.

28. Use el Teorema de Compresión para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre al graficar las funciones f, g y h (en la notación del Teorema de Compresión) en la misma pantalla.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

29. Si $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encuentre $\lim_{x \to 4} f(x)$.

30. Si $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para toda x, evalúe $\lim_{x \to 1} g(x)$.

31. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

32. Demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

33–36 Encuentre el límite, si existe; si no existe, explique por qué.

33. $\lim_{x \to 3} (2x + |x - 3|)$

34. $\lim_{x \to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

35. $\lim_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

36. $\lim_{x \to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

37. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada uno de lo siguiente, si existe.

(i) $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(b) Trace la gráfica de g.

38. Sea $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

(a) Encuentre

(i) $\lim_{x \to 1^+} F(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1^-} F(x)$

(b) ¿Existe $\lim_{x \to 1} F(x)$?

(c) Trace la gráfica de F.

39. (a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función de entero máximo definida en el Ejemplo 9, evalúe

(i) $\lim_{x \to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x \to -2.4} [\![x]\!]$

(b) Si n es un entero, evalúe

(i) $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$

(c) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$?

40. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Trace la gráfica de f.

(b) Evalúe cada límite, si existe.

(i) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to \pi/2} f(x)$

(c) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

41. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, demuestre que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe pero no es igual a $f(2)$.

42. En la teoría de la relatividad, la fórmula de contracción de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Encuentre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite por la izquierda?

43. Si p es una polinomial, demuestre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

44. Si r es una función racional, use el Ejercicio 43 para demostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a en el dominio de r.

45. Si $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encuentre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

46. Si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encuentre los límites siguientes.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

47. Demuestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aun cuando no exista $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$.

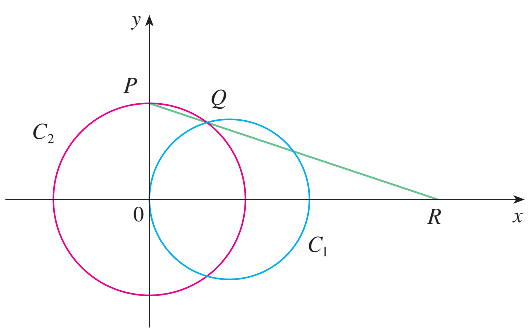
48. Demuestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ puede existir aun cuando no exista $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$.

49. ¿Hay un número a tal que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre el valor de a y el valor del límite.

50. La figura muestra una circunferencia fija C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de la intersección de las dos circunferencias, y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. ¿Qué ocurre con R cuando C_2 se contrae, es decir, cuando $r \to 0^+$?



2.4 Continuidad

Ya observamos en la Sección 2.3 que el límite de una función cuando x se aproxima a a con frecuencia se puede hallar con sólo calcular el valor de la función en a. Las funciones con esta propiedad reciben el nombre de *continuas en a*. Veremos que la definición matemática de continuidad corresponde estrechamente al significado de la palabra *continuidad* en nuestro lenguaje diario. (Un proceso continuo es aquel que tiene lugar en forma gradual, sin interrupción o cambio abrupto.)

1 Definición Una función f es **continua en un número *a*** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Como se ilustra en la Figura 1, si f es continua, entonces los puntos $(x, f(x))$ en la gráfica de f se aproximan al punto $(a, f(a))$ en la gráfica. Por tanto, no hay vacío en la curva.

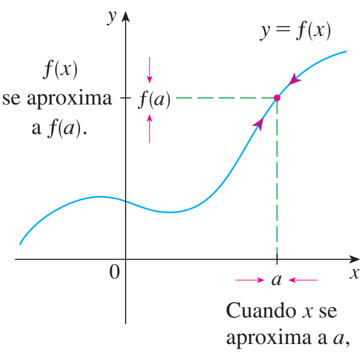


FIGURA 1

Observe que la Definición 1 implícitamente requiere tres cosas si f es continua en a:

1. $f(a)$ está definida (esto es, a está en el dominio de f)
2. existe $\lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La definición dice que f es continua en a si $f(x)$ se aproxima a $f(a)$ cuando x se aproxima a a. Entonces, una función continua f tiene la propiedad de que un pequeño cambio en x produce sólo un pequeño cambio en $f(x)$. En realidad, el cambio en $f(x)$ se puede conservar tan pequeño como queramos si mantenemos el cambio en x suficientemente pequeño.

Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida en un intervalo abierto que contiene a a, excepto quizá en a) decimos que f es **discontinua en *a*** (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Los fenómenos físicos suelen ser continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o velocidad de un vehículo varía continuamente con el tiempo, al igual que la estatura de una persona. Pero hay discontinuidades en situaciones como por ejemplo en corrientes eléctricas. [Véase el Ejemplo 6 en la Sección 2.2, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 porque $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, se puede considerar una función que es continua en todo número en un intervalo como una función cuya gráfica no tiene un vacío en ella. La gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel.

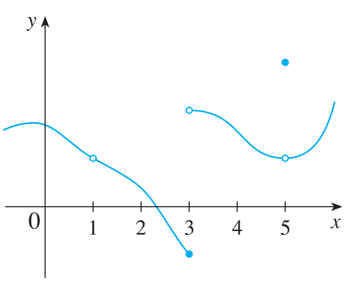


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Discontinuidades en una gráfica La Figura 2 muestra la gráfica de una función f. ¿En cuáles números es f discontinua? ¿Por qué?

SOLUCIÓN Se ve como si hubiera una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene un vacío ahí. La razón oficial de que f sea discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definida.

La gráfica también tiene un vacío cuando $a = 3$, pero la razón para la discontinuidad es diferente. Aquí, $f(3)$ está definida, pero $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.) Por esta razón, f es discontinua en 3.

¿Qué pasa si $a = 5$? Aquí, $f(5)$ está definida y $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son iguales). Pero

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

Entonces, f es discontinua en 5.

Veamos ahora cómo detectar discontinuidades cuando una función está definida por una fórmula.

V EJEMPLO 2 **Discontinuidades de una fórmula** ¿En dónde son discontinuas cada una de las funciones siguientes?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

(a) Observe que $f(2)$ no está definida, por lo cual f es discontinua en 2. Más adelante veremos por qué f es continua en todos los otros números.

(b) Aquí $f(0) = 1$ está definida pero

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el Ejemplo 8 en la Sección 2.2.) Por tanto, f es discontinua en 0.

(c) Aquí $f(2) = 1$ está definida y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

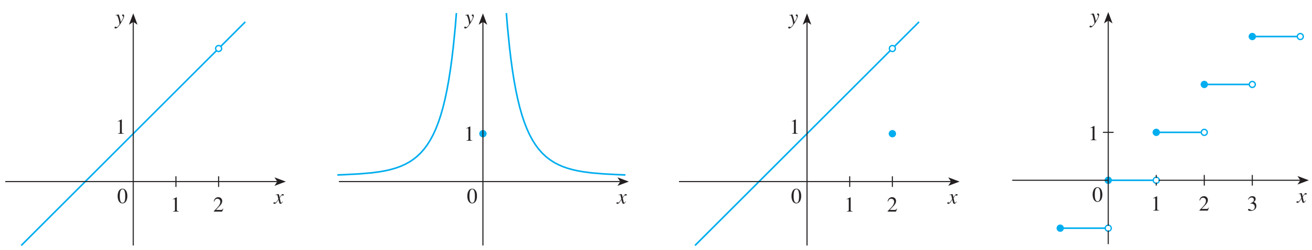
existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

por lo cual f no es continua en 2.

(d) La función de entero máximo $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Vea el Ejemplo 9 y Ejercicio 39 en la Sección 2.3.)

La Figura 3 muestra las gráficas de las funciones del Ejemplo 2. En cada caso, la gráfica no puede dibujarse sin levantar la pluma del papel porque un hueco, o vacío, o salto ocurre en la gráfica. La clase de discontinuidad ilustrada en los incisos (a) y (c) recibe el nombre de **removible** porque podríamos remover la discontinuidad al redefinir f en exactamente el número individual 2. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad en el inciso (b) se llama **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades en el inciso (d) se denominan **discontinuidades de salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3 Gráficas de las funciones del Ejemplo 2

2 Definición Una función f es **continua por la derecha en un número *a*** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua por la izquierda en *a*** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [vea Figura 3(d)] es continua por la derecha pero discontinua por la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$

3 Definición Una función f es **continua en un intervalo** si es continua en todo número en el intervalo. (Si f está definida sólo en un lado de un punto extremo del intervalo, entendemos *continua* en el punto extremo como *continua por la derecha* o *continua por la izquierda*.)

EJEMPLO 4 **Continuidad a partir de la definición** Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$, entonces usando las Leyes de los Límites, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(por 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Así, por la Definición 1, f es continua en a si $-1 < a < 1$. Cálculos similares demuestran que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

por lo que f es continua por la derecha en -1 y continua por la izquierda en 1. Por tanto, de acuerdo con la Definición 3, f es continua en $[-1, 1]$.

La gráfica de f está trazada en la Figura 4. Es la mitad inferior de la circunferencia

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

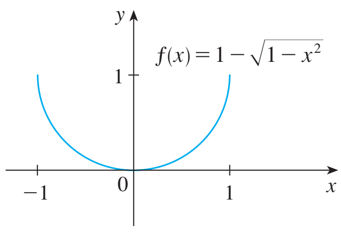


FIGURA 4

En lugar de usar siempre las Definiciones 1, 2 y 3 para verificar la continuidad de una función como hicimos en el Ejemplo 4, es a veces conveniente usar el siguiente teorema, que muestra la forma de construir funciones continuas complicadas a partir de otras sencillas.

4 Teorema Si f y g son continuas en a y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Cada uno de los cinco incisos de este teorema se sigue de la correspondiente Ley de los Límites en la Sección 2.3. Por ejemplo, damos la prueba del inciso 1. Como f y g son continuas en a, tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(por la Ley 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Esto demuestra que $f + g$ es continua en a.

Se deduce del Teorema 4 y la Definición 3 que si f y g son continuas en un intervalo, entonces así son las funciones $f + g$, $f - g$, cf, fg y (si g nunca es 0) f/g. El siguiente teorema se expuso en la Sección 2.3 como la Propiedad de Sustitución Directa.

5 Teorema

(a) Toda función polinomial es continua en cualquier punto, es decir, es continua en $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; esto es, si es continua en su dominio.

DEMOSTRACIÓN

(a) Una polinomial es una función de la forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde $c_0, c_1, \ldots c_n$ son constantes. Sabemos que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(por la Ley 7)}$$

y que

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(por 9)}$$

Esta ecuación es precisamente el enunciado de que la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Así, por el inciso 3 del Teorema 4, la función $g(x) = cx^m$ es continua. Como P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, se deduce del inciso 1 del Teorema 4 que P es continua.

(b) Una función racional es una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomiales. El dominio de f es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabemos del inciso (a) que P y Q son continuas en todas partes. Así, por el inciso 5 del Teorema 4, f es continua en todo número en D.

Como ilustración del Teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ muestra que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si una pelota se lanza verticalmente al aire con una rapidez de 50 ft/s, entonces la altura de la pelota en pies t segundos después está dada por la fórmula $h = 50t - 16t^2$. De nuevo, ésta es una función polinomial, de modo que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

El conocimiento de cuáles funciones son continuas hace posible que evaluemos algunos límites con gran rapidez, como muestra el siguiente ejemplo. Compárelo con el Ejemplo 2(b) de la Sección 2.3.

EJEMPLO 5 **Hallar el límite de una función continua** Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, de modo que por el Teorema 5 es continua en su dominio, que es $\left\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\right\}$. Por tanto,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

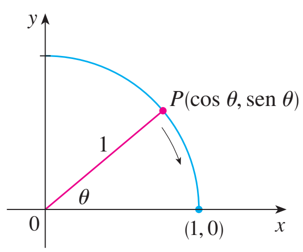


FIGURA 5

Resulta que casi todas las funciones conocidas son continuas en todo número en sus dominios. Por ejemplo, la Ley del Límite 10 (página 106) es exactamente el enunciado de que las funciones raíz son continuas.

Del aspecto de las gráficas de las funciones seno y coseno (Figura 18 en la Sección 1.2), ciertamente intuiríamos que son continuas. Sabemos de las definiciones de sen θ y cos θ) que las coordenadas del punto P en la figura 5 son (cos θ, sen θ). Como $\theta \to 0$, vemos que P se aproxima al punto (1, 0) y por tanto cos $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. Entonces

6 $$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

Otra forma de establecer los límites en (6) es usar el Teorema de Compresión con la desigualdad sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), que se demuestra en la Sección 3.3.

Como cos 0 = 1 y sen 0 = 0, las ecuaciones en (6) afirman que las funciones coseno y seno son continuas en 0. Las fórmulas de la adición para coseno y seno se pueden usar entonces para deducir que estas funciones son continuas en todas partes (vea Ejercicios 49 y 50).

Se deduce del inciso 5 del Teorema 4 que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

es continua excepto donde $\cos x = 0$. Esto ocurre cuando x es un múltiplo entero impar de $\pi/2$, de modo que $y = \tan x$ tiene discontinuidades infinitas cuando $x = \pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, etcétera (véase Figura 6).

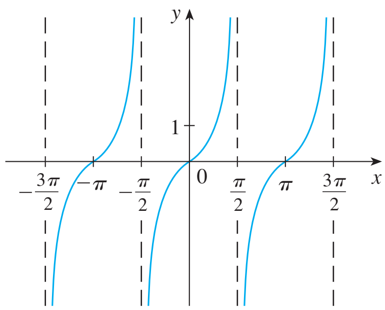


FIGURA 6
$y = \tan x$

En la Sección 1.5 definimos la función exponencial $y = a^x$ para llenar los agujeros de la gráfica de $y = a^x$ donde x es racional. En otras palabras, la misma definición de $y = a^x$ hace de ella una función continua en $\mathbb{R}$. La función inversa de cualquier función biunívoca continua también es continua. (La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f alrededor de la recta $y = x$. Por tanto, si la gráfica de f no tiene un vacío en ella, tampoco lo tendrá la gráfica de f^{-1}.) Entonces, la función $y = \log_a x$ es continua en $(0, \infty)$ porque es la función inversa de $y = a^x$.

7 Teorema Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo número en sus dominios:

polinomiales	funciones racionales
funciones raíz	funciones trigonométricas
funciones exponenciales	funciones logarítmicas

EJEMPLO 6 Continuidad en intervalos

¿Dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + e^x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Sabemos del Teorema 7 que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y $y = e^x$ es continua en $\mathbb{R}$. Así, por el inciso 1 del Teorema 4, $y = \ln x + e^x$ es continua en $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es una polinomial, de modo que es continuo en todas partes. Por tanto, por el inciso 5 del Teorema 4, f es continua en todos los números positivos x excepto donde $x^2 - 1 = 0$. Entonces f es continua en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El Teorema 7 nos dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función del denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y es por tanto continua. Observe que esta función nunca es 0 porque $\cos x \geqslant -1$ para toda x y por tanto $2 + \cos x > 0$ en todas partes. Así, la razón

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continua en todas partes. Entonces, por la definición de una función continua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\text{sen } x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\text{sen } \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

Otra forma de combinar funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del siguiente teorema.

Este teorema dice que un símbolo de límite se puede mover a través de un símbolo de función si la función es continua y existe el límite. En otras palabras, el orden de estos dos símbolos se puede invertir.

8 Teorema Si f es continua en b y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Intuitivamente, el Teorema 8 es razonable porque si x es cercana a a, entonces $g(x)$ es cercana a b, y como f es continua en b, si $g(x)$ es cercana a b, entonces $f(g(x))$ es cercana a $f(b)$.

9 Teorema Si g es continua en a y b es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a.

Este teorema se expresa con frecuencia informalmente si decimos "una función continua de una función continua es una función continua."

DEMOSTRACIÓN Como g es continua en a, tenemos

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Como f es continua en $b = g(a)$, podemos aplicar el Teorema 8 para obtener

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que es precisamente el enunciado de que la función $h(x) = f(g(x))$ es continua en a; esto es, $f \circ g$ es continua en a.

V EJEMPLO 8 ¿Dónde son continuas las siguientes funciones?

(a) $h(x) = \text{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

(a) Tenemos $h(x) = f(g(x))$, donde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \text{sen } x$$

Ahora g es continua en $\mathbb{R}$ porque es una polinomial y f también es continua en todas partes. Por tanto, $h = f \circ g$ es continua en $\mathbb{R}$ por el Teorema 9.

(b) Sabemos por el Teorema 7 que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Entonces, por el Teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continua en dondequiera que esté definida. Ahora $\ln(1 + \cos x)$ está definida cuando $1 + \cos x > 0$. Por lo tanto, no está definida cuando $\cos x = -1$ y esto ocurre cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Así, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua en los intervalos entre estos valores (vea Figura 7).

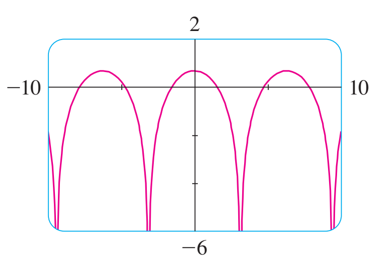


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Una propiedad importante de funciones continuas está expresada por el siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en libros más avanzados sobre cálculo.

10 El Teorema del Valor Intermedio Suponga que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El Teorema del Valor Intermedio expresa que una función continua toma todo valor intermedio entre los valores de función $f(a)$ y $f(b)$. Está ilustrado por la Figura 8. Observe que el valor N se puede tomar una vez [como en el inciso (a)] o más de una vez [como en el inciso (b)].

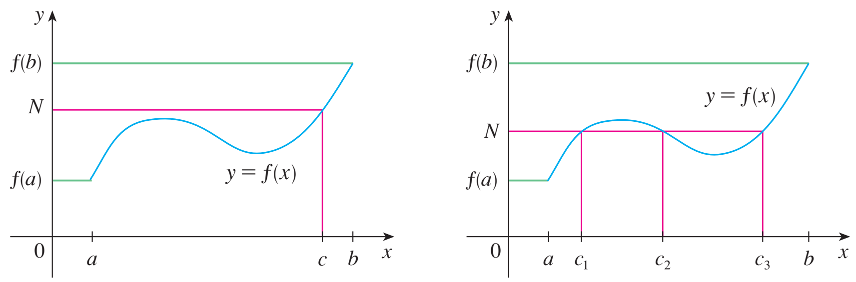


FIGURA 8 (a) (b)

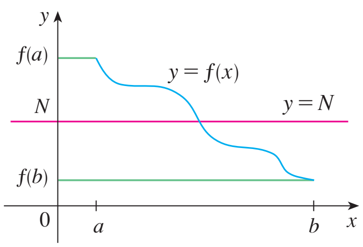


FIGURA 9

Si pensamos en una función continua como una función cuya gráfica no tiene hueco o vacío, entonces es fácil pensar que el Teorema del Valor Intermedio es verdadero. En términos geométricos dice que si cualquier recta horizontal $y = N$ está dada entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$ como en la Figura 9, entonces la gráfica de f no puede saltar sobre la recta. Debe intersecar $y = N$ en algún punto.

Es importante que la función f en el Teorema 10 sea continua. El Teorema del Valor Intermedio no es verdadero para funciones discontinuas (véase Ejercicio 38).

Un uso del Teorema del Valor Intermedio está en localizar raíces de ecuaciones como en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 9 Uso del Teorema del Valor Intermedio para demostrar la existencia de una raíz Demuestre que hay una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x)= 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Estamos buscando una solución de la ecuación dada, es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por lo tanto, tomamos $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$ en el Teorema 10. Tenemos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Así, $f(1) < 0 < f(2)$; esto es, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora f es continua porque es una polinomial, de modo que el Teorema del Valor Intermedio dice dónde está un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene al menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar una raíz más precisamente usando el Teorema del Valor Intermedio otra vez. Como

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz debe estar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por prueba y error,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

de modo que una raíz está en el intervalo (1.22, 1.23).

Podemos usar una calculadora graficadora o computadora para ilustrar el uso del Teorema del Valor Intermedio en el Ejemplo 9. La Figura 10 muestra la gráfica de f en el rectángulo de observación $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$ y se puede ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. La Figura 11 muestra el resultado de visualizar de cerca el rectángulo de observación $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$

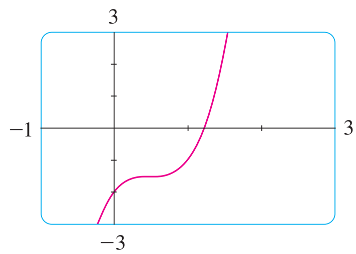


FIGURA 10

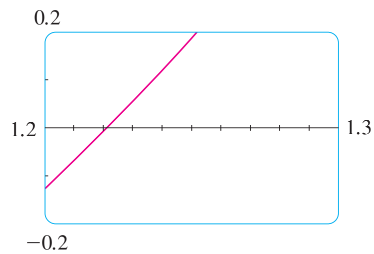


FIGURA 11

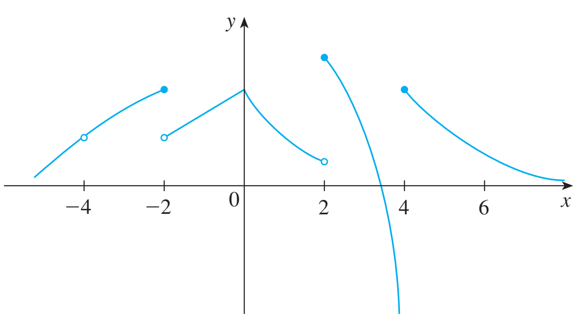
De hecho, el Teorema del Valor Intermedio desempeña un papel en la misma forma en que funcionan estos equipos de gráficas. Una computadora calcula un número finito de puntos en la gráfica y enciende los pixeles que contienen estos puntos calculados. Supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. La computadora por tanto enlaza los pixeles al encender los pixeles intermedios.

2.4 Ejercicios

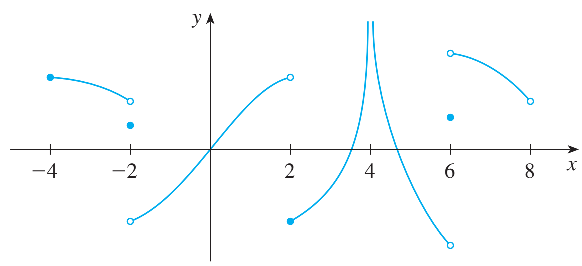
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua en $(-\infty, \infty)$, ¿qué se puede decir acerca de su gráfica?

3. (a) De la gráfica de f, exprese los números en los que f es discontinua y explique por qué.
(b) Para cada uno de los números indicados en el inciso (a), determine si f es continua por la derecha, o por la izquierda, o de ninguna de las dos.



4. De la gráfica de g, exprese los intervalos en los que g es continua.



5–8 Trace la gráfica de una función f que sea continua excepto para la discontinuidad indicada.

5. Discontinua, pero continua por la derecha, en 2

6. Discontinuidades en -1 y 4, pero continua por la izquierda en -1 y por la derecha en 4

7. Discontinuidad removible en 3, discontinuidad de salto en 5

8. Ni de la izquierda ni la derecha, continua en -2, continua sólo por la izquierda en 2

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

9. Un lote de estacionamiento cobra \$3 por la primera hora (o parte de una hora) y \$2 por cada hora sucesiva (o parte), hasta un máximo diario de \$10.

(a) Trace una gráfica del costo de estacionamiento en este lote como función del tiempo por estar estacionado ahí.

(b) Analice las discontinuidades de esta función y su importancia para alguien que se estaciona en el lote.

10. Explique por qué cada función es continua o discontinua.

(a) La temperatura de un lugar específico como función de la hora.

(b) La temperatura en una hora específica como función de la distancia hacia el oeste desde la ciudad de Nueva York.

(c) La altitud sobre el nivel del mar como una función de la distancia directamente al oeste de la ciudad de Nueva York

(d) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida

(e) La corriente en un circuito para las luces de una habitación como función del tiempo

11. Si f y g son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encuentre $g(3)$.

12–13 Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el número a dado.

12. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

---

14. Use la definición de continuidad y las propiedades de límites para demostrar que la función $g(x) = 2\sqrt{3 - x}$ es continua en el intervalo $(-\infty, 3]$.

15–18 Explique por qué la función es discontinua en el número a dado. Trace la gráfica de la función.

15. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

19–24 Explique, usando los Teoremas 4, 5, 7 y 9, por qué la función es continua para todo número en su dominio. Exprese el dominio.

19. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$

20. $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

21. $L(t) = e^{-5t}\cos 2\pi t$

22. $h(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x + 1}$

23. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

24. $F(x) = \text{sen}\,(\cos(\text{sen}\, x))$

25–26 Localice las discontinuidades de la función e ilustre por medio de gráficas.

25. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

26. $y = \ln(\tan^2 x)$

27–30 Use continuidad para evaluar el límite.

27. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

28. $\lim\limits_{x\to \pi} \text{sen}(x + \text{sen}\, x)$

29. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2 - x}$

30. $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 3x + 1)^{-3}$

31–32 Demuestre que f es continua en $(-\infty, \infty)$.

31. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

---

33. Encuentre los números en los que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es discontinua. ¿En cuáles de estos puntos es f continua por la derecha, por la izquierda, o de ninguna de éstas? Trace la gráfica de f.

34. La fuerza gravitacional ejercida por nuestro planeta en una masa unitaria a una distancia r del centro de la Tierra es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R es su radio y G es la constante gravitacional. ¿Es F una función continua en r?

35. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

36. Encuentre los valores de a y b que hagan f continua en todas partes.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

37. ¿Cuál de las siguientes funciones f tiene una discontinuidad removible en a? Si la discontinuidad es removible, encuentre una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

38. Suponga que una función f es continua en [0, 1] excepto en 0.25 y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos posibles gráficas de f, una mostrando que f podría no satisfacer la conclusión del Teorema del Valor Intermedio y una mostrando que f podría todavía satisfacer la conclusión del Teorema del Valor Intermedio (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

39. Si $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 1000$.

40. Suponga que f es continua en [1, 5] y las únicas soluciones de la ecuación $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, explique por qué $f(3) > 6$.

41–44 Use el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que hay una raíz de la ecuación dada en el intervalo especificado.

41. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

42. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

43. $e^x = 3 - 2x, \quad (0, 1)$

44. $\operatorname{sen} x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

45–46 (a) Demuestre que la ecuación tiene al menos una raíz real. (b) Use su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

45. $\cos x = x^3$

46. $\ln x = 3 - 2x$

47–48 (a) Demuestre que la ecuación tiene al menos una raíz real. (b) Utilice un dispositivo gráfico para hallar la raíz correcta a tres posiciones decimales.

47. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

48. $\sqrt{x - 5} = \dfrac{1}{x + 3}$

49. Para demostrar que la función seno es continua necesitamos demostrar que $\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Si hacemos $h = x - a$, entonces $x = a + h$ y $x \to a \iff h \to 0$. Por tanto, un enunciado equivalente es que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Use (6) para demostrar que esto es verdadero.

50. Demuestre que la función seno es una función continua.

51. ¿Hay un número que sea exactamente 1 más que su cubo?

52. Si a y b son números positivos, demuestre que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

53. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, \infty)$.

54. (a) Demuestre que la función de valor absoluto $F(x) = |x|$ es continua en todas partes.

(b) Demuestre que si f es una función continua en un intervalo, entonces así lo es $|f|$.

(c) ¿También es verdadero el recíproco del enunciado del inciso (b)? En otras palabras, si $|f|$ es continua, ¿se deduce que f es continua? Si es así, demuéstrelo; si no lo es, encuentre un contraejemplo.

55. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 a.m. y toma su vereda acostumbrada a lo alto de la montaña, llegando a las 7:00 p.m. A la mañana siguiente, sale a las 7:00 a.m. en lo alto de la montaña y toma la vereda de regreso, llegando al monasterio a las 7:00 p.m. Use el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que hay un punto en la vereda en el que el monje cruzará exactamente a la misma hora del día en ambos días.

2.5 Límites que involucran el infinito

En esta sección investigamos el comportamiento general de funciones y, en particular, si sus gráficas se aproximan a asíntotas, verticales u horizontales.

Límites infinitos

En el Ejemplo 8 de la Sección 2.2 concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \quad \text{no existe}$$

observamos, de la tabla de valores y la gráfica de $y = 1/x^2$ en la Figura 1, que los valores de $1/x^2$ se pueden hacer arbitrariamente grandes si tomamos x cerca lo suficiente a 0. Entonces los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, de modo que $\lim_{x\to 0} (1/x^2)$ no existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

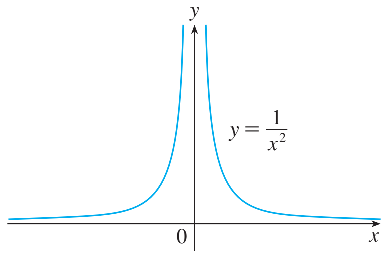


FIGURA 1

Para indicar esta clase de comportamiento usamos la notación

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no significa que estamos considerando ∞ como un número. Ni esto significa que existe el límite. Simplemente expresa la forma particular en la que el límite no existe: $1/x^2$ se puede hacer tan grande como queramos al tomar x suficientemente cercano a 0.

En general, escribimos simbólicamente

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes (o “aumentan sin límite”) a medida que x se aproxima a a.

Una versión más precisa de la Definición 1 se da en el Apéndice D, Ejercicio 20.

1 Definición La notación

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos) al tomar x suficientemente cercano de a (en cualquiera de los dos lados de a) pero no iguales a a.

Otra notación para $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \qquad \text{como} \qquad x \to a$$

De nuevo, el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ se lee con frecuencia como

“el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es infinito”

o bien “$f(x)$ se hace infinita cuando x se aproxima a a”

o bien “$f(x)$ aumenta sin límite cuando x se aproxima a a”

Esta definición está ilustrada gráficamente en la Figura 2.

Del mismo modo, como se ve en la Figura 3,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Cuando decimos que un número es “grande negativo”, queremos decir que es negativo pero su magnitud (valor absoluto) es grande.

significa que los valores de $f(x)$ son negativos tan grandes como queramos para todos los valores de x que sean suficientemente cercanos a a, pero no iguales a a.

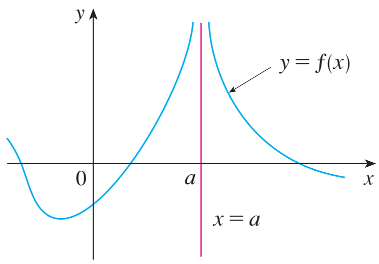


FIGURA 2

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

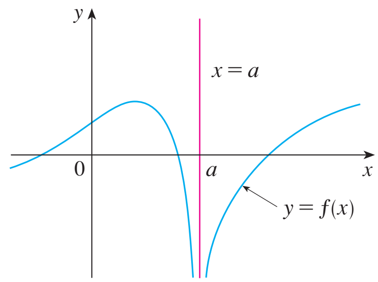


FIGURA 3

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

El símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se puede leer como "el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a, es infinito negativo" o "$f(x)$ decrece sin límite cuando x se aproxima a a". Como ejemplo tenemos

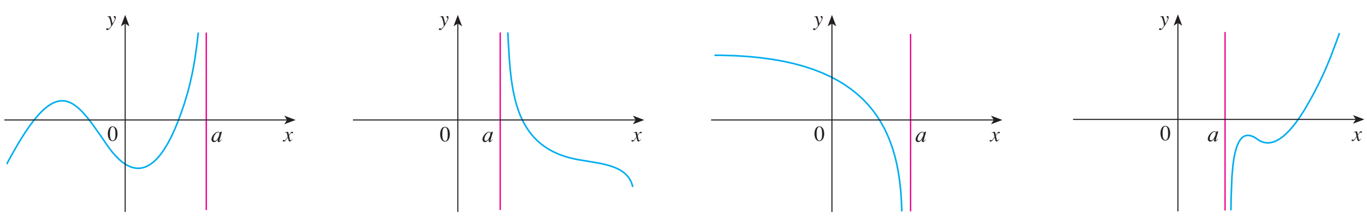
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definiciones similares se pueden dar para los límites infinitos unilaterales

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

recordando que "$x \to a^-$" significa que consideramos sólo valores de x que son menores que a, y análogamente "$x \to a^+$" significa que consideramos sólo $x > a$. Ilustraciones de estos cuatro casos se muestran en la Figura 4.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 4

2 Definición La recta $x = a$ se denomina **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, el eje y es una asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ porque $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. En la Figura 4 la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno de los cuatro casos mostrados.

EJEMPLO 1 **Evaluación de límites infinitos laterales** Encuentre $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ y $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.

SOLUCIÓN Si x es cercana a 3 pero mayor a 3, entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo pequeño y $2x$ es cercana a 6. Entonces el cociente $2x/(x - 3)$ es un número *positivo* grande. Así, intuitivamente, vemos que

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

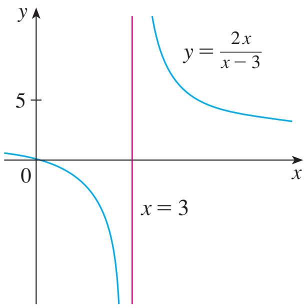


FIGURA 5

Del mismo modo, si x es cercana a 3 pero menor a 3, entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño pero $2x$ es todavía un número positivo (cercano a 6). Por tanto, $2x/(x - 3)$ es un número *negativo* numéricamente grande. Entonces

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

La gráfica de la curva $y = 2x/(x - 3)$ está dada en la Figura 5. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

Dos funciones conocidas cuyas gráficas tienen asíntotas verticales son $y = \ln x$ y $y = \tan x$. De la Figura 6 vemos que

3 $$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$$

y por lo tanto la recta $x = 0$ (el eje y) es una asíntota vertical. De hecho, lo mismo es verdadero para $y = \log_a x$ siempre que $a > 1$. (Véanse Figuras 11 y 12 en la Sección 1.6.)

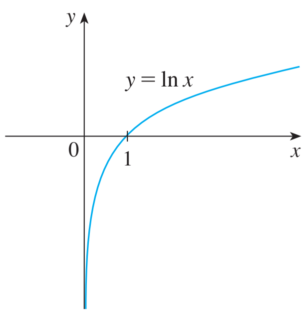


FIGURA 6

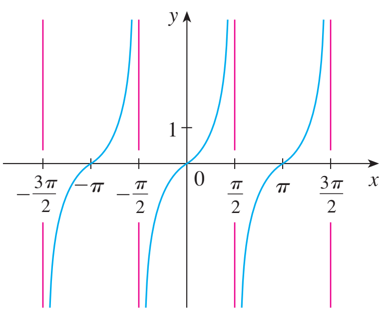


FIGURA 7
$y = \tan x$

La Figura 7 muestra que

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = \infty$$

y por tanto la recta $x = \pi/2$ es una asíntota vertical. En realidad, las rectas $x = (2n + 1)\pi/2$, n un entero, son todas asíntotas verticales de $y = \tan x$.

EJEMPLO 2 Hallar $\lim_{x\to 0} \ln(\tan^2 x)$.

RP La estrategia de resolución de problemas para el Ejemplo 2 es *Introducir Algo Extra* (vea página 83). Aquí, el algo extra, la ayuda auxiliar, es la nueva variable t.

SOLUCIÓN Introducimos una nueva variable, $t = \tan^2 x$. Entonces $t \geqslant 0$ y $t = \tan^2 x \to \tan^2 0 = 0$ cuando $x \to 0$ porque tan es una función continua. Por tanto, por (3), tenemos

$$\lim_{x\to 0} \ln(\tan^2 x) = \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$$

Límites en el infinito

Al calcular límites infinitos, hicimos que x se aproximara a un número y el resultado fue que los valores de y se hacen arbitrariamente grandes (positivos o negativos). Aquí hacemos que x se haga arbitrariamente grande (positiva o negativa) y vemos lo que ocurre a y.

Empecemos por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998

cuando x se hace grande. La tabla de la izquierda muestra valores de esta función correcta a seis lugares decimales y la gráfica de f ha sido trazada por computadora en la Figura 8.

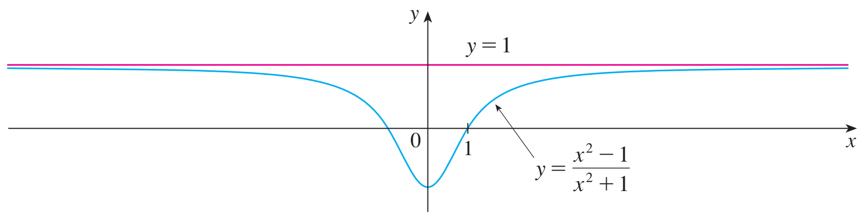


FIGURA 8

Cuando x crece y se hace cada vez más grande, se puede ver que los valores de $f(x)$ se acercan más y más a 1. De hecho, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen a $f(x)$ como queramos a 1 al tomar x suficientemente grande. Esta situación se expresa de manera simbólica si escribimos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, usamos la notación

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se aproximan a L cuando x se hace cada vez más grande.

Una versión más precisa de la Definición 4 está dada en el Apéndice D.

4 Definición Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer tan cercanos a L como queramos al tomar x suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ con frecuencia se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x se hace infinita, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x aumenta sin límite, es L"

El significado de estas frases está dado por la Definición 4.

Las ilustraciones geométricas de la Definición 4 se muestran en la Figura 9. Observe que hay numerosas formas para que la gráfica de f se aproxime a la recta $y = L$ (que se llama *asíntota horizontal*) la que vemos alejarse hacia la derecha de cada gráfica.

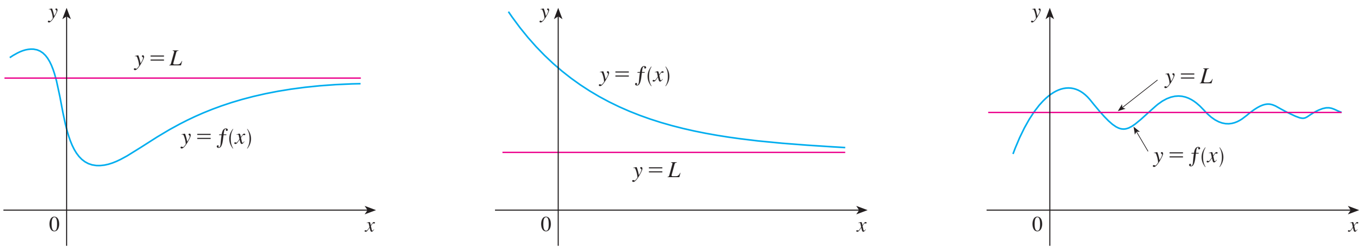


FIGURA 9
Ejemplos que ilustran $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Si consultamos de nuevo a la Figura 8, vemos que para valores negativos numéricamente grandes de x, los valores de $f(x)$ son cercanos a 1. Si hacemos que x disminuya a través de valores negativos sin límite, podemos hacer que $f(x)$ sean tan cercana a 1 como queramos. Esto se expresa al escribir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, como se ve en la Figura 10, la notación

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L al tomar x grande negativa lo suficiente.

De nuevo, el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ con frecuencia se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito negativo, es L"

Observe en la Figura 10 que la gráfica se aproxima a la recta $y = L$ la que vemos alejarse hacia la izquierda de cada gráfica.

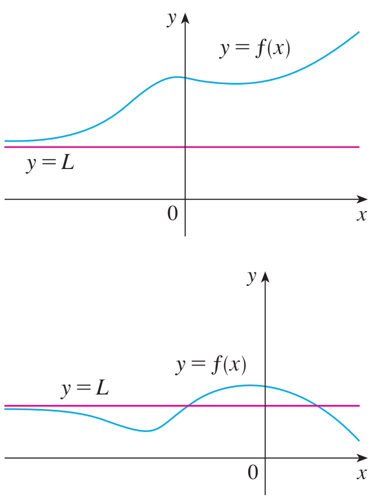


FIGURE 10
Ejemplos que ilustran $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

5 Definición La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva ilustrada en la Figura 8 tiene la recta $y = 1$ como una asíntota horizontal porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La curva $y = f(x)$ trazada en la Figura 11 tiene a $y = -1$ y a $y = 2$ como asíntotas horizontales porque

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

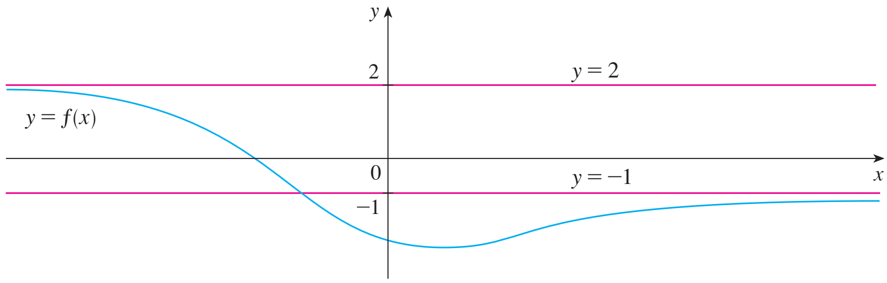


FIGURA 11

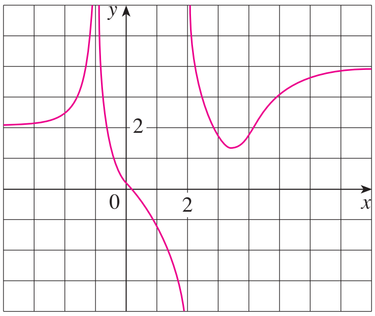


FIGURA 12

EJEMPLO 3 **Límites infinitos y asíntotas desde una gráfica** Encuentre los límites infinitos, límites en el infinito y asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la Figura 12.

SOLUCIÓN Vemos que los valores de $f(x)$ se hacen grandes cuando $x \to -1$ por ambos lados, así

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$$

Observe que $f(x)$ se hace grande negativa cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, pero grande positiva cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Por tanto,

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

Entonces tanto la recta $x = -1$ como la recta $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x se hace grande, se observa que $f(x)$ se aproxima a 4. Pero, cuando x disminuye pasando por valores negativos, $f(x)$ se aproxima a 2. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que $y = 4$ y $y = 2$ son asíntotas horizontales.

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeña. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10{,}000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1{,}000{,}000} = 0.000001$$

De hecho, al tomar x lo suficientemente grande, podemos hacer que $1/x$ sea tan cercana a 0 como queramos. Por tanto, de acuerdo con la Definición 4, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar muestra que cuando x es grande negativa, $1/x$ es pequeña negativa, de modo que también tenemos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

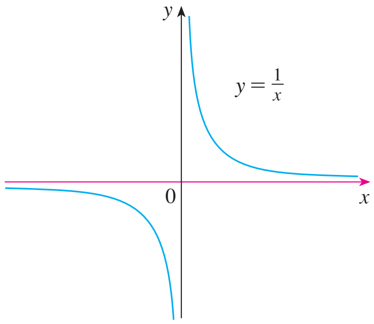


FIGURA 13

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$. (Ésta es una hipérbola equilátera; vea la Figura 13.)

Casi todas las Leyes de los Límites que se dieron en la Sección 2.3 también se cumplen para límites en el infinito. Se puede demostrar que las *Leyes de los Límites que se indican en la Sección 2.3 (con excepción de las Leyes 9 y 10) también son válidas si* "$x \to a$" *se sustituye con* "$x \to \infty$" o "$x \to -\infty$." En particular, si combinamos la Ley 6 con los resultados del Ejemplo 4 obtenemos la siguiente importante regla para calcular límites.

6 Si n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

V EJEMPLO 5 Un cociente de funciones que se hace grande Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

SOLUCIÓN Cuando x se hace grande, tanto el numerador como el denominador se hacen grandes, de modo que no es obvio lo que ocurre a su razón o relación. Necesitamos hacer un poco de álgebra preliminar.

Para evaluar el límite en el infinito de cualquier función racional, primero dividimos numerador y denominador entre la potencia más alta de x que haya en el denominador. (Podemos suponer que $x \neq 0$, ya que estamos interesados sólo en grandes valores de x.) En este caso la mayor potencia de x es x^2 y, usando las Leyes de los Límites, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty} \left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2 \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 5 + 4 \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{[por (6)]}$$

$$= \frac{3}{5}$$

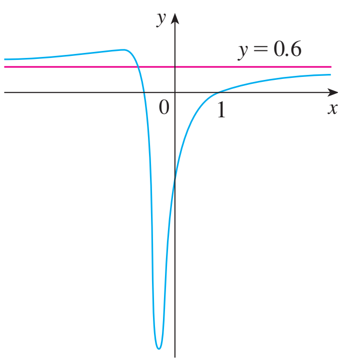


FIGURA 14

$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Un cálculo semejante muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. La Figura 14 ilustra los resultados de estos cálculos al demostrar la forma en que la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.

EJEMPLO 6 **Una diferencia de funciones que se hace grande** Calcule $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$.

SOLUCIÓN Como $\sqrt{x^2 + 1}$ y x son grandes cuando x es grande, es difícil ver lo que ocurre a la diferencia de ambos, de modo que usamos álgebra para reescribir la función. Primero multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado:

Podemos considerar la función dada como que tiene un denominador de 1.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

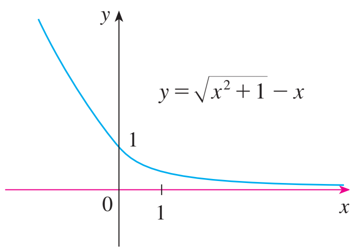


FIGURA 15

Observe que el denominador de esta última expresión $\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$ se hace grande cuando $x \to \infty$ (es más grande que x). Por tanto

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

La Figura 15 ilustra este resultado.

La gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ tiene la recta $y = 0$ (el eje x) como una asíntota horizontal. (Lo mismo es cierto para cualquier función exponencial con base $a > 1$.) De hecho, de la gráfica de la Figura 16 y la correspondiente tabla de valores, vemos que

7
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

Observe que los valores de e^x se aproximan a 0 muy rápidamente.

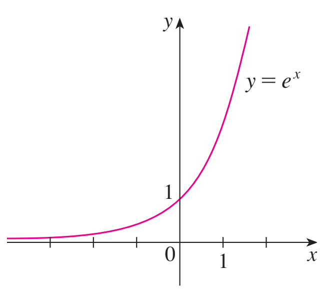


FIGURA 16

x	e^x
0	1.00000
-1	0.36788
-2	0.13534
-3	0.04979
-5	0.00674
-8	0.00034
-10	0.00005

V **EJEMPLO 7** Evalúe $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/x$, sabemos del Ejemplo 4 que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Entonces, por (7)

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Cuando x aumenta, con frecuencia los valores de sen x oscilan entre 1 y -1 infinitamente. Entonces, $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ no existe.

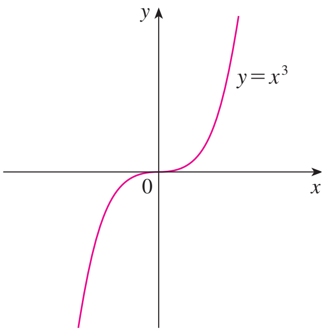


FIGURA 17

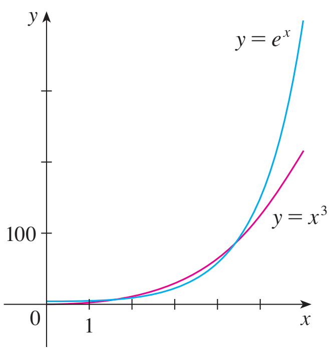


FIGURA 18

Límites infinitos en el infinito

La notación

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

se usa para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen grandes cuando x se hace grande. Significados similares están unidos a los símbolos siguientes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

De las Figuras 16 y 17 vemos que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

pero, como lo demuestra la Figura 18, $y = e^x$ se hace grande cuando $x \to \infty$ a un ritmo mucho más rápido que $y = x^3$.

EJEMPLO 9 **Hallar un límite infinito en el infinito** Encuentre $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Sería **error** escribir

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$$

Las Leyes de los Límites no se pueden aplicar a límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ no pueden ser definidos), pero *podemos* escribir

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x - 1) = \infty$$

porque x y $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes.

EJEMPLO 10 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Dividimos numerador y denominador entre x (la máxima potencia de x que se presenta en el denominador):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

ya que $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to -1$ cuando $x \to \infty$.

2.5 Ejercicios

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada uno de lo siguiente.

(a) $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

(c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ (d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. (a) ¿Puede una asíntota vertical intersecar la gráfica de $y = f(x)$? ¿Puede intersecar una asíntota horizontal? Ilustre con gráficas.

(b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas para ilustrar las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica está dada, exprese lo siguiente.

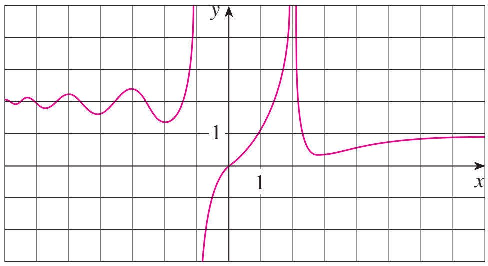
(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

(c) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ (f) Las ecuaciones de las asíntotas

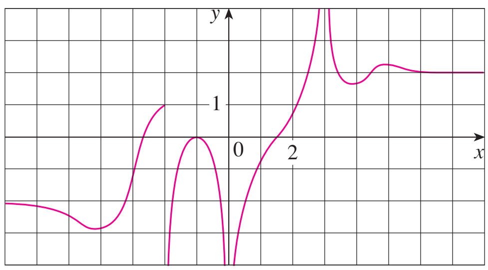


4. Para la función g cuya gráfica está dada, exprese lo siguiente.

(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} g(x)$

(e) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$ (f) Las ecuaciones de las asíntotas



5–10 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisface todas las condiciones dadas.

5. $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -5$

6. $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$,

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, f es impar

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$,

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

11. Intuya el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

al evaluar la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. A continuación use una gráfica de f para apoyar su cálculo.

12. Determine $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ y $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$

(a) al evaluar $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximen a 1 por la izquierda y por la derecha,

(b) por razonamiento como en el Ejemplo 1, y

(c) de la gráfica de f.

13. Use una gráfica para estimar todas las asíntotas verticales y horizontales de la curva

$$y = \frac{x^3}{x^3 - 2x + 1}$$

14. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ correcto a dos lugares decimales.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite a cuatro lugares decimales.

15–37 Encuentre el límite.

15. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2 - x}{(x - 1)^2}$

16. $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

17. $\lim_{x\to 2^+} e^{3/(2-x)}$

18. $\lim_{x\to \pi^-} \cot x$

19. $\lim_{x\to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

20. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

21. $\lim_{x\to 2\pi^-} x \csc x$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x + 5}{x - 4}$

23. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$

24. $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

25. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{4u^4 + 5}{(u^2 - 2)(2u^2 - 1)}$

26. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

29. $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}$

30. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

31. $\lim_{x\to\infty} \cos x$

32. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

33. $\lim_{x\to\infty} (e^{-2x} \cos x)$

34. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35. $\lim_{x\to -\infty} (x^4 + x^5)$

36. $\lim_{x\to (\pi/2)^+} e^{\tan x}$

37. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$

---

38. (a) Grafique la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa usted? Use la gráfica para estimar los valores de los límites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando los valores de $f(x)$, dé estimaciones numéricas de los límites del inciso (a).
(c) Calcule los valores exactos de los límites del inciso (a). ¿Obtuvo usted el mismo valor o diferentes valores para estos dos límites? [En vista de su respuesta al inciso (a), podría tener que comprobar su cálculo para el segundo límite.]

39–42 Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de cada curva. Si cuenta con calculadora graficadora, compruebe su trabajo al graficar la curva y calcular las asíntotas.

39. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

40. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

41. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

42. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

---

43. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

graficando la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.
(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para intuir el valor del límite.
(c) Demuestre que su cálculo es correcto.

44. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para calcular el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ a un lugar decimal.
(b) Use la tabla de valores de $f(x)$ para calcular el límite a cuatro lugares decimales.
(c) Encuentre el valor exacto del límite.

45. Estime la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

graficando f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Después calcule la ecuación de la asíntota al evaluar el límite. ¿Cómo se explica la discrepancia?

46. (a) Grafique la función $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. ¿Piensa usted que la gráfica es una representación precisa de f?
(b) ¿Cómo obtendría una gráfica que represente mejor a f?

47. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

48. Encuentre una fórmula para una función que tenga asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

49. Una función f es una razón entre funciones cuadráticas y tiene una asíntota vertical $x = 4$ y sólo una intersección en el eje x, $x = 1$. Se sabe que f tiene una discontinuidad removible en $x = -1$ y $\lim_{x\to-1} f(x) = 2$. Evalúe
(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

50. Por *comportamiento final* de una función entendemos el comportamiento de sus valores cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.
(a) Describa y compare el comportamiento final de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

al graficar ambas funciones en los rectángulos de observación $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10{,}000, 10{,}000]$.
(b) Se dice que dos funciones tienen *el mismo comportamiento final* si la razón entre ellas se aproxima a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento final.

51. Sean P y Q polinomios. Encuentre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es (a) menor que el grado de Q y (b) mayor que el grado de Q.

52. Haga un dibujo aproximado de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los siguientes cinco casos:
(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n impar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n impar
(v) $n < 0$, n par
A continuación use estos trazos para hallar los límites siguientes.
(a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$
(c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ (d) $\lim_{x\to-\infty} x^n$

53. Encuentre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

54. En la teoría de relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre cuando $v \to c^-$?

55. (a) Un tanque contiene 5000 L de agua pura. Salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua se bombea hacia el tanque a un ritmo de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal después de t minutos (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) ¿Qué ocurre a la concentración cuando $t \to \infty$?

56. En el Capítulo 7 podremos demostrar, bajo ciertas suposiciones, que la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia en caída en el tiempo t es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad terminal* de la gota de lluvia.

(a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(b) Grafique $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s y $g = 9.8$ m/s^2. ¿Cuánto tarda la velocidad de la gota de lluvia en alcanzar 99% de su velocidad terminal?

57. (a) Demuestre que $\lim_{x\to\infty} e^{-x/10} = 0$.

(b) Al graficar $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra qué tan grande tiene que hacerse x para que $e^{-x/10} < 0.1$.

(c) ¿Puede usted resolver el inciso (b) sin usar una calculadora graficadora?

58. (a) Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 1} = 2$.

(b) Al graficar la función del inciso (a) y la recta $y = 1.9$ en una pantalla común, encuentre un número N tal que

$$\frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 1} > 1.9 \qquad \text{cuando} \qquad x > N$$

¿Qué pasa si 1.9 es sustituido con 1.99?

2.6 Derivadas y rapidez de cambio

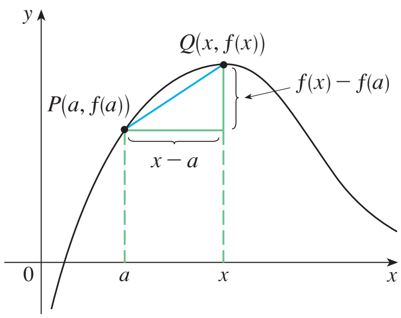
El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de hallar la velocidad de un objeto comprenden determinar el mismo tipo de límite, como vimos en la Sección 2.1. Este tipo especial de límite recibe el nombre de *derivada* y veremos que se puede interpretar como una rapidez de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería.

Tangentes

Si una curva C tiene ecuación $y = f(x)$ y deseamos hallar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces consideramos un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$ y calculamos la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A continuación hacemos que Q se aproxime a P a lo largo de la curva C dejando que x se aproxime a a. Si m_{PQ} se aproxima a un número m, entonces definimos la *tangente t* como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto significa decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q se aproxima a P. Vea Figura 1.)



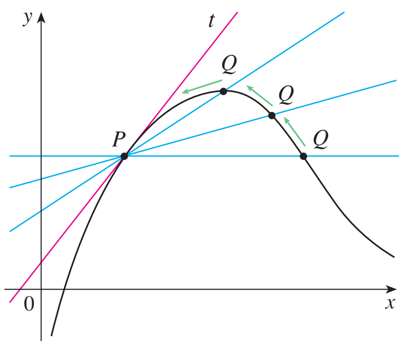


FIGURA 1

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que exista este límite.

En nuestro primer ejemplo confirmamos el cálculo que hicimos en el Ejemplo 1 de la Sección 2.1.

V EJEMPLO 1 Hallar una ecuación de una tangente Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN Aquí tenemos $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

La forma-punto pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Usando la forma de punto pendiente de la ecuación de una recta, encontramos que una ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

TEC Visual 2.6 muestra una animación de la Figura 2.

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva se ve casi como recta. La Figura 2 ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ en el Ejemplo 1. Cuanto más acercamiento (zoom) se haga, la parábola se asemeja más a una recta. En otras palabras, la curva se hace casi indistinguible de su recta tangente.

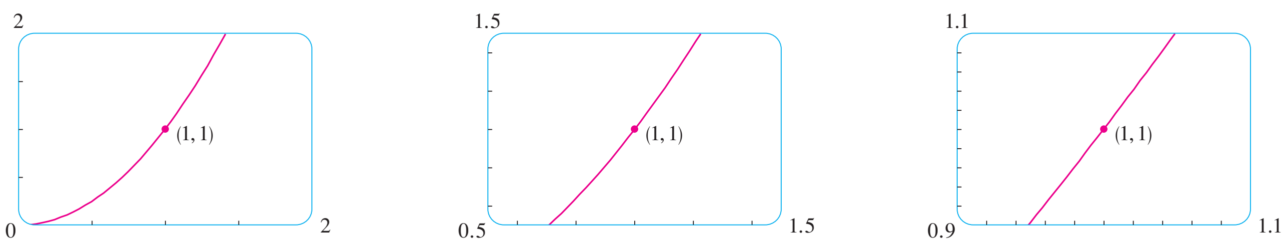


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) en la parábola $y = x^2$

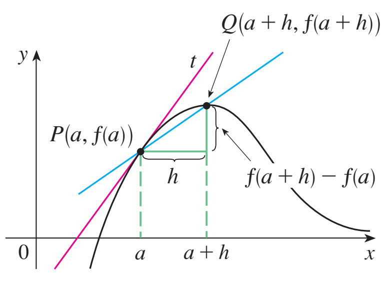


FIGURA 3

Hay otra expresión para la pendiente de una recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, entonces $x = a + h$ y por tanto la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(Véase la Figura 3, donde el caso $h > 0$ está ilustrado y Q está a la derecha de P. Si ocurre que $h < 0$, sin embargo, Q estaría a la izquierda de P.)

Observe que cuando x se aproxima a a, h se aproxima a 0 (porque $h = x - a$) y entonces la expresión para la pendiente de la recta tangente en la Definición 1 se convierte en

2 $$\boxed{m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$ en el punto $(3, 1)$.

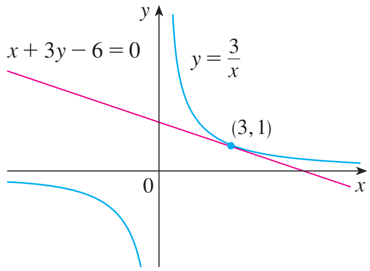


FIGURA 4

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, la ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica a $$x + 3y - 6 = 0$$

La hipérbola y su tangente se muestran en la Figura 4.

Velocidades

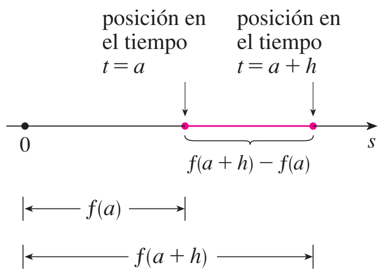


FIGURA 5

En la Sección 2.1 investigamos el movimiento de una pelota lanzada desde la Torre CN y definimos su velocidad como el valor límite de velocidades promedio en periodos cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a una ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto desde el origen en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se denomina **función de posición** del objeto. En el intervalo de $t = a$ a $t = a + h$ el cambio en posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase Figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

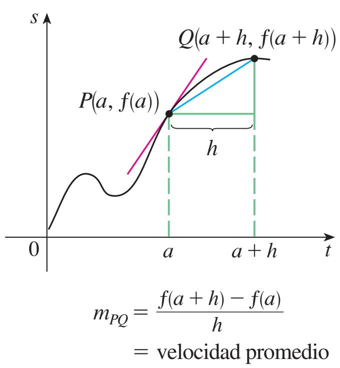


FIGURA 6

que es la misma que la pendiente de la recta secante PQ de la Figura 6.

Ahora suponga que calculamos las velocidades promedio en intervalos cada vez más cortos $[a, a + h]$. En otras palabras, hacemos que h se aproxime a 0. Al igual que en el ejemplo de una pelota en caída, definimos la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el tiempo $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3 $$\boxed{v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Esto significa que la velocidad en el tiempo $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P (compare Ecuaciones 2 y 3).

Ahora que sabemos cómo calcular límites, reconsideremos el problema de la pelota en caída.

V EJEMPLO 3 Velocidad de una pelota en caída Suponga que una pelota se deja caer desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el suelo.

(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 seg?

(b) ¿Qué tan rápido viaja la pelota cuando golpea el suelo?

Recuerde de la Sección 2.1: La distancia (en metros) en caída después de t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Será necesario que encontremos la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota cae al suelo, de modo que es eficiente empezar por hallar la velocidad en un tiempo general $t = a$. Usando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, tenemos

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a \end{aligned}$$

(a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.

(b) Como la plataforma de observación está a 450 m sobre el suelo, la pelota caerá al suelo en el tiempo t_1 cuando $s(t_1) = 450$, es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da como resultado

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

La velocidad de la pelota cuando cae al suelo es, por tanto,

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

Derivadas

Hemos visto que el mismo tipo de límite aparece al hallar la pendiente de una recta tangente (Ecuación 2) o la velocidad de un objeto (Ecuación 3). De hecho, límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

aparecen siempre que calculemos una rapidez de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, como por ejemplo la rapidez de una reacción en química o un costo marginal en economía. Como este tipo de límite es tan generalizado, recibe un nombre y notación especiales.

4 Definición La **derivada de una función f en un número a**, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

$f'(a)$ se lee "f prima de a."

Si escribimos $x = a + h$, entonces tenemos $h = x - a$ y h se aproxima a 0 si y sólo si x se aproxima a a. Por tanto, una forma equivalente de iniciar la definición de la derivada, como vimos al hallar rectas tangentes, es

5
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

V EJEMPLO 4 Cálculo de una derivada en un número general a Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

SOLUCIÓN De la Definición 4 tenemos

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h - 8) \\
&= 2a - 8
\end{aligned}
$$

Definimos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m dada por la Ecuación 1 o 2. En vista de que, por la Definición 4, esto es lo mismo que la derivada $f'(a)$, ahora podemos decir lo siguiente.

> La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si usamos la forma de punto pendiente de la ecuación de una recta, podemos escribir una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

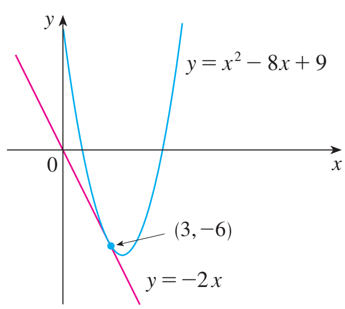


FIGURA 7

V EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del Ejemplo 4 sabemos que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Entonces la ecuación de la recta tangente, mostrada en la Figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{o} \qquad y = -2x$$

Rapidez de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Entonces y es una función de x y escribimos $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también llamado **incremento** de x) es

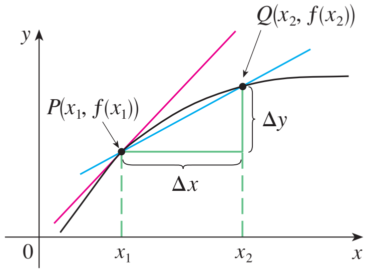
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de las diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



promedio de rapidez de cambio = m_{PQ}

promedio de rapidez de cambio instantánea = pendiente de tangente en P

FIGURA 8

se denomina **promedio de rapidez de cambio de *y* con respecto a *x*** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la Figura 8.

Por analogía con la velocidad, consideramos el promedio de rapidez de cambio en intervalos cada vez más pequeños al hacer que x_2 se aproxime a x_1 y por tanto haciendo que Δx se aproxime a 0. El límite de estos promedios de rapidez de cambio recibe el nombre de **rapidez de cambio (instantánea) de *y* con respecto a *x*** en $x = x_1$, que se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

6 $$\text{promedio de rapidez de cambio} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconocemos este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tenemos una segunda interpretación:

> La derivada $f'(a)$ es la rapidez de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = a$.

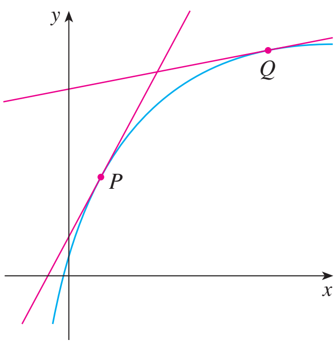


FIGURA 9
Los valores y están cambiando rápidamente en P y lentamente en Q.

La conexión con la primera interpretación es que si trazamos la curva $y = f(x)$, entonces la rapidez de cambio instantánea es la pendiente de la tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y por lo tanto la curva es bastante inclinada como se ve en el punto P en la Figura 9), los valores y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto Q) y los valores de y cambian con lentitud.

En particular, si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, entonces $f'(a)$ es la rapidez de cambio del desplazamiento s con respecto al tiempo t. En otras palabras, *$f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$*. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo estudiamos el significado de la derivada de una función que está definida verbalmente.

V EJEMPLO 6 Derivada de una función de costo Un fabricante produce rollos de una tela con ancho fijo. El costo de producir x yardas de esta tela es $C = f(x)$ dólares.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1000) = 9$?

(c) ¿Cuál piensa usted que es mayor, $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Y qué decir de $f'(5000)$?

SOLUCIÓN

(a) La derivada $f'(x)$ es la rapidez de cambio instantánea de C con respecto a x; es decir, $f'(x)$ significa la rapidez de cambio del costo de producción con respecto al número de yardas producidas. (Los economistas dicen que esta rapidez de cambio es el *costo marginal*. Esta idea se estudia con más detalle en las Secciones 3.8 y 4.6.)

Como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las del cociente de la diferencia $\Delta C/\Delta x$. Como ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, se deduce que las unidades para $f'(x)$ son dólares por yarda.

(b) El enunciado de que $f'(1000) = 9$ significa que, después de 1000 yardas de tela que se hayan manufacturado, la rapidez a la que el costo de producción está creciendo es \$9/yarda. (Cuando $x = 1000$, C está creciendo 9 veces más rápido que x.)

Dado que $\Delta x = 1$ es pequeño en comparación con $x = 1000$, podríamos usar la aproximación

Aquí suponemos que la función de costo se comporta bien; en otras palabras, $C(x)$ no oscila rápidamente cerca de $x = 1000$.

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decir que el costo de manufacturar la 1000-ésima yarda (o la 1001-ésima) es alrededor de \$9.

(c) La rapidez a la que el costo de producción está creciendo (por yarda) es probablemente menor cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de hacer la 500ava yarda es menor que el costo de la 50ava yarda) debido a economías de escala. (El fabricante hace un uso más eficiente de los costos fijos de producción.) Por lo tanto,

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, como la produción crece, la operación a gran escala resultante se vuelve ineficiente y genera costos extras. Así que es posible que la tasa de incremento de los costos pueda comenzar a elevarse eventualmente. Esto puede suceder cuando

$$f'(5000) > f'(500)$$

En el siguiente ejemplo calculamos la rapidez de cambio de la deuda nacional con respecto al tiempo. Aquí la función está definida no por una fórmula sino por una tabla de valores.

V EJEMPLO 7 Derivada de una función tabular Sea $D(t)$ la deuda nacional de Estados Unidos en el tiempo t. La tabla del margen da valores aproximados de esta función al dar estimaciones de fin de año, en miles de millones de dólares, de 1980 a 2005. Interprete y calcule el valor de $D'(1990)$.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2
2005	7932.7

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa la rapidez de cambio de D con respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la rapidez de aumento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo con la Ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Por lo tanto, calculamos y tabulamos valores del cociente de la diferencia (el promedio de rapidez de cambio) como sigue

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09
2005	313.29

De esta tabla vemos que $D'(1990)$ se encuentra en algún punto entre 257.48 y 348.14 mil millones de dólares por año. [Aquí estamos haciendo la razonable suposición de que la deuda no fluctuó alocadamente entre 1980 y 2000.) Estimamos que la rapidez de aumento de la deuda nacional de Estados Unidos en 1990 fue el promedio de estos dos números, es decir

$$D'(1990) \approx 303 \text{ mil millones de dólares por año}$$

Otro método sería graficar la función de la deuda y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1990$.

Una nota sobre unidades

Las unidades para el promedio de rapidez de cambio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades de ΔD divididas entre las unidades de Δt, es decir, miles de millones de dólares por año. La rapidez de cambio instantánea es el límite de los promedios de rapidez de cambio, de modo que se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por año.

En los Ejemplos 3, 6 y 7 vimos tres casos específicos de rapidez de cambio; la velocidad de un objeto es la rapidez de cambio de desplazamiento con respecto al tiempo; el costo marginal es la rapidez de cambio del costo de producción con respecto al número de piezas producidas; la rapidez de cambio de la deuda con respecto al tiempo es de interés en economía. Aquí tenemos una pequeña muestra de otros casos de rapidez de cambio: en física, la rapidez de cambio de trabajo con respecto al tiempo se llama *potencia*. Los químicos que estudian una reacción química están interesados en la rapidez de cambio en la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (llamada *rapidez de reacción*). Un biólogo está interesado en la rapidez de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de la rapidez de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en ingeniería e incluso en ciencias sociales. Más ejemplos se darán en la Sección 3.8.

Todos estos casos de rapidez de cambio son de derivadas y pueden por ello interpretarse como pendientes de tangentes. Esto proporciona más importancia a la solución del problema de la tangente. Siempre que resolvamos un problema que se refiera a rectas tangentes, no estamos resolviendo sólo un problema de geometría sino que también estamos resolviendo implícitamente una gran variedad de problemas de rapidez de cambio en ciencias e ingeniería.

2.6 Ejercicios

1. Una curva tiene ecuación $y = f(x)$.
(a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
(b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Grafique la curva $y = e^x$ en los rectángulos de observación $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$, y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué se observa acerca de la curva al hacer un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
(i) usando la Definición 1 (ii) usando la Ecuación 2
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente en el inciso (a).
(c) Grafique la parábola y la recta tangente. Como comprobación del trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la recta tangente no se puedan distinguir.

4. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
(i) usando la Definición 1 (ii) usando la Ecuación 2
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente en el inciso (a).
(c) Grafique la curva y la recta tangente en rectángulos de observación sucesivamente más pequeños centrados en $(1, 0)$ hasta que la curva y la recta parezcan coincidir.

5–8 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

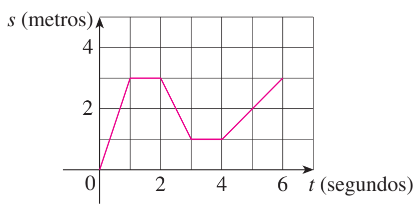
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

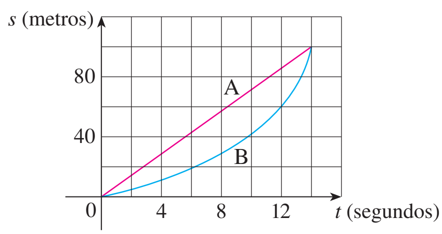
9. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ en el punto donde $x = a$.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
(c) Grafique la curva y ambas tangentes en una pantalla común.

10. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Grafique la curva y ambas tangentes en una pantalla común.

11. (a) Una partícula empieza a moverse hacia la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función se muestra en la figura. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿A la izquierda? ¿Cuándo no se mueve?
(b) Trace una gráfica de la función de velocidad.



12. A continuación se muestran gráficas de las funciones de posición de dos corredores, A y B, que participan en una carrera de 100 metros y terminan empatados.



Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

(a) Describa y compare la forma en que los corredores hacen la carrera.
(b) ¿En qué tiempo es máxima la distancia entre los corredores?
(c) ¿En qué tiempo tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota es lanzada al aire con una velocidad de 40 ft/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$, Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

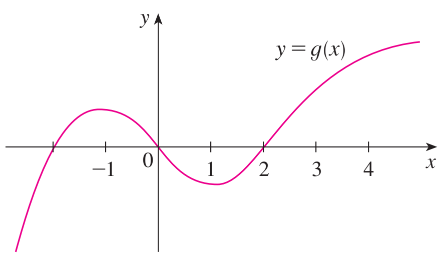
14. Si una piedra es lanzada hacia arriba en el planeta Marte, con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 10t - 1.86t^2$.
(a) Encuentre la velocidad de la piedra después de un segundo.
(b) Encuentre la velocidad de la piedra cuando $t = a$.
(c) ¿Cuándo caerá la piedra en la superficie?
(d) ¿Con qué velocidad caerá la piedra en la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los tiempos $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre el promedio de velocidad en cada intervalo:
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3.5, 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4.5]$
(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
(c) Trace la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio en el inciso (a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea en el inciso (b).

17. Para la función g cuya gráfica está dada, ordene los siguientes números en orden creciente y explique su razonamiento:

$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$



18. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

19. Si una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

20. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en (4, 3) pasa por el punto (0, 2), encuentre $f(4)$ y $f'(4)$.

21. Trace la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

22. Trace la gráfica de una función g para la cual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

23. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y úsela para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto (1, 2).

24. Si $g(x) = x^4 - 2$, encuentre $g'(1)$ y úsela para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto $(1, -1)$.

25. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y úsela para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto (2, 2).
(b) Ilustre el inciso (a) al graficar la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y úsela para hallar ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos (2, 8) y (3, 9).
(b) Ilustre el inciso (a) al graficar la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

27–32 Encuentre $f'(a)$.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

28. $f(t) = 2t^3 + t$

29. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

30. $f(x) = x^{-2}$

31. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

33–38 Cada límite representa la derivada de alguna función f en algún número a. Exprese esa f y a en cada caso.

33. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

37. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

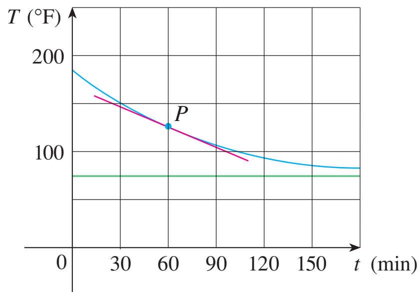
39–40 Una partícula se mueve a lo largo de una recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la rapidez cuando $t = 5$.

39. $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$

40. $f(t) = t^{-1} - t$

41. Una lata caliente de soda se coloca en un refrigerador frío. Trace la gráfica de la temperatura de la soda como función del tiempo. ¿La rapidez de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la rapidez de cambio después de una hora?

42. Un pavo rostizado se saca de un horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca en una mesa en un cuarto donde la temperatura es 75°F. La gráfica muestra el modo en que la temperatura del pavo disminuye y finalmente se aproxima a la temperatura del cuarto. Al medir la pendiente de la tangente, calcule la rapidez de cambio de la temperatura después de una hora.



43. El número N de suscriptores de teléfonos celulares en Estados Unidos (en millones) se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mitad del año.)

t	1996	1998	2000	2002	2004	2006
N	44	69	109	141	182	233

(a) Encuentre el promedio de rapidez de crecimiento en telefonía celular
(i) de 2002 a 2006 (ii) de 2002 a 2004
(iii) de 2000 a 2002
En cada caso, incluya las unidades.

(b) Estime la rapidez instantánea de crecimiento en 2002 al tomar el promedio de dos promedios de rapidez de cambio. ¿Cuáles son sus unidades?

(c) Calcule la rapidez instantánea de crecimiento en 2002 al medir la pendiente de una tangente.

44. El número N de lugares de una conocida cadena de cafeterías aparece en la tabla siguiente. (Se dan números de lugares hasta el 30 de junio.)

Año	2003	2004	2005	2006	2007
N	7225	8569	10,241	12,440	15,011

(a) Encuentre el promedio de rapidez de crecimiento
(i) de 2005 a 2007 (ii) de 2005 a 2006
(iii) de 2004 a 2005
En cada caso, incluya las unidades.

(b) Calcule la rapidez instantánea de crecimiento en 2005 tomando el promedio de las dos tasas promedio de cambio. ¿Cuáles son sus unidades?

(c) Calcule la rapidez instantánea de crecimiento en 2005 al medir la pendiente de una tangente.

45. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierta mercancía es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.

(a) Encuentre el promedio de rapidez de cambio de C con respecto a x cuando se cambie el nivel de producción
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encuentre la rapidez instantánea de cambio de C con respecto a x cuando $x = 100$. (Éste se llama *costo marginal*. Su importancia se explicará en la Sección 3.8.)

46. Si un tanque cilíndrico contiene 100,000 galones de agua que se pueden descargar del fondo del tanque en una hora, entonces la Ley de Torricelli proporciona el volumen V de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 100{,}000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encuentre la rapidez a la que el agua está saliendo del tanque (la rapidez instantánea de cambio de V con respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los tiempos $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 minutos, encuentre la rapidez de flujo y la cantidad de agua restante en el tanque. En una oración o dos, resuma lo que encuentre. ¿En qué tiempo es máxima la rapidez de flujo? ¿Y la mínima?

47. El costo de producir x onzas de oro de una nueva mina de oro es $C = f(x)$ dólares.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿Qué significa el enunciado $f'(800) = 17$?

(c) ¿Piensa usted que los valores de $f'(x)$ aumentarán o disminuirán en el corto plazo? ¿Qué se puede decir a largo plazo? Explique.

48. El número de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Suponga que hay una cantidad ilimitada de espacio y de nutrientes para las bacterias. ¿Cuál piensa usted que es mayor, $f'(5)$ o $f'(10)$? Si el aprovisionamiento de nutrientes es limitado, ¿esto afectaría su conclusión? Explique.

49. Sea $T(t)$ la temperatura (en °F) en Baltimore t horas después de la medianoche del 26 de septiembre de 2007. La tabla muestra valores de esta función registrada cada dos horas. ¿Cuál es el significado de $T'(10)$? Calcule su valor.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	68	65	63	63	65	76	85	91

50. La cantidad (en libras) de un café molido para *gourmet* que vende una compañía cafetalera a un precio de p dólares por libra es $Q = f(p)$.

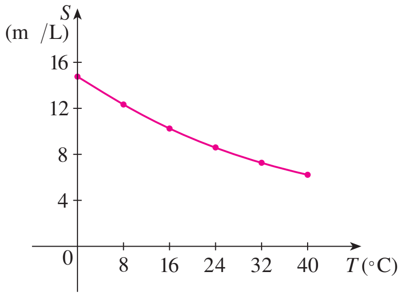
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿$f'(8)$ es positiva o negativa? Explique.

51. La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura del agua. (Por tanto, la contaminación térmica influye en el contenido de oxígeno del agua.) La gráfica muestra el modo en que la solubilidad S del oxígeno varía como función de la temperatura T del agua.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Calcule el valor de $S'(16)$ e interprételo.

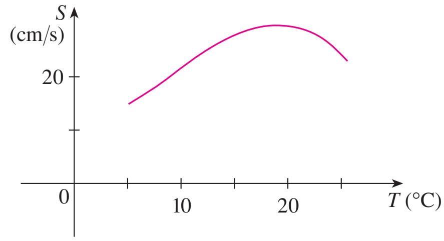


Adaptada de *Environmental Science: Living Within the System of Nature,* 2a. ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989.
Reimpreso con permiso de Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.

52. La gráfica muestra la influencia de la temperatura T en la máxima rapidez S sostenible de natación de salmón de la variedad Cobo.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Estime los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



53–54 Determine si $f'(0)$ existe.

53. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

54. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN HISTÓRICA

Primeros métodos para hallar tangentes

La primera persona en formular explícitamente las ideas de límites y derivadas fue Sir Isaac Newton en la década de 1660. Pero Newton reconoció que “Si he visto más lejos que otros hombres, es porque me he subido en los hombros de gigantes.” Dos de estos gigantes fueron Pierre Fermat (1601–1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630–1677). Newton conocía los métodos que estos hombres usaron para hallar rectas tangentes y sus métodos desempeñaron un importante papel en la fórmula final de cálculo de Newton.

La bibliografía siguiente contiene explicaciones de estos métodos. Lea una o más de las obras citadas y escriba un reporte que compare los métodos ya sea de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, use el método de la Sección 2.6 para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto $(1, 3)$ y demuestre que Fermat o Barrow hubieran resuelto el mismo problema. Aun cuando usted usó derivadas y ellos no las usaron, indique semejanzas entre los métodos.

1. Carl Boyer and Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (New York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.

2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (New York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.

3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6th ed. (New York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.

4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.7 La derivada como una función

En la sección anterior consideramos la derivada de una función f en un número fijo a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

Aquí cambiamos nuestro punto de vista y hacemos variar el número a. Si sustituimos a en la Ecuación 1 con una variable x, obtenemos

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \tag{2}$$

Dado cualquier número x para el cual existe este límite, asignamos a x el número $f'(x)$. Entonces podemos considerar f' como una nueva función, llamada la **derivada de f** y definida por la Ecuación 2. Sabemos que el valor de f' en x, $f(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' recibe el nombre de derivada de f porque ha sido "derivada" de f por la operación límite de la Ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

V EJEMPLO 1 **Derivada de una función dada por una gráfica** La gráfica de una función f está dada en la Figura 1. Úsela para trazar la gráfica de la derivada f'.

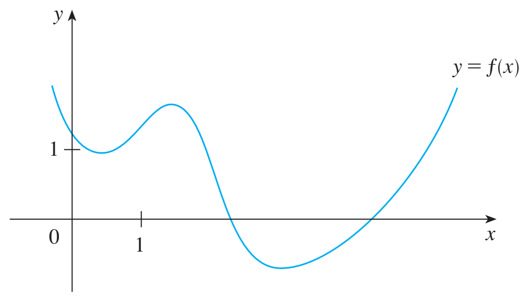
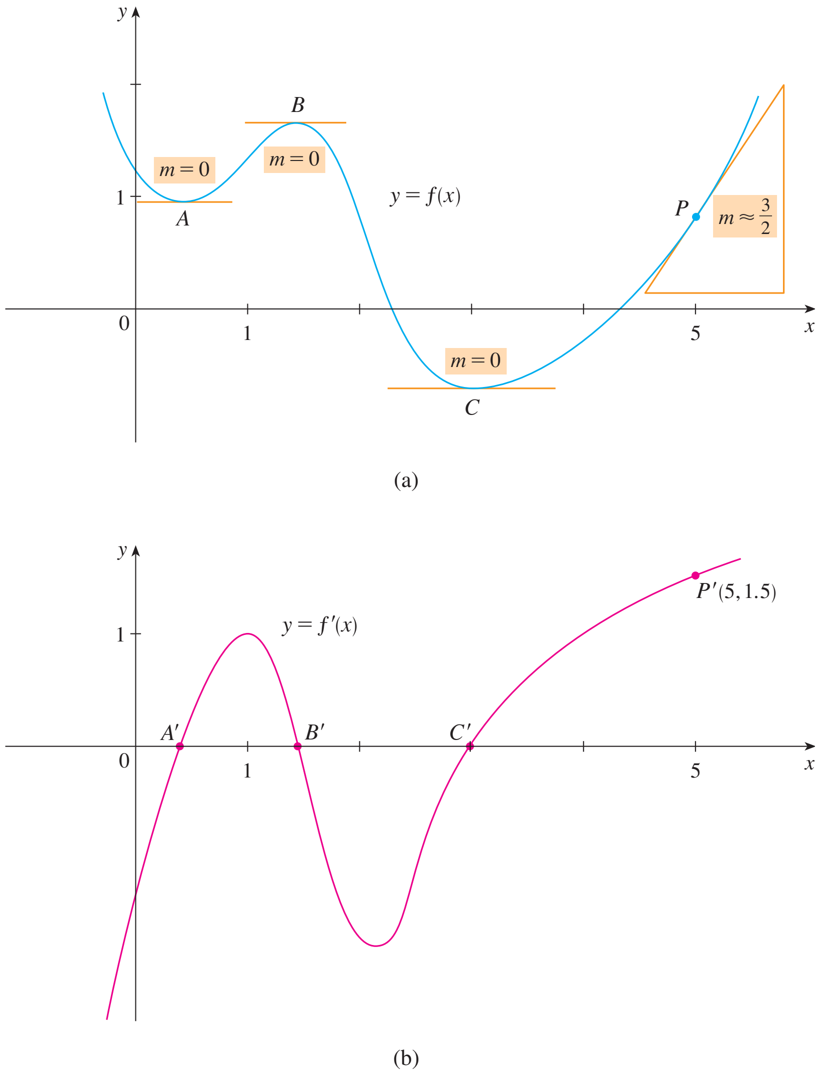


FIGURA 1

SOLUCIÓN Podemos estimar el valor de la derivada en cualquier valor de x si trazamos la tangente en el punto $(x, f(x))$ y calculamos su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$ trazamos la tangente en P en la Figura 2(a) y estimamos que su pendiente es alrededor de $\frac{3}{2}$, de modo que $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite localizar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. Repitiendo este procedimiento en varios puntos, obtenemos la gráfica que se ve en la Figura 2(b). Observe que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada ahí es 0 y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B las tangentes tienen pendiente positiva, por lo cual $f'(x)$ es positiva ahí. Pero entre B y C las tangentes tienen pendiente negativa y $f'(x)$ es negativa ahí.



TEC Visual 2.7 muestra una animación de la Figura 2 para varias funciones.

FIGURA 2

Si una función está definida por una tabla de valores, entonces podemos construir una tabla de valores aproximados de su derivada, como en el siguiente ejemplo.

t	$B(t)$
1980	9,847
1982	9,856
1984	9,855
1986	9,862
1988	9,884
1990	9,969
1992	10,046
1994	10,122
1996	10,179
1998	10,217
2000	10,264
2002	10,312
2004	10,348
2006	10,379

EJEMPLO 2 **Derivada de una función dada por una tabla** Sea $B(t)$ la población de Bélgica en el tiempo t. La tabla de la izquierda da valores de $B(t)$ a mitad de año, en miles, de 1980 a 2006. Construya una tabla de valores para la derivada de esta función.

SOLUCIÓN Suponemos que no hubo fluctuaciones bruscas en la población entre los valores indicados. Empecemos por aproximar $B'(1988)$, la rapidez de aumento de la población de Bélgica a mediados de 1988. Como

$$B'(1988) = \lim_{h \to 0} \frac{B(1988 + h) - B(1988)}{h}$$

tenemos
$$B'(1988) \approx \frac{B(1988 + h) - B(1988)}{h}$$

para valores pequeños de h.

Para $h = 2$, obtenemos

$$B'(1988) \approx \frac{B(1990) - B(1988)}{2} = \frac{9969 - 9884}{2} = 42.5$$

(Éste es el promedio de rapidez de aumento entre 1988 y 1990.) Para $h = -2$, tenemos

$$B'(1988) \approx \frac{B(1986) - B(1988)}{-2} = \frac{9862 - 9884}{-2} = 11$$

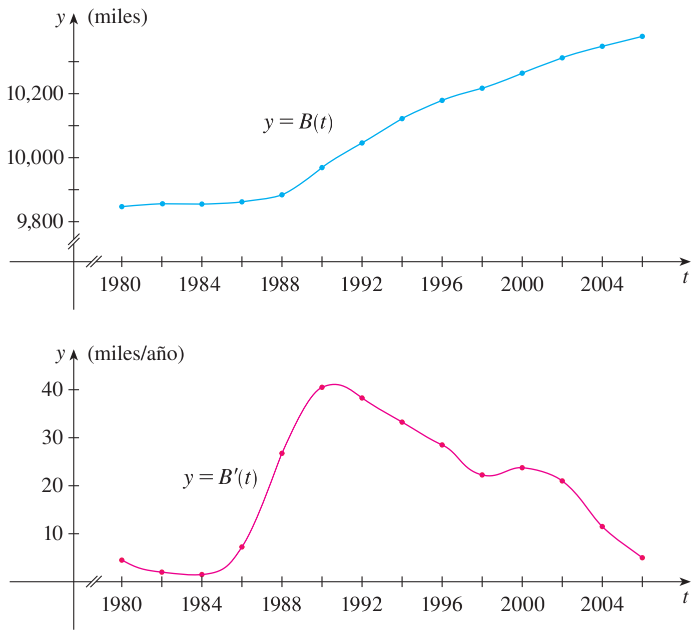
que es el promedio de rapidez de aumento entre 1986 y 1988. Obtenemos una aproximación más precisa si tomamos el promedio de esta rapidez de cambio entre estos años:

$$B'(1988) \approx \tfrac{1}{2}(42.5 + 11) = 26.75$$

Esto significa que en 1988 la población estaba aumentando a razón de unas 26,750 personas por año.

Haciendo cálculos similares para los otros valores (excepto en los puntos extremos) obtenemos la tabla de la izquierda, que muestra los valores aproximados para la derivada.

t	$B'(t)$
1980	4.50
1982	2.00
1984	1.50
1986	7.25
1988	26.75
1990	40.50
1992	38.25
1994	33.25
1996	28.50
1998	22.25
2000	23.75
2002	21.00
2004	11.50
2006	5.00



La Figura 3 ilustra el Ejemplo 2 con las gráficas de la función de población $B(t)$ y su derivada $B'(t)$. Observe cómo aumenta la tasa de crecimiento de población a un máximo en 1990 y disminuye de ahí en adelante.

FIGURA 3

V EJEMPLO 3 Derivada de una función dada por una fórmula

(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.

(b) Ilustre al comparar las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN

(a) Cuando usemos la Ecuación 2 para calcular una derivada, debemos recordar que la variable es h y que x temporalmente es considerada como una constante durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

(b) Usamos una calculadora graficadora para graficar f y f' en la Figura 4. Observe que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendiente positiva. Entonces, estas gráficas sirven como comprobación de nuestro trabajo en el inciso (a).

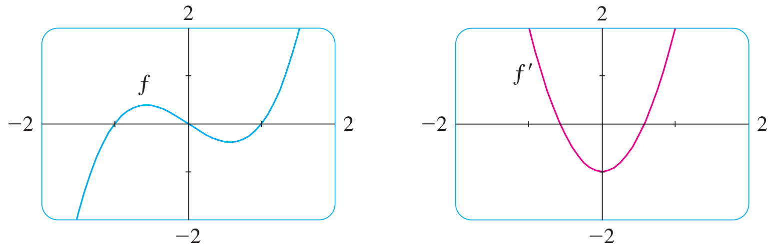


FIGURA 4

EJEMPLO 4 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Exprese el dominio de f'.

SOLUCIÓN

Aquí racionalizamos el numerador.

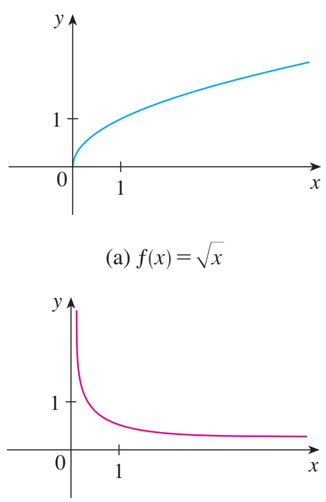
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vemos que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$. Esto es menor que el dominio de f, que es $[0, \infty)$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 5

Comprobemos para ver que el resultado del Ejemplo 4 es razonable al ver las gráficas de f y f' en la Figura 5. Cuando x es cercana a 0, $\sqrt{x}$ también es cercana a 0, y $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ es muy grande y esto corresponde a las empinadas rectas tangentes cercanas a $(0, 0)$ en la Figura 5(a) y los valores grandes de $f'(x)$ un poco a la derecha de 0 en la Figura 5(b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeña y esto corresponde a las rectas tangentes más planas a la extrema derecha de la gráfica de f y la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 5 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1 - (x+h)}{2 + (x+h)} - \dfrac{1 - x}{2 + x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1 - x - h)(2 + x) - (1 - x)(2 + x + h)}{h(2 + x + h)(2 + x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2 - x - 2h - x^2 - xh) - (2 - x + h - x^2 - xh)}{h(2 + x + h)(2 + x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2 + x + h)(2 + x)} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2 + x + h)(2 + x)} = -\frac{3}{(2 + x)^2}$$

Otras notaciones

Si usamos la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la variable dependiente es y, entonces algunas notaciones alternativas comunes para la derivada son como sigue:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se denominan **operadores diferenciales** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx, que fue introducido por Leibniz, no debe ser considerado como una división (por ahora); es simplemente un sinónimo de $f'(x)$. Sin embargo, es una notación muy útil y sugerente, en especial cuando se usa en conjunción con notación de incrementos. Por consulta de la Ecuación 2.6.6, podemos reescribir la definición de derivada en notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig en 1646 y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de ese lugar, graduándose de licenciatura a los 17 años de edad. Después de obtener un doctorado en leyes a los 20 años de edad, Leibniz entró al servicio diplomático y pasó casi toda su vida viajando a las capitales de Europa en misiones políticas. En particular, trabajó para prevenir una amenaza militar de Francia contra Alemania y trató de reconciliar la iglesia católica y la protestante.

Su estudio serio de matemáticas no se inició sino hasta 1672 cuando estaba en una misión diplomática en París. Ahí construyó una máquina calculadora y conoció a científicos, como Huygens, que dirigieron la atención de Leibniz a los últimos perfeccionamientos en matemáticas y ciencias. Leibniz buscó crear una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara un razonamiento lógico. En particular, la versión del cálculo que publicó en 1684 estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que usamos hoy en día.

Desafortunadamente, una terrible disputa de prioridad apareció en la década de 1690 entre los seguidores de Newton y los de Leibniz en cuanto a quién había inventado primero el cálculo. Leibniz fue incluso acusado de plagio por miembros de la Real Sociedad de Inglaterra. La verdad es que cada uno de estos hombres inventó el cálculo de manera independiente. Newton llegó a su versión de cálculo primero pero, por su temor a la controversia, no la publicó de inmediato y el informe de Leibniz de 1684 fue el primero en publicarse.

Si deseamos indicar el valor de una derivada dy/dx en notación de Leibniz en un número específico a, usamos la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

> **3 Definición** Una función f es **derivable en a** si existe $f'(a)$. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

V EJEMPLO 6 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y podemos escoger h lo suficientemente pequeña para que $x + h > 0$ y por tanto $|x + h| = x + h$. Entonces, para $x > 0$, tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y así f es derivable para cualquier $x > 0$.

Del mismo modo, para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ y h se puede escoger lo suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y por tanto $|x + h| = -(x + h)$. Entonces, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h}$$

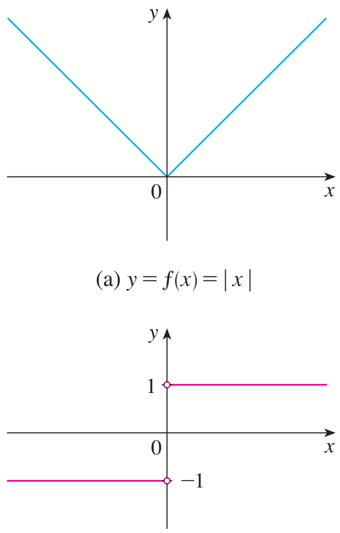
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

y por tanto f es derivable para cualquier $x < 0$.

Para $x = 0$ tenemos que investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe)}$$



(a) $y = f(x) = |x|$

(b) $y = f'(x)$

FIGURA 6

Calculemos separadamente los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Como estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Entonces f es derivable en toda x excepto 0.

Una fórmula para f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la Figura 6(b). El hecho de que $f'(0)$ no exista se refleja geométricamente en que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase Figura 6(a).]

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables en una función. El siguiente teorema muestra la forma en que están relacionadas estas propiedades.

4 Teorema Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar que f es continua en a, tenemos que demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Hacemos esto si demostramos que la diferencia $f(x) - f(a)$ se aproxima a 0 cuando x se aproxima a a.

La información dada es que f es derivable en a, es decir,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (véase Ecuación 2.6.5). Para enlazar los datos dados con las incógnitas, dividimos y multiplicamos $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (que podemos hacer cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

Entonces, usando la Ley del Producto y (2.6.5), podemos escribir

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Para usar lo que acabamos de demostrar, empezamos con $f(x)$ y sumamos y restamos $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\,[f(a) + (f(x) - f(a))]\\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a}\,[f(x) - f(a)]\\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en a. ▭

Nota: El recíproco del Teorema 4 es falso; esto es, hay funciones que son continuas pero no derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en 0 porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el Ejemplo 7 en la Sección 2.3.) Pero en el Ejemplo 6 demostramos que f no es derivable en 0.

¿Cómo no puede ser derivable una función?

Vimos que la función $y = |x|$ en el Ejemplo 6 no es derivable en 0 y la Figura 6(a) muestra que su gráfica cambia de dirección en forma abrupta cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene una "esquina" o "torcedura" en ella, entonces la gráfica de f no tiene tangente en este punto y f no es derivable ahí. [Al tratar de calcular $f'(a)$, encontramos que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El Teorema 4 da otra forma para que una función no tenga una derivada. Dice que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en a. Por tanto, en cualquier discontinuidad (por ejemplo, una discontinuidad de salto) f no es derivable.

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; esto es, f es continua en a y

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

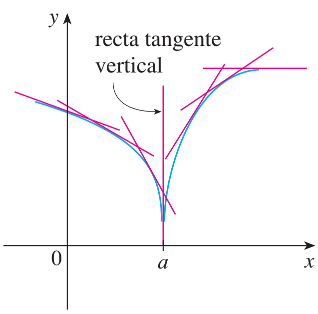
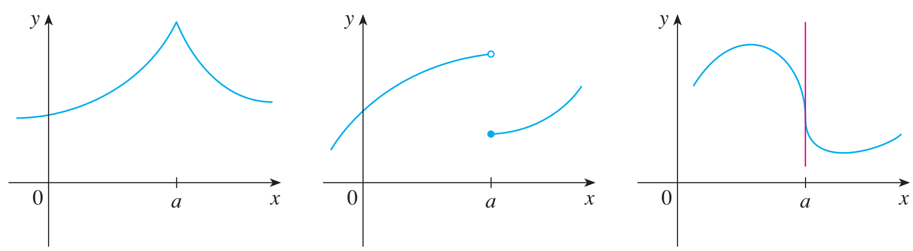


FIGURA 7

Esto significa que las rectas tangentes se hacen cada vez más empinadas cuando $x \to a$. La Figura 7 muestra una forma en que esto puede ocurrir; la Figura 8(c) muestra otra. La Figura 8 ilustra las tres posibilidades que hemos estudiado.



(a) Una esquina

(b) Una discontinuidad

(c) Una tangente vertical

FIGURA 8
Tres formas para que f no sea derivable en a

Una calculadora graficadora o computadora proporciona otra forma de ver una derivabilidad. Si f es derivable en a, entonces cuando hacemos un acercamiento (zoom) hacia el punto $(a, f(a))$ la gráfica se endereza y se parece cada vez más a una recta. (Véase la Figura 9. Ya estudiamos un ejemplo específico de esto en la Figura 2 de la Sección 2.6.) Pero sin importar cuánto acercamiento hagamos hacia un punto como los de las Figuras 7 y 8(a), no podemos eliminar el punto agudo o esquina (vea la Figura 10).

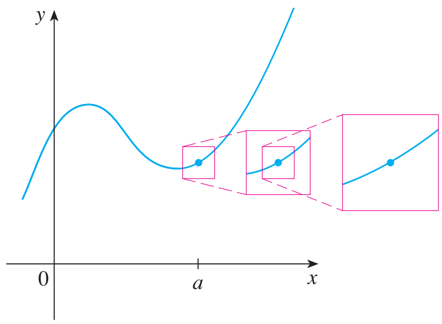


FIGURA 9
f es derivable en a.

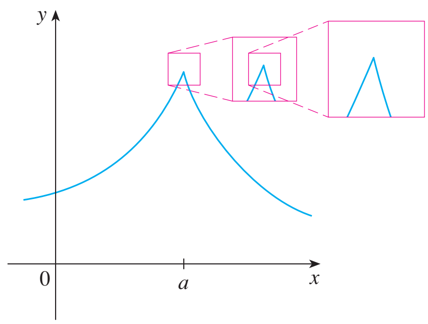


FIGURA10
f no es derivable en a.

Derivadas de orden superior

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, de modo que f' puede tener una derivada propia, denotada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Usando notación de Leibniz, escribimos la segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el Ejemplo 3 encontramos que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Entonces la segunda derivada es

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h) = 6x$$

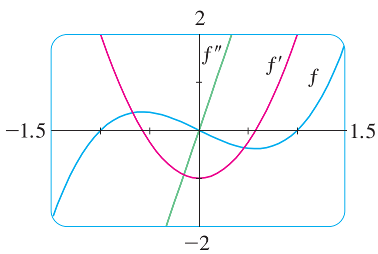


FIGURA 11

TEC En el Module 2.7 se puede ver cómo el cambio de los coeficientes de un polinomio f afecta el aspecto de las gráficas de f, f' y f''.

Las gráficas de f, f' y f'' se muestran en la Figura 11.

Podemos interpretar $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la rapidez de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la Figura 11 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. Por tanto, las gráficas sirven como comprobación de nuestros cálculos.

En general, podemos interpretar una segunda derivada como la rapidez de cambio de una rapidez de cambio. El ejemplo más conocido de esto es la *aceleración*, que definimos como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, sabemos que su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

La rapidez instantánea de cambio de velocidad con respecto al tiempo recibe el nombre de **aceleración** $a(t)$ del objeto. Entonces la función de aceleración es la derivada de la función de velocidad y es por lo tanto la segunda derivada de la función de posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o bien, en notación de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

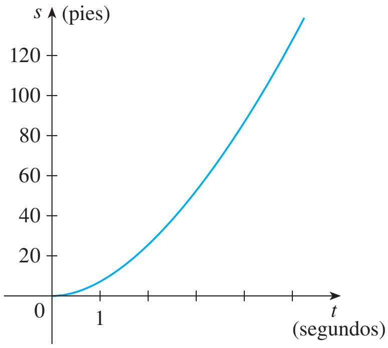


FIGURA 12
Función de posición de un auto

Las unidades de aceleración son pies por segundo por segundo, que se escribe como ft/s^2.

EJEMPLO 8 **Graficar velocidad y aceleración** Un auto arranca desde el reposo y la gráfica de su función de posición se muestra en la Figura 12, donde s se mide en pies y t en segundos. Úsela para graficar la velocidad y aceleración del auto. ¿Cuál es la aceleración en $t = 2$ segundos?

SOLUCIÓN Al medir la pendiente de la gráfica de $s = f(t)$ en $t = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5, y usando el método del Ejemplo 1, trazamos la gráfica de la función de velocidad $v = f'(t)$ en la Figura 13. La aceleración cuando $t = 2$ s es $a = f''(2)$, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f' cuando $t = 2$. Calculamos la pendiente de esta recta tangente como

$$a(2) = f''(2) = v'(2) \approx \tfrac{27}{3} = 9 \text{ ft/s}^2$$

Mediciones similares hacen posible que grafiquemos la función de aceleración en la Figura 14.

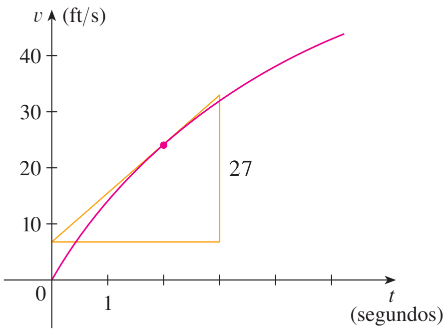


FIGURA 13
Función de velocidad

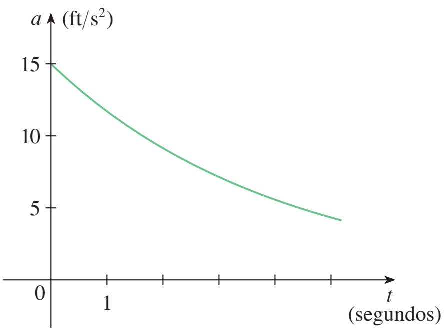


FIGURA 14
Función de aceleración

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Entonces $f'''(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la rapidez de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuarse. La cuarta derivada f'''' suele ser denotada por $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f está denotada por $f^{(n)}$ y se obtiene de f al derivar n veces. Si $y = f(x)$, escribimos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EJEMPLO 9 Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el Ejemplo 7 encontramos que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y por tanto es una recta con pendiente 6. Como la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, tenemos

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Entonces f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. Entonces, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

También podemos interpretar la tercera derivada físicamente en el caso donde la función es la función de posición $s = s(t)$ de un objeto que se mueve a lo largo de una recta.

Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función de posición es la derivada de la función de aceleración y se denomina **impulso**:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

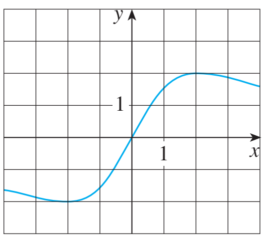
Entonces el impulso j es la rapidez de cambio de aceleración. Recibe adecuadamente ese nombre porque un impulso grande significa un cambio repentino en aceleración, que produce un movimiento abrupto en un vehículo.

Hemos visto que una aplicación de segunda y tercera derivadas se presenta al analizar el movimiento de objetos usando aceleración e impulso. Investigaremos otra aplicación de segundas derivadas en la Sección 2.8, donde demostramos en qué forma el conocimiento de f'' nos da información acerca de la forma de la gráfica de f. En el Capítulo 8 veremos cómo derivadas de segundo orden y de orden superior hacen posible que representemos funciones como sumas de series infinitas.

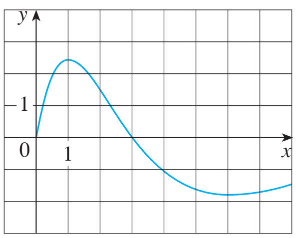
2.7 Ejercicios

1–2 Use la gráfica dada para estimar el valor de cada derivada. A continuación trace la gráfica de f'.

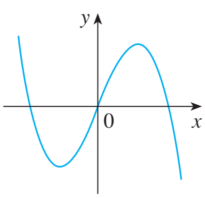
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

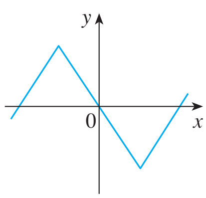


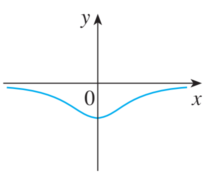
2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$
(g) $f'(6)$
(h) $f'(7)$

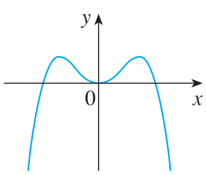


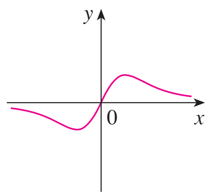
3. Relacione la gráfica de cada función en (a)–(d) con la gráfica de su derivada en I–IV. Justifique sus selecciones.

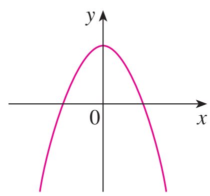
(a)


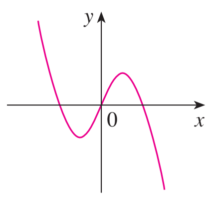
(b)


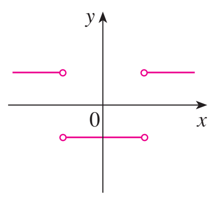
(c)


(d)


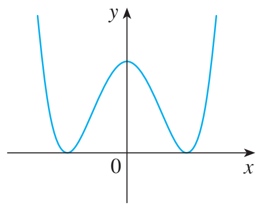
I


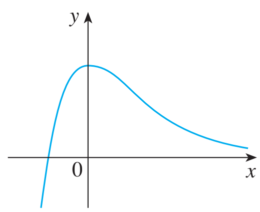
II


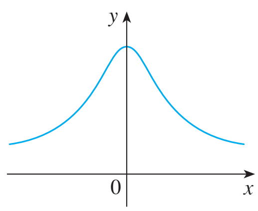
III


IV


4–11 Trace o copie la gráfica de la función f dada. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) A continuación use el método del Ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de ella.

4.


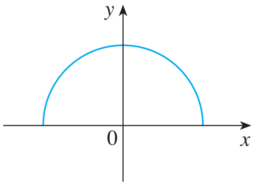
5.


6.


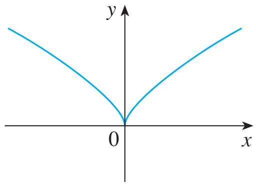
Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

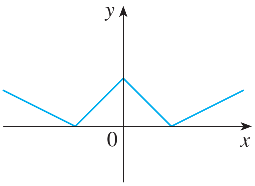
7.



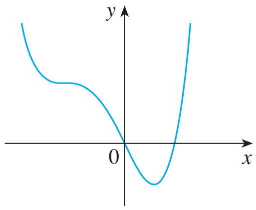
8.



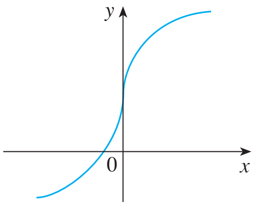
9.



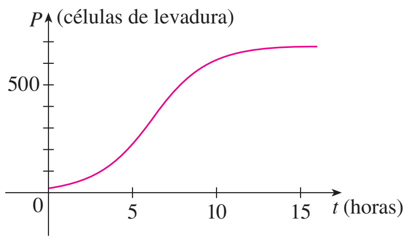
10.



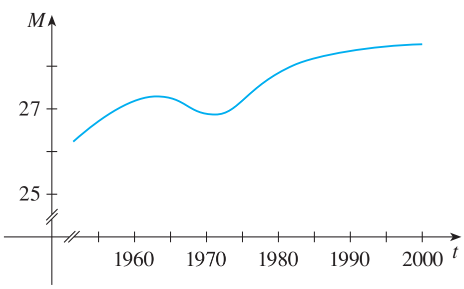
11.



12. Se muestra una gráfica de la función de población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio: Use el método del Ejemplo 1 para graficar la derivada $P'(t)$. ¿Qué nos dice la gráfica de P' acerca de la población de levadura?



13. La gráfica muestra cómo el promedio de edad del primer matrimonio de hombres japoneses varió en la primera mitad del siglo XX. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante qué años fue negativa la derivada?



14–16 Haga un cuidadoso dibujo de la gráfica de f y bajo ella trace la gráfica de f' en la misma forma que en el Ejercicio 4-11. ¿Puede idear una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

14. $f((x) = \text{sen } x$

15. $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

17. Sea $f(x) = x^2$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, y $f'(2)$ usando una calculadora graficadora para hacer acercamiento (zoom) en la gráfica de f.
(b) Use simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, y $f'(-2)$.
(c) Use los resultados de los incisos (a) y (b) para idear una fórmula para $f'(x)$.
(d) Use la definición de derivada para demostrar que su cálculo en el inciso (c) es correcto.

18. Sea $f(x) = x^3$.
(a) Calcule los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$, y $f'(3)$ usando una calculadora graficadora para hacer acercamiento (zoom) en la gráfica de f.
(b) Use simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$, y $f'(-3)$.
(c) Use los valores de los incisos (a) y (b) para graficar f'.
(d) Deduzca una fórmula para $f'(x)$.
(e) Use la definición de derivada para demostrar que su invento del inciso (d) es correcto.

19–29 Encuentre la derivada de la función usando la definición de derivada. Exprese el dominio de la función y el dominio de su derivada.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

20. $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$

22. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

23. $f(x) = x^2 - 2x^3$

24. $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$

28. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

29. $f(x) = x^4$

30–32 (a) Use la definición de derivada para calcular f'.
(b) Compruebe que su respuesta es razonable al comparar las gráficas de f y f'.

30. $f(x) = x + 1/x$

31. $f(x) = x^4 + 2x$

32. $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$

33. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla (fuente: Bureau of Labor Statistics) muestra el porcentaje de desempleados en la fuerza laboral de Estados Unidos de 1998 a 2007.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1998	4.5	2003	6.0
1999	4.2	2004	5.5
2000	4.0	2005	5.1
2001	4.7	2006	4.6
2002	5.8	2007	4.6

(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores estimados para $U'(t)$.

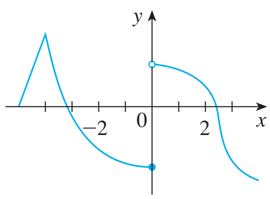
34. Sea $P(t)$ el porcentaje de estadounidenses de menos de 18 años en el tiempo t. La tabla siguiente muestra valores de esta función en años de censo de 1950 a 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

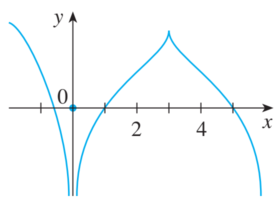
(a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores estimados para $P'(t)$.
(c) Grafique P y P'.
(d) ¿Cómo sería posible obtener valores más precisos para $P'(t)$?

35–38 Se da la gráfica de f. Exprese, con razones, los números en los que f no es derivable.

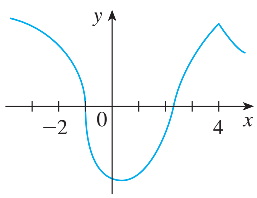
35.



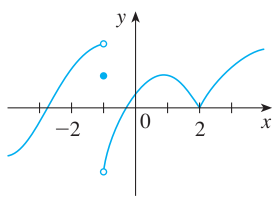
36.



37.



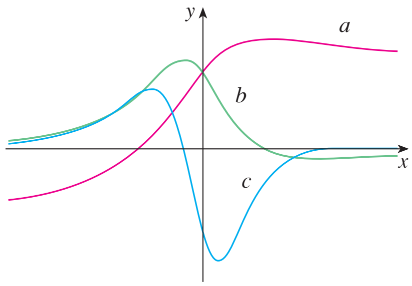
38.



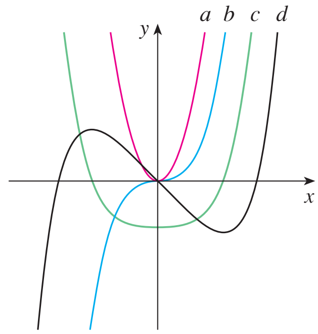
39. Grafique la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga un acercamiento (zoom) repetidamente, primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego hacia el origen. ¿Qué es diferente acerca del comportamiento de f en la cercanía de estos dos puntos? ¿Qué se concluye acerca de la derivabilidad de f?

40. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ en la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Qué se observa? Explique lo que vea en términos de la derivabilidad de g.

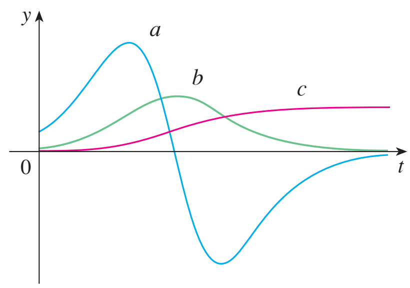
41. La figura muestra las gráficas de f, f' y f''. Identifique cada una de las curvas y explique sus selecciones.



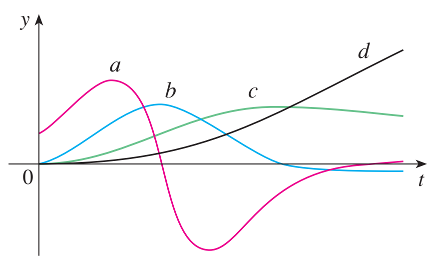
42. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada una de las curvas y explique sus selecciones.



43. La figura muestra las gráficas de tres funciones. Una es la función de posición de un auto, una es la velocidad del auto y una es su aceleración. Identifique cada una de las curvas y explique sus selecciones.



44. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones. Una es la función de posición de un auto, una es la velocidad del auto, una es su aceleración y una es su impulso. Identifique cada una de las curvas y explique sus selecciones.

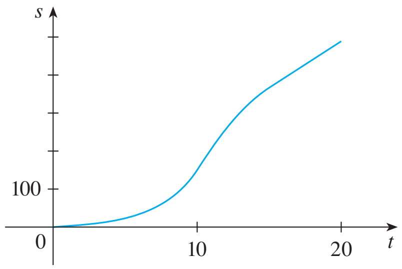


45–46 Use la definición de una derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Entonces grafique f, f' y f'' en una pantalla común y verifique si sus respuestas son razonables.

45. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **46.** $f(x) = x^3 - 3x$

47. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, encuentre $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Grafique f, f', f'' y f''' en una pantalla común. ¿Las gráficas son consistentes con las interpretaciones geométricas de estas derivadas?

48. (a) A continuación aparece la gráfica de una función de posición de un auto, donde s se mide en pies y t en segundos. Úsela para graficar la velocidad y aceleración del auto. ¿Cuál es la aceleración en $t = 10$ segundos?



(b) Use la curva de aceleración del inciso (a) para calcular el impulso en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del impulso?

49. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Si $a \neq 0$, use la Ecuación 2.6.5 para hallar $f'(a)$.
(b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
(c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0). (Recuerde la forma de la gráfica de f. Vea la Figura 13 en la Sección 1.2.)

50. (a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(x)$ no existe.
(b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
(c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0).
(d) Ilustre el inciso (c) graficando $y = x^{2/3}$.

51. Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

52. ¿En dónde no es derivable la función del entero máximo $f(x) = [\![x]\!]$? Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

53. Recuerde que una función f se denomina *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todas estas x. Demuestre cada uno de lo siguiente.
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

54. Cuando se abre una llave de agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo en que el agua haya estado corriendo.
(a) Trace una posible gráfica de T como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió la llave del agua.
(b) Describa la forma en que varía la rapidez de cambio de T con respecto a t cuando t aumenta.
(c) Trace la gráfica de la derivada de T.

55. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ forma con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ correcto al grado más cercano.

2.8 ¿Qué dice f' acerca de f?

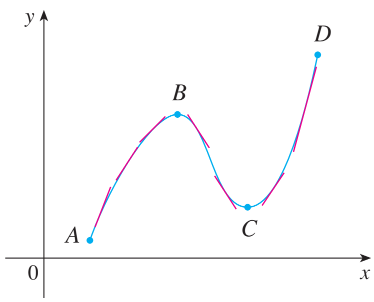


FIGURA 1

Muchas de las aplicaciones de cálculo dependen de nuestra capacidad para deducir datos acerca de una función f a partir de información respecto a sus derivadas. Debido a que $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, nos dice la dirección en la que la curva avanza en cada punto. Por tanto, es razonable esperar que la información acerca de $f'(x)$ nos dé información acerca de $f(x)$.

En particular, para ver la forma en que la derivada de f nos puede indicar en dónde es creciente o decreciente una función, observe la Figura 1. (Las funciones crecientes y las funciones decrecientes se definieron en la Sección 1.1.) Entre A y B y entre C y D, las rectas tangentes tienen pendiente positiva y por tanto $f'(x) > 0$. Entre B y C, las rectas tangentes tienen pendiente negativa y por tanto $f'(x) < 0$. Entonces se ve que f aumenta cuando $f'(x)$ es positiva y disminuye cuando $f'(x)$ es negativa.

Resulta, como veremos en el Capítulo 4, que lo que observamos para la función graficada en la Figura 1 es siempre verdadero. Expresamos el resultado general como sigue.

> Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.
>
> Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

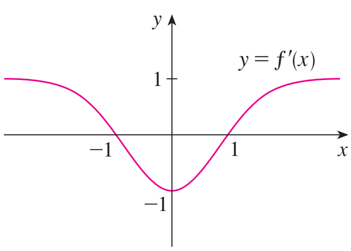


FIGURA 2

EJEMPLO 1 **Dada una gráfica de f', ¿cómo se ve f?**

(a) Si se sabe que la gráfica de la derivada f' de una función es como se muestra en la Figura 2, ¿qué podemos decir acerca de f?
(b) Si se sabe que $f(0) = 0$, trace una posible gráfica de f.

SOLUCIÓN

(a) Observamos de la Figura 2 que $f'(x)$ es negativa cuando $-1 < x < 1$, de modo que la función original f debe ser decreciente en el intervalo $(-1, 1)$. Del mismo modo, $f'(x)$ es positiva para $x < -1$ y para $x > 1$, por lo que f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$. También observe que, como $f'(-1) = 0$ y $f'(1) = 0$, la gráfica de f tiene tangentes horizontales cuando $x = \pm 1$.

(b) Usamos la información del inciso (a) y el hecho de que la gráfica pasa por el origen, para trazar una posible gráfica de f en la Figura 3. Observe que $f'(0) = -1$, de modo que hemos trazado la curva $y = f(x)$ que pasa por el origen con una pendiente de -1. Observe también que $f'(x) \to 1$ a medida que $x \to \pm\infty$ (de la Figura 2). Entonces la pendiente de la curva $y = f(x)$ se aproxima a 1 cuando x se hace grande (positiva o negativa). Ésta es la razón por la que hemos trazado la gráfica de f en la Figura 3 progresivamente más recta a medida que $x \to \pm\infty$.

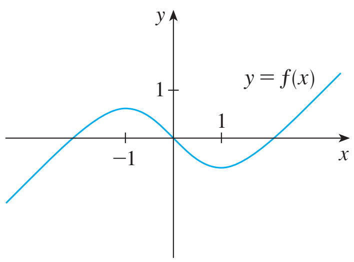


FIGURA 3

Decimos que la función f en el Ejemplo 1 tiene un **máximo local** en -1 porque cerca de $x = -1$ los valores de $f(x)$ son al menos tan grandes como los valores cercanos. Observe que $f'(x)$ es positiva a la izquierda de -1 y negativa justo a la derecha de -1. Análogamente, f tiene un **mínimo local** en 1, donde la derivada cambia de negativa a positiva. En el Capítulo 4 desarrollaremos estas observaciones en un método general para hallar valores óptimos de funciones.

¿Qué dice f'' acerca de f?

Veamos la forma en que el signo de $f''(x)$ afecta el aspecto de la gráfica de f. Como $f'' = (f')'$, sabemos que si $f''(x)$ es positiva, entonces f' es una función creciente. Esto dice que las pendientes de las rectas tangentes de la curva $y = f(x)$ aumentan de izquierda a derecha. La Figura 4 muestra la gráfica de esa función. La pendiente de esta curva se hace progresivamente más grande cuando x aumenta y observamos que, como consecuencia de esto, la curva se dobla hacia arriba. Esta curva recibe el nombre de **cóncava hacia arriba**. En la Figura 5, no obstante, $f''(x)$ es negativa, lo cual significa que f' es decreciente. Entonces las pendientes de f disminuyen de izquierda a derecha y la curva se dobla hacia abajo. Esta curva se denomina **cóncava hacia abajo**. Resumimos nuestro estudio como sigue. (La concavidad se estudia en más detalle en la Sección 4.3.)

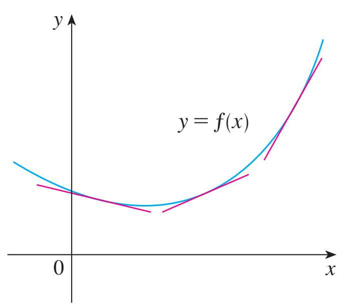


FIGURA 4
Como $f''(x) > 0$, las pendientes aumentan y f es cóncava hacia arriba.

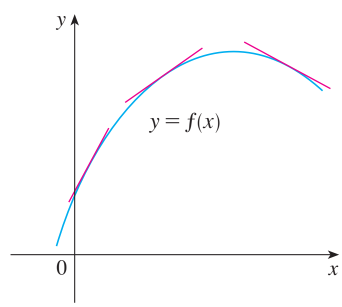


FIGURA 5
Como $f''(x) < 0$, las pendientes disminuyen y f es cóncava hacia abajo.

Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

EJEMPLO 2 La Figura 6 presenta una gráfica de población para abejas chipriotas criadas en un apiario. ¿Cómo cambia con el tiempo la rapidez de aumento poblacional? ¿Cuándo es máxima esta rapidez? ¿En qué intervalos P es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

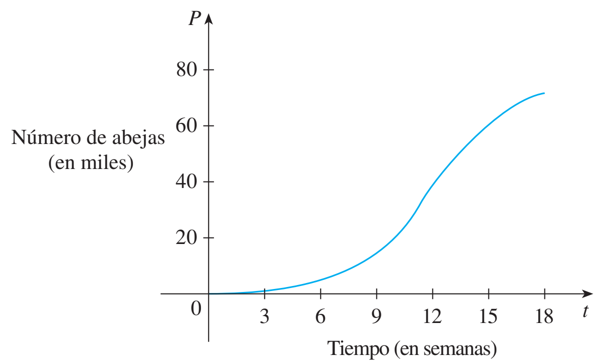


FIGURA 6

SOLUCIÓN Al observar la pendiente de la curva cuando t aumenta, vemos que la rapidez de aumento de la población es inicialmente muy pequeña, luego se hace más grande hasta que alcanza un máximo en alrededor de $t = 12$ semanas y disminuye cuando la población empieza a nivelarse. Cuando la población se aproxima a su valor máximo de unos 75,000 (llamada *capacidad de carga*), la rapidez de aumento, $P'(t)$, se aproxima a 0. La curva parece ser cóncava hacia arriba en (0, 12) y cóncava hacia abajo en (12, 18).

En el Ejemplo 2, la curva poblacional cambió de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en aproximadamente el punto (12, 38,000). Este punto se denomina *punto de inflexión* de la curva. La importancia de este punto es que la rapidez de aumento poblacional tiene ahí su valor máximo. En general, un **punto de inflexión** es un punto donde una curva cambia su dirección de concavidad.

V EJEMPLO 3 Trazado de f, dado el conocimiento acerca de f' y f'' Trace una posible gráfica de una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

(i) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ en $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

SOLUCIÓN La condición (i) nos dice que f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$. La condición (ii) dice que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$. De la condición (iii) sabemos que la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales: $y = -2$ y $y = 0$.

Primero trazamos la asíntota horizontal $y = -2$ como una línea interrumpida (vea la Figura 7). A continuación trazamos la gráfica de f aproximándose a esta asíntota en la extrema izquierda, creciendo a su punto máximo en $x = 1$ y decreciendo hacia el eje x en $x \to \infty$. También asegúrese que la gráfica tenga puntos de inflexión cuando $x = -2$ y 2. Observe que la curva se dobla hacia arriba para $x < -2$ y $x > 2$, y se dobla hacia abajo cuando x es entre -2 y 2.

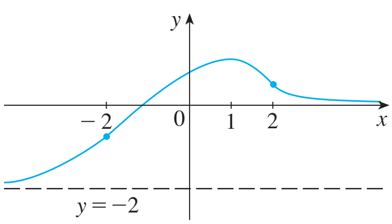


FIGURA 7

Antiderivadas

En numerosos problemas en matemáticas y sus aplicaciones, nos dan una función f y nos piden hallar una función F cuya derivada sea f. Si existe esa función F, la llamamos *antiderivada* de f. En otras palabras, una **antiderivada** de f es una función F tal que $F' = f$. (En el Ejemplo 1 trazamos una antiderivada f de la función f'.)

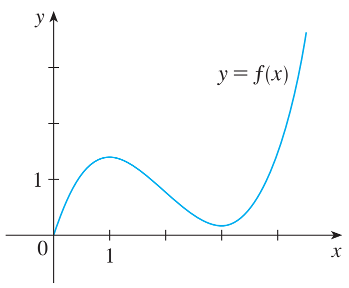


FIGURA 8

EJEMPLO 4 **Trazado de una antiderivada** Sea F una antiderivada de la función f cuya gráfica se muestra en la Figura 8.

(a) ¿Dónde es F creciente o decreciente?

(b) ¿Dónde es F cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

(c) ¿En qué valores de x tiene F un punto de inflexión?

(d) Si $F(0) = 1$, trace la gráfica de F.

(e) ¿Cuántas antiderivadas tiene f?

SOLUCIÓN

(a) Vemos de la Figura 8 que $f(x) > 0$ para toda $x > 0$. Como F es una antiderivada de f, tenemos $F'(x) = f(x)$ y por tanto $F'(x)$ es positiva cuando $x > 0$. Esto significa que F es creciente en $(0, \infty)$.

(b) F es cóncava hacia arriba cuando $F''(x) > 0$. Pero $F''(x) = f'(x)$, y F es cóncava hacia arriba cuando $f'(x) > 0$, es decir, cuando f es creciente. De la Figura 8 vemos que f es creciente cuando $0 < x < 1$ y cuando $x > 3$. Por tanto, F es cóncava hacia arriba en $(0, 1)$ y $(3, \infty)$. F es cóncava hacia abajo cuando $F''(x) = f'(x) < 0$, esto es, cuando f sea decreciente. Entonces F es cóncava hacia abajo en $(1, 3)$.

(c) F tiene un punto de inflexión cuando cambia la dirección de concavidad. Del inciso (b) sabemos que F cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en $x = 1$, por lo cual F tiene ahí un punto de inflexión. F cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba cuando $x = 3$ y F tiene otro punto de inflexión cuando $x = 3$.

(d) Al trazar la gráfica de F, usamos la información de los incisos (a), (b) y (c). Pero, para detalles más finos, también tenemos en mente el significado de una antiderivada: Debido a que $F'(x) = f(x)$, la pendiente de $y = F(x)$ en cualquier valor de x es igual a la altura de $y = f(x)$. (Desde luego, éste es el opuesto exacto del procedimiento que empleamos en el Ejemplo 1 en la Sección 2.7 para trazar una derivada.)

Por lo tanto, como $f(0) = 0$, empezamos por trazar la gráfica de F en el punto dado $(0, 1)$ con pendiente 0, siempre creciente, con concavidad hacia arriba a $x = 1$, concavidad hacia abajo a $x = 3$, y concavidad hacia arriba cuando $x > 3$. (Vea Figura 9.) Observe que $f(3) \approx 0.2$, de modo que $y = F(x)$ tiene una suave pendiente en el segundo punto de inflexión. Pero vemos que la pendiente se hace más pronunciada cuando $x > 3$.

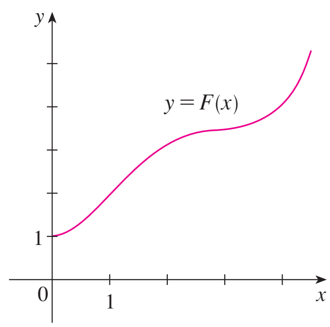


FIGURA 9
Una antiderivada de f

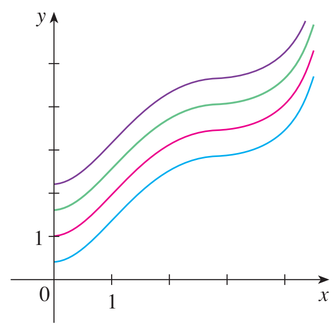


FIGURA 10
Miembros de la familia de antiderivadas de f

(e) La antiderivada de f que trazamos en la Figura 9 satisface $F(0) = 1$, por lo cual su gráfica se inicia en el punto $(0, 1)$. Pero hay muchas otras antiderivadas, cuyas gráficas se inician en otros puntos en el eje y. De hecho, f tiene un número infinito de antiderivadas; sus gráficas se obtienen de la gráfica de F al desplazarse hacia arriba o hacia abajo como en la Figura 10.

2.8 Ejercicios

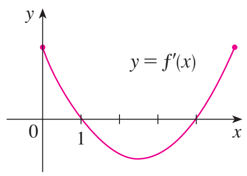
1–4 Se muestra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.

(a) ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Y decreciente?

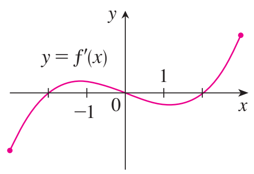
(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿Y un mínimo local?

(c) Si se sabe que $f(0) = 0$, trace una posible gráfica de f.

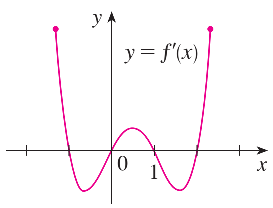
1.



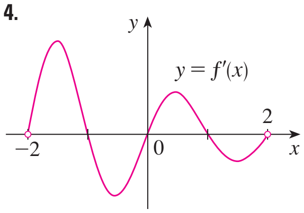
2.



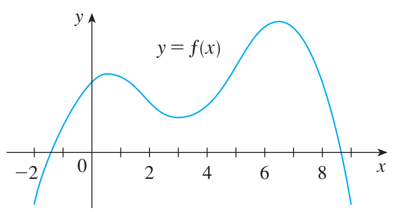
3.



4.

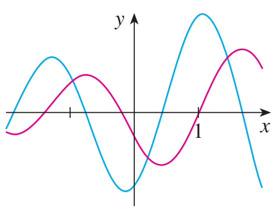


5. Use la gráfica dada de f para calcular los intervalos en los que la derivada f' es creciente o decreciente.

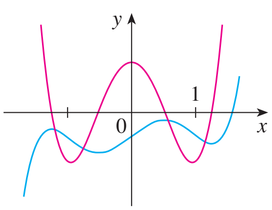


6–7 Se muestran las gráficas de una función f y su derivada f'. ¿Cuál es mayor, $f'(-1)$ o $f''(1)$?

6.



7.



8. (a) Trace una curva cuya pendiente sea siempre positiva y creciente.

(b) Trace una curva cuya pendiente sea siempre positiva y decreciente.

(c) Dé ecuaciones para curvas con estas propiedades.

9. El presidente anuncia que el déficit nacional es creciente, pero a un ritmo decreciente. Interprete esta frase en términos de una función y sus derivadas.

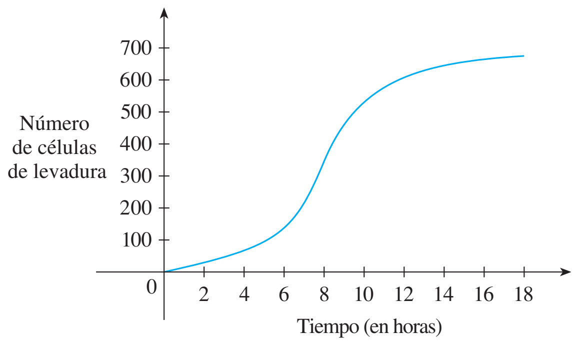
10. En la figura siguiente se muestra una gráfica de una población de células de levadura en un nuevo cultivo de laboratorio, como función del tiempo.

(a) Describa cómo varía la rapidez de aumento de población.

(b) ¿Cuándo es máxima esta rapidez?

(c) ¿En qué intervalos es cóncava hacia arriba o hacia abajo la función de población?

(d) Estime las coordenadas del punto de inflexión.



11. La tabla siguiente muestra densidades de población para faisanes de cuello anillado (en número de faisanes por acre) en la isla Pelee, Ontario.

(a) Describa cómo varía la rapidez de cambio de población.

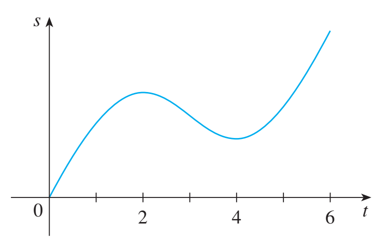
(b) Estime los puntos de inflexión de la gráfica. ¿Cuál es la importancia de estos puntos?

t	1927	1930	1932	1934	1936	1938	1940
$P(t)$	0.1	0.6	2.5	4.6	4.8	3.5	3.0

12. Una partícula se está moviendo a lo largo de una recta horizontal. Se muestra la gráfica de su función de posición (la distancia a la derecha de un punto fijo como función del tiempo).

(a) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia la derecha y cuándo se mueve hacia la izquierda?

(b) ¿Cuándo es que la partícula tiene aceleración positiva y cuándo tiene aceleración negativa?



13. Sea $K(t)$ una medida del conocimiento obtenido al estudiar para un examen durante t horas. ¿Cuál piensa usted que es mayor, $K(8) - K(7)$ o $K(3) - K(2)$? ¿La gráfica de K es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? ¿Por qué?

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

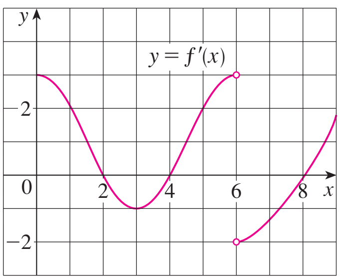
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

14. Se vierte café en el tarro que se muestra en la figura, a un ritmo constante (medido en volumen por unidad de tiempo). Trace una gráfica aproximada de la profundidad del café en el tarro como función del tiempo. Explique la forma de la gráfica en términos de concavidad. ¿Cuál es la importancia del punto de inflexión?

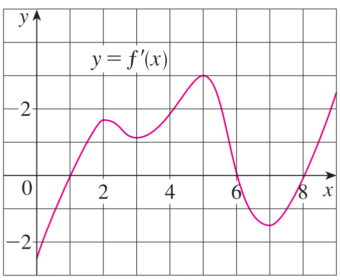
15–16 A continuación se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.

(a) ¿En qué intervalos es f creciente? ¿Y decreciente?
(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? ¿Y mínimo local?
(c) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba? ¿Y cóncava hacia abajo?
(d) Exprese la(s) coordenada(s) del (los) punto(s) de inflexión.
(e) Suponiendo que $f(0) = 0$, trace una gráfica de f.

15.



16.



17. Trace la gráfica de una función cuya primera y segunda derivadas son siempre negativas.

18. Trace la gráfica de una función cuya primera derivada es siempre negativa y cuya segunda derivada es siempre positiva.

19–24 Trace la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones dadas.

19. $f'(0) = f'(4) = 0, \quad f'(x) > 0$ si $x < 0$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 4$ o si $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $2 < x < 4, \quad f''(x) < 0$ si $x < 2$ o $x > 4$

20. $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 1$, asíntota vertical $x = 1$,
$f''(x) > 0$ si $x < 1$ o $x > 3, \quad f''(x) < 0$ si $1 < x < 3$

21. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 3, \quad f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

22. $f'(1) = f'(-1) = 0, \quad f'(x) < 0$ si $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ si $1 < |x| < 2, \quad f'(x) = -1$ si $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0$, punto de inflexión $(0, 1)$

23. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2, \quad f'(x) < 0$ si $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0, \quad \lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty, \quad f''(x) > 0$ si $x \neq 2$

24. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2, \quad f'(x) < 0$ si $|x| > 2$,
$f'(2) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1, \quad f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ si $0 < x < 3, \quad f''(x) > 0$ si $x > 3$

25. Suponga que $f'(x) = xe^{-x^2}$.
(a) ¿En qué intervalo es f creciente? ¿En qué intervalo es f decreciente?
(b) ¿Tiene f un valor máximo? ¿Y un valor mínimo?

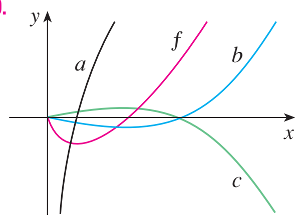
26. Si $f'(x) = e^{-x^2}$, ¿qué se puede decir acerca de f?

27. Sea $f(x) = x^3 - x$. En los Ejemplos 3 y 7 de la Sección 2.7, demostramos que $f'(x) = 3x^2 - 1$ y $f''(x) = 6x$. Use estos datos para hallar lo siguiente.
(a) Los intervalos en los que f es creciente o decreciente.
(b) Los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
(c) El punto de inflexión de f.

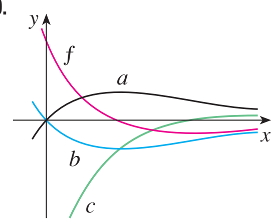
28. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2$.
(a) Use la definición de una derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) ¿En qué intervalos es f creciente o decreciente?
(c) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

29–30 A continuación se muestra la gráfica de una función f. ¿Cuál gráfica es una antiderivada de f y por qué?

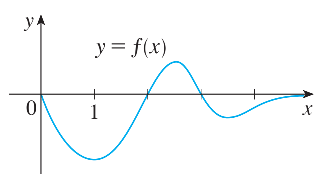
29.



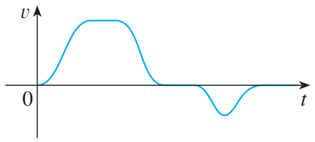
30.



31. La gráfica de una función se muestra en la figura. Haga un trazo aproximado de una antiderivada F, dado que $F(0) = 1$.



32. En la figura se muestra la gráfica de la función de velocidad de una partícula. Trace la gráfica de una función de posición.



33–34 Trace una gráfica de f y úsela para hacer un trazo aproximado de la antiderivada que pasa por el origen.

33. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

34. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

2 Repaso

Verificación de conceptos

1. Explique lo que significa cada uno de lo siguiente e ilustre con un diagrama.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en las que un límite puede no existir. Ilustre con diagramas.

3. Exprese las siguientes Leyes de los Límites.
(a) Ley de Suma (b) Ley de la Diferencia
(c) Ley del Múltiplo Constante (d) Ley del Producto
(e) Ley del Cociente (f) Ley de una Potencia
(g) Ley de una Raíz

4. ¿Qué dice el Teorema de Compresión?

5. (a) ¿Qué significa decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
(b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuál de las siguientes curvas tiene asíntotas verticales? ¿Cuáles tienen asíntotas horizontales?
(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$
(c) $y = \tan x$ (d) $y = e^x$
(e) $y = \ln x$ (f) $y = 1/x$
(g) $y = \sqrt{x}$

7. (a) ¿Qué significa para f ser continua en a?
(b) ¿Qué significa para f ser continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de esa función?

8. ¿Qué dice el Teorema del Valor Intermedio?

9. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

10. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una recta con posición $f(t)$ en el tiempo t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea del objeto en el tiempo $t = a$. ¿Cómo se puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

11. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.
(a) El promedio de rapidez de cambio de y con respecto a x sobre el intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) La rapidez instantánea de cambio de y con respecto a x en $x = x_1$.

12. Defina la derivada $f'(a)$. Discuta dos formas de interpretar este número.

13. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo se puede interpretar la segunda derivada?

14. (a) ¿Qué significa para f ser derivable en a?
(b) ¿Cuál es la relación entre la derivabilidad y continuidad de una función?
(c) Trace la gráfica de una función que sea continua pero no derivable en $a = 2$.

15. Describa varias formas en las que una función pueda no ser derivable. Ilustre con diagramas.

16. (a) ¿Qué nos dice el signo de $f'(x)$ acerca de f?
(b) ¿Qué nos dice el signo de $f''(x)$ acerca de f?

17. (a) Defina una antiderivada de f.
(b) ¿Cuál es la antiderivada de una función de velocidad? ¿Cuál es la antiderivada de una función de aceleración?

Preguntas de verdadero-falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $\lim_{x \to 4} \left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4} \right) = \lim_{x \to 4} \frac{2x}{x-4} - \lim_{x \to 4} \frac{8}{x-4}$

2. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{\lim_{x \to 1} (x^2 + 6x - 7)}{\lim_{x \to 1} (x^2 + 5x - 6)}$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 4} = \frac{\lim_{x \to 1} (x - 3)}{\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x - 4)}$

4. Si $\lim_{x \to 5} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to 5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

5. Si $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to 5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

6. Si $\lim_{x \to 6} [f(x)g(x)]$ existe, entonces el límite debe ser $f(6)g(6)$.

7. Si p es polinomial, entonces $\lim_{x \to b} p(x) = p(b)$.

8. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)] = 0$.

9. Una función puede tener dos asíntotas horizontales diferentes.

10. Si f tiene dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal, entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

11. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

12. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

13. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x \to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

14. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

15. Si f es continua en a, entonces f es derivable en a.

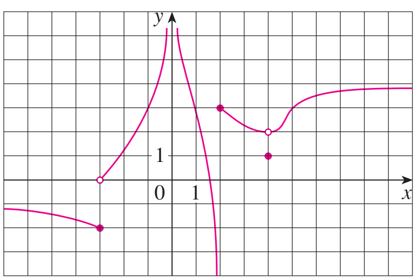
16. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x \to r} f(x) = f(r)$.

17. $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$

18. Si $f(x) > 1$ para toda x y $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x \to 0} f(x) > 1$.

Ejercicios

1. La gráfica de f está dada.
   (a) Encuentre cada límite, o explique por qué no existe.
   (i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$
   (iii) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to 4} f(x)$
   (v) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$
   (vii) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
   (b) Exprese las ecuaciones de las asíntotas horizontales.
   (c) Exprese las ecuaciones de las asíntotas verticales.
   (d) ¿En qué números es f discontinua? Explique.



2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las siguientes condiciones:
   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$,
   $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$,
   f es continua por la derecha en 3

3–18 Encuentre el límite.

3. $\lim_{x \to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h \to 0} \frac{(h - 1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r \to 9} \frac{\sqrt{r}}{(r - 9)^4}$

10. $\lim_{v \to 4^+} \frac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{u \to 1} \frac{u^4 - 1}{u^3 + 5u^2 - 6u}$

12. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 6} - x}{x^3 - 3x^2}$

13. $\lim_{x \to \pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

14. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 2x^2 - x^4}{5 + x - 3x^4}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{x-x^2}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$

19–20 Use gráficas para descubrir las asíntotas de la curva. A continuación demuestre lo que haya descubierto.

19. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

20. $y = \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}$

21. Si $2x-1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

22. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

23. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3-x & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada límite, si existe.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) ¿Dónde es f discontinua?

(c) Trace la gráfica de f.

24. Demuestre que cada función es continua en su dominio. Exprese el dominio.

(a) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$ (b) $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

25–26 Use el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que hay una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

25. $2x^3 + x^2 + 2 = 0, \quad (-2, -1)$

26. $e^{-x^2} = x, \quad (0, 1)$

27. El desplazamiento (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta está dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, donde t se mide en segundos.

(a) Encuentre el promedio de velocidad en cada periodo.

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$

(iii) $[1, 1.5]$ (iv) $[1, 1.1]$

(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

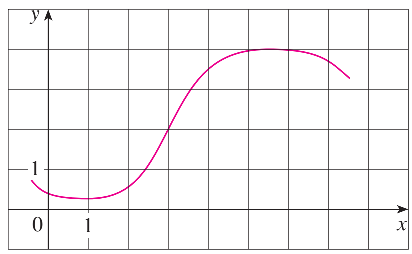
28. De acuerdo con la Ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V se mide en pulgadas cúbicas.

(a) Encuentre el promedio de rapidez de cambio de P cuando V aumenta de 200 in^3 a 250 in^3.

(b) Exprese V como una función de P y demuestre que la rapidez instantánea de cambio de V con respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de P.

29. Para la función f cuya gráfica se muestra, forme los siguientes números en orden creciente:

$$0 \qquad 1 \qquad f'(2) \qquad f'(3) \qquad f'(5) \qquad f''(5)$$



30. (a) Use la definición de una derivada para hallar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$.

(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto $(2, 4)$.

(c) Ilustre el inciso (b) al graficar la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

31. (a) Si $f(x) = e^{-x^2}$, calcule el valor de $f'(1)$ gráfica y numéricamente.

(b) Encuentre una ecuación aproximada de la recta tangente a la curva $y = e^{-x^2}$ en el punto donde $x = 1$.

(c) Ilustre el inciso (b) al graficar la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

32. Encuentre una función f y un número a tales que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

33. El costo total de reembolsar un préstamo de un estudiante, a una tasa de interés de r% por año, es $C = f(r)$.

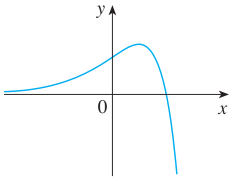
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿Qué significa el enunciado $f'(10) = 1200$?

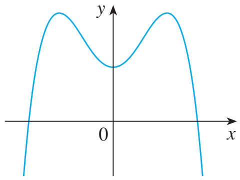
(c) ¿Es $f'(r)$ siempre positiva o cambia de signo?

34–36 Trace o copie la gráfica de la función. A continuación trace una gráfica de su derivada directamente bajo ella.

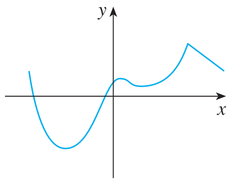
34.



35.



36.



37. (a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use la definición de una derivada para hallar $f'(x)$.

(b) Encuentre los dominios de f y f'.

(c) Grafique f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso (a) es razonable.

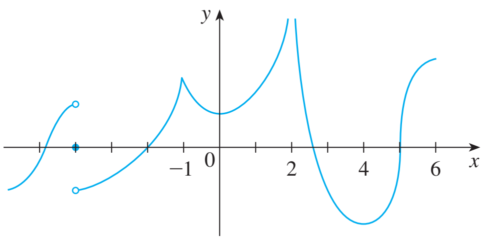
38. (a) Encuentre las asíntotas de la gráfica de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ y úselas para trazar la gráfica.

(b) Use su gráfica del inciso (a) para trazar la gráfica de f'.

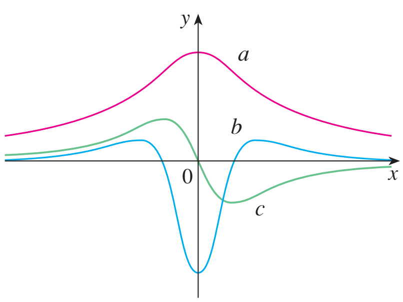
(c) Use la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.

(d) Use una calculadora graficadora para graficar f' y compare su dibujo en el inciso (b).

39. Se muestra la gráfica de f. Exprese, con razones, los números en los que f no es derivable.



40. La figura muestra las gráficas de f, f' y f''. Identifique cada curva y explique sus selecciones.



41. Sea $C(t)$ el valor total del dinero de Estados Unidos (monedas y billetes) en circulación en el tiempo t. La tabla muestra valores de esta función de 1980 a 2000, al 30 de septiembre, en miles de millones de dólares. Interprete y estime el valor de $C'(1990)$.

t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

42. El costo de vivienda continúa en aumento, pero a un paso más lento. En términos de una función y sus derivadas, ¿qué significa este enunciado?

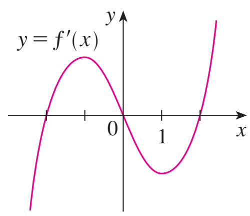
43. A continuación se muestra la gráfica de la *derivada* f' de una función.

(a) ¿En qué intervalos es f creciente o decreciente?

(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo local o un mínimo local?

(c) ¿Dónde es f cóncava hacia arriba o hacia abajo?

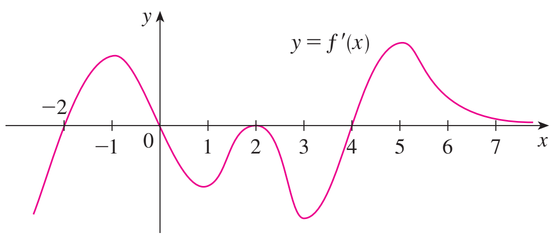
(d) Si $f(0) = 0$, trace una posible gráfica de f.



44. La figura muestra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.

(a) Trace la gráfica de f''.

(b) Trace una posible gráfica de f.



45. Trace la gráfica de una función que satisfaga las condiciones dadas:

$f(0) = 0, \quad f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0,$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 6} f(x) = -\infty,$

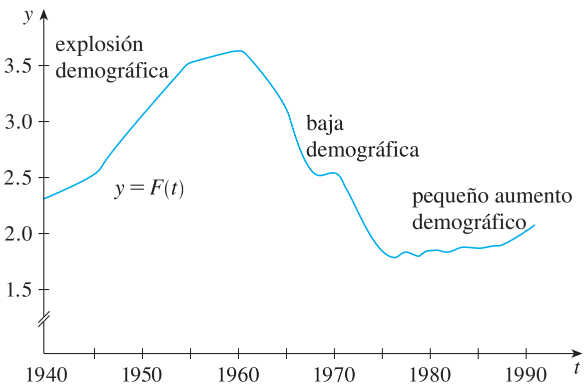
$f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$, $(1, 6)$ y $(9, \infty)$,

$f'(x) > 0$ en $(-2, 1)$ y $(6, 9)$,

$f''(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y $(12, \infty)$,

$f''(x) < 0$ en $(0, 6)$ y $(6, 12)$

46. La *tasa total de fertilidad* en el tiempo t, denotada como $F(t)$, es una estimación del número promedio de hijos nacidos a cada mujer (suponiendo que permanezcan constantes las tasas de natalidad actuales). La gráfica de la tasa total de fertilidad en Estados Unidos muestra las fluctuaciones de 1940 a 1990.
(a) Calcule los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.
(b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?
(c) ¿Puede usted sugerir razones para los valores de estas derivadas?

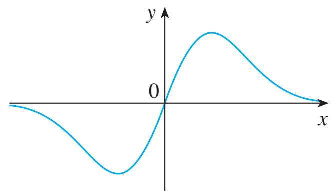


47. Un auto arranca desde el reposo y se registra su distancia recorrida en la tabla en intervalos de 2 segundos.

t (s)	s (ft)	t (s)	s (ft)
0	0	8	180
2	8	10	260
4	40	12	319
6	95	14	373

(a) Estime la velocidad después de 6 segundos.
(b) Estime las coordenadas del punto de inflexión de la gráfica de la función de posición.
(c) ¿Cuál es la importancia del punto de inflexión?

48. Se muestra a continuación la gráfica de una función. Trace la gráfica de una antiderivada F, dado que $F(0) = 0$.



Principios de resolución de problemas

En nuestro análisis de los principios de resolución de problemas consideramos la estrategia de *introducir algo extra* (vea página 83). En el siguiente ejemplo demostramos cómo este principio a veces es útil cuando evaluamos límites. La idea es cambiar la variable, para introducir una nueva variable que esté relacionada con la variable original, en forma tal que haga más sencillo el problema. Más adelante, en la Sección 5.5, haremos un uso más amplio de esta idea general.

EJEMPLO 1 Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, donde c es una constante.

SOLUCIÓN Como se ve, este límite parece ser difícil. En la Sección 2.3 evaluamos varios límites en los que tanto el numerador como el denominador se aproximaban a 0. Ahí nuestra estrategia fue efectuar algún tipo de manipulación algebraica que llevó a una cancelación simplificadora, pero aquí no está claro qué clase de álgebra es necesaria.

Por lo tanto, introducimos una nueva variable t con la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

También necesitamos expresar x en términos de t, de modo que resolvemos esta ecuación:

$$t^3 = 1 + cx \qquad x = \frac{t^3 - 1}{c} \quad (\text{si } c \neq 0)$$

Observe que $x \to 0$ es equivalente a $t \to 1$. Esto nos permite convertir el límite dado en uno que contenga la variable t:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} \end{aligned}$$

El cambio de variable nos permitió sustituir un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya hemos visto antes. Factorizando el denominador como una diferencia de cubos, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3} \end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable no tuvimos que excluir el caso $c = 0$. Pero si $c = 0$, la función es 0 para toda x diferente de cero y por lo tanto su límite es 0. Entonces, en todos los casos, el límite es $c/3$.

Antes de ver el Ejemplo 2, cubra la solución y trate de resolverlo primero.

EJEMPLO 2 ¿Cuántas rectas son tangentes a las parábolas $y = -1 - x^2$ y $y = 1 + x^2$? Encuentre las coordenadas de los puntos en los que estas tangentes tocan las parábolas.

SOLUCIÓN Para aumentar nuestro conocimiento de este problema es esencial trazar un diagrama. Dibujamos entonces las parábolas $y = 1 + x^2$ (que es la parábola estándar $y = x^2$ desplazada 1 unidad hacia arriba) y $y = -1 - x^2$ (que se obtiene al reflejar la primera parábola alrededor del eje x). Si tratamos de dibujar una recta tangente a ambas parábolas, pronto descubrimos que hay sólo dos posibilidades, como se ilustra en la Figura 1.

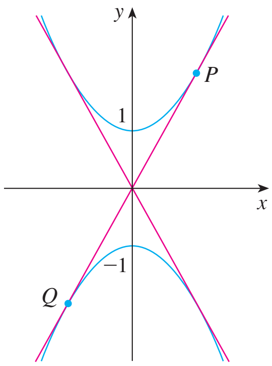


FIGURA 1

Sea P un punto en el que una de estas tangentes toca la parábola superior y sea a su coordenada x. (La selección de notación para la incógnita es importante. Desde luego que podríamos haber empleado b o c o x_0 o x_1 en lugar de a, pero no es aconsejable usar x en lugar de a porque esa x podría confundirse con la variable x de la ecuación de la parábola.) Entonces, como P se encuentra en la parábola $y = 1 + x^2$, su coordenada y debe ser $1 + a^2$. Por la simetría que se muestra en la Figura 1, las coordenadas del punto Q donde la tangente toca la parábola inferior debe ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar la información dada de que la recta es una tangente, igualamos la pendiente de la recta PQ con la pendiente de la recta tangente en P. Tenemos

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Si $f(x) = 1 + x^2$, entonces la pendiente de la recta tangente en P es $f'(a)$. Usando la definición de la derivada como en la Sección 2.6, encontramos que $f'(a) = 2a$. Entonces la condición que necesitamos usar es que

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos $1 + a^2 = 2a^2$, de modo que $a^2 = 1$ y $a = \pm 1$. Entonces, los puntos son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. Por simetría, los dos puntos restantes son $(-1, 2)$ y $(1, -2)$.

Los problemas siguientes tienen la intención de examinar y desafiar sus tácticas de resolución de problemas. Algunos de ellos requieren un tiempo considerable para pensarlos, de manera que no se desanime si no puede resolverlos de inmediato. Si se queda atorado, podría encontrar que es útil consultar la exposición de los principios de resolución de problemas de la página 83.

Problemas

1. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encuentre los números a y b tales que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

3. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

4. La figura muestra un punto P en la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde el bisector perpendicular de OP interseca el eje y. Cuando P se aproxima al origen a lo largo de la parábola, ¿qué ocurre a Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

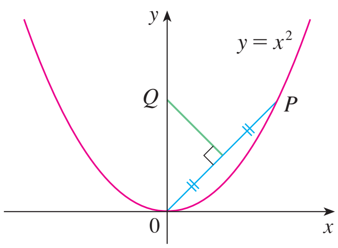


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

5. Si $[\![x]\!]$ denota la máxima función entera, encuentre $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{[\![x]\!]}$.

6. Trace la región del plano definido por cada una de las siguientes ecuaciones.

(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c; permanece fija.)

(a) Trace la gráfica de una función continua con dominio $[0, 1]$ cuyo intervalo también está en $[0, 1]$. Localice un punto fijo de f.

(b) Trate de dibujar la gráfica de una función continua con dominio $[0, 1]$ e intervalo $[0, 1]$ que *no tenga* un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?

(c) Use el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que cualquier función continua con dominio $[0, 1]$ y ramgo en $[0, 1]$ debe tener un punto fijo.

9. (a) Si partimos de la latitud 0° y avanzamos en dirección al oeste, podemos denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo determinado. Suponiendo que T es una función continua de x, demuestre que en cualquier tiempo fijo hay al menos dos puntos diametralmente opuestos en la ecuación que tengan exactamente la misma temperatura.

(b) ¿El resultado del inciso (a) se cumple para puntos que se encuentren en cualquier círculo de la superficie terrestre?

(c) ¿El resultado del inciso (a) se cumple para presión barométrica y para altitud sobre el nivel del mar?

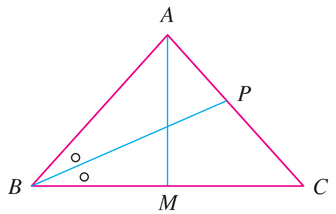


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

10. (a) La figura muestra un triángulo isósceles ABC con $\angle B = \angle C$. El bisector del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija pero la altitud $|AM|$ del triángulo se aproxima a 0, de manera que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué pasa al punto P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

(b) Trate de dibujar la trayectoria trazada por P durante este proceso. A continuación encuentre una ecuación de esta curva y use esta ecuación para trazar la curva.

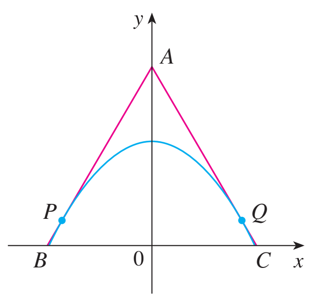


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

11. Encuentre los puntos P y Q en la parábola $y = 1 - x^2$ para que el triángulo ABC formado por el eje x y las rectas tangentes en P y Q sea un triángulo equilátero. (Vea la figura.)

12. Está entrando agua con un flujo constante en un tanque esférico. Sea $V(t)$ el volumen de agua en el tanque y $H(t)$ la altura del agua en el tanque en el tiempo t.

(a) ¿Cuáles son los significados de $V'(t)$ y $H'(t)$? ¿Estas derivadas son positivas, negativas o cero?

(b) ¿Es $V''(t)$ positivo, negativo o cero? Explique.

(c) Sean t_1, t_2 y t_3 los tiempos cuando el tanque está lleno a un cuarto, lleno a la mitad y lleno a tres cuartos de su capacidad, respectivamente. ¿Los valores de $H''(t_1)$, $H''(t_2)$ y $H''(t_3)$ son positivos, negativos o cero? ¿Por qué?

13. Suponga que f es una función que satisface la ecuación

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos los números reales x y y. Suponga también que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encuentre $f(0)$. (b) Encuentre $f'(0)$. (c) Encuentre $f'(x)$.

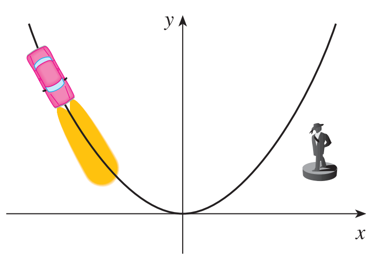


FIGURA PARA EL PROBLEMA 14

14. Un auto está moviéndose de noche a lo largo de una carretera en forma de parábola con su vértice en el origen. El auto arranca en un punto a 100 m al oeste y 100 m al norte del origen y se desplaza en dirección al este. Hay una estatua situada a 100 m al este y 50 m al norte del origen. ¿En qué punto en la carretera las luces del auto iluminarán la estatua?

15. Si $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encuentre $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$.

16. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$, use la definición de una derivada para demostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

17. Suponga que f es una función con la propiedad de que $|f(x)| \leq x^2$ para toda x. Demuestre que $f(0) = 0$. A continuación demuestre que $f'(0) = 0$.

thomasmayerarchive.com

3 Reglas de derivación

Hemos visto la forma de interpretar derivadas como pendientes y magnitudes de rapidez de cambio, así como calcular derivadas de funciones dadas por tablas de valores. Hemos aprendido a graficar derivadas de funciones que están definidas gráficamente. Hemos empleado la definición de una derivada para calcular las derivadas de funciones definidas por fórmulas, pero sería tedioso si siempre tuviéramos que usar la definición; por ello, en este capítulo desarrollamos reglas para hallar derivadas sin tener que usar la definición de manera directa. Estas reglas de derivación hacen posible que calculemos con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, funciones algebraicas, funciones exponenciales y logarítmicas, así como funciones trigonométricas y trigonométricas inversas. A continuación usamos estas reglas para resolver problemas que contienen magnitudes de rapidez de cambio, tangentes a curvas paramétricas y la aproximación de funciones.

3.1 Derivadas de funciones polinomiales y exponenciales

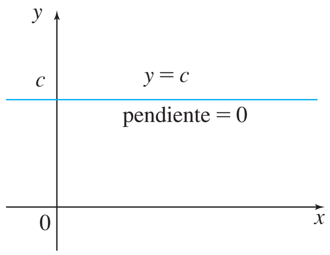


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$, y $f'(x) = 0$.

En esta sección aprenderemos a derivar funciones constantes y funciones de potencia, así como funciones polinomiales y exponenciales.

Empecemos con la más sencilla de todas las funciones, la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, que tiene pendiente 0 y por lo tanto debemos tener $f'(x) = 0$. (Véase Figura 1.) Una prueba formal, a partir de la definición de una derivada, también es fácil:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

En notación de Leibniz, escribimos esta regla como sigue.

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Funciones de potencia

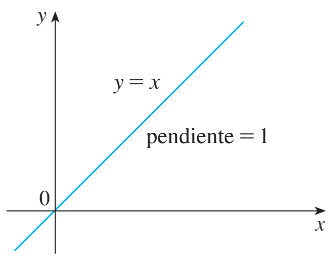


FIGURA 2
La gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, y $f'(x) = 1$.

A continuación vemos las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, que tiene pendiente 1. (Véase Figura 2.) Por tanto,

1 $$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

(También se puede verificar la Ecuación 1 a partir de la definición de una derivada.) Ya hemos investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. De hecho, en la Sección 2.7 (Ejercicios 17 y 18) encontramos que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$ encontramos la derivada de $f(x) = x^4$ como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Comparando las ecuaciones en (1), (2) y (3), vemos que aparece un patrón. Parece razonable pensar que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta verdadero.

Regla de potencias Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRUEBA Si $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

El Teorema del Binomio se da en la Página 1 de Referencias.

Para hallar la derivada de x^4 tuvimos que expandir $(x + h)^4$. Aquí necesitamos expandir $(x + h)^n$ y para ello usamos el Teorema del Binomio:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

$$= nx^{n-1}$$

porque cada término excepto el primero tiene h como factor y, por tanto, se aproxima a 0.

Ilustramos la Regla de potencias usando diversas notaciones en el Ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Uso de la Regla de potencias

(a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. (b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.

(c) Si $y = t^4$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. (d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

¿Qué hay acerca de funciones de potencia con exponentes enteros negativos? En el Ejercicio 59 le pedimos a usted verificar, de la definición de una derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Podemos reescribir esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y por tanto la Regla de potencias es verdadera cuando $n = -1$. De hecho, demostraremos en la siguiente sección [Ejercicio 60(c)] que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué pasa si el exponente es una fracción? En el Ejemplo 4 en la Sección 2.7 encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

que se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto demuestra que la Regla de potencias es verdadera aun cuando $n = \frac{1}{2}$. Demostraremos en la Sección 3.7 que esto es verdadero para todos los números reales n.

Regla de potencias (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EJEMPLO 2 Regla de potencias para exponentes negativos y fraccionarios Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

La Figura 3 muestra la función y en el Ejemplo 2(b) y su derivada y'. Observe que y no es derivable en 0 (y' no está definida ahí.) Observe que y' es positiva cuando y aumenta y es negativa cuando y disminuye.

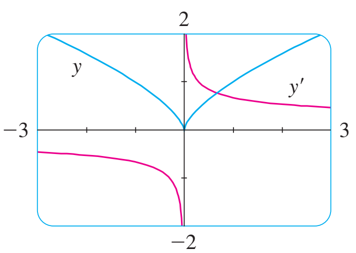


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso reescribimos la función como una potencia de x.

(a) Como $f(x) = x^{-2}$, usamos la Regla de potencias con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

La Regla de potencias hace posible que encontremos rectas tangentes sin tener que recurrir a la definición de una derivada. También nos da la posibilidad de hallar *rectas normales*. La **recta normal** a una curva C en un punto P es la recta que pasa por P que es perpendicular a la recta tangente en P. (En el estudio de la óptica, es necesario considerar el ángulo entre un rayo de luz y la recta normal a un lente.)

V EJEMPLO 3 Encuentre ecuaciones de la recta tangente y recta normal a la curva $y = x\sqrt{x}$ en el punto (1, 1). Ilustre graficando la curva y estas rectas.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

Así que la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente, y su pendiente es el recíproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{2}{3}$. Así, la ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

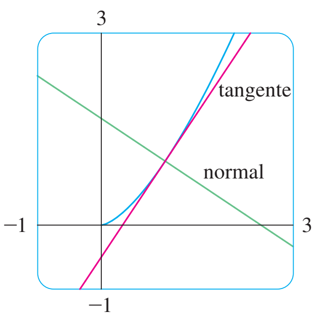


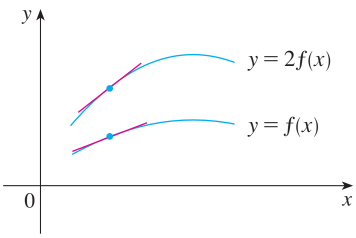
FIGURA 4
$y = x\sqrt{x}$

Graficamos la curva y su recta tangente y recta normal en la Figura 4.

Nuevas derivadas a partir de antiguas

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones antiguas por adición, sustracción o multiplicación por una constante, sus derivadas pueden calcularse en términos de derivadas de las funciones antiguas. En particular, la fórmula siguiente dice que *la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función*.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



Si se multiplica por $c = 2$ se alarga la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las subidas se han duplicado pero las distancias horizontales siguen siendo iguales. En consecuencia, también se duplican las pendientes.

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

PRUEBA Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{(por la Ley 3 de límites)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 **Use de la Regla del múltiplo constante**

(a) $\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\frac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

La regla siguiente nos dice que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas*.

Usando notación prima, podemos escribir la Regla de la suma como

$$(f+g)' = f' + g'$$

Regla de la suma Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

PRUEBA Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad \text{(por la Ley 1)} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

La Regla de la suma se puede extender a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, usando dos veces este teorema tendremos

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicar la Regla de la suma y la Regla del múltiplo constante, obtenemos la siguiente fórmula.

Regla de la diferencia Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

La Regla del múltiplo constante, la Regla de la suma y la Regla de la diferencia pueden combinarse con la Regla de potencias para derivar cualquier polinomio, como demuestran los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 5 **Derivación de un polinomio**

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$
$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$
$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$
$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

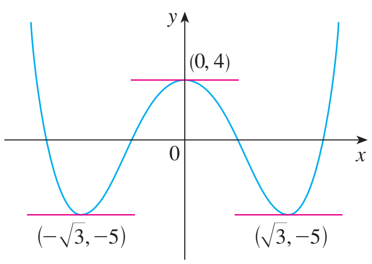


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus tangentes horizontales.

V **EJEMPLO 6** Encuentre los puntos en la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se presentan tangentes horizontales donde la derivada es cero. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$
$$= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)$$

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Entonces la curva dada tiene tangentes horizontales cuando $x = 0$, $\sqrt{3}$, y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$, y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la Figura 5.)

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una partícula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 segundos es $a(2) = 14\ \text{cm/s}^2$.

Funciones exponenciales

Tratemos de calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$ usando la definición de una derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que podemos tomarlo enfrente del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que el límite es el valor de la derivada de f en 0, es decir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

Por tanto, hemos demostrado que si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, entonces es derivable en todas partes y

$$\boxed{4} \qquad f'(x) = f'(0)a^x$$

Esta ecuación dice que *la rapidez de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la función misma.* (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla de la izquierda se da evidencia numérica para la existencia de $f'(0)$ para los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores se expresan correctos a cuatro posiciones decimales.) Es evidente que los límites existen y

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, puede demostrarse que estos límites existen y, correctos a seis posiciones decimales, los valores son

$$\left.\frac{d}{dx}(2^x)\right|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \left.\frac{d}{dx}(3^x)\right|_{x=0} \approx 1.098612$$

Entonces, de la Ecuación 4, tenemos

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las posibles opciones para la base a en la Ecuación 4, la fórmula más sencilla de derivación se presenta cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que hay un número a entre 2 y 3 para el cual $f'(0) = 1$. Es tradicional denotar este valor por la letra e. (De hecho, así introdujimos e en la Sección 1.5.) Entonces tenemos la siguiente definición.

En el Ejercicio 1 veremos que e está entre 2.7 y 2.8. Más adelante podremos demostrar que, correcto a cinco posiciones decimales,

$$e \approx 2.71828$$

Definición del número e

$$e \text{ es el número tal que } \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que de todas las posibles funciones exponenciales $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en (0, 1) tiene una pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse Figuras 6 y 7.)

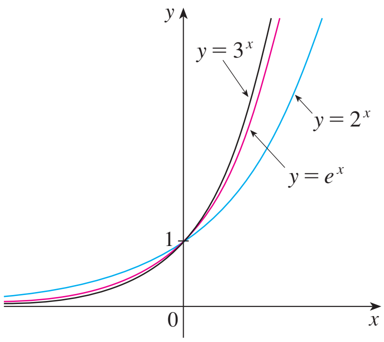


FIGURA 6

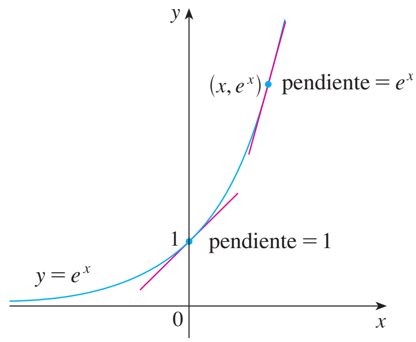


FIGURA 7

Si ponemos $a = e$ y por tanto, $f'(0) = 1$ en la Ecuación 4, se convierte en la siguiente importante fórmula de derivación.

TEC Visual 3.1 usa la pendiente a para ilustrar esta fórmula.

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Entonces la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. La importancia geométrica de este hecho es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase Figura 7).

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Usando la Regla de la diferencia, tenemos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la Sección 2.7 definimos la segunda derivada como la derivada de f', por lo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

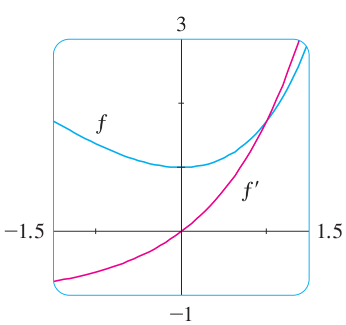


FIGURA 8

La función f y su derivada f' se grafican en la Figura 8. Observe que f tiene una tangente horizontal cuando $x = 0$, esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Observe también que, para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente.

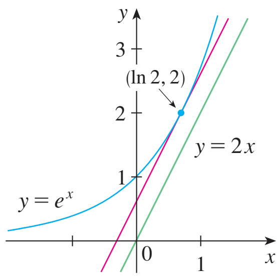


FIGURA 9

EJEMPLO 9 ¿En qué punto de la curva $y = e^x$ es paralela la recta tangente a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Como $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente, es decir, 2. Al igualar las pendientes, tenemos

$$e^a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \ln 2$$

Por lo tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase Figura 9.)

3.1 Ejercicios

1. (a) ¿Cómo está definido el número e?
(b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2.7^h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2.8^h - 1}{h}$$

correctos a dos posiciones decimales. ¿Qué se puede concluir acerca del valor de e?

2. (a) Trace manualmente la gráfica de la función $f(x) = e^x$, poniendo especial atención a la forma en que la gráfica cruza el eje y. ¿Qué es lo que permite hacer esto?
(b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
(c) ¿Cuál de las dos funciones del inciso (b) crece más rápidamente cuando x es grande?

3–26 Derive la función.

3. $f(x) = 186.5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$

6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

12. $B(y) = cy^{-6}$

13. $g(t) = 2t^{-3/4}$

14. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

15. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

16. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

17. $F(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^5$

18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2}$

19. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

20. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

21. $y = 4\pi^2$

22. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

23. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

24. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

25. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

26. $y = e^{x+1} + 1$

27–28 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

27. $y = \sqrt[4]{x}$, $(1, 1)$

28. $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

29–30 Encuentre ecuaciones de la recta tangente y recta normal a la curva en el punto dado.

29. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

30. $y = (1 + 2x)^2$, $(1, 9)$

31–32 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado. Ilústrela al graficar la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

31. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

32. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

33–36 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y úselas para explicar por qué su respuesta es razonable.

33. $f(x) = e^x - 5x$

34. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$

35. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$

36. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

37–38 Estime el valor de $f'(a)$ al hacer acercamiento (zoom) en la gráfica de f. A continuación derive f para hallar el valor exacto de $f'(a)$ y compare con su estimación.

37. $f(x) = 3x^2 - x^3$, $a = 1$

38. $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $a = 4$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

39. (a) Use una calculadora graficadora o computadora para graficar la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ en el rectángulo de observación $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
(b) Usando la gráfica del inciso (a) para calcular pendientes, haga manualmente un dibujo aproximado de la gráfica de f'. (Véase Ejemplo 1 en la Sección 2.7.)
(c) Calcule $f'(x)$ y use esta expresión, con una calculadora graficadora, para graficar f'. Compare con su trazo del inciso (b).

40. (a) Use una calculadora graficadora o computadora para graficar la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en el rectángulo de observación $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
(b) Usando la gráfica del inciso (a) para calcular pendientes, haga manualmente un dibujo aproximado de la gráfica de g'. (Véase Ejemplo 1 en la Sección 2.7.)
(c) Calcule $g'(x)$ y use esta expresión, con una calculadora graficadora, para graficar g'. Compare con su trazo del inciso (b).

41–42 Encuentre la primera y segunda derivadas de la función.

41. $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$ **42.** $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

43–44 Encuentre la primera y segunda derivadas de la función. Compruebe para ver que sus respuestas sean razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''.

43. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$ **44.** $f(x) = e^x - x^3$

45. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t está en segundos. Encuentre
(a) la velocidad y aceleración como funciones de t,
(b) la aceleración después de 2 s, y
(c) la aceleración cuando la velocidad es 0.

46. La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, donde s está en metros y t está en segundos.
(a) Encuentre la velocidad y aceleración como funciones de t.
(b) Encuentre la aceleración después de 1 s.
(c) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración en la misma pantalla.

47. ¿En qué intervalo es creciente la función $f(x) = 5x - e^x$?

48. ¿En qué intervalo es cóncava hacia arriba la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$?

49. Encuentre los puntos en la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la tangente es horizontal.

50. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ tiene una tangente horizontal?

51. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

52. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la recta $y = 1 + 3x$.

53. Encuentre ecuaciones de ambas rectas que son tangentes a la curva $y = 1 + x^3$ y paralelas a la recta $12x - y = 1$.

54. ¿En qué punto en la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$? Ilustre al graficar la curva y ambas rectas.

55. Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que es paralela a la recta $x - 3y = 5$.

56. ¿En qué lugar la recta normal a la parábola $y = x - x^2$ en el punto $(1, 0)$ interseca a la parábola por segunda vez? Ilustre con un dibujo.

57. Trace un diagrama para demostrar que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasa por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersecan la parábola.

58. (a) Encuentre ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
(b) Demuestre que no hay una recta que pase por el punto $(2, 7)$ que sea tangente a la parábola. A continuación trace un diagrama para ver por qué.

59. Use la definición de una derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la Regla de potencias para el caso $n = -1$.)

60. Encuentre la n-ésima derivada de cada función al calcular las primeras derivadas y observando el modelo que se presenta.
(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

61. Encuentre un polinomio P de segundo grado tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$, y $P''(2) = 2$.

62. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ se denomina **ecuación diferencial** porque contiene un función desconocida y y sus derivadas y' y y''. Encuentre las constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación. (Las ecuaciones diferenciales se estudiarán en detalle en el Capítulo 7.)

63. (a) En la Sección 2.8 definimos una antiderivada de f como una función F tal que $F' = f$. Trate de idear una fórmula para una antiderivada de $f(x) = x^2$. A continuación compruebe su respuesta al derivarla. ¿Cuántas antiderivadas tiene f?
(b) Encuentre antiderivadas para $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$.
(c) Encuentre una antiderivada para $f(x) = x^n$, donde $n \neq -1$. Compruebe por derivación.

64. Use el resultado del Ejercicio 63(c) para hallar una antiderivada de cada función.
(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = e^x + 8x^3$

65. Encuentre la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya recta tangente en $(1, 1)$ tiene ecuación $y = 3x - 2$.

66. Suponga que la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene una recta tangente cuando $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una recta tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 - 3x$. Encuentre los valores de a, b, c y d.

67. Encuentre una función cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene tangentes horizontales en los puntos $(-2, 6)$ y $(2, 0)$.

68. Encuentre el valor de c tal que la recta $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$.

69. ¿Para qué valores de a y b la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

70. Se traza una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto P.

(a) Demuestre que el punto medio del segmento de recta cortado de esta recta tangente por los ejes de coordenadas es P.

(b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas siempre tiene la misma área, sin importar dónde esté situado P en la hipérbola.

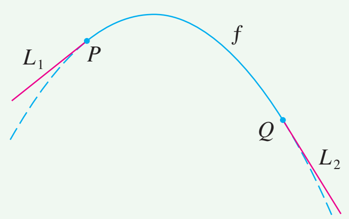
71. Evalúe $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

72. Trace un diagrama que muestre dos rectas perpendiculares que se crucen en el eje y y ambas sean tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Dónde se intersecan estas rectas?

73. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas rectas que pasen por el punto $(0, c)$ son rectas normales a la parábola $y = x^2$? ¿Qué pasa si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

74. Trace las parábolas $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Piensa usted que hay una recta que es tangente a estas dos curvas? Si es así, encuentre una ecuación; si no, ¿por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN — Construcción de una "montaña rusa" mejor



Supongamos que se le pide diseñar el primer ascenso y bajada para una nueva "montaña rusa". Estudiando fotografías de sus "montañas rusas" favoritas, decide hacer la pendiente del ascenso de 0.8 con una pendiente de la bajada de -1.6. Usted decide unir estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ con parte de una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que la vía sea lisa no puede haber cambios abruptos en dirección, de modo que desea que los segmentos lineales L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos P y Q de transición. (Véase la figura.) Para simplificar las ecuaciones, usted decide poner el origen en P.

1. (a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 ft. Escriba ecuaciones en a, b y c que aseguren que la vía sea lisa en los puntos de transición.

(b) De las ecuaciones del inciso (a) despeje a, b y c para hallar una fórmula para $f(x)$.

(c) Trace L_1, f y L_2 para verificar gráficamente que las transiciones son lisas.

(d) Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

2. La solución al Problema 1 podría *parecer* fácil, pero podría no *sentirse* así porque la función definida por partes (formada por $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 100$, y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. En consecuencia, el diseñador decide mejorar el diseño con el uso de una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ sólo en el intervalo $10 \leqslant x \leqslant 90$ y conectándolo a las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 10$$

$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 90 < x \leqslant 100$$

(a) Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus primeras dos derivadas concuerdan en los puntos de transición.

CAS (b) Resuelva las ecuaciones del inciso (a) con un sistema computarizado de álgebra para hallar fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

(c) Grafique L_1, g, q, h y L_2 y compare con la gráfica del Problema 1(c).

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

3.2 Las reglas del producto y el cociente

Las fórmulas de esta sección hacen posible que derivemos nuevas funciones formadas a partir de antiguas funciones por multiplicación o división.

La Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y diferencia, podríamos estar tentados a pensar, como lo hizo Leibniz hace tres siglos, que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Podemos ver, sin embargo, que esta idea es errónea si vemos un ejemplo particular.

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Entonces la Regla de potencias da $f'(x) = 1$ y y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Entonces $(fg)' \neq f'g'$. La fórmula correcta fue descubierta por Leibniz (poco después de su falso inicio) y recibe el nombre de Regla del producto.

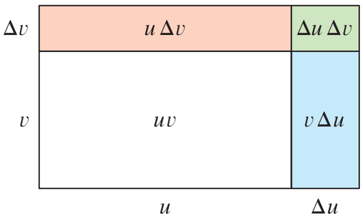


FIGURA 1
Geometría de la Regla del producto

Antes de expresar la Regla del producto, veamos cómo podríamos descubrirla. Empezamos por suponer que $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones derivables positivas. Entonces podemos interpretar el producto uv como un área de un rectángulo (véase Figura 1). Si x cambia en una cantidad Δx, entonces los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, se puede interpretar como el área del rectángulo grande de la Figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

$$\boxed{1} \qquad \begin{aligned}\Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \\ &= \text{la suma de las tres áreas sombreadas}\end{aligned}$$

Si dividimos entre Δx, obtenemos

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Recuerde que en notación de Leibniz la definición de una derivada se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos $\Delta x \to 0$, obtenemos la derivada de uv:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\ &= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\ &= u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx} + 0 \,?\, \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ porque f es derivable y por lo tanto es continua.)

Aun cuando empezamos por suponer (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observamos que la Ecuación 1 es siempre verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) Por tanto, hemos demostrado la Ecuación 2, conocida como Regla del producto, para todas las funciones derivables u y v.

En notación prima:

$$(fg)' = fg' + gf'$$

La Regla del producto Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\,\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En otras palabras, la Regla del producto dice que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función por la derivada de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera función.*

EJEMPLO 1 Uso de la Regla del producto

(a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.

(b) Encuentre la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

SOLUCIÓN

La Figura 2 muestra las gráficas de la función f del Ejemplo 1 y su derivada f'. Observe que $f'(x)$ es positiva cuando f es creciente y negativa cuando f es decreciente.

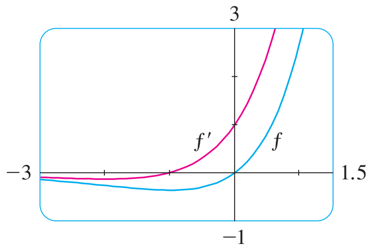


FIGURA 2

(a) Por la Regla del producto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) \\ &= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) \\ &= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x \end{aligned}$$

(b) Usando la Regla del producto por segunda vez, obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] \\ &= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1) \\ &= (x+1)e^x + e^x\ ?1 = (x+2)e^x \end{aligned}$$

Subsecuentes aplicaciones de la Regla del producto dan

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$$

De hecho, cada derivación sucesiva agrega otro término e^x, y

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

En el Ejemplo 2, a y b son constantes. En matemáticas se acostumbra usar las primeras letras del alfabeto para representar constantes y las últimas para representar variables.

EJEMPLO 2 Derivación de una función con constantes arbitrarias

Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$.

SOLUCIÓN 1 Usando la Regla del producto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a+bt) + (a+bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right) \\ &= \sqrt{t}\ ?b + (a+bt)\ ?\tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= b\sqrt{t} + \frac{a+bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a+3bt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero usamos las leyes de exponentes para reescribir $f(t)$, entonces podemos continuar directamente sin usar la Regla del producto

$$\begin{aligned} f(t) &= a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2} \end{aligned}$$

que es equivalente a la respuesta dada en la Solución 1.

El Ejemplo 2 muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones antes de derivar que usar la Regla del producto, pero en el Ejemplo 1 la Regla del producto es el único método posible.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Aplicando la Regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\, \frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\, \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x) \cdot \tfrac{1}{2} x^{-1/2} = \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Por tanto,
$$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2 \cdot 3 + \frac{2}{2 \cdot 2} = 6.5$$

V EJEMPLO 4 Interpretación de los términos de la Regla del producto Una compañía telefónica desea calcular el número de nuevas líneas telefónicas residenciales que será necesario instalar durante el mes próximo. A principios de enero la compañía tenía 100,000 suscriptores, cada uno de los cuales tenía 1.2 líneas en promedio. La compañía estimaba que el número de sus suscriptores estaba aumentando a razón de 1000 al mes. Al hacer una encuesta a sus suscriptores ya existentes, la compañía encontró que cada uno de ellos pretendía instalar un promedio de 0.01 nuevas líneas telefónicas a fines de enero. Estime el número de nuevas líneas que la compañía tendrá que instalar en enero al calcular el ritmo de aumento de líneas a principio del mes.

SOLUCIÓN Sea $s(t)$ el número de suscriptores y sea $n(t)$ el número de líneas telefónicas por abonado en el tiempo t, donde t se mide en meses y $t = 0$ corresponde a principios de enero. Entonces el número total de líneas está dado por

$$L(t) = s(t)n(t)$$

y deseamos hallar $L'(0)$. De acuerdo con la Regla del producto, tenemos

$$L'(t) = \frac{d}{dt}[s(t)n(t)] = s(t)\frac{d}{dt}n(t) + n(t)\frac{d}{dt}s(t)$$

Nos dicen que $s(0) = 100{,}000$ y $n(0) = 1.2$. Las estimaciones de la compañía respecto al ritmo de aumento son que $s'(0) \approx 1000$ y $n'(0) \approx 0.01$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L'(0) &= s(0)n'(0) + n(0)s'(0) \\ &\approx 100{,}000 \cdot 0.01 + 1.2 \cdot 1000 = 2200 \end{aligned}$$

La compañía tendrá que instalar aproximadamente 2200 nuevas líneas telefónicas en enero.

Observe que los dos términos que surgen de la Regla del producto provienen de fuentes diferentes, es decir, suscriptores anteriores y suscriptores nuevos. Una aportación a L' es el número de suscriptores ya existentes (100,000) por el ritmo al que solicitan nuevas líneas (alrededor de 0.01 por abonado mensualmente). Una segunda aportación es el número promedio de líneas por abonado (1.2 a principios de mes) por el ritmo de aumento de suscriptores (1000 mensuales).

La Regla del cociente

Encontramos una regla para distinguir el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ en forma muy semejante a como encontramos la Regla del producto. Si x, u y v cambian en cantidades Δx, Δu y Δv, entonces el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

y entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta v \to 0$ también, porque $v = g(x)$ es derivable y por lo tanto es continua. Así, usando las Leyes de los límites, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

En notación prima:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

La Regla del cociente Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En palabras, la Regla del cociente dice que *la derivada de un cociente es el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

La Regla del cociente y las otras fórmulas de derivación hacen posible que calculemos la derivada de cualquier función racional, como ilustra el siguiente ejemplo.

Podemos usar una calculadora graficadora para comprobar que la respuesta al Ejemplo 5 es plausible. La Figura 3 muestra las gráficas de la función del Ejemplo 5 y su derivada. Observe que cuando y crece rápidamente (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece lentamente, y' es cercana a 0.

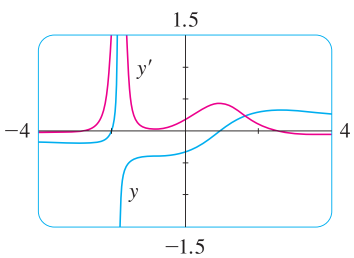


FIGURA 3

V EJEMPLO 5 Uso de la Regla del cociente Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2} \end{aligned}$$

V EJEMPLO 6 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la Regla del cociente, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

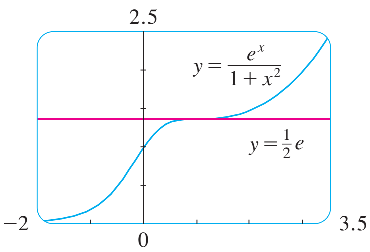


FIGURA 4

Entonces la pendiente de la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$ es horizontal y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la Figura 4. Observe que la función es creciente y cruza su recta tangente en $\left(1, \frac{1}{2}e\right)$.]

Nota: No use la Regla del cociente *cada vez* que vea un cociente. A veces es más fácil reescribir primero un cociente para ponerlo en forma que sea más sencillo para fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

usando la Regla del cociente, es mucho más fácil efectuar primero la división y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

Resumimos las fórmulas de derivación que hemos aprendido hasta este punto, como sigue:

Tabla de Fórmulas de derivación

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

3.2 Ejercicios

1. Encuentre la derivada de $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ en dos formas: usando la Regla del producto y realizando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas concuerdan?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

en dos formas: usando la Regla del cociente y primero simplificando. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere usted?

3–24 Derive.

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 + t^2}$

9. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

10. $R(t) = (t + e^t)(3 - \sqrt{t})$

11. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

12. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

13. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

14. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

15. $y = (r^2 - 2r)e^r$

16. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

17. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

18. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

19. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

20. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

21. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

22. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

24. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

25–28 Encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$.

25. $f(x) = x^4e^x$

26. $f(x) = x^{5/2}e^x$

27. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

28. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

29–30 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

29. $y = \dfrac{2x}{x + 1}$, $(1, 1)$

30. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

31–32 Encuentre ecuaciones de la recta tangente y recta normal a la curva dada en el punto especificado.

31. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

32. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, $(4, 0.4)$

33. (a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se denomina **bruja de María Agnesi**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre el inciso (a) al graficar la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

34. (a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina** o **caracol**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

35. (a) Si $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) sea razonable al comparar las gráficas de f y f'.

36. (a) Si $f(x) = e^x/(2x^2 + x + 1)$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) sea razonable al comparar las gráficas de f y f'.

37. (a) Si $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) sea razonable al comparar las gráficas de f, f', y f''.

38. (a) Si $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) sea razonable al comparar las gráficas de f, f', y f''.

39. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, encuentre $f''(1)$.

40. Si $g(x) = x/e^x$, encuentre $g^{(n)}(x)$.

41. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$, y $g'(5) = 2$. Encuentre los siguientes valores.
(a) $(fg)'(5)$
(b) $(f/g)'(5)$
(c) $(g/f)'(5)$

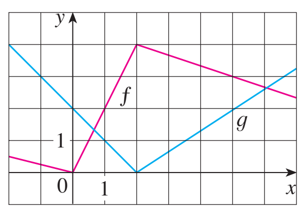
42. Suponga que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$, y $g'(2) = 7$. Encuentre $h'(2)$.
(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$
(b) $h(x) = f(x)g(x)$
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
(d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

43. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, encuentre $f'(0)$.

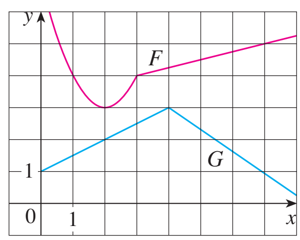
44. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

45. Si f y g son funciones cuyas gráficas se muestran, sea $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encuentre $u'(1)$.
(b) Encuentre $v'(5)$.



46. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran.
(a) Encuentre $P'(2)$.
(b) Encuentre $Q'(7)$.



47. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

48. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las siguientes funciones.

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

49. En este ejercicio estimamos la proporción en la que el ingreso total personal está aumentando en el área metropolitana de Richmond-Petersburg, Virginia. En 1999, la población de esta zona era de 961,400 y la población estaba incrementándose en casi 9200 personas por año. El ingreso promedio anual era de \$30,593 por persona y este promedio estaba aumentando en alrededor de \$1400 por año (un poco arriba del promedio nacional de unos \$1225 por año). Use la Regla del producto y estas cifras para estimar la proporción a la que el ingreso total personal estaba subiendo en el área de Richmond-Petersburg en 1999. Explique el significado de cada término de la Regla del producto.

50. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) que se vende es una función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que podemos escribir $q = f(p)$. Entonces el ingreso total ganado con un precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.
(a) ¿Qué significa decir que $f(20) = 10{,}000$ y $f'(20) = -350$?
(b) Suponiendo los valores del inciso (a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

51. ¿En qué intervalo es creciente la función $f(x) = x^3 e^x$?

52. ¿En qué intervalo es cóncava hacia abajo la función $f(x) = x^2 e^x$?

53. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos estas rectas tangentes tocan la curva?

54. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que son paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

55. Encuentre $R'(0)$, donde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Sugerencia: En lugar de hallar $R'(x)$ primero, sea $f(x)$ el numerador y $g(x)$ el denominador de $R(x)$ y calcule $R'(0)$ de $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ y $g'(0)$.

56. Use el método del Ejercicio 55 para calcular $Q'(0)$, donde

$$Q(x) = \frac{1 + x + x^2 + xe^x}{1 - x + x^2 - xe^x}$$

57. (a) Use la Regla del producto dos veces para demostrar que si f, g, y h son derivables, entonces $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
(b) Tomando $f = g = h$ del inciso (a), demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Use el inciso (b) para derivar $y = e^{3x}$.

58. (a) Si $F(x) = f(x)g(x)$, donde f y g tienen derivadas de todos los órdenes, demuestre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.
(b) Encuentre fórmulas similares para F''' y $F^{(4)}$.
(c) Invente una fórmula para $F^{(n)}$.

59. Encuentre expresiones para las primeras cinco derivadas de $f(x) = x^2 e^x$. ¿Se ve un patrón en estas expresiones? Invente una fórmula para $f^{(n)}(x)$ y demuéstrela usando inducción matemática.

60. (a) Si g es derivable, la **Regla del recíproco** dice que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Use la Regla del cociente para demostrar la Regla del recíproco.
(b) Use la Regla del recíproco para derivar la función del Ejercicio 16.
(c) Use la Regla del recíproco para verificar que la Regla de potencias es válida para enteros negativos, es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los enteros positivos n.

3.3 Derivadas de funciones trigonométricas

Un repaso de las funciones trigonométricas se da en el Apéndice C.

Antes de iniciar esta sección, usted podría necesitar dar un repaso a funciones trigonométricas. En particular, es importante recordar que cuando hablamos de la función f definida para todos los números reales x por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

se entiende que $\operatorname{sen} x$ significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Una convención similar se cumple para las otras funciones trigonométricas de cos, tan, csc, sec y cot.

Recuerde de la Sección 2.4 que todas las funciones trigonométricas son continuas en todo número en sus dominios.

Si trazamos la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ y usamos la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la tangente a la curva de la función seno para trazar la gráfica de f' (véase el Ejercicio 14 de la Sección 2.7), entonces se ve como si la gráfica de f' pudiera ser igual que la curva de la función coseno (véase Figura 1).

TEC Visual 3.3 muestra una animación de la Figura 1.

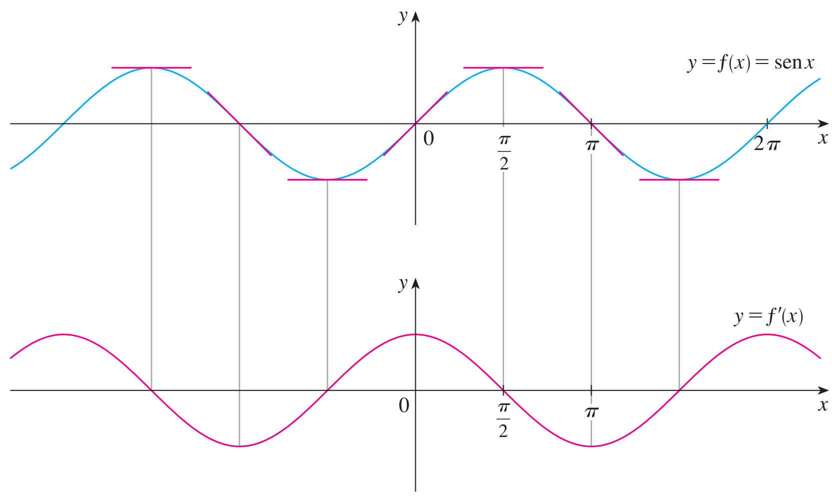


FIGURA 1

Tratemos de confirmar nuestra idea de que si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $f'(x) = \cos x$. De la definición de una derivada, tenemos

Hemos empleado la fórmula de la adición para el seno. Véase el Apéndice C.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen } h - \text{sen } x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\text{sen } x \cos h - \text{sen } x}{h} + \frac{\cos x \text{ sen } h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\text{sen } x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\text{sen } h}{h} \right) \right]$$

1 $$= \lim_{h \to 0} \text{sen } x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Como consideramos a x como una constante cuando calculamos un límite cuando $h \to 0$, tenemos

$$\lim_{h \to 0} \text{sen } x = \text{sen } x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\text{sen } h)/h$ no es tan obvio. En el Ejemplo 3 de la Sección 2.2 hicimos el cálculo, con base en evidencia numérica y gráfica, de que

2 $$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1}$$

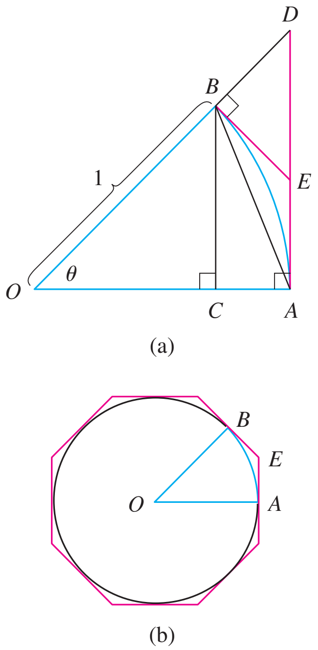


FIGURA 2

Ahora usamos un argumento geométrico para demostrar la Ecuación 2. Supongamos primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. La Figura 2(a) muestra un sector de un círculo con centro O, ángulo central θ, y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de medida en radianes, tenemos arc $AB = \theta$. También $|BC| = |OB|$ sen θ = sen θ. Del diagrama vemos que

$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

Por tanto $\quad \text{sen } \theta < \theta \quad$ y entonces $\quad \dfrac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1$

Imaginemos que las rectas tangentes en A y B se intersecan en E. De la Figura 2(b) se puede ver que la circunferencia de un círculo es menor que la longitud de un polígono circunscrito, por lo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Entonces

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\theta < \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

y entonces $\quad \cos \theta < \dfrac{\text{sen } \theta}{\theta} < 1$

Sabemos que $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$ de modo que, por el Teorema de compresión, tenemos

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

Pero la función (sen $\theta)/\theta$ es una función par, por lo cual sus límites por la derecha y por la izquierda deben ser iguales. En consecuencia, tenemos

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

y hemos demostrado la Ecuación 2.

Podemos deducir el valor del límite restante en (1) como sigue:

Multiplicamos numerador y denominador por $\cos \theta + 1$ para poner la función en una forma en la que podamos usar los límites que conocemos.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} \right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta (\cos \theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\text{sen}^2 \theta}{\theta (\cos \theta + 1)} = -\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + 1} \right) \\ &= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta + 1} \\ &= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(por la Ecuación 2)} \end{aligned}$$

3 $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$

Si ahora ponemos los límites (2) y (3) en (1), obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\ &= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

Entonces hemos demostrado la fórmula para la derivada de la función seno:

4 $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

V EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

La Figura 3 muestra las gráficas de la función del Ejemplo 1 y su derivada. Observe que $y' = 0$ siempre que y tenga una tangente horizontal.

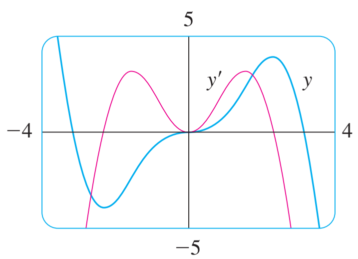


FIGURA 3

SOLUCIÓN Usando la Regla del producto y la Fórmula 4, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Usando los mismos métodos como en la demostración de la Fórmula 4, podemos demostrar (véase el Ejercicio 18) que

5 $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

La función tangente también se puede derivar usando la definición de una derivada, pero es más fácil usar la Regla del cociente con las Fórmulas 4 y 5:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

6
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

Las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, también se pueden hallar fácilmente usando la Regla del cociente (véanse Ejercicios 15-17). Reunimos todas las fórmulas de derivación para funciones trigonométricas en la tabla siguiente. Recuerde que son válidas sólo cuando x se mide en radianes.

Cuando se aprenda de memoria esta tabla, es útil observar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones," es decir, coseno, cosecante y cotangente.

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para qué valores de x la gráfica de f tiene una tangente horizontal?

SOLUCIÓN La Regla del cociente da

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

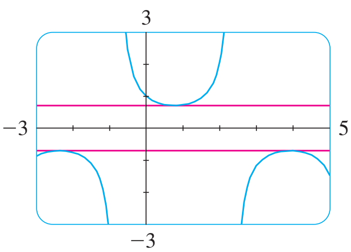


FIGURA 4
Tangentes horizontales en el Ejemplo 2

Al simplificar la respuesta hemos empleado la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Como $\sec x$ nunca es 0, vemos que $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto ocurre cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase Figura 4).

Con frecuencia se usan funciones trigonométricas para modelar fenómenos reales. En particular, vibraciones, ondas, movimientos elásticos y otras cantidades que varían de un modo periódico se pueden describir usando funciones trigonométricas. En el siguiente ejemplo estudiamos un caso de movimiento armónico simple.

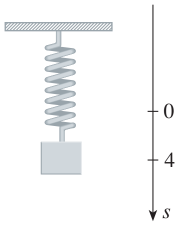


FIGURA 5

V **EJEMPLO 3** **Análisis del movimiento de un resorte** Un objeto situado en el extremo de un resorte vertical se estira 4 cm más que en su posición de reposo y se suelta en el tiempo $t = 0$. (Véase Figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el tiempo t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y aceleración en el tiempo t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4\cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4\operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4\cos t$$

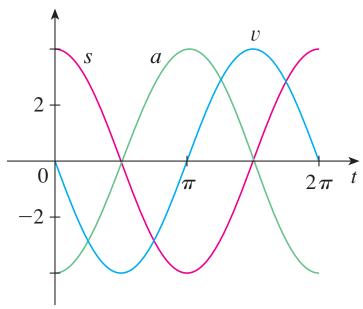


FIGURA 6

El objeto oscila del punto más bajo ($s = 4$ cm) al punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de oscilación es 2π, el periodo de $\cos t$.

La velocidad es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, que es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$, es decir, cuando $\cos t = 0$. Entonces el objeto se mueve con máxima rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su velocidad es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$, esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4\cos t = 0$ cuando $s = 0$. Tiene su magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Véanse las gráficas de la Figura 6.

EJEMPLO 4 Hallar una derivada de orden superior a partir de un patrón
Encuentre la 27ava derivada de $\cos x$.

RP Busque un patrón.

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x) = \cos x$ son como sigue:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$$

Vemos que las derivadas sucesivas se presentan en un ciclo de longitud 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ siempre que n sea múltiplo de 4. Por tanto,

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

y, derivando tres veces más, tenemos

$$f^{(27)}(x) = \operatorname{sen} x$$

3.3 Ejercicios

1–14 Derive.

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

2. $y = 2\csc x + 5\cos x$

3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cot x$

4. $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen} x$

5. $y = \sec\theta \tan\theta$

6. $g(\theta) = e^{\theta}(\tan\theta - \theta)$

7. $y = c\cos t + t^2 \operatorname{sen} t$

8. $f(t) = \dfrac{\cot t}{e^t}$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$

10. $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

12. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$

13. $f(x) = xe^x \csc x$

14. $y = x^2 \operatorname{sen} x \tan x$

15. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$.

16. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

17. Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

18. Demuestre, usando la definición de derivada, que si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

19–22 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

19. $y = \sec x$, $(\pi/3, 2)$

20. $y = e^x \cos x$, $(0, 1)$

21. $y = x + \cos x$, $(0, 1)$

22. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$, $(0, 1)$

---

23. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

24. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x + 6 \cos x$ en el punto $(\pi/3, \pi + 3)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

25. (a) Si $f(x) = \sec x - x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe para ver que su respuesta al inciso (a) es razonable al graficar f y f' para $|x| < \pi/2$.

26. (a) Si $f(x) = e^x \cos x$, encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Compruebe que sus respuestas al inciso (a) son razonables al graficar f, f' y f''.

27. Si $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, encuentre $H'(\theta)$ y $H''(\theta)$.

28. Si $f(t) = \csc t$, encuentre $f''(\pi/6)$.

29. (a) Use la Regla del cociente para derivar la función

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique la expresión para $f(x)$ al escribirla en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, y luego encuentre $f'(x)$.
(c) Demuestre que sus respuestas a los incisos (a) y (b) son equivalentes.

30. Suponga que $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea $g(x) = f(x) \operatorname{sen} x$ y $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Encuentre
(a) $g'(\pi/3)$ (b) $h'(\pi/3)$

31–32 ¿Para qué valores de x la gráfica de f tiene una tangente horizontal?

31. $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$

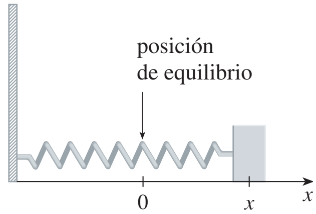
32. $f(x) = e^x \cos x$

---

33. Sea $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. ¿En qué intervalo es f creciente?

34. Sea $f(x) = 2x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. ¿En qué intervalo es f cóncava hacia abajo?

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente en una superficie lisa nivelada (véase la figura). Su ecuación de movimiento es $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, donde t está en segundos y x en centímetros.
(a) Encuentre la velocidad y aceleración en el tiempo t.
(b) Encuentre la posición, velocidad y aceleración de la masa en el tiempo $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se está moviendo en este tiempo?



36. Una banda elástica se cuelga en un gancho y una masa se cuelga del extremo inferior de la banda. Cuando la masa es jalada hacia abajo y luego soltada, vibra verticalmente. La ecuación de movimiento es $s = 2 \cos t + 3 \operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tome la dirección positiva hacia abajo.)
(a) Encuentre la velocidad y aceleración en el tiempo t.
(b) Grafique las funciones de velocidad y aceleración.
(c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
(d) ¿Qué distancia se desplaza la masa desde su posición de equilibrio?
(e) ¿Cuándo es máxima la rapidez?

37. Una escalera de 10 ft de largo se apoya contra una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y sea x la distancia desde la parte inferior de la escalera a la pared. Si la parte inferior de la escalera se desliza y se aleja de la pared, ¿con qué rapidez cambia x con respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

38. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda unida al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante denominada *coeficiente de fricción*.
(a) Encuentre la rapidez de cambio de F con respecto a θ.
(b) ¿Cuándo es igual a 0 esta rapidez de cambio?
(c) Si $W = 50$ lb y $\mu = 0.6$, trace la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de θ para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿El valor es consistente con su respuesta al inciso (b)?

39–40 Encuentre la derivada dada al hallar las primeras derivadas y observar el patrón que se presenta.

39. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\operatorname{sen} x)$

40. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}(x \operatorname{sen} x)$

---

41. Encuentre las constantes A y B tales que la función $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

42. (a) Use la sustitución $\theta = 5x$ para evaluar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$$

(b) Use el inciso (a) y la definición de una derivada para hallar

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 5x)$$

43–45 Use la Fórmula 2 e identidades trigonométricas para evaluar el límite.

43. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

44. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x}{x^2}$

45. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$

46. (a) Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

(b) Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

(c) Ilustre los incisos (a) y (b) al graficar $y = x \operatorname{sen}(1/x)$.

47. Derive cada identidad trigonométrica para obtener una nueva (o conocida) identidad.

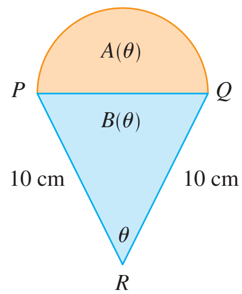
(a) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \cot x}{\csc x}$

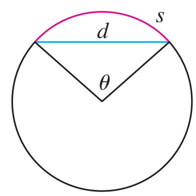
48. Un semicírculo con diámetro PQ se apoya en un triángulo isósceles PQR para formar una región que tiene la forma como de un cono de helado de crema en dos dimensiones, como se ve en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triángulo, encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



49. La figura muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, ambas subtendidas por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



50. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

(a) Grafique f. ¿Qué tipo de discontinuidad parece tener en 0?

(b) Calcule los límites por la izquierda y por la derecha de f en 0. ¿Estos valores confirman su respuesta al inciso (a)?

3.4 La Regla de la cadena

Supongamos que a usted se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación aprendidas en las secciones previas de este capítulo no hacen posible calcular $F'(x)$.

Véase en la Sección 1.3 un repaso de funciones compuestas.

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si hacemos $y = f(u) = \sqrt{u}$ y también hacemos $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces podemos escribir $y = F(x) = f(g(x))$, es decir, $F = f \circ g$. Sabemos cómo derivar f y g, de modo que sería útil tener una regla que nos diga cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y recibe el nombre de *Regla de la cadena*. Esta regla parece plausible si las derivadas se interpretan como razones de cambio. Considere a du/dx como la razón de cambio de u con respecto a x, dy/du como la razón de cambio de y con respecto a u, y dy/dx como la razón de cambio de y con respecto a x. Si u cambia con una rapidez igual al doble de la de x, y y cambia con una rapidez igual al triple de la de u, entonces parece razonable que y cambie con una rapidez igual a seis veces la de x, y de esta manera suponer que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La Regla de la cadena Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables ambas, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

James Gregory

La primera persona en formular la Regla de la cadena fue el matemático escocés James Gregory (1638-1675), que también diseñó el primer telescopio reflector práctico. Gregory descubrió las ideas básicas del cálculo en más o menos el mismo tiempo que Newton. Fue el primer profesor de matemáticas en la Universidad de St. Andrews y después conservó la misma posición en la Universidad de Edinburgh, pero un año después de aceptar esa posición murió a los 36 años de edad.

COMENTARIOS SOBRE LA PRUEBA DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x, es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Es tentador escribir

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \boxed{1} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(Observe que } \Delta u \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to x \text{ porque } g \text{ es continua.)} \\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

La única falla en este razonamiento es que en (1) podría ocurrir que $\Delta u = 0$ (aun cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no podemos dividir entre 0. Sin embargo, este razonamiento al menos *sugiere* que la Regla de la cadena es verdadera. Una prueba completa de la Regla de la cadena se da al final de esta sección.

La Regla de la cadena se puede escribir ya sea en notación prima

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en notación de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

La Ecuación 3 es fácil de recordar porque si dy/du y du/dx fueran cocientes, entonces podríamos cancelar du. Recuerde, no obstante, que du no ha sido definida y du/dx no debe ser considerado como un cociente real.

EJEMPLO 1 Uso de la Regla de la cadena Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (usando la Ecuación 2): Al principio de esta sección expresamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Como

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 (usando la Ecuación 3): Si hacemos $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Cuando se use la Fórmula 3 debemos recordar que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando y es considerada como función de x (llamada la *derivada de y con respecto a x*), mientras que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se la considera como función de u (la derivada de y con respecto a u). Por ejemplo, en el Ejemplo 1, y se puede considerar como una función de x $\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ y también como función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{en tanto que} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Nota: Al usar la Regla de la cadena trabajamos de afuera hacia dentro. La Fórmula 2 dice que *derivamos la función exterior f [en la función interior g(x)] y luego multiplicamos por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en función}\\\text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de función}\\\text{interior}}}$$

V EJEMPLO 2 Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno y la función interior es la función de elevar al cuadrado, entonces la Regla de la cadena da

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en función}\\\text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de función}\\\text{interior}}} \\ &= 2x\cos(x^2) \end{aligned}$$

(b) Observe que $\text{sen}^2 x = (\text{sen}\, x)^2$. Aquí la función exterior es la función de elevar al cuadrado y la función interior es la función seno. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{función}\\ \text{interior}}}{}^2 = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{evaluada}\\ \text{en función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta se puede dejar como $2 \text{ sen } x \cos x$ o escribirse como $\text{sen } 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como la fórmula de doble ángulo).

Véase Página de Referencia 2 o Apéndice C.

En el Ejemplo 2(a) combinamos la Regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \text{sen}\, u$, donde u es una función derivable de x, entonces, por la Regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Así,
$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\, u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De un modo semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas se pueden combinar con la Regla de la cadena.

Hagamos explícito el caso de la Regla de la cadena donde la función exterior f es una función de potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces podemos escribir $y = f(u) = u^n$ donde $u = g(x)$. Con el uso de la Regla de la cadena y luego la Regla de potencias, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 La Regla de potencias combinada con la Regla de la cadena Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Alternativamente,
$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Observe que la derivada en el Ejemplo 1 podría calcularse al tomar $n = \frac{1}{2}$ en la Regla 4.

EJEMPLO 3 Uso de la Regla de la cadena con la Regla de potencias Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Tomando $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$ en (4), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN Primero reescribimos f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$. Entonces

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3} \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Combinando la Regla de potencias, la Regla de la cadena y la Regla del cociente, obtenemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{(2t+1)\cdot 1 - 2(t-2)}{(2t+1)^2} = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

EJEMPLO 6 Use de la Regla del producto y la Regla de la cadena
Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

Las gráficas de las funciones y y y' del Ejemplo 6 se muestran en la Figura 1. Observe que y' es grande cuando y aumenta rápidamente y $y' = 0$ cuando y tiene una tangente horizontal. Por tanto, nuestra respuesta parece ser razonable.

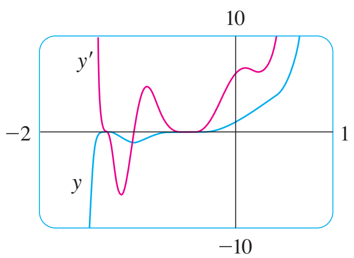


FIGURA 1

SOLUCIÓN En este ejemplo debemos usar la Regla del producto antes de usar la Regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1)^5$$
$$= (2x+1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$
$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x+1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1)$$
$$= 4(2x+1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x+1)^4 \cdot 2$$

Observando que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, podríamos factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x+1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN Aquí la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$ y la función exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Entonces, por la Regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$

Podemos usar la Regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde de la Sección 1.6 que $a = e^{\ln a}$. Entonces,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la Regla de la cadena da

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$$
$$= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

porque ln a es una constante. Entonces tenemos la fórmula

No confundir la Fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la Regla de potencias (donde x es la *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5
$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

En particular, si $a = 2$, obtenemos

6
$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la Sección 3.1 dimos la estimación de

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto es consistente con la fórmula exacta (6) porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

La razón del nombre de "Regla de la cadena" se aclara cuando hacemos una cadena más larga al agregar otro eslabón. Suponga que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde f, g y h son funciones derivables. Entonces, para calcular la derivada de y con respecto a t, usamos dos veces la Regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

V EJEMPLO 8 **Usar dos veces la Regla de la cadena** Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x)$$
$$= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x)$$
$$= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x$$

Observe que usamos dos veces la Regla de la cadena.

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función intermedia es la función secante y la función interior es la función triplicadora. Por tanto, tenemos

$$\frac{dy}{d\theta} = e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta)$$
$$= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta \frac{d}{d\theta}(3\theta)$$
$$= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta$$

Tangentes a curvas paramétricas

En la Sección 1.7 estudiamos curvas definidas por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

La Regla de la cadena nos ayuda a hallar rectas tangentes a estas curvas. Suponga que f y g son funciones derivables y deseamos hallar la recta tangente en un punto en la curva donde y es también una función derivable de x. Entonces la Regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Si $dx/dt \neq 0$, podemos despejar dy/dt:

Si consideramos la curva como trazada por una partícula en movimiento, entonces dy/dt y dx/dt son velocidades verticales y horizontales de la partícula, y la Fórmula 7 dice que la pendiente de la tangente es la razón entre estas velocidades.

7
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{si } \frac{dx}{dt} \neq 0}$$

La Ecuación 7 (que usted puede recordar si piensa en cancelar las dt) hace posible que encontremos la pendiente dy/dt de la tangente a la curva paramétrica, sin tener que eliminar el parámetro t. Vemos de (7) que la curva tiene una tangente horizontal cuando $dy/dt = 0$ (siempre que $dx/dt \neq 0$) y tiene una tangente vertical cuando $dx/dt = 0$ (siempre que $dy/dt \neq 0$).

EJEMPLO 10 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva paramétrica

$$x = 2 \text{ sen } 2t \qquad y = 2 \text{ sen } t$$

en el punto $(\sqrt{3}, 1)$. ¿Dónde tiene esta curva tangentes horizontales o verticales?

SOLUCIÓN En el punto con valor de parámetro t, la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}(2 \text{ sen } t)}{\dfrac{d}{dt}(2 \text{ sen } 2t)}$$

$$= \frac{2 \cos t}{2(\cos 2t)(2)} = \frac{\cos t}{2 \cos 2t}$$

El punto $(\sqrt{3}, 1)$ corresponde al valor del parámetro $t = \pi/6$, de modo que la pendiente de la tangente en ese punto es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/6} = \frac{\cos(\pi/6)}{2 \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Una ecuación de la recta tangente es, por tanto,

$$y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \sqrt{3}\right) \qquad \text{o} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$$

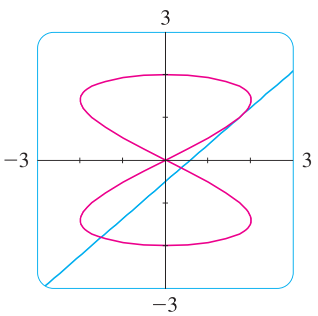


FIGURA 2

La Figura 2 muestra la curva y su recta tangente. La recta tangente es horizontal cuando $dy/dx = 0$, que ocurre cuando $\cos t = 0$ (y $\cos 2t \neq 0$), esto es, cuando $t = \pi/2$ o $3\pi/2$. (Observe que toda la curva está dada cuando $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.) Entonces la curva tiene tangentes horizontales en los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$, que podríamos haber deducido de la Figura 2.

La tangente es vertical cuando $dx/dt = 4\cos 2t = 0$ (y $\cos t \neq 0$), es decir, cuando $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$, o $7\pi/4$. Los correspondientes cuatro puntos en la curva son $\left(\pm 2, \pm\sqrt{2}\right)$. Si vemos de nuevo la Figura 2, veremos que nuestra respuesta parece ser razonable.

Cómo demostrar la Regla de la cadena

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, definimos el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

De acuerdo con la definición de la derivada, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por tanto, si denotamos por ε la diferencia entre el cociente de diferencia y la derivada, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si definimos ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, entonces ε se convierte en una función continua de Δx. Así, para una función f derivable, podemos escribir

$$\boxed{8} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \qquad \varepsilon \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de funciones derivables es lo que hace posible que demostremos la Regla de la cadena.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en a y $y = f(u)$ es derivable en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x y Δu y Δy son los correspondientes incrementos en u y y, entonces podemos usar la Ecuación 8 para escribir

$$\boxed{9} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Análogamente

$$\boxed{10} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituimos la expresión de Δu de la Ecuación 9 en la Ecuación 10, obtenemos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

y entonces $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la Ecuación 9 demuestra que $\Delta u \to 0$. Entonces $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Esto demuestra la Regla de la cadena. □

3.4 Ejercicios

1–6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la función exterior $y = f(u)$.] Entonces encuentre la derivada dy/dx.

1. $y = \sqrt[3]{1 + 4x}$

2. $y = (2x^3 + 5)^4$

3. $y = \tan \pi x$

4. $y = \operatorname{sen}(\cot x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \sqrt{2 - e^x}$

7–36 Encuentre la derivada de la función.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$

12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $h(t) = t^3 - 3^t$

16. $y = 3\cot(n\theta)$

17. $y = xe^{-kx}$

18. $y = e^{-2t}\cos 4t$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

21. $y = e^{x\cos x}$

22. $y = 10^{1-x^2}$

23. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

24. $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y + 1}\right)^5$

25. $y = \sec^2 x + \tan^2 x$

26. $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

28. $y = e^{k\tan\sqrt{x}}$

29. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$

30. $f(t) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 + 4}}$

31. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$

32. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

33. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$

34. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

35. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$

36. $y = 2^{3^{x^2}}$

37–40 Encuentre y' y y''.

37. $y = \cos(x^2)$

38. $y = \cos^2 x$

39. $y = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

40. $y = e^{e^x}$

41–44 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

41. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$

42. $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$

43. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

44. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$

45. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.
(b) Ilustre el inciso (a) al graficar la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

46. (a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ recibe el nombre de *curva de nariz de bala*. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 1)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

47. (a) Si $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable al comparar las gráficas de f y f'.

48. La función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, aparece en aplicaciones de síntesis de frecuencia modulada (FM).
(a) Use una gráfica de f producida por una calculadora graficadora para hacer un dibujo aproximado de la gráfica de f'.
(b) Calcule $f'(x)$ y use esta expresión, con una calculadora graficadora, para graficar f'. Compare con su dibujo del inciso (a).

49. Encuentre todos los puntos en la gráfica de la función $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ en la que la recta tangente es horizontal.

50. Encuentre las coordenadas x de todos los puntos en la curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen} x$ en la que la recta tangente es horizontal.

51. Si $F(x) = f(g(x))$, donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$, encuentre $F'(5)$.

52. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, encuentre $h'(1)$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

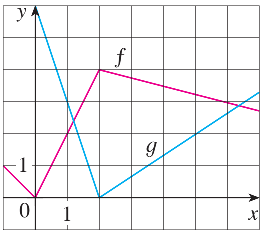
53. A continuación veamos una tabla de valores para f, g, f' y g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

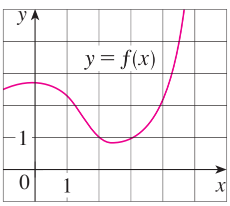
(a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.
(b) Si $H(x) = g(f(x))$, encuentre $H'(1)$.

54. Sean f y g las funciones del Ejercicio 53.
(a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.
(b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

55. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sean $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre cada derivada, si existe; si no existe, explique por qué.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



56. Si f es la función cuya gráfica se muestra, sean $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Use la gráfica de f para calcular el valor de cada derivada.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



57. Use la tabla para calcular el valor de $h'(0.5)$, donde $h(x) = f(g(x))$.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	12.6	14.8	18.4	23.0	25.9	27.5	29.1
$g(x)$	0.58	0.40	0.37	0.26	0.17	0.10	0.05

58. Si $g(x) = f(f(x))$, use la tabla para calcular el valor de $g'(1)$.

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	1.7	1.8	2.0	2.4	3.1	4.4

59. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

60. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

61. Sea $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$. Encuentre $r'(1)$.

62. Si g es una función doblemente derivable y $f(x) = xg(x^2)$, encuentre f'' en términos de g, g' y g''.

63. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, encuentre $F'(0)$.

64. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$, y $f'(3) = 6$, encuentre $F'(1)$.

65. Demuestre que la función $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$.

66. ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

67. Encuentre la 50ava derivada de $y = \cos 2x$.

68. Encuentre la 1000ésima derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

69. El desplazamiento de una partícula en una cuerda en vibración está dado por la ecuación

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen}(10\pi t)$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula después de t segundos.

70. Si la ecuación de movimiento de una partícula está dada por $s = A \cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula experimenta *movimiento armónico simple*.
(a) Encuentre la velocidad de la partícula en el tiempo t.
(b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

71. Una estrella variable Cefeida es aquella cuya brillantez alternativamente aumenta y disminuye. Una de estas estrellas, la que se ve con más facilidad, es Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre tiempos de máxima brillantez es 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es 4.0 y su brillantez cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de Delta Cefeida en el tiempo t, donde t se mide en días, ha sido modelada por la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

(a) Encuentre la rapidez de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Encuentre, correcta a dos posiciones decimales, la rapidez de aumento después de un día.

72. En el Ejemplo 4 de la Sección 1.3 llegamos a un modelo para la duración de luz diurna (en horas) en Filadelfia en el t-ésimo día del año:

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Use este modelo para comparar en qué forma el número de horas de luz diurna está aumentando en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

73. El movimiento de un resorte que está sometido a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento, por ejemplo un amortiguador en un automóvil, a veces está modelado por el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación de movimiento de un punto en ese resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t} \operatorname{sen} 2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad después de t segundos y grafique las funciones de posición y velocidad para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

74. Bajo ciertas circunstancias un rumor se extiende de acuerdo con la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que sabe del rumor en el tiempo t y a y k son constantes positivas. [En la Sección 7.5 veremos que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]

(a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.
(b) Encuentre la rapidez de dispersión del rumor.
(c) Grafique p para el caso $a = 10$, $k = 0.5$ con t medido en horas. Use la gráfica para calcular cuánto tardará el 80% de la población en enterarse del rumor.

75. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$, y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de las derivadas dv/dt y dv/ds.

76. Se bombea aire hacia un globo meteorológico esférico. En cualquier tiempo t, el volumen del globo es $V(t)$ y su radio es $r(t)$.

(a) ¿Qué representan las derivadas dV/dr y dV/dt?
(b) Exprese dV/dt en términos de dr/dt.

77. El *flash* de una cámara opera al almacenar carga en un condensador y liberándola de súbito cuando el *flash* se acciona. Los datos siguientes describen la carga Q restante en el condensador (medida en microcoulombs, μC) en el tiempo t (medido en segundos).

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

(a) Use una calculadora graficadora o computadora para hallar un modelo exponencial para la carga.
(b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (medida en microamperes, μA) que sale del condensador hacia la bombilla del *flash*. Use el inciso (a) para calcular la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare con el resultado del Ejemplo 2 de la Sección 2.1.

78. La tabla siguiente da la población de Estados Unidos de 1790 a 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3,929,000	1830	12,861,000
1800	5,308,000	1840	17,063,000
1810	7,240,000	1850	23,192,000
1820	9,639,000	1860	31,443,000

(a) Use una calculadora graficadora o computadora para ajustar una función exponencial a los datos. Grafique los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bueno es el ajuste?
(b) Calcule las tasas de crecimiento poblacional en 1800 y en 1850 al promediar pendientes y rectas secantes.
(c) Use el modelo exponencial del inciso (a) para calcular las tasas de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso (b).
(d) Use el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38,558,000. ¿Puede explicar la discrepancia?

79–81 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado del parámetro.

79. $x = t^4 + 1, \quad y = t^3 + t; \quad t = -1$

80. $x = \cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta; \quad \theta = 0$

81. $x = e^{\sqrt{t}}, \quad y = t - \ln t^2; \quad t = 1$

82–83 Encuentre los puntos en la curva donde la tangente es horizontal o vertical. Si cuenta con calculadora graficadora, grafique la curva para comprobar su trabajo.

82. $x = 2t^3 + 3t^2 - 12t, \quad y = 2t^3 + 3t^2 + 1$

83. $x = 10 - t^2, \quad y = t^3 - 12t$

84. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t)$ tiene dos rectas tangentes en el origen y encuentre sus ecuaciones. Ilustre al graficar la curva y sus tangentes.

85. Una curva C está definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.

(a) Demuestre que C tiene dos tangentes en el punto (3, 0) y encuentre sus ecuaciones.
(b) Encuentre los puntos en C donde la tangente es horizontal o vertical.
(c) Ilustre los incisos (a) y (b) al graficar C y las rectas tangentes.

86. El cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ se estudió en el Ejemplo 7 de la Sección 1.7.

(a) Encuentre una ecuación de la tangente al cicloide en el punto donde $\theta = \pi/3$.
(b) ¿En qué puntos es horizontal la tangente? ¿En dónde es vertical?
(c) Grafique el cicloide y sus rectas tangentes para el caso $r = 1$.

CAS **87.** Los sistemas computarizados de álgebra tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta puede no ser conveniente y por ello se requieren más comandos para simplificar la respuesta.

(a) Use un sistema computarizado de álgebra (CAS) para hallar la derivada en el Ejemplo 5 y compare con la respuesta en ese ejemplo. A continuación use el comando de simplificar y compare de nuevo.

(b) Use un CAS para hallar la derivada del Ejemplo 6. ¿Qué ocurre si se usa el comando de simplificar? ¿Qué ocurre si se usa el comando de factorizar? ¿Qué forma de la respuesta sería mejor para localizar tangentes horizontales?

CAS **88.** (a) Use un CAS para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplifique el resultado.

(b) ¿Dónde es que la gráfica de f tiene tangentes horizontales?

(c) Grafique f y f' en la misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con su respuesta al inciso (b)?

89. (a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n + 1)x$$

(b) Encuentre una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que sea semejante a la del inciso (a).

90. Encuentre ecuaciones de las tangentes a la curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que pasa por el punto (4, 3).

91. Use la Regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, entonces

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da una razón para la convención de que la medida en radianes se usa siempre cuando se trabaje con funciones trigonométricas en cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usamos medidas en grados.)

92. (a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y use la Regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde no es derivable f?

(c) Si $g(x) = \operatorname{sen}|x|$, encuentre $g'(x)$ y trace las gráficas de g y g'. ¿En dónde no es derivable g?

93. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g son funciones doblemente derivables, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

94. Suponga que una bola de nieve se derrite de modo que su volumen disminuye con rapidez proporcional a su área de superficie. Si se requiere de tres horas para que la bola de nieve se reduzca a la mitad de su volumen original, ¿cuánto tiempo más tardará la bola de nieve en derretirse por completo?

PROYECTO DE LABORATORIO Curvas de Bézier

Las **curvas de Bézier** se usan en diseño asistido por computadora y se llaman así en honor al matemático francés Pierre Bézier (1910-1999), que trabajó en la industria automotriz. Una curva cúbica de Bézier está determinada por cuatro *puntos de control*, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, y está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0(1 - t)^3 + 3x_1t(1 - t)^2 + 3x_2t^2(1 - t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1 - t)^3 + 3y_1t(1 - t)^2 + 3y_2t^2(1 - t) + y_3t^3$$

donde $0 \leq t \leq 1$. Observe que cuando $t = 0$ tenemos $(x, y) = (x_0, y_0)$ y cuando $t = 1$ tenemos $(x, y) = (x_3, y_3)$, de modo que la curva se inicia en P_0 y termina en P_3.

1. Grafique la curva de Bézier con puntos de control $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ y $P_3(40, 5)$. A continuación, en la misma pantalla, grafique los segmentos de recta P_0P_1, P_1P_2 y P_2P_3. (Ejercicio 29 en la Sección 1.7 muestra cómo hacer esto.) Observe que los puntos de control intermedios P_1 y P_2 no se encuentran en la curva; la curva se inicia en P_0, se dirige hacia P_1 y P_2 sin llegar a ellos y termina en P_3.

2. De la gráfica del Problema 1, parece que la tangente en P_0 pasa por P_1 y la tangente en P_3 pasa por P_2. Demuéstrelo.

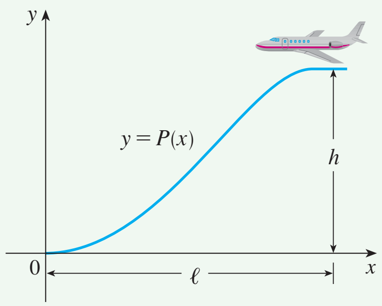
Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

3. Trate de producir una curva de Bézier con un lazo al cambiar el segundo punto de control en el Problema 1.

4. Algunas impresoras láser usan curvas de Bézier para representar letras y otros símbolos. Experimente con puntos de control hasta que encuentre una curva de Bézier que dé una representación razonable de la letra C.

5. Formas más complicadas pueden ser representadas al unir dos o más curvas de Bézier. Suponga que la primera curva de Bézier tiene puntos de control P_0, P_1, P_2, P_3 y la segunda tiene puntos de control P_3, P_4, P_5, P_6. Si deseamos que estas dos partes se unan sin irregularidades superficiales, entonces las tangentes en P_3 deben armonizar y por tanto los puntos P_2, P_3 y P_4 tienen que estar todos en esta recta tangente común. Usando este principio, encuentre puntos de control para un par de curvas de Bézier que representen la letra S.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿Dónde debe iniciar el descenso un piloto?



En la figura se ilustra una trayectoria de aproximación para un avión que aterriza; la figura satisface las siguientes condiciones:

(i) La altitud de crucero es h cuando el descenso se inicia a una distancia horizontal ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

(ii) El piloto debe mantener una velocidad horizontal v constante en todo el descenso.

(iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe exceder de una constante k (que es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Encuentre un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga la condición (i) al imponer condiciones apropiadas en $P(x)$ y $P'(x)$ al principio del descenso y al momento de tocar la pista.

2. Use las condiciones (ii) y (iii) para demostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponga que una línea aérea decide no permitir que la aceleración vertical de un avión exceda de $k = 860$ mi/h^2. Si la altitud de crucero de un avión es 35,000 pies y la rapidez es 300 mi/h, ¿a qué distancia del aeropuerto debe el piloto iniciar el descenso?

4. Grafique la trayectoria de aproximación si las condiciones indicadas en el Problema 3 quedan satisfechas.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

3.5 Derivación implícita

Las funciones que hemos encontrado hasta aquí se pueden describir si se expresa una variable explícitamente en términos de otra variable, por ejemplo

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o bien, en general, $y = f(x)$. Algunas funciones, no obstante, están definidas implícitamente por una relación entre x y y como

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

o también

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

En algunos casos es posible despejar y de esta ecuación como función explícita (o varias funciones) de x. Por ejemplo, si de la Ecuación 1 despejamos y, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, de modo que dos de las funciones determinadas por la Ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son las semicircunferencias superior e inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. (Véase Figura 1.)

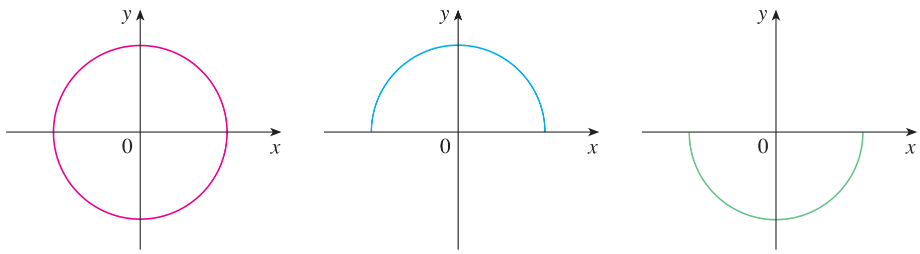


FIGURA 1 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil despejar y de la Ecuación 2 explícitamente como función de x a mano. (Un sistema computarizado de álgebra no tiene problemas, pero las expresiones que obtiene son muy complicadas.) No obstante, (2) es la ecuación de una curva llamada **folium de Descartes** que se muestra en la Figura 2 e implícitamente define y como varias funciones de x. Las gráficas de tres de estas funciones se muestran en la Figura 3. Cuando decimos que f es una función definida de manera implícita por la Ecuación 2, queremos decir que la ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

es verdadera para todos los valores de x del dominio de f.

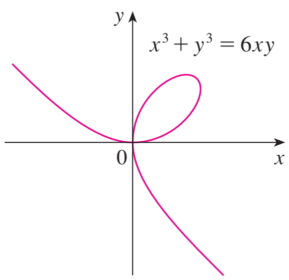


FIGURA 2 Folium de Descartes

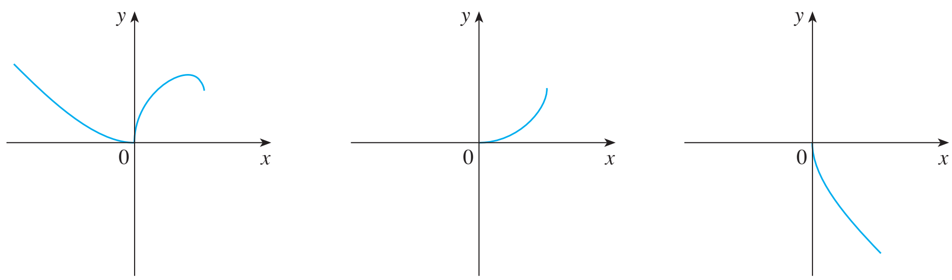


FIGURA 3 Gráficas de tres funciones definidas por el folium de Descartes

Afortunadamente, no es necesario despejar y de una ecuación en términos de x para hallar la derivada de y. En cambio, podemos usar el método de **derivación implícita** que consiste en derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x y luego despejar y' de la ecuación resultante. En los ejemplos y ejercicios de esta sección siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente como función derivable de x de modo que el método de derivación implícita se puede aplicar.

V EJEMPLO 1 Hallar implícitamente una recta tangente

(a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encuentre la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$.

SOLUCIÓN 1

(a) Derive ambos lados de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recordando que y es una función de x y usando la Regla de la cadena, tenemos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Entonces
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora despejamos dy/dx de esta ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) En el punto (3, 4) tenemos $x = 3$ y $y = 4$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

La ecuación de la tangente a la circunferencia en (3, 4) es entonces

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o sea} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

(b) Resolviendo la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto (3, 4) se encuentra en la semicircunferencia superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y por tanto consideramos la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Al derivar f usando la Regla de la cadena, tenemos

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

El Ejemplo 1 ilustra que aun cuando es posible despejar explícitamente y de una ecuación en términos de x, puede ser más fácil usar derivación implícita.

entonces
$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

y, al igual que en la Solución 1, la ecuación de la tangente es $3x + 4y = 25$.

Nota 1: La expresión $dy/dx = -x/y$ en la Solución 1 da la derivada en términos de x y de y. Es correcta no importa cuál función y sea determinada por la ecuación dada. Por ejemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

mientras que para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

V EJEMPLO 2

(a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.
(b) Encuentre la tangente al folio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ en el punto (3, 3).
(c) ¿En qué punto del primer cuadrante es horizontal la recta tangente?

SOLUCIÓN

(a) Derivando ambos lados de $x^3 + y^3 = 6xy$ con respecto a x, considerando y como función de x, y usando la Regla de la cadena en el término y^3 y la Regla del producto en el término $6xy$, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora despejamos y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

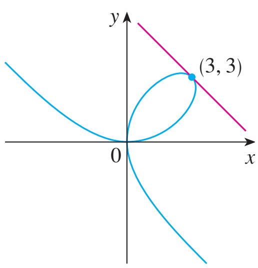


FIGURA 4

(b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

y una mirada a la Figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en (3, 3). Por lo tanto, la ecuación de la tangente al folio en (3, 3) es

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{o} \qquad x + y = 6$$

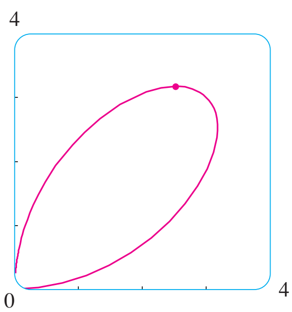


FIGURA 5

(c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Usando la expresión para y' del inciso (a), vemos que $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$ (siempre que $y^2 - 2x \neq 0$). Sustituyendo $y = \frac{1}{2}x^2$ en la ecuación de la curva, obtenemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

que se simplifica a $x^6 = 16x^3$. Como $x \neq 0$ en el primer cuadrante, tenemos $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, entonces $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Entonces la tangente es horizontal en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, que es aproximadamente (2.5198, 3.1748). Al observar la Figura 5, vemos que nuestra respuesta es razonable.

Nota 2: Hay una fórmula para las tres raíces de una ecuación cúbica que es como la fórmula cuadrática pero mucho más complicada. Si usamos esta fórmula (o un sistema computarizado de álgebra) para despejar y de la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$ en términos de x, obtenemos tres funciones determinadas por la ecuación:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

y

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

El matemático noruego Niels Abel demostró en 1824 que no se puede dar una fórmula general para las raíces de una ecuación de quinto grado en términos de radicales. Más tarde, el matemático francés Evariste Galois demostró que es imposible hallar una fórmula general para las raíces de una ecuación de n-ésimo grado (en términos de operaciones algebraicas en los coeficientes) si n es cualquier entero mayor a 4.

(Éstas son las tres funciones cuyas gráficas se muestran en la Figura 3.) Usted puede ver que el método de derivación implícita ahorra una enorme cantidad de trabajo en casos como éste. Además, la derivación implícita funciona con igual facilidad para ecuaciones como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

para la cual es *imposible* hallar una expresión similar para y en términos de x.

EJEMPLO 3 Hállese y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Derivando implícitamente con respecto a x y recordando que y es una función de x, obtenemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Observe que hemos empleado la Regla de la cadena en el lado izquierdo y la Regla del producto y Regla de la cadena en el lado derecho.) Si unimos los términos con y', obtenemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

De modo que
$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

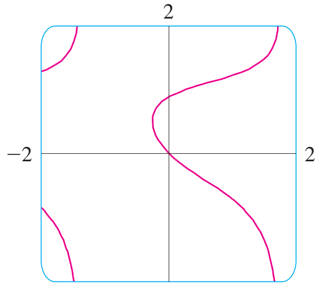


FIGURA 6

La Figura 6, trazada con el comando de graficación implícita de un sistema computarizado de álgebra, muestra parte de la curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como comprobación de nuestros cálculos, veamos que $y' = -1$ cuando $x = y = 0$ y parece de la gráfica que la pendiente es aproximadamente -1 en el origen.

Las Figuras 7, 8 y 9 muestran tres curvas más, generadas por un sistema computarizado de álgebra con un comando de graficación implícita. En los Ejercicios 37-38 usted tendrá oportunidad de crear y examinar curvas poco comunes de esta naturaleza.

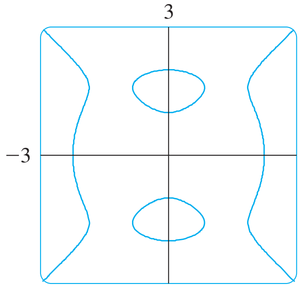


FIGURA 7
$(y^2 - 1)(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 4)$

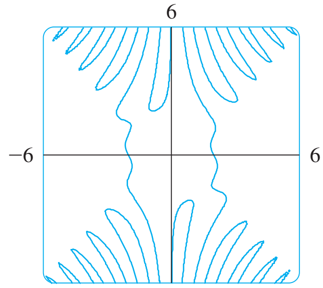


FIGURA 8
$(y^2 - 1) \operatorname{sen}(xy) = x^2 - 4$

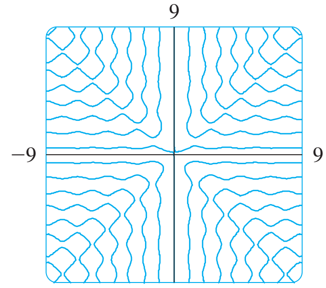


FIGURA 9
$y \operatorname{sen} 3x = x \cos 3y$

EJEMPLO 4 **Hallar implícitamente una segunda derivada** Encuentre y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUCIÓN Derivando implícitamente la ecuación con respecto a x, obtenemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Al despejar y' resulta

$$\boxed{3} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

La Figura 10 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del Ejemplo 4. Observe que es una versión estirada y aplanada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Por esta razón a veces se denomina *circunferencia ensanchada*. Se inicia muy empinado a la izquierda pero rápidamente se hace muy plano. Esto se puede ver de la expresión

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

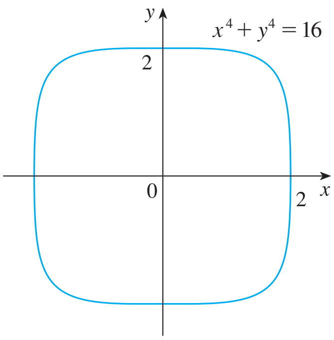


FIGURA 10

Para hallar y'' derivamos y' de esta expresión usando la Regla del cociente y recordando que y es una función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si ahora sustituimos la Ecuación 3 en esta expresión, tenemos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero los valores de x y de y deben satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$, por lo cual la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

3.5 Ejercicios

1–2
(a) Encuentre y' por derivación implícita.
(b) De la ecuación, despeje explícitamente y y derive para obtener y' en términos de x.
(c) Compruebe que sus soluciones a los incisos (a) y (b) son consistentes al sustituir la expresión de y en su solución del inciso (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $\cos x + \sqrt{y} = 5$

3–16 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

3. $x^3 + y^3 = 1$ **4.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

5. $x^2 + xy - y^2 = 4$ **6.** $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

7. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ **8.** $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

9. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$ **10.** $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

11. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ **12.** $y \operatorname{sen}(x^2) = x \operatorname{sen}(y^2)$

13. $e^{x/y} = x - y$ **14.** $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

15. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$ **16.** $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

17. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, encuentre $f'(1)$.

18. Si $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, encuentre $g'(0)$.

19–20 Considere y como la variable independiente y x como la variable dependiente y use derivación implícita para hallar dx/dy.

19. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **20.** $y \sec x = x \tan y$

21–28 Use derivación implícita para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

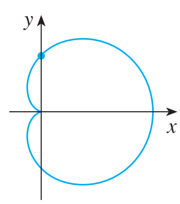
21. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$

22. $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y$, (π, π)

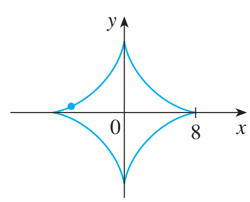
23. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

24. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbola)

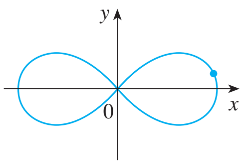
25. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$(0, \frac{1}{2})$
(cardioide)



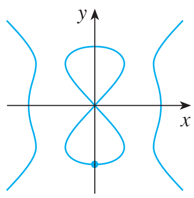
26. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astroide)



27. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
(3, 1)
(lemniscata)



28. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
(0, −2)
(curva del diablo)



29. (a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se denomina **kampila de Eudoxio**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto (1, 2).
(b) Ilustre el inciso (a) al graficar la curva y la recta tangente en una pantalla común. (Si su calculadora graficadora grafica implícitamente curvas definidas, entonces use esa función; si no es así, todavía puede graficar esta curva al graficar por separado sus mitades superior e inferior.)

30. (a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ recibe el nombre de **cúbica de Tschirnhausen**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto (1, −2).
(b) ¿En qué puntos esta curva tiene tangentes horizontales?
(c) Ilustre los incisos (a) y (b) al graficar la curva y las rectas tangentes en una pantalla común.

31–34 Encuentre y'' por derivación implícita.

31. $9x^2 + y^2 = 9$

32. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

33. $x^3 + y^3 = 1$

34. $x^4 + y^4 = a^4$

35. Si $xy + e^y = e$, encuentre el valor de y'' en el punto donde $x = 0$.

36. Si $x^2 + xy + y^3 = 1$, encuentre el valor de y''' en el punto donde $x = 1$.

CAS **37.** Se pueden crear figuras fantásticas si se usan funciones de graficación implícita de sistemas computarizados de álgebra.
(a) Grafique la curva con ecuación

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

¿En cuántos puntos tiene tangentes horizontales esta curva? Estime las coordenadas x de estos puntos.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos (0, 1) y (0, 2).
(c) Encuentre las coordenadas x exactas de los puntos del inciso (a).
(d) Cree curvas incluso más fantásticas al modificar la ecuación del inciso (a).

CAS **38.** (a) La curva con ecuación

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

se ha hecho a semejanza de un vagón robusto. Use un sistema computarizado de álgebra para graficar esta curva y descubrir por qué.
(b) ¿En cuántos puntos es que esta curva tiene rectas tangentes horizontales? Encuentre las coordenadas x de estos puntos.

39. Encuentre los puntos en la lemniscata del Ejercicio 27 donde la tangente es horizontal.

40. Demuestre por derivación implícita que la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

41–44 Dos curvas son **ortogonales** si sus rectas tangentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias dadas de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí, esto es, toda curva de una familia es ortogonal a toda curva de la otra familia. Trace ambas familias de curvas en los mismos ejes.

41. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

42. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

43. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

44. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

45. Demuestre que la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y la hipérbola $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ son trayectorias ortogonales si $A^2 < a^2$ y $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (de manera que la elipse y la hipérbola tienen los mismos focos).

46. Encuentre el valor del número a tal que las familias de curvas $y = (x + c)^{-1}$ y $y = a(x + k)^{1/3}$ son trayectorias ortogonales.

47. (a) La *ecuación de van der Waals* para n moles de un gas es

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión, V es el volumen y T es la temperatura del gas. La constante R es la constante universal del gas y a y b son constantes positivas que son características de un gas en particular. Si T permanece constante, use derivación implícita para hallar dV/dP.
(b) Encuentre la rapidez de cambio del volumen con respecto a la presión de 1 mol de dióxido de carbono a un volumen de $V = 10$ L y presión de $P = 2.5$ atm. Use $a = 3.592$ L^2-atm/mol^2 y $b = 0.04267$ L/mol.

48. (a) Use derivación implícita para hallar y' si $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.
CAS (b) Trace la curva del inciso (a). ¿Qué ve? Demuestre que lo que ve es correcto.
(c) En vista del inciso (b), ¿qué puede decir acerca de la expresión para y' que encontró en el inciso (a)?

49. Demuestre, usando derivación implícita, que cualquier recta tangente en un punto P a una circunferencia con centro O es perpendicular al radio OP.

50. Demuestre que la suma de las intersecciones x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ es igual a c.

51. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa una "elipse girada", es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en los que esta elipse interseca el eje x y demuestre que las rectas tangentes a estos puntos son paralelas.

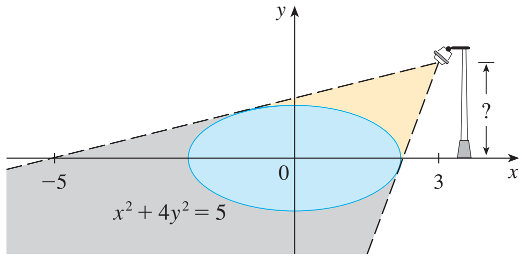
52. (a) ¿Dónde interseca la recta normal a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ en el punto $(-1, 1)$ por segunda vez?
(b) Ilustre el inciso (a) al graficar la elipse y la recta normal.

53. Encuentre todos los puntos en la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

54. Encuentre ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 3)$.

55. La **función de Bessel** de orden 0, $y = J(x)$, satisface la ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos los valores de x y su valor en 0 es $J(0) = 1$.
(a) Encuentre $J'(0)$.
(b) Use derivación implícita para hallar $J''(0)$.

56. La figura siguiente muestra una lámpara colocada tres unidades a la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leqslant 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿a qué distancia sobre el eje x está colocada la lámpara?



3.6 Funciones trigonométricas inversas y sus derivadas

Recuerde de la Sección 1.6 que las únicas funciones que tienen funciones inversas son funciones biunívocas. Las funciones trigonométricas, sin embargo, no son biunívocas y no tienen funciones inversas, pero podemos hacerlas biunívocas al restringir sus dominios y veremos que las inversas de estas funciones trigonométricas restringidas desempeñan un importante papel en cálculo integral.

Se puede ver de la Figura 1 que la función seno $y = \operatorname{sen} x$ no es biunívoca (use la Prueba de la Recta Horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, *es* biunívoca (véase Figura 2). La función inversa de esta función seno restringida f existe y está denotada por sen^{-1} o arcsen. Se denomina **función seno inversa** o **función arcoseno**.

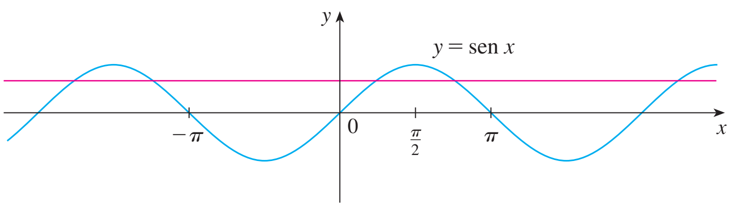


FIGURA 1

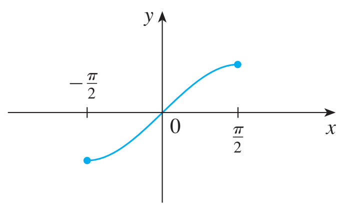


FIGURA 2 $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Como la definición de una función inversa dice que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

tenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Entonces, si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{sen}^{-1} x$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

EJEMPLO 1 Evalúe (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y (b) $\tan\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$.

SOLUCIÓN

(a) Tenemos

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

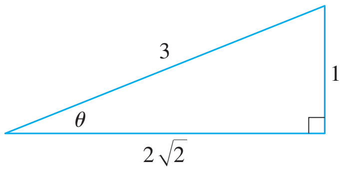


FIGURA 3

porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ se encuentra entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

(b) Sea $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$, de modo que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$. Entonces podemos trazar un triángulo recto con ángulo θ como en la Figura 3 y deducir del Teorema de Pitágoras que el tercer lado tiene longitud $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Esto hace posible que leamos del triángulo que

$$\tan\left(\operatorname{arcsen}\tfrac{1}{3}\right) = \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Las ecuaciones de cancelación para funciones inversas se convierten, en este caso, en

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ &\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}}$$

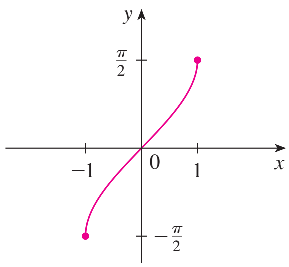


FIGURA 4

$y = \operatorname{sen}^{-1}x = \operatorname{arcsen}x$

La función seno inversa, sen^{-1}, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$, y su gráfica, que se muestra en la Figura 4, se obtiene de la de la función seno restringida (Figura 2) por reflexión alrededor de la recta $y = x$. Sabemos que la función seno f es continua, de modo que la función seno inversa también es continua.

Podemos usar derivación implícita para hallar la derivada de la función seno inversa, suponiendo que sea derivable. (La posibilidad de derivación es ciertamente plausible a partir de su gráfica de la Figura 4.)

Sea $y = \operatorname{sen}^{-1}x$. Entonces $\operatorname{sen}y = x$ y $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$. Derivando $\operatorname{sen}y = x$ implícitamente con respecto a x, obtenemos

$$\cos y\,\frac{dy}{dx} = 1$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, y entonces

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

El mismo método se puede usar para hallar una fórmula para la derivada de *cualquier* función inversa. Véase el Ejercicio 41.

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1}$$

V **EJEMPLO 2** Si $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$, encuentre (a) el dominio de f, (b) $f'(x)$ y (c) el dominio de f'.

SOLUCIÓN
(a) Como el dominio de la función seno inversa es $[-1, 1]$, el dominio de f es

$$\{x \mid -1 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 1\} = \{x \mid 0 \leqslant x^2 \leqslant 2\}$$
$$= \{x \mid |x| \leqslant \sqrt{2}\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

(b) Combinando la Fórmula 1 con la Regla de la cadena, tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} \frac{d}{dx}(x^2 - 1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (x^4 - 2x^2 + 1)}} 2x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}}$$

(c) El dominio de f' es

$$\{x \mid -1 < x^2 - 1 < 1\} = \{x \mid 0 < x^2 < 2\}$$
$$= \{x \mid 0 < |x| < \sqrt{2}\} = (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$$

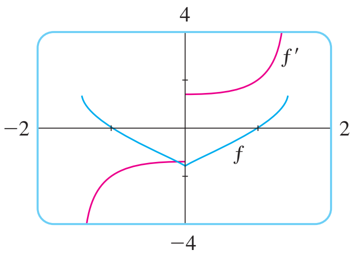


FIGURA 5

La gráfica de la función f del Ejemplo 2 y la derivada se muestran en la Figura 5. Observe que f no es derivable en 0 y esto es consistente con el hecho de que la gráfica de f' forma un salto repentino en $x = 0$.

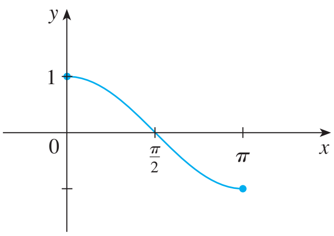


FIGURA 6
$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

La **función coseno inversa** se maneja de una manera semejante. La función coseno restringida $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ es biunívoca (véase Figura 6) y por tanto tiene una función inversa denotada por $\cos^{-1}$ o arccos.

$$\boxed{\cos^{-1}x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi}$$

La función coseno inversa, $\cos^{-1}$, tiene dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$ y es una función continua cuya gráfica se muestra en la Figura 7. Su derivada está dada por

2 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad -1 < x < 1}$$

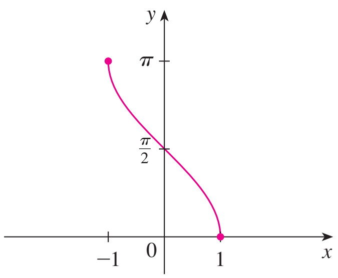


FIGURA 7
$y = \cos^{-1}x = \arccos x$

La Fórmula 2 puede ser demostrada por el mismo método que para la Fórmula 1 y se deja como Ejercicio 15.

La función tangente se puede hacer biunívoca al restringirla al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Entonces la **función tangente inversa** está definida como la inversa de la función $f(x) = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, como se ve en la Figura 8. Está denotada por $\tan^{-1}$ o arctan.

$$\boxed{\tan^{-1}x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

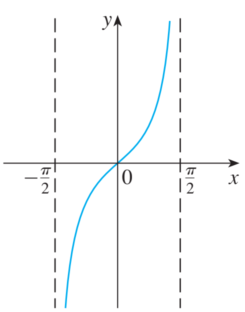


FIGURA 8
$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 3 Simplifique la expresión $\cos(\tan^{-1} x)$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \tan^{-1} x$. Entonces $\tan y = x$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Deseamos hallar $\cos y$ pero, como $\tan y$ es conocida, es más fácil hallar $\sec y$ primero.

Como $\qquad \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$

tenemos $\qquad \sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad$ (porque $\sec y > 0$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$)

Entonces $$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

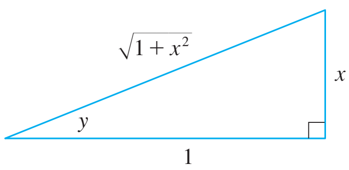


FIGURA 9

SOLUCIÓN 2 En lugar de usar identidades trigonométricas como en la Solución 1, es quizá más fácil usar un diagrama. Si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$, y podemos leer de la Figura 9 (que ilustra el caso $y > 0$) que

$$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

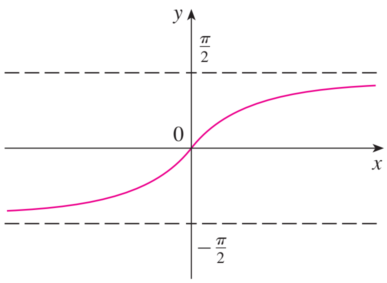


FIGURA 10
$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

La función tangente inversa, $\tan^{-1} = \arctan$, tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$. Su gráfica se muestra en la Figura 10.

Sabemos que

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -(\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

y por tanto las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan. Como la gráfica de $\tan^{-1}$ se obtiene por reflexión de la gráfica de la función tangente restringida alrededor de la recta $y = x$, se deduce que las rectas $y = \pi/2$ y $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de $\tan^{-1}$. Este dato está expresado por los siguientes límites:

3 $$\boxed{\lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2}}$$

EJEMPLO 4 Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x - 2}\right)$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/(x - 2)$, sabemos que $t \to \infty$ cuando $x \to 2^+$. Por tanto, por la primera ecuación en (3), tenemos

$$\lim_{x \to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x - 2}\right) = \lim_{t \to \infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$

La fórmula para la derivada de la función arcotangente se deriva de manera que es similar al método que empleamos para arcoseno. Si $y = \tan^{-1}x$, entonces $\tan y = x$. Derivando esta última ecuación implícitamente con respecto a x, tenemos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

y por tanto $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

4 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

EJEMPLO 5 Derive (a) $y = \dfrac{1}{\tan^{-1}x}$ y (b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)^{-1} = -(\tan^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\tan^{-1}x)^2(1 + x^2)}$$

(b) Usando la Regla del producto y la Regla de la cadena, tenemos

Recuerde que $\arctan x$ es una notación alternativa para $\tan^{-1}x$.

$$f'(x) = x\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \arctan\sqrt{x}$$

Las funciones trigonométricas inversas que se presentan con más frecuencia son las que acabamos de explicar. Las fórmulas de derivación para las funciones trigonométricas inversas restantes se pueden hallar en la Página de Referencia 5, Fórmulas 22-24.

3.6 Ejercicios

1–8 Encuentre el valor exacto de cada expresión.

1. (a) $\text{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

2. (a) $\tan^{-1}(1/\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

3. (a) $\arctan 1$ (b) $\text{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})$

4. (a) $\tan^{-1}(\tan 3\pi/4)$ (b) $\cos(\text{arcsen}\,\frac{1}{2})$

5. $\tan(\text{sen}^{-1}(\frac{2}{3}))$

6. $\csc(\arccos\frac{3}{5})$

7. $\text{sen}(2\tan^{-1}\sqrt{2})$

8. $\cos(\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3)$

9. Demuestre que $\cos(\text{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

10–12 Simplifique la expresión.

10. $\tan(\text{sen}^{-1}x)$

11. $\text{sen}(\tan^{-1}x)$

12. $\cos(2\tan^{-1}x)$

13–14 Grafique las funciones dadas en la misma pantalla. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

13. $y = \text{sen}\,x,\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2;\quad y = \text{sen}^{-1}x;\quad y = x$

14. $y = \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2;\quad y = \tan^{-1}x;\quad y = x$

15. Demuestre la Fórmula 2 por el mismo método que para la Fórmula 1.

16. (a) Demuestre que $\text{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$.
(b) Use el inciso (a) para demostrar la Fórmula 2.

17–29 Encuentre la derivada de la función. Simplifique donde sea posible.

17. $y = (\tan^{-1}x)^2$

18. $y = \tan^{-1}(x^2)$

19. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$

20. $F(\theta) = \text{arcsen}\sqrt{\text{sen}\,\theta}$

21. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\arccos x$

22. $f(x) = x\ln(\arctan x)$

23. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$

24. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

25. $y = \arctan(\cos\theta)$

26. $y = \cos^{-1}(\text{sen}^{-1}t)$

27. $y = x\,\text{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

28. $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

29. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right),\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ a > b > 0$

30–31 Encuentre la derivada de la función. Encuentre los dominios de la función y su derivada.

30. $f(x) = \text{arcsen}(e^x)$

31. $g(x) = \cos^{-1}(3 - 2x)$

32. Encuentre y' si $\tan^{-1}(xy) = 1 + x^2y$.

33. Si $g(x) = x\,\text{sen}^{-1}(x/4) + \sqrt{16 - x^2}$, encuentre $g'(2)$.

34. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3\arccos(x/2)$ en el punto $(1, \pi)$

35–36 Encuentre $f'(x)$. Compruebe que su respuesta sea razonable al comparar las gráficas de f y f'.

35. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{arcsen}\,x$

36. $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

37–40 Encuentre el límite.

37. $\lim_{x \to -1^+} \operatorname{sen}^{-1} x$

38. $\lim_{x \to \infty} \arccos\left(\dfrac{1 + x^2}{1 + 2x^2}\right)$

39. $\lim_{x \to \infty} \arctan(e^x)$

40. $\lim_{x \to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

41. (a) Suponga que f es una función biunívoca y su función inversa f^{-1} es también derivable. Use derivación implícita para demostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el denominador no sea 0.

(b) Si $f(4) = 5$ y $f'(4) = \frac{2}{3}$, encuentre $(f^{-1})'(5)$.

42. (a) Demuestre que $f(x) = 2x + \cos x$ es biunívoca.

(b) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(1)$?

(c) Use la fórmula del Ejercicio 41(a) para hallar $(f^{-1})'(1)$.

43. Use la fórmula del Ejercicio 41(a) para demostrar

(a) la Fórmula 1 (b) la Fórmula 4

44. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$.

(b) Trace la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) Demuestre que $g'(x) = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

(d) Trace la gráfica de $h(x) = \cos^{-1}(\operatorname{sen} x)$, $x \in \mathbb{R}$, y encuentre su derivada.

3.7 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección usamos derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ y, en particular, la función logarítmica natural $y = \ln x$. (Se puede demostrar que las funciones logarítmicas son derivables; esto es ciertamente plausible a partir de sus gráficas. Véase en la Figura 4 de la Sección 1.6 las gráficas de las funciones logarítmicas.)

1
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Entonces

$$a^y = x$$

La Fórmula 3.4.5 dice que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Derivando esta ecuación implícitamente con respecto a x, usando la Fórmula 3.4.5, obtenemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

y por tanto
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Si hacemos $a = e$ en la Fórmula 1, entonces el factor $\ln a$ en el lado derecho se convierte en $\ln e = 1$ y obtenemos la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Al comparar las Fórmulas 1 y 2, vemos una de las principales razones por las que los logaritmos naturales (logaritmos con base e) se usan en cálculo: la fórmula de derivación es más sencilla cuando $a = e$ porque $\ln e = 1$.

V EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para usar la Regla de la cadena, hacemos $u = x^3 + 1$. Entonces $y = \ln u$, y tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3+1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

En general, si combinamos la Fórmula 2 con la Regla de la cadena como en el Ejemplo 1, obtenemos

3 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{o sea} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Usando (3), tenemos

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x$$

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN Esta vez el logaritmo es la función interior, de modo que la Regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EJEMPLO 4 **Derivación de un logaritmo con base 10** Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Usando la Fórmula 1 con $a = 10$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10} \end{aligned}$$

La Figura 1 muestra la gráfica de la función f del Ejemplo 5, junto con la gráfica de su derivada. Da una comprobación visual de nuestros cálculos. Observe que $f'(x)$ es grande negativa cuando f es rápidamente decreciente.

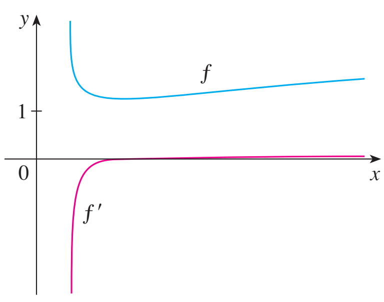


FIGURA 1

EJEMPLO 5 **Simplificando antes de derivar** Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\ &= \frac{x - 2 - \tfrac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si primero simplificamos la función dada usando las leyes de logaritmos, entonces la derivación se hace más fácil:

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Esta respuesta se puede dejar como está escrita, pero si usamos un denominador común veríamos que da la misma respuesta como en la Solución 1.)

La Figura 2 muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$ en el Ejemplo 6 y su derivada $f'(x) = 1/x$. Observe que cuando x es pequeña, la gráfica de $y = \ln|x|$ es muy inclinada y por eso $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

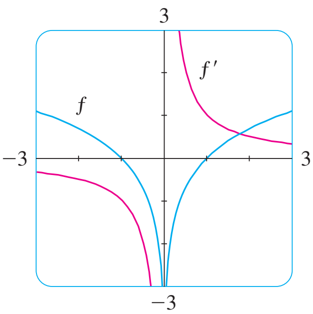


FIGURA 2

V **EJEMPLO 6** Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$.

SOLUCIÓN Como

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se sigue que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces $f'(x) = 1/x$ para toda $x \neq 0$.

El resultado del Ejemplo 6 merece recordarse:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}}$$

Derivación logarítmica

El cálculo de derivadas de funciones complicadas con productos, cocientes o potencias pueden con frecuencia simplificarse si se toman logaritmos. El método empleado en el siguiente ejemplo se denomina **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 7 **Derivación logarítmica** Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tomamos logaritmos de ambos lados de la ecuación y usamos las leyes de los logaritmos para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Derivando implícitamente con respecto a x da

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Despejando dy/dx, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Si no hubiéramos usado derivación logarítmica en el Ejemplo 7, hubiéramos tenido que usar la Regla del cociente y la Regla del producto. El cálculo resultante hubiera sido horrible.

Debido a que tenemos una expresión explícita de y, podemos sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Pasos en derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y usar las Leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente con respecto a x.
3. De la ecuación resultante, despejar y'.

Si $f(x) < 0$ para algunos valores de x, entonces $\ln f(x)$ no está definida, pero podemos escribir $|y| = |f(x)|$ y usar la Ecuación 4. Ilustramos este procedimiento al demostrar la versión general de la Regla de potencias, como en la Sección 3.1.

La Regla de potencias Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$ y usemos derivación logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Si $x = 0$, podemos demostrar que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ directamente de la definición de una derivada.

Por tanto

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

En consecuencia,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Usted debe distinguir con todo cuidado entre la Regla de potencias $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, donde la base es variable y el exponente es constante y la regla para derivar funciones exponenciales $[(a^x)' = a^x \ln a]$, donde la base es constante y el exponente es variable.

En general, hay cuatro casos para exponentes y bases:

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0 \qquad$ (a y b son constantes)
2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$
3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$
4. Para hallar $(d/dx)[f(x)^{g(x)}]$, se puede usar derivación logarítmica, como en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 8 Qué hacer si base y exponente contienen x Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Usando derivación logarítmica, tenemos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

La Figura 3 ilustra el Ejemplo 8 al mostrar las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

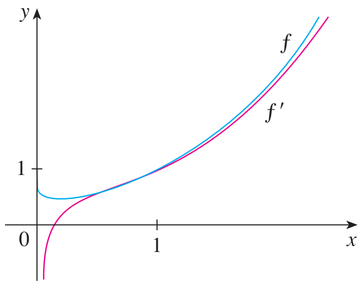


FIGURA 3

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\,\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\,\ln x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como en la Solución 1)}$$

El número e como límite

Hemos demostrado que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$. Así, $f'(1) = 1$. Ahora usamos este dato para expresar el número e como un límite.

De la definición de una derivada como límite, tenemos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1 + x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x}$$

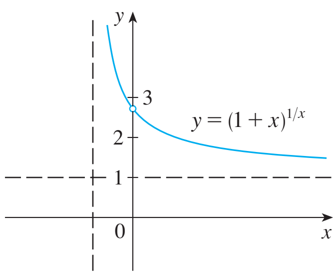


FIGURA 4

Como $f'(1) = 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Entonces, por el Teorema 2.4.8 y la continuidad de la función exponencial, tenemos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$$

x	$(1 + x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

5 $$\boxed{e = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}}$$

La Fórmula 5 está ilustrada por la gráfica de la función $y = (1 + x)^{1/x}$ en la Figura 4 y una tabla de valores para valores pequeños de x. Esto ilustra el hecho de que, correcto a siete posiciones decimales,

$$e \approx 2.7182818$$

Si ponemos $n = 1/x$ en la Fórmula 5, entonces $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y entonces una expresión alternativa para e es

$$\boxed{6} \qquad \boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.7 Ejercicios

1. Explique por qué la función logaritmo natural $y = \ln x$ se usa con mucha mayor frecuencia en cálculo que las otras funciones logarítmicas $y = \log_a x$.

2–20 Derive la función.

2. $f(x) = x \ln x - x$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$

6. $f(x) = \log_5(xe^x)$

7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

8. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

9. $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$

10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

11. $F(t) = \ln \dfrac{(2t + 1)^3}{(3t - 1)^4}$

12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

14. $F(y) = y \ln(1 + e^y)$

15. $y = \ln|2 - x - 5x^2|$

16. $H(z) = \ln\sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

17. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

18. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$

19. $y = 2x \log_{10}\sqrt{x}$

20. $y = \log_2(e^{-x}\cos \pi x)$

21–22 Encuentre y' y y''.

21. $y = x^2 \ln(2x)$

22. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

23–24 Derive f y encuentre el dominio de f.

23. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

24. $f(x) = \ln \ln \ln x$

25–27 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

25. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$

26. $y = \ln(x^3 - 7)$, $(2, 0)$

27. $y = \ln\left(xe^{x^2}\right)$, $(1, 1)$

28. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = (\ln x)/x$ en los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1/e)$. Ilustre graficando la curva y sus rectas tangentes.

29. (a) ¿En qué intervalo es decreciente $f(x) = x \ln x$?
(b) ¿En qué intervalo es f cóncava hacia arriba?

30. Si $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encuentre $f'(x)$. Compruebe que su respuesta es razonable al comparar las gráficas de f y f'.

31. Sea $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. ¿Para qué valor de c es $f'(\pi/4) = 6$?

32. Sea $f(x) = \log_a(3x^2 - 2)$. ¿Para qué valor de a es $f'(1) = 3$?

33–42 Use derivación logarítmica para hallar la derivada de la función.

33. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

34. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

35. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \tan^4 x}{(x^2 + 1)^2}$

36. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

37. $y = x^x$

38. $y = x^{\cos x}$

39. $y = (\cos x)^x$

40. $y = \sqrt{x}^{\,x}$

41. $y = (\tan x)^{1/x}$

42. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

43. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

44. Encuentre y' si $x^y = y^x$.

45. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

46. Encuentre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

47. Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

48. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ para cualquier $x > 0$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

PROYECTO PROPUESTO

Funciones hiperbólicas

Ciertas combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} aparecen con tanta frecuencia en matemáticas y sus aplicaciones que merecen recibir nombres especiales. Este proyecto explora las propiedades de funciones llamadas **funciones hiperbólicas.** Las funciones de **seno hiperbólico, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica** y **secante hiperbólica** están definidas como sigue:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

La razón para los nombres de estas funciones es que están relacionadas con la hipérbola en forma muy semejante a como las funciones trigonométricas están relacionadas con el círculo.

1. (a) Trace manualmente las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes y use adición gráfica para trazar la gráfica de cosh.
(b) Compruebe la precisión de su trazo del inciso (a) usando una calculadora graficadora o computadora para graficar $y = \cosh x$. ¿Cuáles son el dominio y el rango de esta función?

2. La aplicación más frecuente de funciones hiperbólicas es el uso del coseno hiperbólico para describir la forma de un alambre colgante. Se puede demostrar que si un cable flexible pesado (por ejemplo una línea telefónica o de energía eléctrica) está suspendido entre dos puntos a la misma altura, entonces toma la forma de una curva con ecuación $y = a \cosh(x/a)$ llamada *catenaria*. (La palabra latina *catena* significa "cadena.") Grafique varios miembros de la familia de funciones $y = a \cosh(x/a)$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando a varía?

3. Grafique senh y tanh. A juzgar por sus gráficas, ¿cuál de las funciones senh, cosh y tanh son pares? ¿Cuáles son impares? Use las definiciones para demostrar sus aseveraciones.

4. Demuestre la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

5. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$. ¿Puede identificar esta curva?

6. Demuestre la identidad $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$.

7. Las identidades de los Problemas 4 y 6 son semejantes a identidades trigonométricas bien conocidas. Trate de descubrir otras identidades hiperbólicas usando identidades trigonométricas conocidas (Página de Referencia 2) como inspiración.

8. Las fórmulas de derivación para las funciones hiperbólicas son análogas a las de las funciones trigonométricas, pero los signos son algo diferentes.
(a) Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$.
(b) Descubra fórmulas para las derivadas de $y = \cosh x$ y $y = \tanh x$.

9. (a) Explique por qué senh es una función biunívoca.
(b) Encuentre una fórmula para la derivada de la función seno hiperbólico $y = \operatorname{senh}^{-1} x$. [*Sugerencia*: ¿Cómo encontramos la derivada de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$?]
(c) Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.
(d) Use el resultado del inciso (c) para hallar la derivada de $\operatorname{senh}^{-1} x$. Compare con su respuesta al inciso (b).

10. (a) Explique por qué tanh es una función biunívoca.
(b) Encuentre una fórmula para la derivada de la función tangente hiperbólica inversa $y = \tanh^{-1} x$.
(c) Demuestre que $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.
(d) Use el resultado del inciso (c) para hallar la derivada de $\tanh^{-1} x$. Compare con su respuesta al inciso (b).

11. ¿En qué punto en la curva $y = \cosh x$ tiene pendiente 1 la tangente?

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

3.8 Rapidez de cambio en ciencias naturales y sociales

Sabemos que si $y = f(x)$, entonces la derivada dy/dx se puede interpretar como la rapidez de cambio de y con respecto a x. En esta sección examinamos algunas de las aplicaciones de esta idea en física, química, biología, economía y otras ciencias.

Recordemos de la Sección 2.6 la idea básica que hay detrás de la rapidez de cambio. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

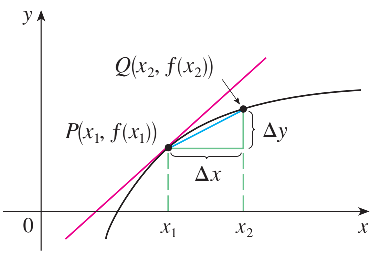
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de la diferencia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = promedio de rapidez de cambio
$m = f'(x_1)$ = rapidez instantánea de cambio

FIGURA 1

es el **promedio de rapidez de cambio de *y* con respecto a *x*** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$ y puede ser interpretado como la pendiente de la recta secante PQ en la Figura 1. Su límite cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, que por lo tanto se puede interpretar como la **rapidez instantánea de cambio de *y* con respecto a *x*** o la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Usando notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como rapidez de cambio. (Como ya explicamos en la Sección 2.6, las unidades de dy/dx son las unidades de y divididas entre las unidades de x.) A continuación veamos algunas de estas interpretaciones en ciencias naturales y sociales.

Física

Si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ representa el promedio de velocidad en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la rapidez de cambio de desplazamiento con respecto al tiempo). La rapidez instantánea de cambio de velocidad con respecto al tiempo es **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se estudió en las Secciones 2.6 y 2.7, pero ahora que conocemos las fórmulas de derivación, con más facilidad podemos resolver problemas referentes al movimiento de objetos.

V EJEMPLO 1 Análisis del movimiento de una partícula La posición de una partícula está dada por la ecuación

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

(a) Encuentre la velocidad en el tiempo t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 s? ¿Después de 4 s?
(c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
(d) ¿Cuándo está la partícula moviéndose hacia delante (esto es, en la dirección positiva)?
(e) Trace un diagrama para representar el movimiento de la partícula.
(f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.
(g) Encuentre la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.

(h) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
(i) ¿Cuándo está acelerando la partícula? ¿Cuándo está reduciendo su velocidad?

SOLUCIÓN
(a) La función velocidad es la derivada de la función de posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$, es decir,

$$v(2) = \frac{ds}{dt}\bigg|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, o sea,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto es cierto cuando $t = 1$ o $t = 3$. Así, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.
(d) La partícula se mueve en la dirección positiva cuando $v(t) > 0$, esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad es verdadera cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando ambos factores son negativos ($t < 1$). Entonces la partícula se mueve en la dirección positiva en los intervalos $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

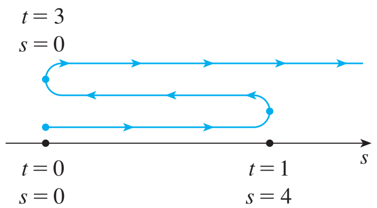


FIGURA 2

(e) Usando la información del inciso (d) hacemos un esquema en la Figura 2 del movimiento de la partícula, en una dirección y otra a lo largo de la recta (el eje s).
(f) Por lo que aprendimos en los incisos (d) y (e), necesitamos calcular las distancias recorridas durante los intervalos [0, 1], [1, 3] y [3, 5] separadamente.
La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$ la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$ la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

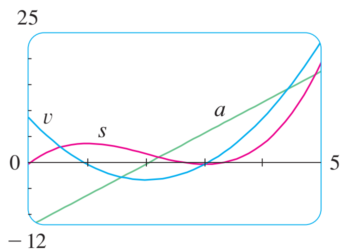


FIGURA 3

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m.
(g) La aceleración es la derivada de la función de velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

(h) La Figura 3 muestra las gráficas de s, v y a.

(i) La partícula acelera cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son ambas positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son ambas negativas). En otras palabras, la partícula acelera cuando la velocidad y aceleración tienen el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se mueve.) De la Figura 3 vemos que esto ocurre cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula reduce su velocidad cuando v y a tienen signos contrarios, es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La Figura 4 resume el movimiento de la partícula.

TEC En Module 3.8 se puede ver una animación de la Figura 4 con una expresión para s que el usuario puede escoger.

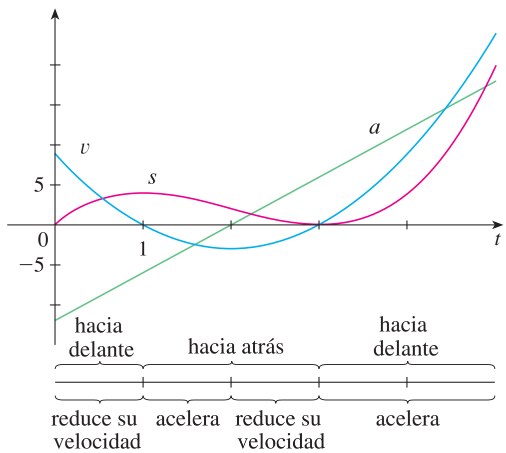


FIGURA 4

EJEMPLO 2 **Densidad lineal** Si una varilla o trozo de alambre es homogénea, entonces su densidad lineal es uniforme y está definida como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por metro. Supongamos, no obstante, que la varilla no es homogénea pero que su masa medida desde su extremo izquierdo al punto x es $m = f(x)$, como se muestra en la Figura 5.

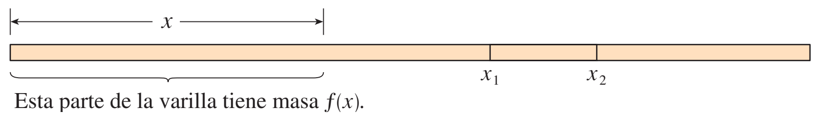


FIGURA 5

La masa de la parte de la varilla que está entre $x = x_1$ y $x = x_2$ está dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, de modo que el promedio de densidad de esa parte de la varilla es

$$\text{promedio de densidad} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora hacemos $\Delta x \to 0$ (esto es, $x_2 \to x_1$), estamos calculando el promedio de densidad en intervalos cada vez más pequeños. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estos promedios de densidad cuando $\Delta x \to 0$; esto es, la densidad lineal es la rapidez de cambio de masa con respecto a longitud. Simbólicamente,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Entonces la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa con respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, donde x se mide en metros y m en kilogramos, entonces el promedio de densidad de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48 \text{ kg/m}$$

mientras que la densidad a la derecha de $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50 \text{ kg/m}$$

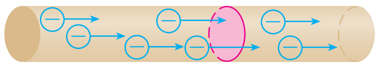


FIGURA 6

V EJEMPLO 3 Una corriente es la derivada de una carga Siempre que se mueven cargas eléctricas existe una corriente. La Figura 6 muestra parte de un alambre y electrones que se mueve en una superficie plana, sombreada de rojo. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, entonces el promedio de corriente durante este intervalo está definido como

$$\text{promedio de corriente} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si tomamos el límite de este promedio de corriente en intervalos cada vez más cortos, obtenemos lo que se llama **corriente** I en un tiempo determinado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Entonces la corriente es la rapidez a la que fluye carga por una superficie. Se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (coulombs por segundo, llamados amperes).

La velocidad, densidad y corriente no son las únicas magnitudes de rapidez de cambio que son importantes en física. Otras incluyen la potencia (rapidez con la que se realiza trabajo), la rapidez de flujo de calor, gradiente de temperatura (la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la posición), y la rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva en física nuclear.

Química

EJEMPLO 4 Rapidez de reacción Una reacción química resulta en la formación de una o más sustancias (llamadas *productos*) de uno o más materiales iniciales (llamados *reactivos*). Por ejemplo, la "ecuación"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una molécula de oxígeno forman dos moléculas de agua. Consideremos la reacción

$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles (1 mol = 6.022×10^{23} moléculas) por litro y está denotada por [A]. La concentración varía durante una reacción, de modo que [A], [B] y [C] son todas funciones del tiempo (t). El promedio de rapidez de reacción del producto C en un intervalo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero los químicos están más interesados en la **rapidez instantánea de reacción,** que se obtiene al tomar el límite del promedio de rapidez de reacción cuando el intervalo Δt se aproxima a 0:

$$\text{rapidez de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}$$

Como la concentración del producto aumenta a medida que continúa la reacción, la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$ será positiva, de modo que la rapidez de reacción de C es positiva. Las concentraciones de los reactivos, no obstante, disminuyen durante la reacción, y, para hacer que la rapidez de reacción de A y B sea de números positivos, ponemos signos menos frente a las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Como [A] y [B] disminuyen cada una con la misma rapidez que [C] aumenta, tenemos

$$\text{rapidez de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

Más generalmente, resulta que para una reacción de la forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \to c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

tenemos

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La rapidez de reacción se puede determinar a partir de datos y métodos gráficos. En algunos casos son fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo, que hacen posible que calculemos la rapidez de reacción (véase el Ejercicio 22).

EJEMPLO 5 **Compresibilidad** Una de las cantidades de interés en termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a temperatura constante, entonces su volumen V depende de su presión P. Podemos considerar la rapidez de cambio de volumen con respecto a la presión, es decir, la derivada dV/dP. Cuando P aumenta, V disminuye, y $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Entonces β mide la rapidez, por unidad de volumen, en que el volumen de una sustancia disminuye cuando la presión sobre ella aumenta a temperatura constante.

Por ejemplo, el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25°C se encontró que está relacionado con la presión P (en kilopascales) por la ecuación

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La rapidez de cambio de V con respecto a P cuando $P = 50$ kPa es

$$\frac{dV}{dP}\bigg|_{P=50} = -\frac{5.3}{P^2}\bigg|_{P=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2500} = -0.00212 \text{ m}^3/\text{kPa}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}\bigg|_{P=50} = \frac{0.00212}{\dfrac{5.3}{50}} = 0.02 \ (\text{m}^3/\text{kPa})/\text{m}^3$$

Biología

EJEMPLO 6 **Rapidez de crecimiento de una población** Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población animal o vegetal en el tiempo t. El cambio en el tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, y entonces el promedio de rapidez de crecimiento durante el periodo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{promedio de rapidez de crecimiento} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **rapidez instantánea de crecimiento** se obtiene a partir de este promedio de rapidez de crecimiento si hacemos que el periodo Δt se aproxime a 0:

$$\text{rapidez de crecimiento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Hablando estrictamente, esto no es muy preciso porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ será una función escalón que es discontinua siempre que ocurra un nacimiento o muerte y por tanto no es derivable. No obstante, para una gran población animal o vegetal, podemos sustituir la gráfica por una curva de aproximación lisa como en la Figura 7.

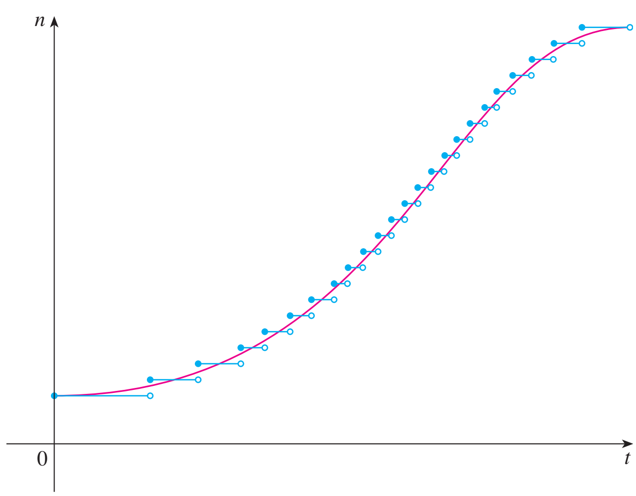


FIGURA 7
Curva de aproximación lisa de una función de crecimiento

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutriente homogéneo. Suponga que al muestrear la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, entonces

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

y, en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la Sección 3.4 demostramos que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

De modo que la rapidez de crecimiento de la población de bacterias en el tiempo t es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por ejemplo, supóngase que empezamos con una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. Entonces la rapidez de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias está creciendo a razón de unas 1109 bacterias por hora.

EJEMPLO 7 **Circulación sanguínea** Cuando consideramos la circulación sanguínea en un vaso, por ejemplo una vena o arteria, podemos modelar la forma del vaso sanguíneo como un tubo cilíndrico con radio R y longitud l como se ilustra en la Figura 8.

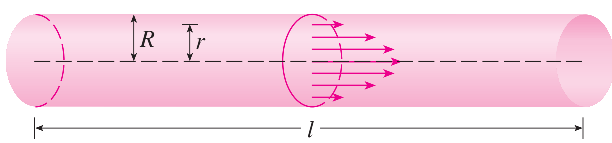


FIGURA 8
Circulación sanguínea en una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es máxima a lo largo del eje central del tubo y disminuye a medida que aumenta la distancia r desde el eje hasta que v es 0 en las paredes. La relación entre v y r está dada por la **ley de flujo laminar** descubierta por el médico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. Esta ley expresa que

Para información más detallada, véase la obra de W. Nichols y M.O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles,* 5th ed. (Nueva York, 2005.)

1 $$v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia de presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, entonces v es una función de r con dominio $[0, R]$.

El promedio de rapidez de cambio de la velocidad cuando nos movemos de $r = r_1$ hacia fuera a $r = r_2$ está dado por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si hacemos que $\Delta r \to 0$, obtenemos el **gradiente de velocidad**, es decir, la rapidez instantánea de cambio de velocidad con respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Usando la Ecuación 1, obtenemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las más pequeñas arterias en seres humanos tomamos $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm, y $P = 4000$ dinas/cm^2, que da

$$\begin{aligned} v &= \frac{4000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2) \\ &\approx 1.85 \times 10^4(6.4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

En $r = 0.002$ cm la sangre está circulando a una rapidez de

$$\begin{aligned} v(0.002) &\approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1.11 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para tener una idea de lo que significa este enunciado, cambiemos nuestras unidades de centímetros a micrómetros (1 cm = 10,000 μm). Entonces el radio de la arteria es 80 μm. La velocidad en el eje central es 11,850 μm/s, que disminuye a 11,110 μm/s a una distancia de $r = 20$ μm. El hecho de que $dv/dr = -74$ (μm/s)/μm significa que, cuando $r = 20$ μm, la velocidad se está reduciendo a razón de unos 74 μm/s por cada micrómetro que nos alejemos del centro.

Economía

V EJEMPLO 8 Costo marginal Suponga que $C(x)$ es el costo total en que incurre una compañía al producir x unidades de cierta mercancía. La función C recibe el nombre de **función de costo**. Si el número de artículos producidos se aumenta de x_1 a x_2, entonces el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, y el promedio de rapidez de cambio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

El límite de esta cantidad cuando $\Delta x \to 0$, esto es, la rapidez instantánea de cambio de costo con respecto al número de artículos producidos, es denominado **costo marginal** por los economistas:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Como x toma sólo valores enteros, puede no tener sentido literal hacer que Δx se aproxime a 0, pero podemos siempre sustituir $C(x)$ por una función de aproximación lisa como en el Ejemplo 6.]

Tomando $\Delta x = 1$ y n grande (para que Δx sea pequeña comparada con n), tenemos

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Entonces el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de producir una unidad más, la $(n + 1)$-ésima unidad.

A veces es apropiado representar una función de costo total por un polinomio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa los gastos indirectos (renta, calefacción, mantenimiento) y los otros términos representan el costo de materias primas, mano de obra, etcétera. (El costo de materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de mano de obra podrían depender en parte de potencias de orden superior de x por los costos de tiempo extra e ineficiencias que aparecen en operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10{,}000 + 5x + 0.01x^2$$

Entonces la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal al nivel de producción de 500 piezas es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{pieza}$$

Esto da como resultado la rapidez a la que los costos están aumentando con respecto al nivel de producción cuando $x = 500$ y predice el costo del artículo 501.

El costo real de producir el artículo 501 es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10{,}000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\qquad - [10{,}000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Observe que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

Los economistas también estudian la demanda marginal, ingreso marginal y utilidad marginal, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Éstas serán consideradas en el Capítulo 4 después de que hayamos desarrollado técnicas para hallar los valores máximo y mínimo de funciones.

Otras ciencias

Se presentan magnitudes de rapidez de cambio en todas las ciencias. Un geólogo está interesado en saber la rapidez a la que un cuerpo incrustado en roca derretida es enfriado por conducción de calor en las rocas circundantes. Un ingeniero desea conocer la rapidez a la que circula agua hacia y desde un depósito. Un geógrafo urbano está interesado en la rapidez de cambio de la densidad de población en una ciudad a medida que aumenta la distancia desde el centro de una ciudad. Un meteorólogo se ocupa de la rapidez de cambio de presión atmosférica con respecto a la altitud (véase Ejercicio 17 en la Sección 7.4).

En psicología, los interesados en aprender teoría estudian la llamada curva de aprendizaje, que grafica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprenda como función del tiempo t de capacitación. De particular interés es la rapidez a la que mejora el rendimiento con el tiempo, es decir, dP/dt.

En sociología, se usa cálculo diferencial para analizar la dispersión de rumores (o innovaciones o novedades o modas). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que sabe de un rumor en el tiempo t, entonces la derivada dp/dt representa la rapidez de dispersión del rumor (véase Ejercicio 74 en la Sección 3.4).

Una sola idea, muchas interpretaciones

Velocidad, densidad, corriente, potencia y gradiente de temperatura en física; rapidez de reacción y compresibilidad en química; rapidez de crecimiento y gradiente de velocidad sanguínea en biología; costo marginal y utilidad marginal en economía; rapidez de flujo de calor en geología; rapidez de mejora de rendimiento en psicología; rapidez de dispersión de un rumor en sociología, éstos son todos los casos especiales de un solo concepto matemático, la derivada.

Ésta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas está en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (por ejemplo la derivada) puede tener diferentes interpretaciones en cada una de las ciencias. Cuando desarrollamos las propiedades del concepto matemático de una vez por todas, podemos entonces ver estas cosas y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada ciencia por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo dijo brevemente: “La matemática compara los fenómenos más diversos y descubre las secretas analogías que los unen.”

3.8 Ejercicios

1–4 Una partícula se mueve de acuerdo a una ley de movimiento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, donde t se mide en segundos y s en pies.

(a) Encuentre la velocidad en el tiempo t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
(c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
(d) ¿Cuándo está la partícula moviéndose en la dirección positiva?
(e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
(f) Trace un diagrama como el de la Figura 8 para ilustrar el movimiento de la partícula.
(g) Encuentre la aceleración en el tiempo t y después de 3 s.
(h) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
(i) ¿Cuándo está acelerando la partícula? ¿Cuándo está reduciendo su velocidad?

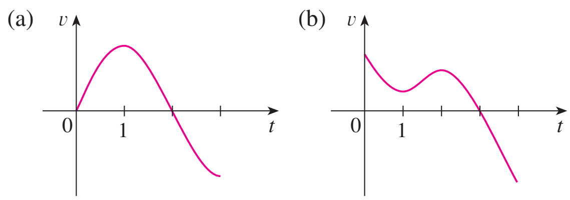
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$

2. $f(t) = 0.01t^4 - 0.04t^3$

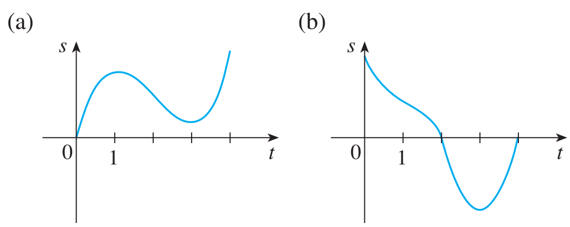
3. $f(t) = \cos(\pi t/4), \quad t \leqslant 10$

4. $f(t) = te^{-t/2}$

5. A continuación se muestran gráficas de las funciones de *velocidad* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo está acelerando la partícula? ¿Cuándo está reduciendo su velocidad? Explique.



6. A continuación se muestran gráficas de las funciones de *posición* de dos partículas, donde t se mide en segundos. ¿Cuándo aumenta la velocidad la partícula? ¿Cuándo está reduciendo su velocidad? Explique.



7. La función de posición de una partícula está dada por $s = t^3 - 4.5t^2 - 7t$, $t \geqslant 0$.
(a) ¿Cuándo alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

(b) ¿Cuándo es 0 su aceleración? ¿Cuál es la importancia de este valor de t?

8. Si una pelota recibe un empujón para que tenga una velocidad inicial de 5 m/s al bajar por cierto plano inclinado, entonces la distancia que ha rodado después de t segundos es $s = 5t + 3t^2$.
(a) Encuentre la velocidad después de 2 s.
(b) ¿Cuánto tarda la velocidad en alcanzar 35 m/s?

9. Si una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Luna con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos es $h = 10t - 0.83t^2$.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la piedra después de 3 s?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la piedra después que haya subido 25 m?

10. Si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 ft/s, entonces su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.
(a) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la pelota?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 96 ft sobre el suelo en su ascenso? ¿Y en su descenso?

11. (a) Una compañía produce chips de computadora a partir de obleas cuadradas de silicio. Desea mantener la longitud de un lado de la oblea muy cercano a 15 mm y también desea saber cómo cambia el área $A(x)$ de una oblea cuando cambia la longitud lateral x. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.
(b) Demuestre que la rapidez de cambio del área de un cuadrado con respecto a su longitud lateral es la mitad de su perímetro. Trate de explicar geométricamente por qué esto es cierto al trazar un cuadrado cuya longitud lateral x se aumenta en una cantidad Δx. ¿Cómo se puede calcular el cambio resultante del área ΔA si Δx es pequeño?

12. (a) Los cristales de clorato de sodio son fáciles de hacer crecer en forma de cubos si se deja que una solución de agua y clorato de sodio se evapore lentamente. Si V es el volumen de ese cubo con longitud lateral x, calcule dV/dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.
(b) Demuestre que la rapidez de cambio de volumen de un cubo con respecto a la longitud de su lado es igual a la mitad del área superficial del cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es verdadero al razonar por analogía con el Ejercicio 11(b).

13. (a) Encuentre el promedio de rapidez de cambio del área de un círculo con respecto a su radio r cuando r cambia de
(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2.5 (iii) 2 a 2.1
(b) Encuentre la rapidez instantánea de cambio cuando $r = 2$.
(c) Demuestre que la rapidez de cambio del área de un círculo con respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Trate de explicar geométricamente por qué esto es cierto al trazar un círculo cuyo radio se aumente en una cantidad Δr. ¿Cómo se puede calcular el cambio resultante del área ΔA si Δr es pequeño?

14. Una piedra se deja caer en un lago, creando una onda circular que se desplaza hacia fuera a una rapidez de 60 cm/s. Encuentre la rapidez a la que el área dentro del círculo está creciendo después de (a) 1 s, (b) 3 s, y (c) 5 s. ¿Qué se puede concluir?

15. Un globo esférico está siendo inflado. Encuentre la rapidez de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) con respecto al radio r cuando r es de (a) 1 ft, (b) 2 ft y (c) 3 ft. ¿Qué conclusión puede hacerse?

16. (a) El volumen de una célula esférica creciente es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros (1 μm $= 10^{-6}$ m). Encuentre el promedio de rapidez de cambio de V con respecto a r cuando r cambia de
(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5.1 μm
(b) Encuentre la rapidez instantánea de cambio de V con respecto a r cuando $r = 5$ μm.
(c) Demuestre que la rapidez de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué este resultado es verdadero. Razone por analogía con el Ejercicio 13(c).

17. La masa de la parte de una varilla metálica que está entre su extremo izquierdo y un punto a x metros a la derecha es de $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (véase Ejemplo 2) cuando x es (a) 1 m, (b) 2 m y (c) 3 m. ¿Dónde es máxima la densidad? ¿Dónde es mínima?

18. Si un tanque contiene 5000 galones de agua, que se drena del fondo del tanque en 40 minutos, entonces la Ley de Torricelli da el volumen V del agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V = 5000\left(1 - \tfrac{1}{40}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encuentre la rapidez a la que sale el agua del tanque después de (a) 5 minutos, (b) 10 minutos, (c) 20 minutos y (d) 40 minutos. ¿En qué tiempo está saliendo más rápido el agua? ¿Y más lento? Resuma lo que encuentre.

19. La cantidad de carga Q en coulombs (C) que ha pasado por un punto en un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) está dada por $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando (a) $t = 0.5$ s y (b) $t = 1$ s. [Véase el Ejemplo 3. La unidad de corriente es un ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué tiempo es mínima la corriente?

20. La Ley de Newton de la Gravitación dice que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre un cuerpo de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.
(a) Encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?
(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que decrece a razón de 2 N/km cuando $r = 20{,}000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando $r = 10{,}000$ km?

21. La Ley de Boyle expresa que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen permanece constante: $PV = C$.
(a) Encuentre la rapidez de cambio de volumen con respecto a la presión.

(b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y está siendo comprimido uniformemente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen está decreciendo con más rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.

(c) Demuestre que la compresibilidad isotérmica (véase Ejemplo 5) está dada por $\beta = 1/P$.

22. Si, en el Ejemplo 4, una molécula del producto C se forma de una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B, y las concentraciones iniciales de A y B tienen un valor común $[A] = [B] = a$ moles/L, entonces

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.

(a) Encuentre la rapidez de reacción en el tiempo t.

(b) Demuestre que si $x = [C]$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) ¿Qué ocurre a la concentración cuando $t \to \infty$?

(d) ¿Qué ocurre a la rapidez de reacción cuando $t \to \infty$?

(e) ¿Qué significan los resultados de los incisos (c) y (d) en términos prácticos?

23. En el Ejemplo 6 consideramos una población de bacterias que se duplica cada hora. Suponga que otra población de bacterias se triplica cada hora y empieza con 400 bacterias. Encuentre una expresión para el número n de bacterias después de t horas, y úsela para estimar la rapidez de crecimiento de la población de bacterias después de 2.5 horas.

24. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio aumenta con rapidez inicialmente pero se nivela a fin de cuentas. La población está modelada por la función

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

donde t se mide en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 células y está creciendo a razón de 12 células/hora. Encuentre los valores de a y b. De acuerdo con este modelo, ¿qué pasa a la población de células de levadura a largo plazo?

25. La tabla da la población del mundo en el siglo XX.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

(a) Estime la rapidez de crecimiento poblacional en 1920 y en 1980 al promediar las pendientes de dos rectas secantes.

(b) Use una calculadora graficadora o computadora para hallar una función cúbica (un polinomio de tercer grado) que modele los datos.

(c) Use su modelo del inciso (b) para hallar un modelo para la rapidez de crecimiento de población en el siglo XX.

(d) Use el inciso (c) para calcular las magnitudes de rapidez de crecimiento en 1920 y 1980. Compare con sus estimaciones del inciso (a).

(e) Estime la rapidez de crecimiento en 1985.

26. La tabla muestra cómo el promedio de edad del primer matrimonio de mujeres japonesas varió en la última mitad del siglo XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1980	25.2
1955	23.8	1985	25.5
1960	24.4	1990	25.9
1965	24.5	1995	26.3
1970	24.2	2000	27.0
1975	24.7		

(a) Use una calculadora graficadora o computadora para modelar estos datos con un polinomio de cuarto grado.

(b) Use el inciso (a) para hallar un modelo para $A'(t)$.

(c) Estime la rapidez de cambio de edad de matrimonio para mujeres en 1990.

(d) Grafique los datos y los modelos para A y A'.

27. Consulte la ley de flujo laminar dada en el Ejemplo 7. Considere un vaso sanguíneo con radio 0.01 cm, longitud 3 cm, diferencia de presión de 3000 dinas/cm^2, y viscosidad $\eta = 0.027$.

(a) Encuentre la velocidad de la sangre a lo largo de la línea de centro $r = 0$, en un radio $r = 0.005$ cm, y en la pared $r = R = 0.01$ cm.

(b) Encuentre el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$ y $r = 0.01$.

(c) ¿Dónde es máxima la velocidad? ¿Dónde está cambiando más la velocidad?

28. La frecuencia de vibraciones de una cuerda de violín vibratoria está dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el Capítulo 11 en D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3rd ed. (Pacific Grove, CA, 2002).]

(a) Encuentre la rapidez de cambio de la frecuencia con respecto a
  (i) la longitud (cuando T y ρ son constantes),
  (ii) la tracción (cuando T y ρ son constantes), y
  (iii) la densidad lineal (cuando L y T son constantes).

(b) El tono de una nota (qué tan alta o baja suena la nota) está determinado por la frecuencia f. (Cuanto más alta es la frecuencia, más alto es el tono.) Use los signos de las derivadas del inciso (a) para determinar lo que ocurre al tono de una nota
  (i) cuando la longitud efectiva de una cuerda se reduce al colocar un dedo en la cuerda, de modo que vibra una parte más corta de la cuerda.
  (ii) cuando la tracción se aumenta al dar vuelta a una clavija.
  (iii) cuando la densidad lineal se aumenta al cambiar a otra cuerda.

29. El costo, en dólares, de producir x yardas de cierta tela es

$$C(x) = 1200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal.
(b) Encuentre $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
(c) Compare $C'(200)$ con el costo de manufacturar la yarda 201 de tela.

30. La función de costo para la producción de una mercancía es

$$C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$$

(a) Encuentre e interprete $C'(100)$.
(b) Compare $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

31. Si $p(x)$ es el valor total de producción cuando hay x trabajadores en una planta, entonces el *promedio de productividad* de la fuerza laboral en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encuentre $A'(x)$. ¿Por qué la compañía desea contratar más trabajadores si $A'(x) > 0$?
(b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que el promedio de productividad.

32. Si R denota la reacción del cuerpo a algún estímulo de intensidad x, la *sensibilidad* S está definida por la rapidez de cambio de la reacción con respecto a x. Un ejemplo particular es que cuando la brillantez x de una fuente de luz aumenta, el ojo reacciona disminuyendo el área R de la pupila. La fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

se ha empleado para modelar la dependencia de R en x cuando R se mide en milímetros cuadrados y x se mide en unidades apropiadas de brillantez.
(a) Encuentre la sensibilidad.
(b) Ilustre el inciso (a) al graficar R y S como funciones de x. Comente sobre los valores de R y S a bajos niveles de brillantez. ¿Es esto lo que se esperaría?

33. La ley de los gases para un gas perfecto a temperatura absoluta T (en kelvins), presión P (en atmósferas) y volumen V (en litros) es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante del gas. Suponga que, en cierto instante, $P = 8.0$ atm y está aumentando a razón de 0.10 atm/min y $V = 10$ L y está decreciendo a razón de 0.15 L/min. Encuentre la rapidez de cambio de T con respecto al tiempo en ese instante si $n = 10$ mol.

34. En una granja piscícola, una población de peces se introduce en un estanque y se cosecha regularmente. Un modelo para la rapidez de cambio de la población de peces está dado por la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la tasa de nacimientos de peces, P_c es la máxima población que el estanque puede sostener (llamada *capacidad de carga*), y β es el porcentaje de la población que se cosecha.
(a) ¿Qué valor de dP/dt corresponde a una población estable?
(b) Si el estanque puede sostener 10,000 peces, la tasa de nacimientos es 5% y la tasa de cosecha es 4%, encuentre el nivel de población estable.
(c) ¿Qué ocurre si β se eleva a 5%?

35. En el estudio de ecosistemas, los *modelos de depredador-presa* se usan con frecuencia para estudiar la interacción entre especies. Considere poblaciones de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción ha sido modelada por las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) ¿Qué valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
(b) ¿Cómo estaría representado matemáticamente el enunciado "Los caribúes se extinguen"?
(c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$, y $d = 0.0001$. Encuentre los pares de población (C, W) que llevan a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las dos especies vivan en equilibrio o una o ambas especies se extinguirán?

3.9 Aproximaciones lineales y diferenciales

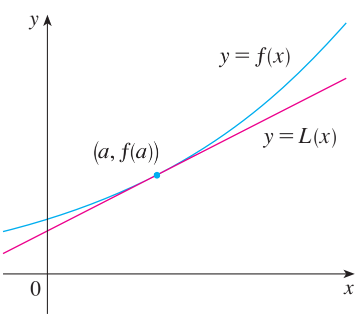


FIGURA 1

Hemos visto que una curva está muy cerca de su recta tangente en la proximidad del punto de tangencia. De hecho, al hacer acercamiento (zoom) hacia un punto en la gráfica de una función derivable, observamos que la gráfica se ve cada vez más como su recta tangente. (Véase la Figura 2 de la Sección 2.6.) Esta observación es la base de un método para determinar valores aproximados de funciones.

La idea es que podría ser fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (o hasta imposible) calcular valores cercanos de f. Entonces aceptamos los valores fácilmente calculados de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase Figura 1.)

En otras palabras, usamos la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x es cercana a a. Una ecuación de esta recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Se denomina la **aproximación lineal** o **aproximación de recta tangente** de f en a. La función lineal cuya gráfica es esta recta tangente, es decir,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se llama **linealización** de f en a.

El siguiente ejemplo es típico de situaciones en las que usamos una aproximación lineal para predecir el futuro comportamiento de una función dada por datos empíricos.

V EJEMPLO 1 Predicción a partir de una aproximación lineal Suponga que, después de rellenar un pavo, la temperatura de éste es de 50°F y entonces es colocado en un horno a 325°F. Después de una hora el termómetro de carnes indica que la temperatura del pavo es de 93°F y dos horas después indica 129°F. Prediga la temperatura del pavo después de tres horas.

SOLUCIÓN Si $T(t)$ representa la temperatura del pavo después de t horas, nos indican que $T(0) = 50$, $T(1) = 93$ y $T(2) = 129$. Para hacer una aproximación lineal con $a = 2$, necesitamos una estimación para la derivada $T'(2)$. Como

$$T'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{T(t) - T(2)}{t - 2}$$

podríamos estimar $T'(2)$ por el cociente de diferencia con $t = 1$:

$$T'(2) \approx \frac{T(1) - T(2)}{1 - 2} = \frac{93 - 129}{-1} = 36$$

Esto equivale a aproximar la rapidez instantánea de cambio de temperatura por el promedio de rapidez de cambio entre $t = 1$ y $t = 2$, que es 36°F/h. Con esta estimación, la aproximación lineal (1) para la temperatura después de 3 horas es

$$\begin{aligned} T(3) &\approx T(2) + T'(2)(3 - 2) \\ &\approx 129 + 36 \cdot 1 = 165 \end{aligned}$$

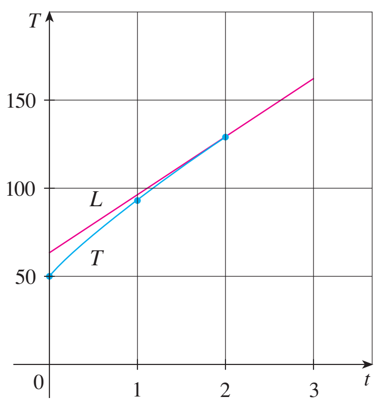


FIGURA 2

Por tanto, la temperatura predicha después de tres horas es 165°F.

Obtenemos una estimación más precisa para $T'(2)$ al graficar los datos dados, como en la Figura 2, y estimar la pendiente de la recta tangente en $t = 2$ como

$$T'(2) \approx 33$$

Entonces nuestra aproximación lineal se convierte en

$$T(3) \approx T(2) + T'(2) \cdot 1 \approx 129 + 33 = 162$$

y nuestra estimación mejorada para la temperatura es 162°F.

Como la curva de temperatura se encuentra debajo de la recta tangente, se ve que la temperatura real después de tres horas será un poco menos de 162°F, quizá más cerca de 160°F.

V EJEMPLO 2 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $a = 1$ y úsela para aproximar los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son estimaciones excesivas o subestimadas?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

y entonces tenemos $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Sustituyendo estos valores en la Ecuación 2, vemos que la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación (1) lineal correspondiente es

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ es cercana a 1)}$$

En particular, tenemos

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

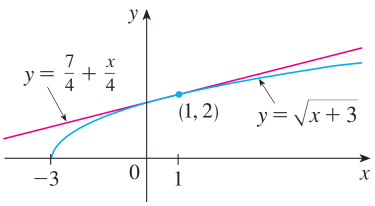


FIGURA 3

La aproximación lineal está ilustrada en la Figura 3. Vemos que, en verdad, la aproximación de recta tangente es una buena aproximación a la función dada cuando x es cercana a 1. También vemos que nuestras aproximaciones son estimaciones excesivas porque la recta tangente está arriba de la curva.

Desde luego, una calculadora podría darnos aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal da como resultado una aproximación *en todo un intervalo*.

En la siguiente tabla comparamos las estimaciones de la aproximación lineal en el Ejemplo 2 con los verdaderos valores. Observe de esta tabla y también de la Figura 3, que la aproximación de recta tangente da buenas estimaciones cuando x es cercana a 1 pero la precisión de la aproximación se deteriora cuando x está alejada de 1.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

¿Qué tan buena es la aproximación que obtuvimos en el Ejemplo 2? El siguiente ejemplo muestra que si usamos una calculadora graficadora o computadora podemos determinar un intervalo en el que una aproximación lineal da una precisión especificada.

EJEMPLO 3 **Precisión de una aproximación lineal** ¿Para qué valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es precisa a no más de 0.5? ¿Qué se puede decir de la precisión a no más de 0.1?

SOLUCIÓN La precisión a no más de 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x + 3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

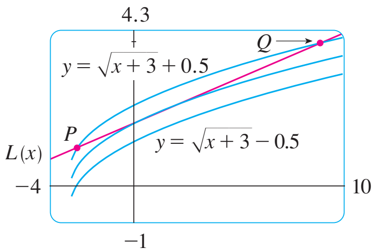


FIGURA 4

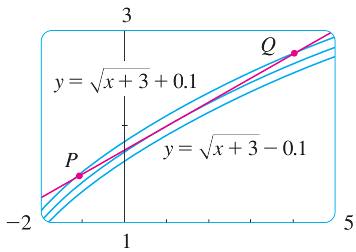


FIGURA 5

De manera equivalente, podríamos escribir

$$\sqrt{x+3}-0.5<\frac{7}{4}+\frac{x}{4}<\sqrt{x+3}+0.5$$

Esto dice que la aproximación lineal debe estar entre las curvas obtenidas al desplazar la curva $y=\sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. La Figura 4 muestra la recta tangente $y=(7+x)/4$ intersecando la curva superior $y=\sqrt{x+3}+0.5$ en P y Q. Haciendo acercamiento y usando el cursor, estimamos que la coordenada x de P es aproximadamente de -2.66 y la coordenada x de Q es alrededor de 8.66. Entonces vemos de la gráfica que la aproximación

$$\sqrt{x+3}\approx\frac{7}{4}+\frac{x}{4}$$

es precisa a no más de 0.5 cuando $-2.6<x<8.6$. (Hemos redondeado para seguridad.)

Del mismo modo, de la Figura 5 vemos que la aproximación es precisa a no más de 0.1 cuando $-1.1<x<3.9$.

Aplicaciones a la física

Las aproximaciones lineales se usan con frecuencia en física. Al analizar las consecuencias de una ecuación, un físico a veces necesita simplificar una función al sustituirla con su aproximación lineal. Por ejemplo, si deriva una fórmula para el periodo de un péndulo, los libros de texto de física obtienen la expresión $a_T=-g\operatorname{sen}\theta$ para aceleración tangencial y entonces sustituyen $\operatorname{sen}\theta$ con θ con la observación de que $\operatorname{sen}\theta$ es muy cercano a θ si θ no es demasiado grande. [Véase, por ejemplo, *Physics: Calculus,* 2d ed., de Eugene Hecht (Pacific Grove, CA, 2000), p. 431.] Usted puede verificar que la linealización de la función $f(x)=\operatorname{sen}x$ en $a=0$ es $L(x)=x$ y entonces la aproximación lineal en 0 es

$$\operatorname{sen}x\approx x$$

(véase Ejercicio 34). Entonces, en efecto, la derivación de la fórmula para el periodo de un péndulo usa la aproximación de recta tangente para la función seno.

Otro ejemplo se presenta en la teoría de óptica, donde rayos de luz que llegan a ángulos pequeños con respecto al eje óptico se denominan *rayos paraxiales*. En óptica paraxial (o de Gauss), tanto $\operatorname{sen}\theta$ como $\cos\theta$ son sustituidos por sus linealizaciones. En otras palabras, las aproximaciones lineales

$$\operatorname{sen}\theta\approx\theta\qquad\text{y}\qquad\cos\theta\approx 1$$

se usan porque θ es cercano a 0. El resultado de cálculos hechos con estas aproximaciones fue la herramienta teórica básica para diseñar lentes. [Véase *Optics*, 4th ed., por Eugene Hecht (San Francisco, 2002), p. 154.]

En la Sección 8.8 presentaremos otras aplicaciones de la idea de aproximaciones lineales a la física.

Diferenciales

Las ideas que hay detrás de aproximaciones lineales a veces son formuladas en la terminología y notación de *diferenciales*. Si $y=f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, a dx se le puede dar el valor de cualquier número real. La **diferencial** dy está definida entonces en términos de dx por la ecuación

$$\boxed{3}\qquad dy=f'(x)\,dx$$

Si $dx\neq 0$, podemos dividir entre dx ambos lados de la Ecuación 3 para obtener

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

Ya antes hemos visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse genuinamente como una razón entre diferenciales.

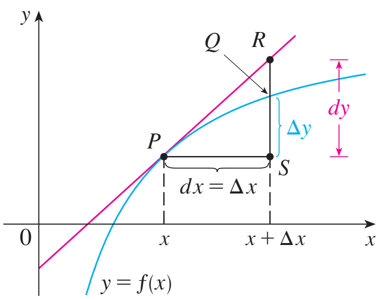


FIGURA 6

Entonces dy es una variable dependiente; depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico y x se toma como un número específico del dominio de f, entonces el valor numérico de dy está determinado.

El significado geométrico de diferenciales se muestra en la Figura 6. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos en la gráfica de f y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Entonces la distancia dirigida de S a R es $f'(x)dx = dy$. Por tanto, dy representa la cantidad que la recta tangente sube o cae (el cambio en linealización), donde Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ sube o cae cuando x cambia en una cantidad dx. Observe de la Figura 6 que la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña.

Si hacemos $dx = x - a$, entonces $x = a + dx$ y podemos reescribir la aproximación lineal (1) en la notación de diferenciales:

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en el Ejemplo 2, tenemos

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, entonces

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y $$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

igual que como encontramos en el Ejemplo 2.

Nuestro ejemplo final ilustra el uso de diferenciales al estimar los errores que ocurren por mediciones aproximadas.

V EJEMPLO 4 El radio de una esfera se midió y se encontró que es de 21 cm con un posible error en medición de 0.05 cm. ¿Cuál es el máximo error al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

SOLUCIÓN Si el radio de una esfera es r, entonces su volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el error en el valor medido de r está denotado por $dr = \Delta r$, entonces el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, que puede ser aproximado por la diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se convierte en

$$dV = 4\pi(21)^2 0.05 \approx 277$$

El máximo error en el volumen calculado es de unos 277 cm^3.

Nota: Aunque el posible error en el Ejemplo 4 puede parecer más bien grande, una mejor imagen del error está dada por el **error relativo**, que se calcula al dividir el error entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

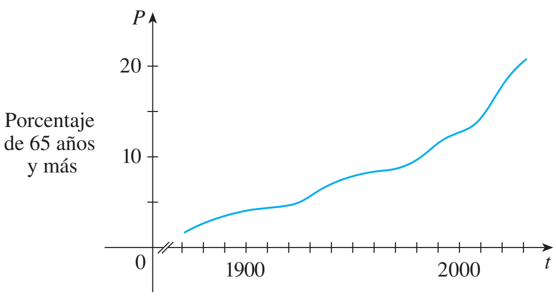
Entonces el error relativo del volumen es unas tres veces el error relativo del radio. En el Ejemplo 4 el error relativo del radio es aproximadamente $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de alrededor de 0.007 en el volumen. Los errores podrían también expresarse como **errores porcentuales** de 0.24% en el radio y 0.7% en el volumen.

3.9 Ejercicios

1. El pavo del Ejemplo 1 es sacado del horno cuando su temperatura alcanza 185°F y es colocado en una mesa en un cuarto donde la temperatura es de 75°F. Después de 10 minutos la temperatura del pavo es 172°F y después de 20 minutos es de 160°F. Use una aproximación lineal para predecir la temperatura del pavo después de media hora. ¿Piensa usted que su predicción es evaluación excesiva o subestimación? ¿Por qué?

2. La presión atmosférica P disminuye cuando la altitud h aumenta. A una temperatura de 15°C, la presión es 101.3 kilopascales (kPa) al nivel del mar, 87.1 kPa a $h = 1$ km y 74.9 kPa en $h = 2$ km. Use una aproximación lineal para estimar la presión atmosférica a una altitud de 3 kilómetros.

3. La gráfica indica la forma en que la población de Australia envejece al mostrar el porcentaje pasado y proyectado de la población de 65 años de edad o más. Use una aproximación lineal para predecir el porcentaje de la población que tendrá 65 años de edad o más en los años 2040 y 2050. ¿Piensa usted que sus predicciones son demasiado altas o demasiado bajas? ¿Por qué?



4. La siguiente tabla muestra la población de Nepal (en millones) al 30 de junio del año dado. Use una aproximación lineal para estimar la población a mitad del año 1989. Use otra aproximación lineal para predecir la población en 2010.

t	1985	1990	1995	2000	2005
$N(t)$	17.04	19.33	21.91	24.70	27.68

5–8 Encuentre la linealización $L(x)$ de la función en a.

5. $f(x) = x^4 + 3x^2, \quad a = -1$

6. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

7. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

8. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

9. Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ en $a = 0$ y úsela para aproximar los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Ilustre al graficar f y la recta tangente.

10. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $a = 0$ y úsela para aproximar los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustre al graficar g y la recta tangente.

11–14 Verifique la aproximación lineal dada en $a = 0$. A continuación determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es precisa a no más de 0.1.

11. $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{3}x$

12. $\tan x \approx x$

13. $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$

14. $e^x \approx 1 + x$

15–18 Use una aproximación lineal (o diferenciales) para calcular el número dado.

15. $(2.001)^5$

16. $e^{-0.015}$

17. $(8.06)^{2/3}$

18. $1/1002$

19–21 Explique, en términos de aproximaciones lineales o diferenciales, por qué la aproximación es razonable.

19. $\sec 0.08 \approx 1$

20. $(1.01)^6 \approx 1.06$

21. $\ln 1.05 \approx 0.05$

22. Sea $\quad f(x) = (x-1)^2 \qquad g(x) = e^{-2x}$

y $\quad h(x) = 1 + \ln(1-2x)$

(a) Encuentre las linealizaciones de f, g y h en $a = 0$. ¿Qué se observa? ¿Cómo se explica lo que ocurrió?

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

(b) Grafique f, g y h y sus aproximaciones lineales. ¿Para qué función es mejor la aproximación lineal? ¿Para cuál es peor? Explique.

23–24 Encuentre el diferencial de cada función.

23. (a) $y = \dfrac{u+1}{u-1}$ (b) $y = (1 + r^3)^{-2}$

24. (a) $y = e^{\tan \pi t}$ (b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

25. Sea $y = e^{x/10}$.
(a) Encuentre el diferencial dy.
(b) Evalúe dy y Δy si $x = 0$ y $dx = 0.1$.

26. Sea $y = \sqrt{x}$.
(a) Encuentre el diferencial dy.
(b) Evalúe dy y Δy si $x = 1$ y $dx = \Delta x = 1$.
(c) Trace un diagrama como el de la Figura 6 mostrando los segmentos de recta con longitudes dx, dy y Δy.

27. Se encuentra que una arista de un cubo mide 30 cm con un posible error de medición de 0.1 cm. Use diferenciales para estimar el máximo error posible, el error relativo y el porcentaje de error al calcular (a) el volumen del cubo y (b) el área superficial del cubo.

28. El radio de un disco circular está dado como de 24 cm con un máximo error en medición de 0.2 cm.
(a) Use diferenciales para estimar el máximo error en el área calculada del disco.
(b) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el porcentaje de error?

29. La circunferencia de una esfera se midió y fue de 84 cm con un posible error de 0.5 cm.
(a) Use diferenciales para estimar el máximo error en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?
(b) Use diferenciales para estimar el máximo error del volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

30. Use diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una capa de pintura de 0.05 cm de grueso a una cúpula esférica con diámetro de 50 m.

31. (a) Use diferenciales para hallar una fórmula para el volumen aproximado de una capa cilíndrica delgada con altura h, radio interior r y grosor Δr.
(b) ¿Cuál es el error que aparece al usar la fórmula del inciso (a)?

32. Se sabe que un lado de un triángulo recto mide 20 cm de largo y el ángulo opuesto se mide como de 30°, con un posible error de $\pm 1°$.
(a) Use diferenciales para estimar el error al calcular la longitud de la hipotenusa.
(b) ¿Cuál es el porcentaje de error?

33. Cuando circula sangre en un vaso sanguíneo, el flujo F (el volumen de sangre por unidad de tiempo que circula por un punto dado) es proporcional a la cuarta potencia del radio R del vaso sanguíneo:

$$F = kR^4$$

(Esto se conoce como Ley de Poiseuille; demostraremos por qué es cierto en la Sección 6.7.) Una arteria parcialmente ocluida se puede dilatar mediante una operación llamada angioplastia, en la que un catéter con punta en forma de globo se infla dentro de la arteria para ensancharla y restablecer la circulación sanguínea normal.

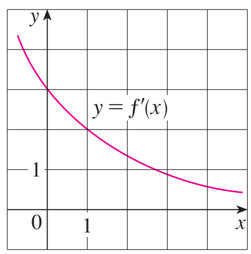
Demuestre que el cambio relativo en F es alrededor de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectará un aumento de 5% en el radio a la circulación sanguínea?

34. En la página 431 de *Physics: Calculus,* 2a. ed., de Eugene Hecht (Pacific Grove, CA, 2000), en el proceso de derivar la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el periodo de un péndulo de longitud L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial de la plomada del péndulo. Dice él entonces que "para ángulos pequeños, el valor de θ en radianes es casi el valor de sen θ; difieren en menos de 2% de cada 20° aproximadamente."
(a) Verifique por aproximación lineal en 0 para la función seno:

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(b) Use una calculadora graficadora para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren en menos de 2%. A continuación verifique el enunciado de Hecht al convertir de radianes a grados.

35. Suponga que la única información que tenemos acerca de una función f es que $f(1) = 5$ y la gráfica de su *derivada* es como se muestra.
(a) Use una aproximación lineal para calcular $f(0.9)$ y $f(1.1)$.
(b) ¿Sus estimaciones en el inciso (a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.



36. Suponga que no tenemos una fórmula para $g(x)$ pero sabemos que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x.
(a) Use una aproximación lineal para estimar $g(1.95)$ y $g(2.05)$.
(b) ¿Sus estimaciones en el inciso (a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.

PROYECTO DE LABORATORIO Polinomios de Taylor

La aproximación de recta tangente $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$ cerca de $x = a$ porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma rapidez de cambio (derivada) en a. Para una mejor aproximación que una lineal, intentemos una aproximación $P(x)$ de segundo grado (cuadrática). En otras palabras, aproximemos una curva por una parábola en lugar de por una recta. Para asegurarnos que la aproximación es buena, estipulamos lo siguiente:

(i) $P(a) = f(a)$ (P y f deben tener el mismo valor en a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P y f deben tener la misma rapidez de cambio en a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (Las pendientes de P y f deben cambiar a la misma rapidez en a.)

1. Encuentre la aproximación cuadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ a la función $f(x) = \cos x$ que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) con $a = 0$. Grafique P, f y la aproximación lineal $L(x) = 1$ en una pantalla común. Comente sobre lo bien que las funciones P y L aproximan f.

2. Determine los valores de x para los cuales la aproximación cuadrática $f(x) \approx P(x)$ del Problema 1 es precisa a no más de 0.1. [*Sugerencia*: Grafique $y = P(x)$, $y = \cos x - 0.1$, y $y = \cos x + 0.1$ en una pantalla común.]

3. Para aproximar una función f por una función cuadrática P cerca de un número a, es mejor escribir P en la forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Demuestre que la función cuadrática que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) es

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encuentre la aproximación cuadrática a $f(x) = \sqrt{x + 3}$ cerca de $a = 1$. Grafique f, la aproximación cuadrática, y la aproximación lineal del Ejemplo 3 en la Sección 3.9 en una pantalla común. ¿Qué se concluye?

5. En lugar de estar satisfechos con una aproximación lineal o cuadrática a $f(x)$ cerca de $x = a$, tratemos de hallar aproximaciones mejores con polinomios de grado superior. Buscamos un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus primeras n derivadas tienen los mismos valores en $x = a$ que f y sus primeras n derivadas. Al derivar repetidamente y hacer $x = a$, demuestre que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$, y en general

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

recibe el nombre de **polinomio de Taylor de grado *n* de *f* con centro en *a*.**

6. Encuentre el polinomio de Taylor de octavo grado con centro en $a = 0$ para la función $f(x) = \cos x$. Grafique f junto con los polinomios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8 en el rectángulo de observación $[-5, 5]$ por $[-1.4, 1.4]$ y comente sobre lo bien que aproximan a f.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

3 Repaso

Revisión de conceptos

1. Exprese cada regla de derivación en símbolos y en palabras.
(a) La Regla de potencias
(b) La Regla de múltiplos constantes
(c) La Regla de sumas
(d) La Regla de diferencias
(e) La Regla del producto
(f) La Regla del cociente
(g) La Regla de la cadena

2. Exprese la derivada de cada función.
(a) $y = x^n$ (b) $y = e^x$ (c) $y = a^x$
(d) $y = \ln x$ (e) $y = \log_a x$ (f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$ (h) $y = \tan x$ (i) $y = \csc x$
(j) $y = \sec x$ (k) $y = \cot x$ (l) $y = \operatorname{sen}^{-1}x$
(m) $y = \cos^{-1}x$ (n) $y = \tan^{-1}x$

3. (a) ¿Cómo está definido el número e?
(b) Exprese e como límite.
(c) ¿Por qué la función exponencial natural $y = e^x$ se usa con más frecuencia en cálculo que las otras funciones exponenciales $y = a^x$?
(d) ¿Por qué la función logarítmica natural $y = \ln x$ se usa con más frecuencia en cálculo que las otras funciones logarítmicas $y = \log_a x$?

4. (a) Explique cómo funciona la derivación implícita. ¿Cuándo debe usarse?
(b) Explique cómo funciona la derivación logarítmica. ¿Cuándo debe usarse?

5. ¿Cómo se encuentra la pendiente de una recta tangente a una curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$?

6. Escriba una expresión para la linealización de f en a.

Preguntas de verdadero-falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué; si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[f\big(g(x)\big)\right] = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

4. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}f\big(\sqrt{x}\big) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Si $y = e^2$, entonces $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Si $g(x) = x^5$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

12. La ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en $(-2, 4)$ es $y - 4 = 2x(x + 2)$.

Ejercicios

1–36 Calcule y'.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$

2. $y = \cos(\tan x)$

3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

4. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$

5. $y = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

7. $y = e^{\operatorname{sen} 2\theta}$

8. $y = e^{-t}(t^2 - 2t + 2)$

9. $y = \dfrac{t}{1 - t^2}$

10. $y = e^{mx}\cos nx$

11. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

12. $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2$

13. $xy^4 + x^2y = x + 3y$

14. $y = \ln(\csc 5x)$

15. $y = \dfrac{\sec 2\theta}{1 + \tan 2\theta}$

16. $x^2\cos y + \operatorname{sen} 2y = xy$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

17. $y = e^{cx}\,(c \operatorname{sen} x - \cos x$

18. $y = \ln(x^2 e^x)$

19. $y = \log_5(1 + 2x)$

20. $y = (\ln x)^{\cos x}$

21. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$

22. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$

23. $y = 3^{x \ln x}$

24. $xe^y = y - 1$

25. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$

26. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$

27. $y = x \tan^{-1}(4x)$

28. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

29. $y = \ln |\sec 5x + \tan 5x|$

30. $y = 10^{\tan \pi\theta}$

31. $y = \tan^2(\operatorname{sen} \theta)$

32. $y = \ln \left| \dfrac{x^2 - 4}{2x + 5} \right|$

33. $y = \operatorname{sen}\left(\tan \sqrt{1 + x^3}\right)$

34. $y = \arctan\left(\operatorname{arcsen} \sqrt{x}\right)$

35. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$

36. $y = \operatorname{sen}^2\left(\cos \sqrt{\operatorname{sen} \pi x}\right)$

37. Si $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, encuentre $f''(2)$.

38. Si $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, encuentre $g''(\pi/6)$.

39. Si $f(x) = 2^x$, encuentre $f^{(n)}(x)$.

40. Encuentre y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

41–44 Encuentre la ecuación de la tangente a la curva en el punto dado.

41. $y = 4 \operatorname{sen}^2 x, \quad (\pi/6, 1)$

42. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad (0, -1)$

43. $x = \ln t, \quad y = t^2 + 1, \quad (0, 2)$

44. $x = t^3 - 2t^2 + t + 1, \quad y = t^2 + t, \quad (1, 0)$

45–46 Encuentre ecuaciones de la recta tangente y recta normal a la curva en el punto dado.

45. $y = (2 + x)e^{-x}, \quad (0, 2)$

46. $x^2 + 4xy + y^2 = 13, \quad (2, 1)$

47. (a) Si $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, encuentre $f'(x)$.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x\sqrt{5 - x}$ en los puntos (1, 2) y (4, 4).
(c) Ilustre el inciso (b) al graficar la curva y rectas tangentes en la misma pantalla.
(d) Compruebe que su respuesta al inciso (a) sea razonable al comparar las gráficas de f y f'.

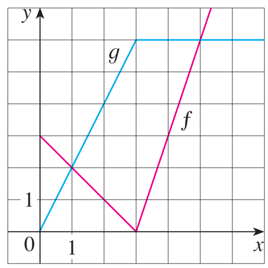
48. (a) Si $f(x) = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encuentre f' y f''.
(b) Compruebe que sus respuestas al inciso (a) sean razonables al comparar las gráficas de f, f', y f''.

49. Si $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, encuentre $f'(x)$. Grafique f y f' en la misma pantalla y comente.

50. (a) Grafique la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ en el rectángulo de observación $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) ¿En qué intervalo es más grande el promedio de rapidez de cambio: $[1, 2]$ o $[2, 3]$?
(c) ¿En qué valor de x es más grande la rapidez instantánea de cambio: $x = 2$ o $x = 5$?
(d) Compruebe sus estimaciones visuales en el inciso (c) al calcular $f'(x)$ y comparar los valores numéricos de $f'(2)$ y $f'(5)$.

51. Suponga que $h(x) = f(x)g(x)$ y $F(x) = f(g(x))$, donde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$, y $f'(5) = 11$. Encuentre (a) $h'(2)$ y (b) $F'(2)$.

52. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sea $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$, y $C(x) = f(g(x))$. Encuentre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$, y (c) $C'(2)$.



53–60 Encuentre f' en términos de g'.

53. $f(x) = x^2 g(x)$

54. $f(x) = g(x^2)$

55. $f(x) = [g(x)]^2$

56. $f(x) = g(g(x))$

57. $f(x) = g(e^x)$

58. $f(x) = e^{g(x)}$

59. $f(x) = \ln |g(x)|$

60. $f(x) = g(\ln x)$

61–62 Encuentre h' en términos de f' y g'.

61. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

62. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} 4x))$

63. ¿En qué punto en la curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ es horizontal la tangente?

64. (a) Encuentre la ecuación de la tangente a la curva $y = e^x$ que es paralela a la recta $x - 4y = 1$.
(b) Encuentre la ecuación de la tangente a la curva $y = e^x$ que pasa por el origen.

65. Encuentre los puntos en la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde la recta tangente tiene pendiente 1.

66. (a) ¿En qué intervalo es creciente la función $f(x) = (\ln x)/x$?
(b) ¿En qué intervalo es f cóncava hacia arriba?

67. Encuentre una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por el punto (1, 4) y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 5$ tienen pendientes de 6 y -2, respectivamente.

68. Una partícula se mueve en una recta vertical de modo que su coordenada en el tiempo t es $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geqslant 0$.
(a) Encuentre las funciones de velocidad y aceleración.
(b) ¿Cuándo está la partícula moviéndose hacia arriba y cuándo está moviéndose hacia abajo?

(c) Encuentre la distancia que la partícula recorre en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 3$.

(d) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 3$.

(e) ¿Cuándo está acelerando la partícula? ¿Cuándo reduce su velocidad?

69. Una ecuación de movimiento de la forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa la oscilación amortiguada de un objeto. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto.

70. Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal de modo que su coordenada en el tiempo t es $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geqslant 0$, donde b y c son constantes positivas.

(a) Encuentre las funciones de velocidad y aceleración.

(b) Demuestre que la partícula siempre se mueve en la dirección positiva.

71. La masa de parte de un alambre es $x\left(1 + \sqrt{x}\right)$ kilogramos, donde x se mide en metros desde un extremo del alambre. Encuentre la densidad lineal del alambre cuando $x = 4$ m.

72. El volumen de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.

(a) Encuentre la rapidez de cambio del volumen con respecto a la altura si el radio es constante.

(b) Encuentre la rapidez de cambio del volumen con respecto al radio si la altura es constante.

73. El costo, en dólares, de producir x unidades de cierta mercancía es

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal.

(b) Encuentre $C'(100)$ y explique su significado.

(c) Compare $C'(100)$ con el costo de producir la pieza 101.

(d) ¿Para qué valor de x tiene C un punto de inflexión? ¿Cuál es la importancia de este valor de x?

74. La función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$, se usa para modelar la concentración en el tiempo t de un medicamento inyectado en el torrente sanguíneo.

(a) Demuestre que $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.

(b) Encuentre $C'(t)$, la rapidez a la que el medicamento es eliminado de la circulación.

(c) ¿Cuándo es igual a 0 esta rapidez?

75. (a) Encuentre la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Exprese la correspondiente aproximación lineal y úsela para dar un valor aproximado para $\sqrt[3]{1.03}$.

(b) Determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal dada en el inciso (a) es precisa a no más de 0.1.

76. Una ventana tiene la forma de un cuadrado rematado por una circunferencia. La base de la ventana se mide y tiene un ancho de 60 cm con un posible error de medición de 0.1 cm. Use diferenciales para estimar el máximo error posible al calcular el área de la ventana.

77. Exprese el límite

$$\lim_{\theta\to\pi/3} \frac{\cos\theta - 0.5}{\theta - \pi/3}$$

como una derivada y entonces evalúela.

78. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

79. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

80. Demuestre que la longitud de la porción de cualquier recta tangente al astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cortado por los ejes de coordenadas es constante.

Principios de resolución de problemas

Antes de ver la solución del siguiente ejemplo, cúbralo y primero trate de resolverlo por sí solo. Podría ayudar consultar los principios de resolución de problemas en la página 83.

EJEMPLO ¿Para qué valores de c es que la ecuación $\ln x = cx^2$ tiene exactamente una solución?

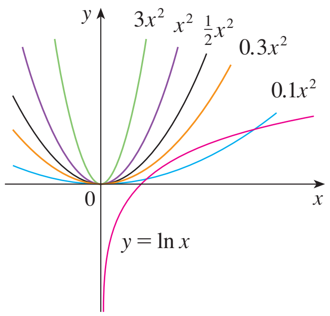


FIGURA 1

SOLUCIÓN Uno de los principios más importantes en resolución de problemas es trazar un diagrama, incluso si el problema como se expresa no menciona explícitamente una situación geométrica. Nuestro problema en este caso se puede reformular geométricamente como sigue: ¿Para qué valores de c la curva $y = \ln x$ interseca a la curva $y = cx^2$ en exactamente un punto?

Empecemos por graficar $y = \ln x$ y $y = cx^2$ para diversos valores de c. Sabemos que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ es una parábola que abre hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$. La Figura 1 muestra las parábolas $y = cx^2$ para diversos valores positivos de c. Casi todas ellas no intersecan $y = \ln x$ en absoluto y una la interseca dos veces. Tenemos la impresión de que debe haber un valor de c (en algún punto entre 0.1 y 0.3) para el cual las curvas se intersecan exactamente una vez, como en la Figura 2.

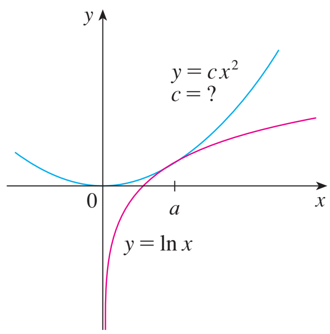


FIGURA 2

Para hallar el valor particular de c, hacemos que a sea la coordenada x del punto único de intersección. En otras palabras, $\ln a = ca^2$, de modo que a es la única solución de la ecuación dada. Vemos de la Figura 2 que las curvas se tocan apenas, y tienen una recta tangente común cuando $x = a$. Eso significa que las curvas $y = \ln x$ y $y = cx^2$ tienen la misma pendiente cuando $x = a$. Por tanto,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Resolviendo las ecuaciones $\ln a = ca^2$ y $1/a = 2ca$, tenemos

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia, $a = e^{1/2}$ y

$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

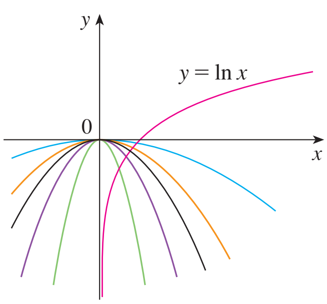


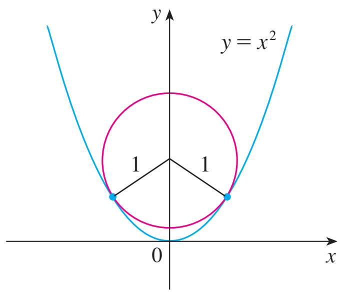
FIGURA 3

Para valores negativos de c tenemos la situación ilustrada en la Figura 3: Todas las parábolas $y = cx^2$ con valores negativos de c intersecan $y = \ln x$ exactamente una vez. Y no olvidemos $c = 0$: La curva $y = 0x^2 = 0$ es el eje x, que interseca $y = \ln x$ exactamente una vez.

Para resumir, los valores requeridos de c son $c = 1/(2e)$ y $c \leqslant 0$.

Problemas

1. La figura muestra un círculo con radio 1 inscrito en la parábola $y = x^2$. Encuentre el centro del círculo.



2. Encuentre el punto donde las curvas $y = x^3 - 3x + 4$ y $y = 3(x^2 - x)$ son tangentes entre sí, es decir, tienen una recta tangente común. Ilustre al trazar ambas curvas y la tangente común.

3. Demuestre que las rectas tangentes a la parábola $y = ax^2 + bx + c$ en cualesquier dos puntos con coordenadas x de p y q deben intersecarse en un punto cuya coordenada x está a la mitad entre p y q.

4. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}\right) = -\cos 2x$$

5. Si $f(x) = \lim_{t \to x} \dfrac{\sec t - \sec x}{t - x}$, encuentre el valor de $f'(\pi/4)$.

6. Si f es derivable en a, donde $a > 0$, evalúe el siguiente límite en términos de $f'(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

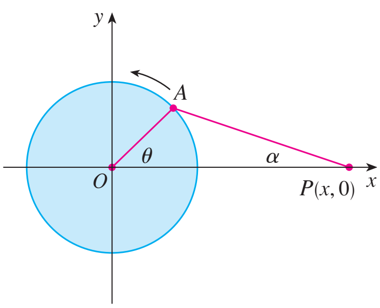


FIGURA PARA EL PROBLEMA 7

7. La figura muestra una rueda giratoria con radio de 40 cm y una biela AP con longitud de 1.2 m. El perno P se desliza hacia delante y atrás a lo largo del eje x, cuando la rueda gira en sentido contrario al de las manecillas de un reloj a razón de 360 revoluciones por minuto.
   (a) Encuentre la velocidad angular de la biela, $d\alpha/dt$, en radianes por segundo, cuando $\theta = \pi/3$.
   (b) Exprese la distancia $x = |OP|$ en términos de θ.
   (c) Encuentre una expresión para la velocidad del perno P en términos de θ.

8. Las rectas tangentes T_1 y T_2 están trazadas en dos puntos P_1 y P_2 en la parábola $y = x^2$ y se intersecan en un punto P. Otra recta tangente T está trazada en un punto entre P_1 y P_2; interseca T_1 en Q_1 y T_2 en Q_2. Demuestre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

9. Demuestre que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax} \operatorname{sen} bx) = r^n e^{ax} \operatorname{sen}(bx + n\theta)$$

donde a y b son números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$, y $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

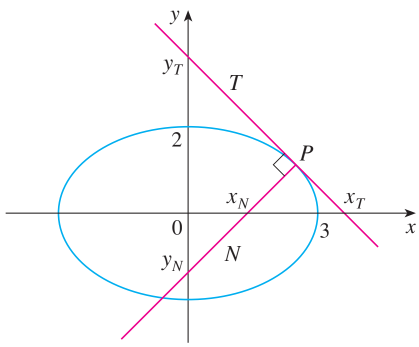
Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

10. Encuentre los valores de las constantes a y b tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{ax + b} - 2}{x} = \frac{5}{12}$$

11. Sean T y N las rectas tangentes y normales a la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ en cualquier punto P en la elipse en el primer cuadrante. Sean x_T y y_T las intersecciones en los ejes x y y en T y x_N y y_N sean las intersecciones en N. Cuando P se mueve a lo largo de la elipse en el primer cuadrante (pero no en los ejes), ¿qué valores pueden tomar x_T, y_T, x_N y y_N? Primero trate de calcular las respuestas con sólo ver la figura. A continuación use cálculo para resolver el problema y ver lo buena que es su intuición.



12. Si f y g son funciones derivables con $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

13. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

demuestre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

14. ¿Para qué números positivos a es verdadero que $a^x \geqslant 1 + x$ para toda x?

15. ¿Para qué valor de k la ecuación $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tiene exactamente una solución?

CAS **16.** (a) La función cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tiene tres ceros distintos: 0, 2 y 6. Grafique f y sus rectas tangentes en el *promedio* de cada par de ceros. ¿Qué se observa?

(b) Suponga que la función cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tiene tres ceros distintos: a, b y c. Demuestre, con ayuda de un sistema computarizado de álgebra, que una recta tangente trazada en el promedio de los ceros a y b interseca la gráfica de f en el tercer cero.

17. (a) Use la identidad para $\tan(x - y)$ (véase la Ecuación 14b en el Apéndice C) para demostrar que si dos rectas L_1 y L_2 se intersecan a un ángulo α, entonces

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

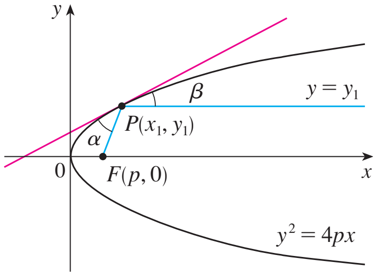
donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.

(b) El **ángulo entre las curvas** C_1 y C_2 en un punto de intersección P está definido como el ángulo entre las rectas tangentes a C_1 y C_2 en P (si estas rectas tangentes existen). Use el inciso (a) para hallar, correcto al grado más cercano, el ángulo entre cada par de curvas en cada punto de intersección.

(i) $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ y $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

18. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto en la parábola $y^2 = 4px$ con foco $F(p, 0)$. Sea α el ángulo entre la parábola y el segmento de recta FP, y sea β el ángulo entre la recta horizontal $y = y_1$ y la parábola como en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (Así, por un principio geométrico de óptica, la luz de una fuente colocada en F se reflejará a lo largo de una recta paralela al eje x. Esto explica por qué los *paraboloides*, superficies obtenidas al hacer girar parábolas alrededor de sus ejes, se usan como la forma de algunos faros de luces delanteras en automóviles y espejos para telescopios.)



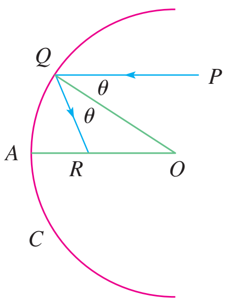


FIGURA PARA EL PROBLEMA 19

19. Suponga que sustituimos el espejo parabólico del Problema 18 por un espejo esférico. Aunque el espejo no tiene foco, podemos demostrar la existencia de un foco *aproximado*. En la figura, C es un semicírculo con centro O. Un rayo de luz que entra hacia el espejo paralelo al eje a lo largo de la recta PQ se reflejará al punto R en el eje para que $\angle PQO = \angle OQR$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). ¿Qué ocurre al punto R cuando P se lleva más y más cerca del eje?

20. Dada la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a \neq b$, encuentre la ecuación del conjunto de todos los puntos para los cuales hay dos tangentes a la curva cuyas pendientes son (a) recíprocas y (b) recíprocas negativas.

21. Encuentre los dos puntos en la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una recta tangente común.

22. Suponga que tres puntos en la parábola $y = x^2$ tienen la propiedad de que sus rectas normales se intersecan en un punto común. Demuestre que la suma de sus coordenadas x es 0.

23. Un *punto de celosía* en el plano es un punto con coordenadas enteras. Suponga que círculos con radio r se trazan usando todos los puntos de celosía como centros. Encuentre el valor más pequeño de r tal que cualquier recta con pendiente $\frac{2}{5}$ interseque algunos de estos círculos.

thomasmayerarchive.com

4 Aplicaciones de la derivada

Ya hemos investigado algunas de las aplicaciones de las derivadas, pero ahora que conocemos las reglas de derivación estamos en mejor posición para buscar aplicaciones con mayor detalle. Aquí mostramos cómo analizar el comportamiento de familias de funciones, cómo resolver problemas de razones relacionadas (cómo calcular razones que no podemos medir a partir de las que sí podemos), y cómo hallar el valor máximo o mínimo de una cantidad. En particular, seremos capaces de investigar la forma óptima de una lata y explicar la ubicación del arco iris en el cielo.

4.1 Razones de cambio relacionadas

Si estamos bombeando aire en un globo, tanto el volumen como el radio del globo están aumentando y sus razones de aumento están relacionadas entre sí. Pero es mucho más fácil medir directamente la razón de aumento del volumen que la razón de aumento del radio.

En un problema de razones de cambio relacionadas, la idea es calcular la razón de cambio de una cantidad en términos de la razón de cambio de otra cantidad (que puede medirse con más facilidad). El procedimiento es hallar una ecuación que relacione las dos cantidades y luego usar la Regla de la cadena para derivar ambos lados con respecto al tiempo.

V EJEMPLO 1 Inflando un globo Se bombea aire en un globo esférico de modo que su volumen aumenta a razón de 100 cm^3/s. ¿Con qué rapidez está aumentando el radio del globo cuando el diámetro es 50 cm?

RP Según los Principios de Resolución de Problemas que se explican en la página 83, el primer paso es entender el problema. Esto incluye leer atentamente el problema, identificando los datos y la incógnita, e introducir una notación apropiada.

SOLUCIÓN Empezamos por identificar dos cosas:

la *información dada*:

la razón de aumento del volumen de aire es 100 cm^3/s

y la *incógnita*:

la razón de aumento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Para expresar estas cantidades matemáticamente, introducimos alguna *notación* sugestiva:

Sea V el volumen del globo y sea r su radio.

La clave es recordar que las razones de cambio son derivadas. En este problema, el volumen y el radio son ambas funciones del tiempo t. La razón de aumento del volumen con respecto al tiempo es la derivada dV/dt, y la razón de aumento del radio es dr/dt. Por tanto, podemos expresar en otra forma los datos dados y la incógnita como sigue:

$$\textit{Datos:} \qquad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Incógnita:} \qquad \frac{dr}{dt} \text{ cuando } r = 25 \text{ cm}$$

RP La segunda etapa de resolución de problemas es pensar en un plan para enlazar los datos y la incógnita.

Para enlazar dV/dt y dr/dt, primero relacionamos V y r por medio de la fórmula para el volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Para usar la información dada, derivamos cada lado de esta ecuación con respecto a t. Para derivar el lado derecho, necesitamos usar la Regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora despejamos la cantidad desconocida:

Observe que, aun cuando dV/dt es constante, dr/dt es *no* constante.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Si ponemos $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo está aumentando a razón de $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s.

EJEMPLO 2 El problema de la escalera que resbala Una escalera de 10 ft de largo apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera resbala de la pared a razón de 1 ft/s, ¿con qué rapidez resbala hacia abajo la parte superior de la escalera cuando la base está a 6 ft de la pared?

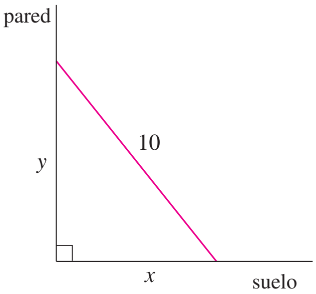


FIGURA 1

SOLUCIÓN Primero trazamos un diagrama y lo marcamos como en la Figura 1. Sea x pies la distancia de la base de la escalera a la pared y y pies la distancia de la parte superior de la escalera al suelo. Observe que x y y son ambas funciones de t (tiempo, medido en segundos).

Nos indican que $dx/dt = 1$ ft/s y nos piden hallar dy/dt cuando $x = 6$ ft (véase Figura 2). En este problema, la relación entre x y y está dada por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Derivando cada lado con respecto a t usando la Regla de la cadena, tenemos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

y de esta ecuación despejamos la cantidad deseada, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

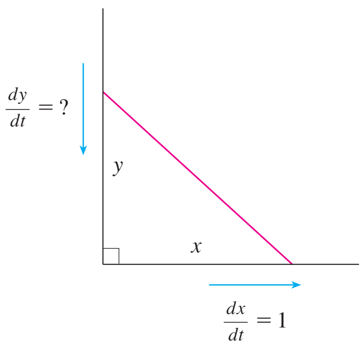


FIGURA 2

Cuando $x = 6$, el Teorema de Pitágoras da $y = 8$ y entonces, sustituyendo estos valores en $dx/dt = 1$, tenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4} \text{ ft/s}$$

El hecho de que dy/dt sea negativa significa que la distancia de la parte superior de la escalera al suelo está *decreciendo* a razón de $\frac{3}{4}$ ft/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera resbala hacia abajo de la pared a razón de $\frac{3}{4}$ ft/s.

EJEMPLO 3 Llenando un tanque Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular invertido con radio de base de 2 m y altura de 4 m. Si se bombea agua hacia el tanque a razón de 2 m^3/min, encuentre la rapidez a la que el nivel de agua está subiendo cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

SOLUCIÓN Primero trazamos el cono y lo marcamos como en la Figura 3. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie, y la altura del agua en el tiempo t, donde t se mide en minutos.

Nos dicen que $dV/dt = 2$ m^3/min y nos piden hallar dh/dt cuando h es de 3 m. Las cantidades V y h están relacionadas por la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

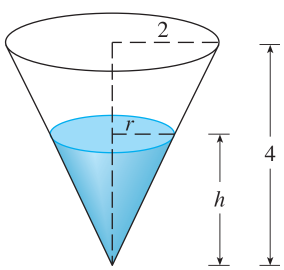


FIGURA 3

pero es muy útil expresar V como función sólo de h. Para eliminar r, usamos los triángulos semejantes de la Figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se convierte en

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora podemos derivar cada lado con respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de modo que
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Sustituyendo $h = 3$ m y $dV/dt = 2$ m^3/min, tenemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua está subiendo a razón de $8/(9\pi) \approx 0.28$ m/min.

RP Regrese: ¿Qué hemos aprendido de los Ejemplos 1 al 3 que nos ayude a resolver problemas futuros?

Principios de resolución de problemas Es útil recordar algunos de los principios de resolución de problemas de la página 83 y adaptarlos a razones de cambio relacionadas, en vista de nuestra experiencia en los Ejemplos 1-3:

1. Lea atentamente el problema.
2. Trace un diagrama si es posible.
3. Introduzca notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que sean funciones del tiempo.
4. Exprese la información dada y la cantidad pedida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diversas cantidades del problema. Si es necesario, use la geometría de la situación para eliminar una de las variables por sustitución (como en el Ejemplo 3).
6. Use la Regla de la cadena para derivar ambos lados de la ecuación con respecto a t.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y despeje la cantidad desconocida.

Advertencia: Un error común es sustituir la información numérica dada (para cantidades que varían con el tiempo) demasiado pronto. Esto debe hacerse sólo *después* de la derivación. (El Paso 7 sigue al Paso 6.) Por ejemplo, en el Ejemplo 3 trabajamos con valores generales de h hasta que finalmente sustituimos $h = 3$ en la etapa final. (Si hubiéramos puesto $h = 3$ antes, hubiéramos obtenido $dV/dt = 0$, que claramente es un error.)

Los siguientes ejemplos son ilustraciones más amplias de la estrategia.

V **EJEMPLO 4** El auto A se dirige al oeste a 50 mi/h y el auto B se dirige al norte a 60 mi/h. Ambos se dirigen al crucero de los dos caminos. ¿Con qué rapidez se están aproximando uno al otro los dos autos cuando el auto A está a 0.3 millas y el B está a 0.4 millas del crucero?

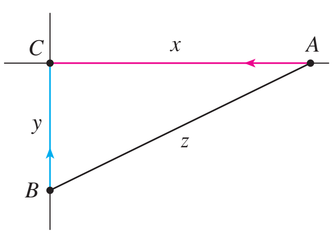


FIGURA 4

SOLUCIÓN Trazamos la Figura 4, donde C es el crucero de los dos caminos. En un tiempo t determinado, sea x la distancia del auto A a C, sea y la distancia del auto B a C, y sea z la distancia entre los autos, donde x, y y z se miden en millas.

Nos indican que $dx/dt = -50$mi/h y $dy/dt = -60$ mi/h. (Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes.) Nos piden hallar dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z está dada por el Teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Derivando cada lado con respecto a t, tenemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el Teorema de Pitágoras da como resultado $z = 0.5$ millas, y entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ mi/h}$$

Los autos están aproximándose uno al otro a razón de 78 mi/h.

V EJEMPLO 5 Un hombre camina por una vereda recta con una rapidez de 4 ft/s. Un proyector está colocado en el suelo a 20 ft de la vereda y se mantiene enfocado al hombre. ¿Con qué rapidez está girando el proyector cuando el hombre está a 15 ft del punto en la vereda más cercano al proyector?

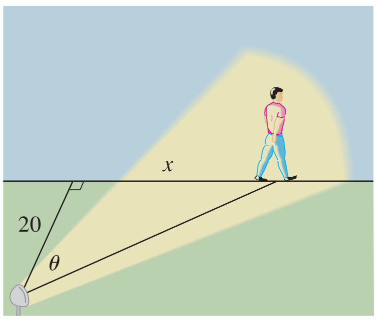


FIGURA 5

SOLUCIÓN Trazamos la Figura 5 y con x representamos la distancia desde el hombre hasta el punto de la vereda más cercano al proyector. Sea θ el ángulo entre el rayo del proyector y la perpendicular a la vereda.

Nos dicen que $dx/dt = 4$ ft/s y nos piden hallar $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona x con θ se puede escribir de la Figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan\theta \qquad x = 20\tan\theta$$

Derivando cada lado con respecto a t, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

o bien,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{20}\cos^2\theta\,(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 15$, la longitud del rayo es 25, de modo que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El reflector está girando a razón de 0.128 rad/s.

4.1 Ejercicios

1. Si V es el volumen de un cubo con longitud de arista x y el cubo se expande al transcurrir el tiempo, encuentre dV/dt en términos de dx/dt.

2. (a) Si A es el área de un círculo con radio r y el círculo se expande al transcurrir el tiempo, encuentre dA/dt en términos de dr/dt.
(b) Suponga que se derrama petróleo de un buque cisterna averiado y se dispersa en forma circular. Si el radio del derrame de petróleo aumenta a razón constante de 1 m/s, ¿con qué rapidez está aumentando el área del derrame cuando el radio es de 30 m?

3. Cada lado de un cuadrado está aumentando a razón de 6 cm/s. ¿Con qué rapidez está aumentando el área del cuadrado cuando ésta es 16 cm^2?

4. La longitud de un rectángulo está aumentando a razón de 8 cm/s y su ancho está aumentando a razón de 3 cm/s. Cuando la longitud es de 20 cm y el ancho es de 10 cm, ¿con qué rapidez está aumentando el área del rectángulo?

5. Un tanque cilíndrico de 5 m de radio está siendo llenado de agua a razón de 3 m^3/min. ¿Con qué rapidez está aumentando la altura del agua?

6. El radio de una esfera está aumentando a razón de 4 mm/s. ¿Con qué rapidez está aumentando el volumen cuando el diámetro es de 80 mm?

7. Suponga que $y = \sqrt{2x + 1}$, donde x y y son funciones de t.
(a) Si $dx/dt = 3$, encuentre dy/dt cuando $x = 4$.
(b) Si $dy/dt = 5$, encuentre dx/dt cuando $x = 12$.

8. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $dy/dt = 6$, encuentre dx/dt cuando $y = 4$.

9. Si $z^2 = x^2 + y^2$, $dx/dt = 2$, y $dy/dt = 3$, encuentre dz/dt cuando $x = 5$ y $y = 12$.

10. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. Cuando llega al punto (2, 3), la coordenada y está aumentando a razón de 4 cm/s. ¿Con qué rapidez está cambiando la coordenada x del punto en ese instante?

11–14
(a) ¿Qué cantidades se dan en el problema?
(b) ¿Cuál es la incógnita?
(c) Trace una figura de la situación para cualquier tiempo t.
(d) Escriba una ecuación que relacione las cantidades.
(e) Termine de resolver el problema.

11. Si una bola de nieve se derrite de modo que su área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, encuentre la rapidez a la que el diámetro disminuye cuando el diámetro es de 10 centímetros.

12. Al mediodía, la nave A está a 150 km al oeste de la nave B. La nave A está moviéndose hacia el este a 35 km/h y la nave B está desplazándose hacia el norte a razón de 25 km/h. ¿Con qué rapidez está cambiando la distancia entre las naves a las 4:00 p.m.?

13. Un avión está volando horizontalmente a una altitud de 1 milla y a una rapidez de 500 mi/h pasa directamente sobre una estación de radar. Encuentre la rapidez a la que la distancia desde el avión a la estación está aumentando cuando está a 2 millas de distancia de la estación.

14. Un farol callejero está montado en lo alto de un poste de 15 ft de alto. Un hombre de 6 ft se aleja del poste con una rapidez de 5 ft/s a lo largo de una trayectoria recta. ¿Con qué rapidez está moviéndose la punta de la sombra cuando el hombre está a 40 ft del poste?

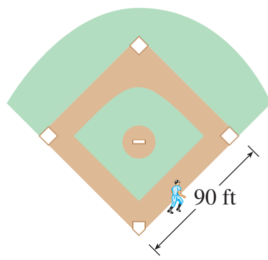
---

15. Dos autos empiezan a moverse desde el mismo punto. Uno de ellos se dirige al sur a 60 mi/h y el otro se mueve hacia el oeste a 25 mi/h. ¿Con qué rapidez está aumentando la distancia entre los autos dos horas después?

16. Un proyector colocado en el suelo ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina del proyector hacia el edificio a 1.6 m/s, ¿con qué rapidez disminuye su sombra en el edificio cuando él está a 4 m del edificio?

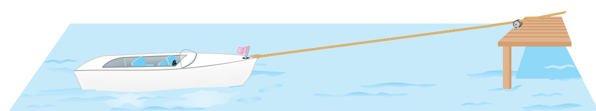
17. Un hombre empieza a caminar al norte a 4 ft/s desde un punto P. Cinco minutos después, una mujer empieza a caminar al sur a 5 ft/s desde un punto a 500 ft hacia el este de P. ¿Con qué rapidez están separándose estas personas 15 minutos después que la mujer empieza a caminar?

18. Un campo de beisbol es un cuadrado con 90 ft de lado. Un bateador conecta la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 ft/s.
(a) ¿Con qué rapidez está disminuyendo su distancia desde la segunda base cuando está a medio camino a primera base?
(b) ¿Con qué rapidez está aumentando su distancia desde tercera base en ese mismo momento?



19. La altitud de un triángulo está aumentando a razón de 1 cm/min mientras que el área del triángulo está aumentando a razón de 2 cm^2/min. ¿Con qué rapidez está cambiando la base del triángulo cuando la altitud es 10 cm y el área es 100 cm^2?

20. Un bote está siendo jalado hacia un muelle por una cuerda atada a la proa del bote y que pasa por una polea en el muelle, que está 1 m más alta que la proa del bote. Si la cuerda es jalada a razón de 1 m/s, ¿con qué rapidez está aproximándose el bote al muelle cuando está a 8 m del muelle?



21. Al mediodía, la nave A está a 100 km al oeste de la nave B. La nave A está moviéndose hacia el sur a 35 km/h y la nave B se desplaza hacia el norte a 25 km/h. ¿Con qué rapidez está cambiando la distancia entre las naves a las 4:00 p.m.?

---

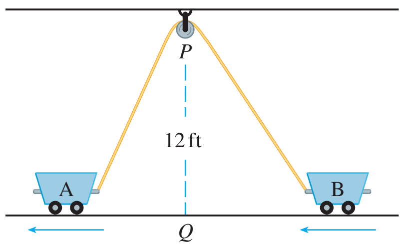
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

22. Una partícula está moviéndose a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$. Cuando la partícula pasa por el punto (4, 2), su coordenada x aumenta a razón de 3 cm/s. ¿Con qué rapidez está cambiando la distancia desde la partícula al origen en este instante?

23. La parte superior de una escalera resbala hacia debajo de una pared vertical a razón de 0.15 m/s. En el momento cuando la base de la escalera está a 3 m de la pared, se separa de la pared a razón de 0.2 m/s. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

24. ¿Con qué rapidez está cambiando el ángulo entre la escalera y el suelo, en el Ejemplo 2, cuando la base de la escalera está a 6 ft de la pared?

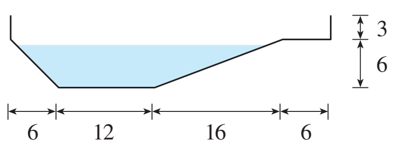
25. Dos carretas, A y B, están conectadas por una cuerda de 39 ft de largo que pasa sobre una polea P (véase la figura). El punto Q está sobre el piso a 12 ft directamente debajo de P y entre las carretas. La carreta A está siendo jalada alejándola de Q con una rapidez de 2 ft/s. ¿Con qué rapidez está la carreta B moviéndose hacia Q en el instante cuando la carreta A está a 5 ft de Q?



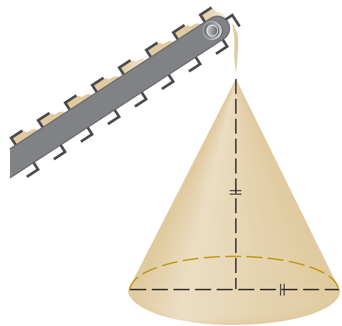
26. Se fuga agua de un tanque en forma de cono invertido, a razón de 10,000 cm^3/min, al mismo tiempo que se bombea agua hacia el tanque a una cantidad constante. El tanque tiene una altura de 6 m y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua está subiendo a razón de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, encuentre la rapidez a la que el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

27. Un canal mide 10 ft de largo y sus extremos tienen la forma de triángulos isósceles que miden 3 ft de ancho en la parte superior y tienen una altura de 1 ft. Si el canal está siendo llenado con agua a razón de 12 ft^3/min, ¿con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando el agua tiene 6 pulgadas de profundidad?

28. Una piscina mide 20 ft de ancho, 40 ft de largo, 3 ft de profundidad en el extremo de poco fondo, y 9 ft de profundidad en el punto más hondo. Si la piscina está siendo llenada a razón de 0.8 ft^3/min, ¿con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando tiene 5 ft en el punto más hondo?



29. Se descarga grava de una banda transportadora a razón de 30 ft^3/min, y su grosor de granos es tal que forma una pila en forma de cono cuyo diámetro de base y altura son siempre iguales. ¿Con qué rapidez está aumentando la altura de la pila cuando ésta es de 10 ft de alto?



30. Una cometa se mueve horizontalmente a 100 ft sobre el suelo con una rapidez de 8 ft/s. ¿Con qué rapidez está disminuyendo el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 200 ft de cuerda?

31. Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m de largo y el ángulo entre ellos está aumentando a razón de 0.06 rad/s. Encuentre la rapidez a la que está aumentando el área del triángulo cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es $\pi/3$?

32. Dos lados de un triángulo tienen longitudes de 12 m y 15 m. El ángulo entre ellos está aumentando a razón de 2°/min. ¿Con qué rapidez está aumentando la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es 60°?

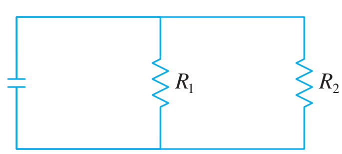
33. La Ley de Boyle indica que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión P y volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es 150 kPa y la presión está aumentando a razón de 20 kPa/min. ¿Con qué rapidez está disminuyendo el volumen en este instante?

34. Cuando el aire se expande en forma adiabática (sin ganar ni perder calor), su presión P y volumen V están relacionados por la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en cierto instante el volumen es de 400 cm^3 y la presión es 80 kPa y está disminuyendo a razón de 10 kPa/min. ¿Con qué rapidez está aumentando el volumen en este instante?

35. Si dos resistores con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, como en la figura, entonces la resistencia total R, medida en ohms (Ω), está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si R_1 y R_2 están aumentando a razón de 0.3 Ω/s y 0.2 Ω/s, respectivamente, ¿con qué rapidez está cambiando R cuando $R_1 = 80\ \Omega$ y $R_2 = 100\ \Omega$?



36. El peso B del cerebro como función del peso corporal W en peces ha sido modelado por la función de potencia $B = 0.007W^{2/3}$, donde B y W se miden en gramos. Un modelo para el peso corporal como función de la longitud corporal L (medida en centímetros) es $W = 0.12L^{2.53}$. Si, en 10 millones de años, el promedio de longitud de cierta especie de peces evolucionó de 15 cm a 20 cm a un paso constante, ¿con qué rapidez estuvo creciendo el cerebro de esta especie cuando el promedio de longitud era de 18 cm?

37. Una cámara de televisión está colocada a 4000 ft de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con rapidez correcta para mantener visible l cohete. También, el mecanismo para enfocar la cámara tiene que tomar en cuenta la creciente distancia desde la cámara al cohete que asciende. Supongamos que el cohete sube verticalmente y su rapidez es de 600 ft/s cuando ha subido 3000 pies.
(a) ¿Con qué rapidez está cambiando en ese momento la distancia desde la cámara de televisión al cohete?
(b) Si la cámara de televisión se mantiene siempre apuntada al cohete, ¿con qué rapidez está cambiando el ángulo de elevación de la cámara en ese mismo momento?

38. Un faro está situado en una pequeña isla a 3 km de distancia del punto P más cercano en una playa recta y su luz hace cuatro revoluciones por minuto. ¿Con qué rapidez está moviéndose el rayo de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P?

39. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de rastreo en tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está decreciendo a razón de $\pi/6$ rad/min. ¿Con qué rapidez está volando el avión en ese momento?

40. Una “rueda de la fortuna” de 10 m de radio está girando a una vuelta cada 2 minutos. ¿Con qué rapidez asciende un pasajero cuando su asiento está a 16 m sobre el nivel del suelo?

41. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación de radar en tierra a una altitud de 1 km y asciende a un ángulo de 30°. ¿Con qué rapidez está aumentando la distancia del avión a la estación de radar un minuto después?

42. Dos personas arrancan desde el mismo punto. Una de ellas camina hacia el este a 3 mi/h y la otra camina hacia el noreste a 2 mi/h. ¿Con qué rapidez está cambiando la distancia entre las personas después de 15 minutos?

43. Un corredor se desplaza alrededor de una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. El amigo del corredor está de pie a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Con qué rapidez está cambiando la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

44. El minutero de un reloj mide 8 mm de largo y el de las horas es de 4 mm de largo. ¿Con qué rapidez está cambiando la distancia entre las puntas de las manecillas a la una de la tarde?

4.2 Valores máximos y mínimos

Algunas de las más importantes aplicaciones del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los que se nos pide hallar la forma óptima (la mejor) de hacer algo. A continuación veamos ejemplos de estos problemas que resolveremos en este capítulo:

- ¿Cuál es la forma de una lata que minimice costos de manufactura?
- ¿Cuál es la aceleración máxima de un transbordador espacial? (Ésta es una pregunta importante para los astronautas que tienen que resistir los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expulsa aire con más rapidez durante una tos?
- ¿A qué ángulo deben ramificarse los vasos sanguíneos para reducir al mínimo la energía consumida por el corazón al bombear sangre?

Estos problemas se pueden reducir a hallar valores máximos y mínimos de una función. Expliquemos primero exactamente lo que queremos decir por valores máximos y mínimos.

Vemos que el punto más alto en la gráfica de la función f mostrada en la Figura 1 es el punto (3, 5). En otras palabras, el valor más grande de f es $f(3) = 5$. Del mismo modo, el valor más pequeño es $f(6) = 2$. Decimos que $f(3) = 5$ es el *máximo absoluto* de f y $f(6) = 2$ es el *mínimo absoluto*. En general, usamos la siguiente definición.

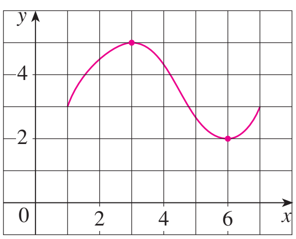


FIGURA 1

1 Definición Sea c un número en el dominio D de una función f. Entonces $f(c)$ es el

- valor **máximo absoluto** de f en D si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D.
- valor **mínimo absoluto** de f en D si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D.

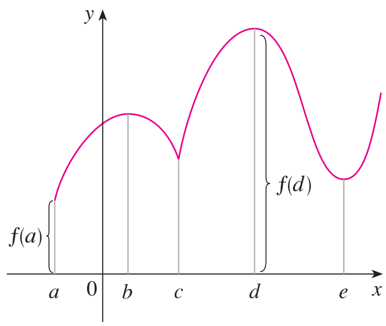


FIGURA 2
Min abs $f(a)$, max abs $f(d)$
min loc $f(c)$, $f(e)$, max loc $f(b)$, $f(d)$

Un máximo o mínimo absoluto a veces se denomina máximo o mínimo **global**. Los valores máximos y mínimos de f se denominan **valores extremos** de f.

La Figura 2 muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en d y mínimo absoluto en a. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto en la gráfica y $(a, f(a))$ es el punto más bajo. En la Figura 2, si consideramos sólo valores de x cercanos a b [por ejemplo, si restringimos nuestra atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de estos valores de $f(x)$ y recibe el nombre de *valor máximo local* de f. Igualmente, $f(c)$ recibe el nombre de *valor mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cerca de c [en el intervalo (b, d), por ejemplo]. La función f también tiene un mínimo local en e. En general, tenemos la siguiente definición.

2 Definición El número $f(c)$ es un

- valor **máximo local** de f si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x es cercana a c.
- valor **mínimo local** de f si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x es cercana a c.

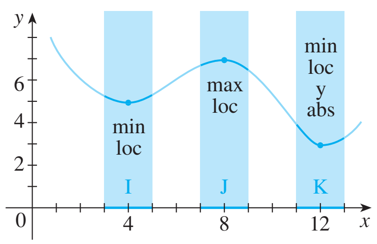


FIGURA 3

En la Definición 2 (y cualquier otra parte), si decimos que algo es verdadero **cerca** de c, queremos decir que es verdadero en algún intervalo abierto que contenga a c. Por ejemplo, en la Figura 3 vemos que $f(4) = 5$ es un mínimo local porque es el valor más pequeño de f en el intervalo I. No es el mínimo absoluto porque $f(x)$ toma valores más pequeños cuando x es cercana a 12 (en el intervalo K, por ejemplo). De hecho, $f(12) = 3$ es a la vez un mínimo local y el mínimo absoluto. Análogamente, $f(8) = 7$ es un máximo local, pero no el máximo absoluto porque f toma valores más grandes cerca de 1.

EJEMPLO 1 Una función con un número infinito de valores extremos La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) de 1 un número infinito de veces, puesto que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para toda x. Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero.

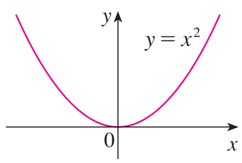


FIGURA 4
Valor mínimo 0, no máximo

EJEMPLO 2 Una función con un valor mínimo pero no valor máximo Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$ porque $x^2 \geqslant 0$ para toda x. Por lo tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo de la parábola $y = x^2$. (Véase Figura 4.) No obstante, no hay punto más alto en la parábola y por tanto esta función no tiene valor máximo.

EJEMPLO 3 Una función sin máximo ni mínimo De la gráfica de la función $f(x) = x^3$, mostrada en la Figura 5, vemos que esta función no tiene valor ni máximo absoluto ni mínimo absoluto. De hecho, tampoco tiene valores extremos locales.

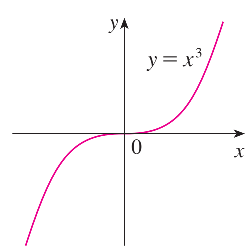


FIGURA 5
No hay mínimos ni máximos

V EJEMPLO 4 Un máximo en un punto extremo La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

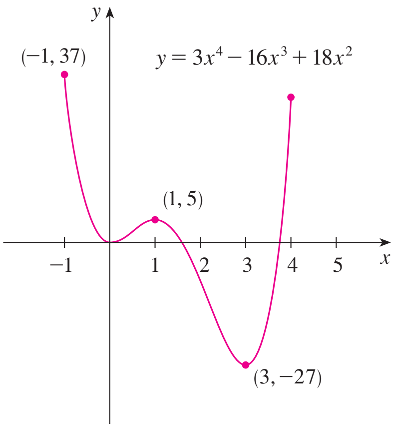


FIGURA 6

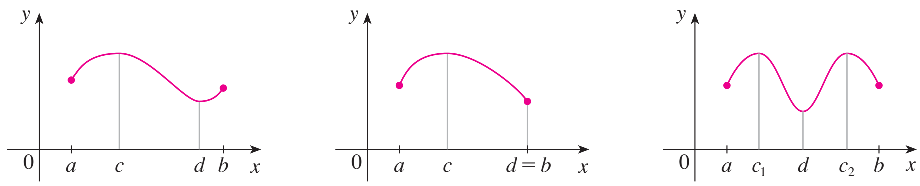
se muestra en la Figura 6. Se puede ver que $f(1) = 5$ es un máximo local, mientras que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.) También, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es a la vez un mínimo local y un mínimo absoluto. Observe que f no tiene máximo local ni máximo absoluto en $x = 4$.

Hemos visto que algunas funciones tienen valores extremos, mientras que otras no los tienen. El siguiente teorema da condiciones bajo las cuales se garantiza que una función tenga valores extremos.

> $\boxed{3}$ **Teorema del Valor Extremo** Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

El teorema del valor extremo está ilustrado en la Figura 7. Observe que un valor extremo puede tomarse más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es intuitivamente convincente, es difícil de demostrar y por tanto omitimos la prueba.

FIGURA 7



Las Figuras 8 y 9 demuestran que una función no necesita poseer valores extremos si cualquiera de las dos hipótesis (continuidad o intervalo cerrado) se omite del teorema del valor extremo.

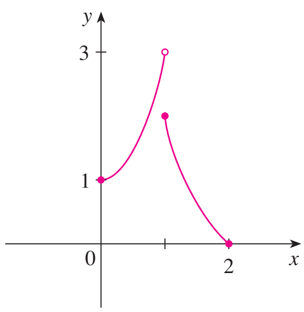


FIGURA 8
Esta función tiene valor mínimo $f(2) = 0$, pero no valor máximo.

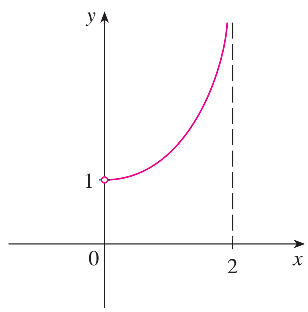


FIGURA 9
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo.

La función f cuya gráfica se muestra en la Figura 8 está definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$ pero no tiene valor máximo. [Observe que el rango de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero en realidad no alcanza el valor 3.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [No obstante, una función discontinua *podría* tener valores máximo y mínimo. Véase el Ejercicio 13(b).]

La función g que se muestra en la Figura 9 es continua en el intervalo abierto $(0, 2)$ pero no tiene valor ni máximo ni mínimo. [El rango de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo dice que una función continua en un intervalo cerrado tiene un valor máximo y un valor mínimo, pero no nos dice cómo hallar estos valores extremos. Empecemos por buscar valores extremos locales.

La Figura 10 muestra la gráfica de una función f con un máximo local en c y un mínimo local en d. Se ve que en los puntos máximo y mínimo las rectas tangentes son horizontales y, por tanto, cada una de ellas tiene pendiente 0. Sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que se ve que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. El siguiente teorema dice que esto siempre es cierto para funciones derivables.

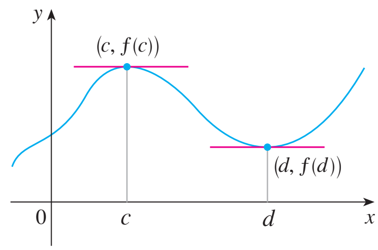


FIGURA 10

Fermat

El teorema de Fermat recibe ese nombre en honor a Pierre Fermat (1601-1665), abogado francés que cursó matemáticas como pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar tangentes a curvas y valores máximo y mínimo (antes de la invención de límites y derivadas) hicieron de él un antecesor de Newton en la creación del cálculo diferencial.

4 **Teorema de Fermat** Si f tiene un máximo o mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Nuestra intuición sugiere que el teorema de Fermat es verdadero. Una prueba rigurosa, usando la definición de una derivada, aparece en el Apéndice E.

Aun cuando el teorema de Fermat es muy útil, debemos cuidar la interpretación de él. Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo ni mínimo en 0, como se puede ver de su gráfica en la Figura 11. El hecho de que $f'(0) = 0$ simplemente significa que la curva $y = x^3$ tiene una tangente horizontal en (0, 0). En lugar de tener un máximo o mínimo en (0, 0), la curva cruza su tangente horizontal aquí.

Entonces, cuando $f'(c) = 0$, f no necesariamente tiene un máximo o mínimo en c. (En otras palabras, el recíproco del teorema de Fermat es falso en general.)

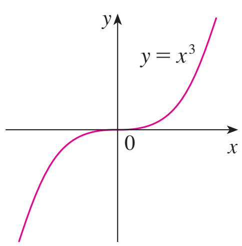


FIGURA 11
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$ pero f no tiene máximo o mínimo.

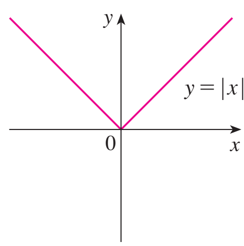


FIGURA 12
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

Debemos recordar que puede haber un valor extremo donde $f'(c)$ no exista. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ tiene su valor mínimo (local y absoluto) en 0 (véase la Figura 12), pero ese valor no se puede hallar al hacer $f'(x) = 0$ porque, como se demostró en el Ejemplo 6 de la Sección 2.7, $f'(0)$ no existe.

El teorema de Fermat sugiere que deberíamos al menos *empezar* por buscar valores extremos de f en los números c donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no exista. Estos números tienen un nombre especial.

5 Definición Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existen.

La Figura 13 muestra una gráfica de la función f del Ejemplo 5. Apoya nuestra respuesta porque hay una tangente horizontal cuando $x = 1.5$ y una tangente vertical cuando $x = 0$.

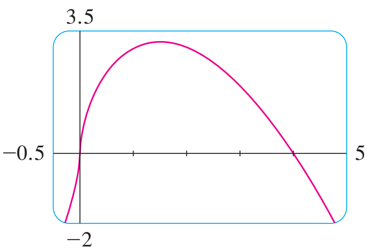


FIGURA 13

V EJEMPLO 5 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La Regla del producto da como resultado

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + \tfrac{3}{5}x^{-2/5}(4 - x) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[El mismo resultado podría obtenerse al escribir primeramente $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$, es decir, $x = \frac{3}{2}$, y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Entonces los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0.

En términos de números críticos, el teorema de Fermat se puede expresar también como sigue (compare la Definición 5 con el Teorema 4):

6 Si f tiene un máximo o mínimo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado, vemos que es local [en cuyo caso se presenta en un número crítico según (6)] o se presenta en un punto extremo del intervalo. Entonces, siempre funciona el siguiente procedimiento de tres pasos.

El Método del intervalo cerrado Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Encuentre los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los Pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

Podemos estimar valores máximos y mínimos muy fácilmente usando una calculadora graficadora o una computadora con software de graficación. Pero, como se ve en el Ejemplo 6, se necesita cálculo para hallar los valores *exactos*.

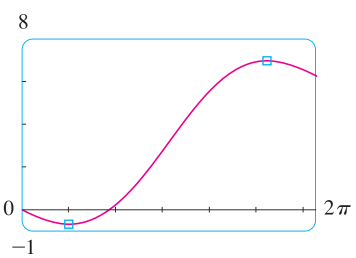


FIGURA 14

EJEMPLO 6 Hallar valores extremos en un intervalo cerrado
(a) Use una calculadora graficadora para estimar los valores absolutos mínimo y máximo de la función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
(b) Use cálculo para hallar los valores mínimo y máximo exactos.

SOLUCIÓN
(a) La Figura 14 muestra una gráfica de f en el rectángulo de observación $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Al mover el cursor cerca del punto máximo, vemos que las coordenadas y no cambian mucho en la cercanía del máximo. El valor máximo absoluto es alrededor de 6.97 y se presenta cuando $x \approx 5.2$. Análogamente, al mover el cursor cerca del punto mínimo, vemos que el valor mínimo absoluto es más o menos de -0.68 y se presenta cuando $x \approx 1.0$. Es posible obtener estimaciones más precisas si se hace un acercamiento hacia los puntos máximo y mínimo, pero en lugar de ello usemos cálculo.

(b) La función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, 2\pi]$. Como $f'(x) = 1 - 2\cos x$, tenemos $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ y esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o $5\pi/3$. Los valores de f de estos números críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Si comparamos estos cuatro números y usamos el método del intervalo cerrado, vemos que el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el valor máximo absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso (a) sirven como comprobación de nuestro trabajo.

NASA

EJEMPLO 7 El telescopio espacial Hubble fue desplegado el 24 de abril de 1990 por el transbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el despegue en el tiempo $t = 0$ hasta que los impulsores del cohete de combustible sólido fueron expulsados en el tiempo $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Usando este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del transbordador durante el despegue y la expulsión de los impulsores.

SOLUCIÓN Nos piden los valores extremos no de la función de velocidad dada, sino más bien de la función de aceleración. Por tanto, primero necesitamos derivar para hallar la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083) \\ &= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61 \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico se presenta cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Evaluando $a(t)$ en el número crítico y en los puntos extremos, tenemos

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

Por lo tanto, la aceleración máxima es de unos 62.87 ft/s^2 y la aceleración mínima es alrededor de 21.52 ft/s^2.

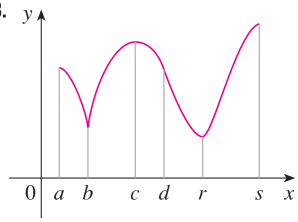
4.2 Ejercicios

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

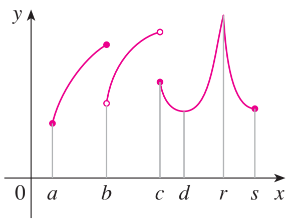
2. Suponga que f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$.
(a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto para f?
(b) ¿Qué pasos deben darse para hallar esos valores máximo y mínimo?

3–4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r y s, exprese si la función cuya gráfica se muestra tiene un máximo o mínimo absoluto, un máximo o mínimo local, o ni máximo ni mínimo.

3.

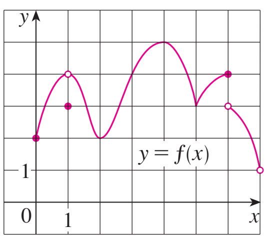


4.

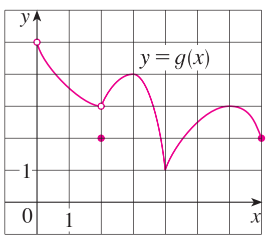


5–6 Use la gráfica para expresar los valores absolutos y locales máximo y mínimo de la función.

5.



6.



7–10 Trace la gráfica de una función f que sea continua en $[1, 5]$ y tenga las propiedades dadas.

7. Mínimo absoluto en 2, máximo absoluto en 3, mínimo local en 4.

8. Mínimo absoluto en 1, máximo absoluto en 5, máximo local en 2, mínimo local en 4.

9. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimo local en 2 y 4.

10. f no tiene máximo o mínimo local, pero 2 y 4 son números críticos.

11. (a) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es derivable en 2.
(b) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y es continua pero no derivable en 2.
(c) Trace la gráfica de una función que tiene un máximo local en 2 y no es continua en 2.

12. (a) Trace la gráfica de una función en $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto pero no máximo local.
(b) Trace la gráfica de una función en $[-1, 2]$ que tiene un máximo local pero no máximo absoluto.

13. (a) Trace la gráfica de una función en $[-1, 2]$ que tiene un máximo absoluto pero no un mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función en $[-1, 2]$ que es discontinua pero tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

14. (a) Trace la gráfica de una función que tiene dos máximos locales, un mínimo local y no tiene mínimo absoluto.
(b) Trace la gráfica de una función que tiene tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15–22 Trace manualmente la gráfica de f y use su dibujo para hallar los valores absolutos y locales máximo y mínimo de f. (Use las gráficas y transformaciones de las Secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = e^x$

19. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

20. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

21. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

22. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

23–38 Encuentre los números críticos de la función.

23. $f(x) = 4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2$

24. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

25. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

26. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

27. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$

28. $g(t) = |3t - 4|$

29. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

30. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

31. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

32. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

33. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

34. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

35. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

36. $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

37. $f(x) = x^2e^{-3x}$

38. $f(x) = x^{-2}\ln x$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

39–40 A continuación damos una fórmula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?

39. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|} \operatorname{sen} x - 1$

40. $f'(x) = \dfrac{100 \cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

41–54 Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f en el intervalo dado.

41. $f(x) = 12 + 4x - x^2$, $[0, 5]$

42. $f(x) = 5 + 54x - 2x^3$, $[0, 4]$

43. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$

44. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, $[-1, 4]$

45. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, $[-2, 3]$

46. $f(x) = (x^2 - 1)^3$, $[-1, 2]$

47. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}$, $[-1, 2]$

48. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, $[-4, 4]$

49. $f(x) = xe^{-x^2/8}$, $[-1, 4]$

50. $f(x) = x - \ln x$, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

51. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$

52. $f(x) = x - 2 \tan^{-1} x$, $[0, 4]$

53. $f(t) = 2 \cos t + \operatorname{sen} 2t$, $[0, \pi/2]$

54. $f(t) = t + \cot(t/2)$, $[\pi/4, 7\pi/4]$

55. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

56. Use una gráfica para estimar los números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ correctos a un lugar decimal.

57–60
(a) Use una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo absolutos de la función a dos lugares decimales.
(b) Use cálculo para hallar los valores máximo y mínimo exactos.

57. $f(x) = x^5 - x^3 + 2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

58. $f(x) = e^{x^3 - x}$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$

59. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

60. $f(x) = x - 2 \cos x$, $-2 \leqslant x \leqslant 0$

61. Entre 0°C y 30°C, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T está dada aproximadamente por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su máxima densidad.

62. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda unida al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante positiva llamada *coeficiente de fricción* y donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F se minimiza cuando $\tan \theta = \mu$.

63. En Estados Unidos un modelo para hallar el precio promedio de una libra de azúcar blanco, de 1993 a 2003, está dado por la ecuación

$$S(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t se mide en años desde agosto de 1993. Estime los tiempos en que el azúcar era más barato y más caro durante el periodo 1993-2003.

64. El 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuyo propósito fue instalar un nuevo motor de impulsión en perigeo en un satélite INTELSAT de comunicaciones. La siguiente tabla indica los datos de velocidad para el transbordador entre el despegue y la expulsión de los impulsores del cohete de combustible sólido.

Evento	Tiempo (s)	Velocidad (ft/s)
Lanzamiento	0	0
Inicia maniobra de tonel	10	185
Termina maniobra de tonel	15	319
Acelerador al 89%	20	447
Acelerador al 67%	32	742
Acelerador al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación de impulsores de combustible sólido	125	4151

(a) Use una calculadora graficadora o computadora para hallar el polinomio cúbico que modele mejor la velocidad del transbordador para el intervalo $t \in [0, 125]$. A continuación grafique este polinomio.
(b) Encuentre un modelo para la aceleración del transbordador y úselo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 segundos.

65. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea obliga a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba causando un aumento en presión en los pulmones. Esto es acompañado por una contracción de la tráquea, haciendo un canal más angosto para que el aire expulsado pase por ahí. Para que una cantidad dada de aire escape en el tiempo fijado, debe moverse con más rapidez por el canal más angosto que por el más ancho. Cuanto mayor es la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza sobre el objeto extraño. Una placa de rayos X muestra que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae a unos dos tercios de su radio normal durante una tos. De acuerdo con el modelo matemático de toser, la velocidad

v de la corriente de aire está relacionada con el radio r de la tráquea por la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción en r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se hace rígida bajo presión y se evita una contracción mayor a $\frac{1}{2}r_0$ (de otro modo la persona se sofocaría).

(a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ en el que v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se compara esto con una evidencia experimental?

(b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v en el intervalo?

(c) Trace la gráfica de v en el intervalo $[0, r_0]$.

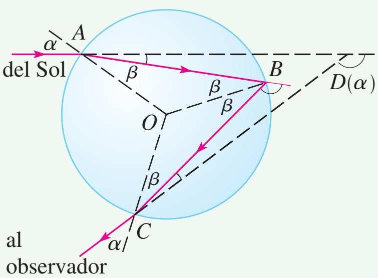
66. Una función cúbica es un polinomio de grado 3; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

(a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos, uno o ningún número(s) crítico(s). Dé ejemplos y trazos para ilustrar las tres posibilidades.

(b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

PROYECTO DE LABORATORIO — El cálculo de los arcos iris

Se forman los arcos iris cuando gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la humanidad desde la antigüedad y han inspirado intentos de explicaciones científicas desde los tiempos de Aristóteles. En este proyecto usamos las ideas de Descartes y Newton para explicar la forma, ubicación y colores de los arcos iris.



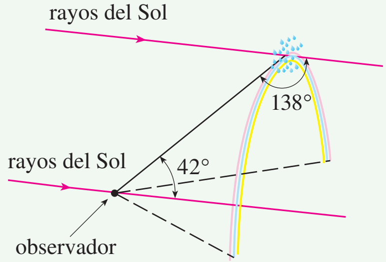
Formación del arco iris primario

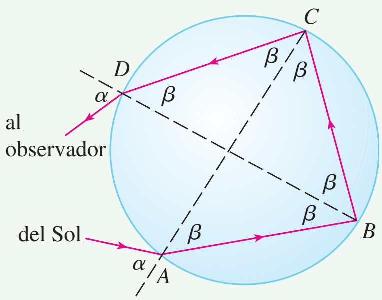
1. La figura muestra un rayo de luz solar entrando a una gota esférica de lluvia en A. Parte de la luz es reflejada, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Observe que la luz es refractada hacia la recta normal AO y de hecho la Ley de Snell dice que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \frac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B parte de la luz pasa por la gota y es refractada hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que es reflejada. (El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte del mismo es reflejada, pero por ahora estamos más interesados en la parte que sale de la gota en C. (Observe que es refractada alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la cantidad de rotación, en el sentido de giro de las manecillas del reloj, que el rayo ha experimentado durante este proceso de tres etapas. Entonces

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.

La importancia de la desviación mínima es que cuando $\alpha \approx 59.4°$ tenemos $D'(\alpha) \approx 0$, de modo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que numerosos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ se desvían aproximadamente la misma cantidad. Es la *concentración* de rayos provenientes de cerca de la dirección de mínima desviación la que crea la brillantez del arco iris primario. La siguiente figura muestra que el ángulo de elevación desde el observador hasta el punto más alto del arco iris es $180° - 138° = 42°$. (Este ángulo recibe el nombre de *ángulo del arco iris*.)





Formación del arco iris secundario

2. El Problema 1 explica la ubicación del arco iris primario, pero ¿cómo explicamos los colores? La luz del Sol contiene una gran variedad de longitudes de onda, del rojo al naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Como Newton descubrió en sus experimentos de prismas en 1666, el índice de refracción es diferente para cada color. (El efecto se denomina *dispersión*.) Para la luz roja el índice refractivo es $k \approx 1.3318$ mientras que para la luz violeta es $k \approx 1.3435$. Repitiendo el cálculo del Problema 1 para estos valores de k, demuestre que el ángulo del arco iris es alrededor de 42.3° para el arco rojo y 40.6° para el arco violeta. Por tanto, el arco iris realmente está formado por siete arcos individuales correspondientes a los siete colores.

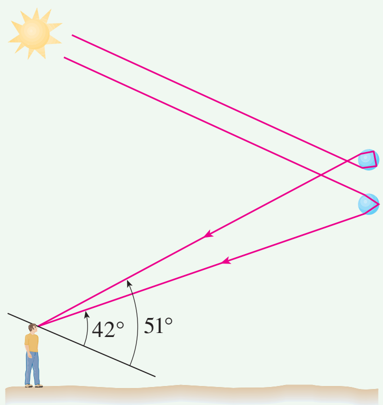
3. Quizá usted ha visto un arco iris secundario más tenue, arriba del arco primario. Éste resulta de la parte de un rayo que entra a una gota de lluvia y es refractado en A, reflejado dos veces (en B y C), y refractado cuando sale de la gota en D (véase la figura a la izquierda). Esta vez el ángulo de desviación $D(\alpha)$ es la cantidad total de rotación, en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, que el rayo experimenta en este proceso de cuatro etapas. Demuestre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

y $D(\alpha)$ tiene un valor mínimo cuando

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Tomando $k = \frac{4}{3}$, demuestre que la desviación mínima es de alrededor de 129° y por tanto el ángulo del arco iris para el arco iris secundario es de unos 51°, como se ve en la siguiente figura.



4. Demuestre que los colores del arco iris secundario aparecen en el orden opuesto a los del arco iris primario.

4.3 Derivadas y las formas de curvas

En la Sección 2.8 explicamos la forma en que los signos de la primera y segunda derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ influyen en la forma de la gráfica de f. A continuación hacemos un repaso de esos datos, dando una indicación de por qué son verdaderos, junto con las fórmulas de derivación del Capítulo 3, para explicar las formas de gráficas.

Empezamos con un dato, conocido como el teorema del valor medio, que será útil no sólo para nuestros fines actuales sino también para explicar por qué algunos de los otros resultados básicos de cálculo son verdaderos.

El Teorema del valor medio Si f es una función derivable en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un número c entre a y b tal que

1
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o bien, lo que es equivalente,

2
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Lagrange y el teorema del valor medio

El Teorema del valor medio fue formulado primeramente por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nacido en Italia de padre francés y madre italiana. Fue un niño prodigio y llegó a ser profesor en Turín a la edad de 19 años. Lagrange hizo grandes aportaciones a la teoría de números, teoría de funciones, teoría de ecuaciones y mecánica analítica y celeste. En particular, aplicó el cálculo al análisis de la estabilidad del sistema solar. A invitación de Federico el Grande, sucedió a Euler en la Academia de Berlín y, cuando Federico murió, Lagrange aceptó la invitación del rey Luis XVI a París, donde vivió en departamentos del Louvre que le fueron concedidos y fue profesor en la Escuela Politécnica. Fue un hombre bondadoso y pacífico que vivió sólo para la ciencia.

Podemos ver que este teorema es razonable al interpretarlo geométricamente. Las Figuras 1 y 2 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ en las gráficas de dos funciones derivables.

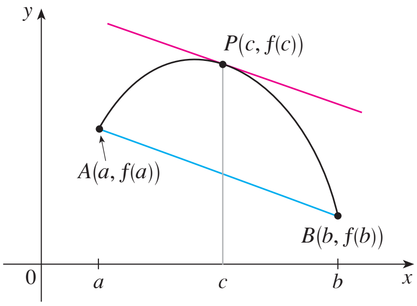


FIGURA 1

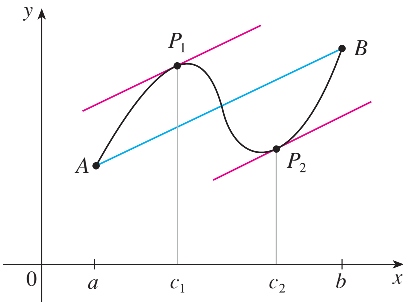


FIGURA 2

La pendiente de la recta secante AB es

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es la misma expresión como en el lado derecho de la Ecuación 1. Como $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la Ecuación 1, dice que hay al menos un punto $P(c, f(c))$ en la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante AB. En otras palabras, hay un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB. Parece claro que hay tal punto P en la Figura 1 y dos de estos puntos P_1 y P_2 en la Figura 2. Como nuestra intuición nos dice que el teorema del valor medio es verdadero, lo tomamos como punto de partida para el desarrollo de los datos principales de cálculo. (Cuando se crea el cálculo a partir de los primeros principios, no obstante, el teorema del valor medio se demuestra como consecuencia de los axiomas que definen el sistema de números reales.)

V EJEMPLO 1 **Qué dice el teorema del valor medio acerca de la velocidad** Si un objeto se mueve en línea recta con función de posición $s = f(t)$, entonces el promedio de velocidad entre $t = a$ y $t = b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la velocidad en $t = c$ es $f'(c)$. Por tanto, el teorema del valor medio (en forma de la Ecuación 1) nos dice que en algún tiempo $t = c$ entre a y b la velocidad instantánea $f'(c)$ es igual a ese promedio de velocidad. Por ejemplo, si un auto recorrió 180 km en 2 horas, entonces el velocímetro debe haber indicado 90 km/h al menos una vez.

La principal importancia del teorema del valor medio es que hace posible obtener información acerca de una función a partir de su derivada. Nuestro uso inmediato de este principio es demostrar los datos básicos respecto a funciones crecientes y decrecientes. (Véanse Ejercicios 63 y 64 para otro uso.)

Funciones crecientes y decrecientes

En la Sección 1.1 definimos funciones crecientes y funciones decrecientes y en la Sección 2.8 observamos de las gráficas que una función con derivada positiva es creciente. Ahora deducimos este hecho por el teorema del valor medio.

Abreviemos el nombre de esta prueba a Prueba C/D.

Prueba Crecimiento/Decrecimiento

(a) Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

(b) Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

DEMOSTRACIÓN

(a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo con $x_1 < x_2$. De acuerdo con la definición de una función creciente (página 21) tenemos que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como nos indican que $f'(x) > 0$, sabemos que f es derivable en $[x_1, x_2]$. Entonces, por el teorema del valor medio, hay un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$\boxed{3} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora $f'(c) > 0$ por suposición y $x_2 - x_1 > 0$ porque $x_1 < x_2$. Entonces el lado derecho de la Ecuación 3 es positivo, y por tanto

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

Esto demuestra que f es creciente.

El inciso (b) se demuestra de un modo similar.

V EJEMPLO 2 Encuentre en dónde es creciente y en dónde es decreciente la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

SOLUCIÓN $\quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$

Para usar la Prueba C/D tenemos que saber en dónde $f'(x) > 0$ y en dónde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$, es decir, $12x$, $x - 2$ y $x + 1$. Dividimos la recta real en intervalos cuyos puntos extremos son los números críticos -1, 0 y 2 y anotamos nuestro trabajo en una tabla. Un signo más indica que la expresión dada es positiva, y un signo menos indica que es negativa. La última columna de la tabla da la conclusión basada en la Prueba C/D. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, de modo que f es decreciente en $(0, 2)$. (También sería verdadero decir que f es decreciente en el intervalo cerrado $[0, 2]$.)

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente en $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	creciente en $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente en $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente en $(2, \infty)$

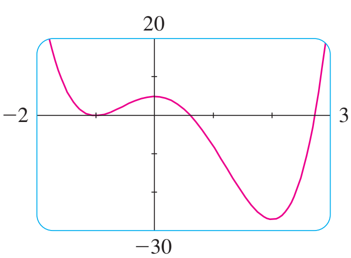


FIGURA 3

La gráfica de f que se muestra en la Figura 3 confirma la información de la tabla.

Recuerde de la Sección 4.2 que si f tiene un máximo o mínimo local en c, entonces c debe ser un número crítico de f (por el teorema de Fermat), pero no todo número crítico surge de un máximo o un mínimo. Por tanto, necesitamos una prueba que nos diga si f tiene o no tiene un máximo o mínimo local en un número crítico.

Se puede ver de la Figura 3 que $f(0) = 5$ es un valor máximo local de f porque f aumenta en $(-1, 0)$ y disminuye en $(0, 2)$. O bien, en términos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. En otras palabras, el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en 0. Esta observación es la base de la siguiente prueba.

Prueba de la primera derivada Suponga que c es un número crítico de una función continua f.

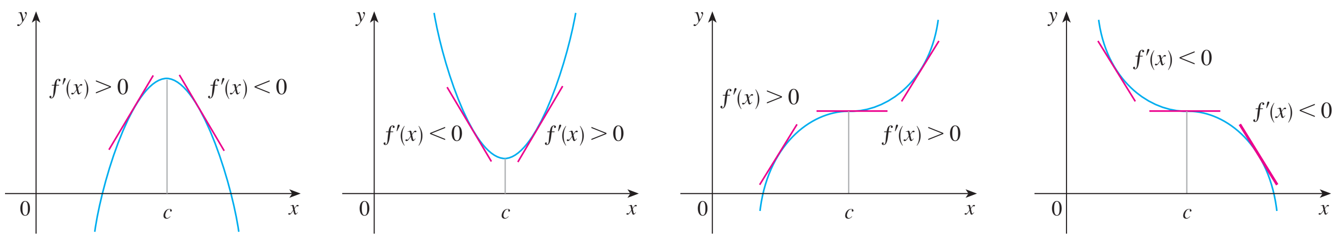
(a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

(b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

(c) Si f' no cambia de signo en c (por ejemplo, si f' es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados), entonces f no tiene máximo o mínimo local en c.

La Prueba de la primera derivada es una consecuencia de la Prueba (C/D). En el inciso (a), por ejemplo, como el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, f es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha de c. Se deduce que f tiene un máximo local en c.

Es fácil recordar la prueba de la primera derivada si visualizamos diagramas como los de la Figura 4.



(a) Máximo local (b) Mínimo local (c) No hay máximo ni mínimo (d) No hay máximo ni mínimo

FIGURA 4

V EJEMPLO 3 Encuentre los valores de mínimo y máximo local de la función f en el Ejemplo 2.

SOLUCIÓN De la tabla en la solución del Ejemplo 2 vemos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en -1, de modo que $f(-1) = 0$ es un valor mínimo local por la Prueba de la primera derivada. Del mismo modo, f' cambia de negativa a positiva en 2, por lo cual $f(2) = -27$ también es un valor mínimo local. Como ya antes dijimos, $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en 0.

Concavidad

Recordemos la definición de concavidad de la Sección 2.8.

Una función (o su gráfica) se denomina **cóncava hacia arriba** en un intervalo I si f' es una función creciente en I. Se denomina **cóncava hacia abajo** en I si f' es decreciente en I.

Observe en la Figura 5 que las pendientes de las rectas tangentes aumentan de izquierda a derecha en el intervalo (a, b), de modo que f' es creciente y f es cóncava hacia arriba (abreviado CA) en (a, b). [Se puede demostrar que esto es equivalente a decir que la gráfica de f se encuentra arriba de todas sus rectas tangentes en (a, b).] Del mismo modo, las pendientes de las rectas tangentes disminuyen de izquierda a derecha en (b, c), de modo que f' es decreciente y f es cóncava hacia abajo (CB) en (b, c).

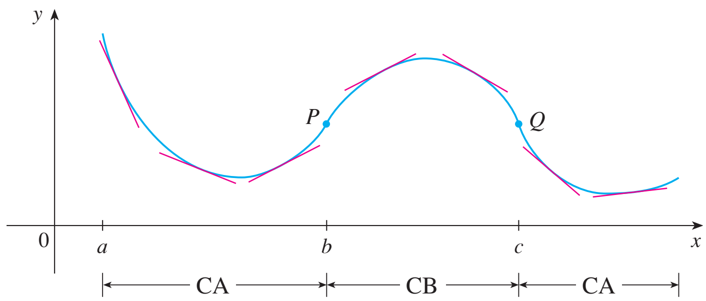


FIGURA 5

Un punto donde una curva cambia su dirección de concavidad se denomina **punto de inflexión.** La curva de la Figura 5 cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en P y de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en Q, por lo que P y Q son puntos de inflexión.

Debido a que $f'' = (f')'$, sabemos que si $f''(x)$ es positiva, entonces f' es una función creciente y entonces f es cóncava hacia arriba. Análogamente, si $f''(x)$ es negativa, entonces f' es decreciente y f es cóncava hacia abajo. Por tanto, tenemos la siguiente prueba para concavidad.

Prueba de concavidad

(a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.

(b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

En vista de la Prueba de concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambie de signo. Una consecuencia de la Prueba de concavidad es la siguiente prueba para valores máximo y mínimo.

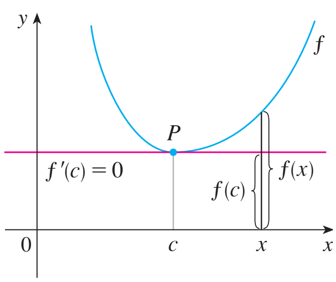


FIGURA 6
$f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba

Prueba de la segunda derivada Suponga que f'' es continua cerca de c.

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.

Por ejemplo, el inciso (a) es verdadero porque $f''(x) > 0$ cerca de c y por tanto f es cóncava hacia arriba cerca de c. Esto significa que la gráfica de f se encuentra *arriba* de su tangente horizontal en c y f tiene un mínimo local en c. (Véase Figura 6.)

V EJEMPLO 4 Analizar una curva usando derivadas Analice la curva $y = x^4 - 4x^3$ con respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales. Use esta información para trazar la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para hallar los números críticos hacemos $f'(x) = 0$ y obtenemos $x = 0$ y $x = 3$. Para usar la Prueba de la segunda derivada evaluamos f'' en estos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Como $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. Como $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no da información acerca del número crítico 0. Pero como $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada nos dice que f no tiene máximo o mínimo local en 0.

Como $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o 2, dividimos la recta real en intervalos con estos números como puntos extremos y completamos la tabla siguiente.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	$+$	hacia arriba
$(0, 2)$	$-$	hacia abajo
$(2, \infty)$	$+$	hacia arriba

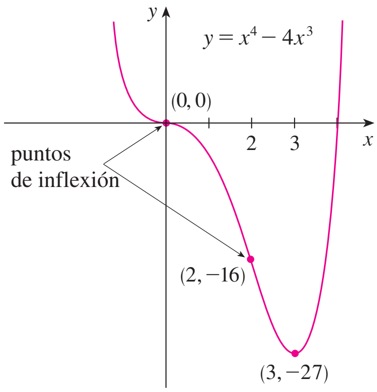


FIGURA 7

El punto (0, 0) es un punto de inflexión porque la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo ahí. También, (2, −16) es un punto de inflexión porque la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba ahí.

Usando el mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, trazamos la curva de la Figura 7.

Nota: La prueba de la segunda derivada no es concluyente cuando $f''(c) = 0$. En otras palabras, en ese punto podría haber un máximo, podría haber un mínimo o no podría haber ninguno de ellos (como en el Ejemplo 4). Esta prueba también falla cuando $f''(c)$ no existe. En tales casos debe usarse la prueba de la primera derivada. De hecho, aun cuando aplican ambas pruebas, la prueba de la primera derivada es con frecuencia la más fácil de usar.

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

SOLUCIÓN El cálculo de las primeras dos derivadas da

Use las reglas de derivación para comprobar estos cálculos.

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

Como $f'(x) = 0$ cuando $x = 4$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4 y 6.

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente en $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente en $(0, 4)$
$4 < x < 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decreciente en $(4, 6)$
$x > 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decreciente en $(6, \infty)$

Para hallar los valores extremos locales usamos la prueba de la primera derivada. Como f' cambia de negativa a positiva en 0, $f(0) = 0$ es un mínimo local. Como f' cambia de positiva a negativa en 4, $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no cambia en 6, de modo que ahí no hay mínimo o máximo. (La prueba de la segunda derivada podría usarse en 4 pero no en 0 o 6 porque f'' no existe en ninguno de estos números.)

Al ver la expresión para $f''(x)$ y observar que $x^{4/3} \geqslant 0$ para toda x, tenemos $f''(x) < 0$ y para $x < 0$ y para $0 < x < 6$, y $f''(x) > 0$ para $x > 6$. En consecuencia, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$ y cóncava hacia arriba en $(6, \infty)$ y el único punto de inflexión es $(6, 0)$. La gráfica está trazada en la Figura 8. Observe que la curva tiene tangentes verticales en $(0, 0)$ y $(6, 0)$ porque $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to 6$.

Trate de reproducir la gráfica de la Figura 8 con una calculadora graficadora o computadora. Algunas máquinas producen la gráfica completa, otras producen sólo la parte a la derecha del eje y y algunas producen sólo la parte entre $x = 0$ y $x = 6$. Para una explicación y solución, véase el Ejemplo 7 en la Sección 1.4. Una expresión equivalente que da la gráfica correcta es

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6 - x}{|6 - x|} |6 - x|^{1/3}$$

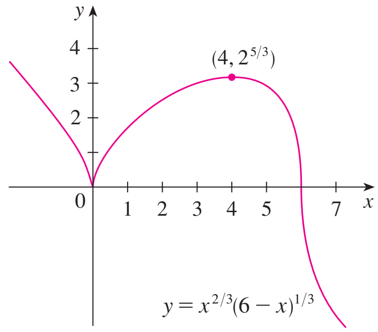


FIGURA 8

EJEMPLO 6 Use la primera y segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto con las asíntotas, para trazar su gráfica.

SOLUCIÓN Observe que el dominio de f es $\{x \mid x \neq 0\}$, de modo que buscamos las asíntotas verticales al calcular los límites izquierdo y derecho cuando $x \to 0$. Cuando $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, de modo que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

y esto demuestra que $x = 0$ es una asíntota vertical. Cuando $x \to 0^-$, tenemos $t = 1/x \to -\infty$, y entonces

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

TEC En Module 4.3 se puede practicar usando información acerca de f', f'', y asíntotas para determinar la forma de la gráfica de f.

Cuando $x \to \pm\infty$, tenemos $1/x \to 0$ y por tanto

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Esto demuestra que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Ahora calculemos la derivada. La regla de la cadena da

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

www.stewartcalculus.com

Al hacer clic en *Additional Topics*, se verá

Summary of Curve Sketching

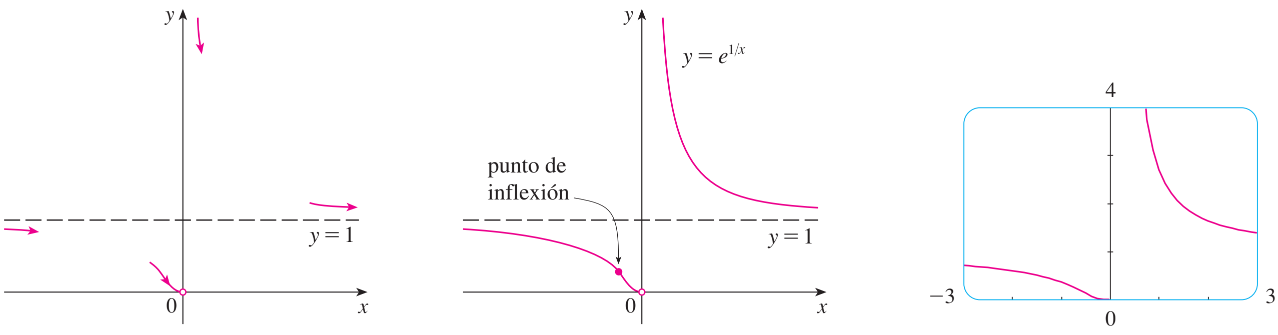
Las guías dadas ahí resumen toda la información necesaria para hacer un dibujo de una curva que expresa sus aspectos más importantes. Ejemplos y ejercicios dan al estudiante práctica adicional.

Como $e^{1/x} > 0$ y $x^2 > 0$ para toda $x \neq 0$, tenemos $f'(x) < 0$ para toda $x \neq 0$. Entonces f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$. No hay número crítico, de modo que la función no tiene máximo o mínimo local. La segunda derivada es

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

Como $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$, tenemos $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. Entonces la curva es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y en $(0, \infty)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para trazar la gráfica de f primero trazamos la asíntota horizontal $y = 1$ (como recta interrumpida), junto con las partes de la curva cerca de las asíntotas en un trazo preliminar [Figura 9(a)]. Estas partes reflejan la información respecto a límites y el hecho de que f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Observe que hemos indicado que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0^-$ aun cuando $f(0)$ no existe. En la Figura 9(b) terminamos el trazo al incorporar la información respecto a concavidad y el punto de inflexión. En la Figura 9(c) comprobamos nuestro trabajo con una calculadora graficadora.



(a) Trazo preliminar (b) Trazo terminado (c) Confirmación por computadora

FIGURA 9

EJEMPLO 7 **¿Cuándo crece más rápido una población de abejas?** Una población de abejas criada en un apiario empezó con 50 abejas en el tiempo $t = 0$ y fue modelada por la función

$$P(t) = \frac{75{,}200}{1 + 1503e^{-0.5932t}}$$

donde t es el tiempo en semanas, $0 \leqslant t \leqslant 25$. Use una gráfica para estimar el tiempo en el que la población de abejas estaba creciendo con máxima rapidez. A continuación use derivadas para dar una estimación más precisa.

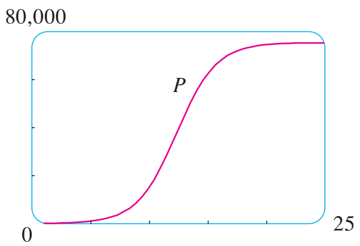


FIGURA 10

SOLUCIÓN La población crece con máxima rapidez cuando la curva de población $y = P(t)$ tiene la recta tangente más empinada. De la gráfica de P en la Figura 10, estimamos que la tangente más empinada ocurre cuando $t \approx 12$, de modo que la población de abejas estaba creciendo más rápidamente después de unas 12 semanas.

Para una mejor estimación calculamos la derivada $P'(t)$, que es la rapidez de aumento de la población de abejas:

$$P'(t) = -\frac{67{,}046{,}785.92e^{-0.5932t}}{(1 + 1503e^{-0.5932t})^2}$$

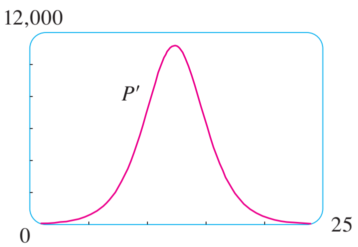


FIGURA 11

Graficamos P' en la Figura 11 y observamos que P' tiene su valor máximo cuando $t \approx 12.3$.

Para obtener un cálculo todavía mejor observamos que f' tiene su valor máximo cuando f' cambia de creciente a decreciente. Esto ocurre cuando f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, es decir, cuando f tiene un punto de inflexión. Por tanto, pedimos a un sistema computarizado de álgebra (CAS) que calcule la segunda derivada:

$$P''(t) \approx \frac{119555093144e^{-1.1864t}}{(1 + 1503e^{-0.5932t})^3} - \frac{39772153e^{-0.5932t}}{(1 + 1503e^{-0.5932t})^2}$$

Podríamos graficar esta función para ver dónde cambia de positiva a negativa, pero en lugar de ello hagamos que el CAS resuelva la ecuación $P''(t) = 0$. Da la respuesta $t \approx 12.3318$.

Nuestro ejemplo final se refiere a *familias* de funciones. Esto significa que las funciones de la familia están relacionadas entre sí por una fórmula que contiene una o más constantes arbitrarias. Cada valor de la constante da lugar a un miembro de la familia y la idea es ver cómo es que la gráfica de la función cambia cuando cambia la constante.

EJEMPLO 8 Investigue la familia de funciones dada por $f(x) = cx + \text{sen}\, x$. ¿Qué características tienen en común los miembros de esta familia? ¿Cómo difieren?

SOLUCIÓN La derivada es $f'(x) = c + \cos x$. Si $c > 1$, entonces $f'(x) > 0$ para toda x (porque $\cos x \geqslant -1$), de modo que f es siempre creciente. Si $c = 1$, entonces $f'(x) = 0$ cuando x es un múltiplo impar de π, pero f sólo tiene tangentes horizontales ahí y es todavía una función creciente. Del mismo modo, si $c \leqslant -1$, entonces f es siempre decreciente. Si $-1 < c < 1$, entonces la ecuación $c + \cos x = 0$ tiene un número infinito de soluciones $[x = 2n\pi \pm \cos^{-1}(-c)]$ y f tiene un número infinito de mínimos y máximos.

La segunda derivada es $f''(x) = -\text{sen}\, x$, que es negativa cuando $0 < x < \pi$ y, en general, cuando $2n\pi < x < (2n + 1)\pi$, donde n es cualquier entero. Entonces *todos* los miembros de la familia son cóncavos hacia abajo en $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$,… y cóncava hacia arriba en $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$,… Esto está ilustrado por varios miembros de la familia en la Figura 12.

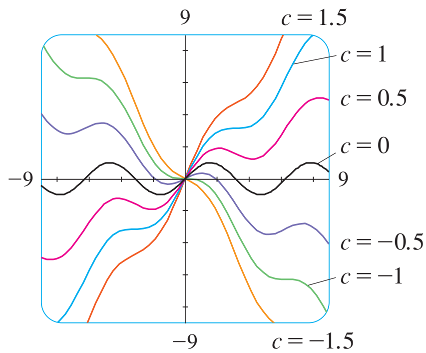
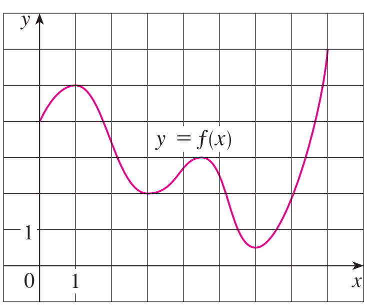


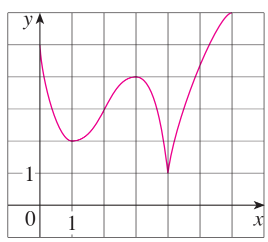
FIGURA 12

4.3 Ejercicios

1. Use la gráfica de f para estimar los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo [0, 8].



2. Use la gráfica de f para hallar lo siguiente.
(a) Los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia arriba
(b) Los intervalos abiertos en los que f es cóncava hacia abajo
(c) Las coordenadas de los puntos de inflexión



3. Suponga que nos dan una fórmula para una función f.
(a) ¿Cómo se determina en dónde f es creciente o decreciente?
(b) ¿Cómo se determina dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
(c) ¿Cómo se localizan puntos de inflexión?

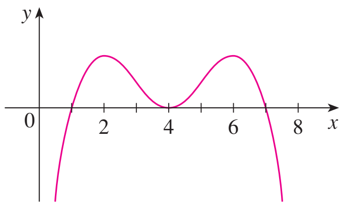
Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

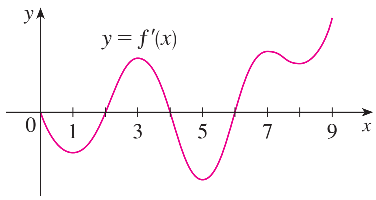
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

4. (a) Exprese la Prueba de la primera derivada.
(b) Exprese la Prueba de la segunda derivada. ¿Bajo qué circunstancias no es concluyente? ¿Qué se hace si falla?

5. En cada una de las partes siguientes exprese las coordenadas x de los puntos de inflexión de f. Dé razones para su respuesta.
(a) La curva es la gráfica de f.
(b) La curva es la gráfica de f'.
(c) La curva es la gráfica de f''.



6. Se muestra la gráfica de la primera derivada f' de una función.
(a) ¿En qué intervalos es f creciente? Explique.
(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.
(c) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.
(d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



7–16
(a) Encuentre los intervalos en los que f es creciente o decreciente.
(b) Encuentre los valores máximo y mínimo locales de f.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

7. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

8. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

9. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

11. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

12. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

13. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

14. $f(x) = x^2 \ln x$

15. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

16. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

17–18 Encuentre los valores máximo y mínimo locales de f usando las pruebas de primera y segunda derivada. ¿Cuál método prefiere?

17. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

19. Suponga que f'' es continua en $(-\infty, \infty)$.
(a) Si $f'(2) = 0$ y $f''(2) = -5$, ¿qué se puede decir acerca de f?
(b) Si $f'(6) = 0$ y $f''(6) = 0$, ¿qué se puede decir acerca de f?

20. (a) Encuentre los números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) ¿Qué dice la prueba de la segunda derivada del comportamiento de f en estos números críticos?
(c) ¿Qué dice la prueba de la primera derivada?

21–32
(a) Encuentre los intervalos de aumento o disminución.
(b) Encuentre los valores máximo y mínimo locales.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(d) Use la información de los incisos (a)-(c) para trazar la gráfica. Compruebe su trabajo con una calculadora graficadora si la tiene.

21. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

22. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

23. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

24. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

25. $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$

26. $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

27. $A(x) = x\sqrt{x + 3}$

28. $B(x) = 3x^{2/3} - x$

29. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

30. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

31. $f(\theta) = 2 \cos \theta + \cos^2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

32. $f(t) = t + \cos t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

33–40
(a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
(b) Encuentre los intervalos de aumento o disminución.
(c) Encuentre los valores máximo y mínimo locales.
(d) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(e) Use la información de los incisos (a)-(d) para trazar la gráfica de f.

33. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

34. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x - 2)^2}$

35. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

36. $f(x) = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

37. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

38. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

39. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

40. $f(x) = e^{\arctan x}$

41. Suponga que la derivada de una función f es $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. ¿En qué intervalo es f creciente?

42. Use los métodos de esta sección para trazar la curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, donde a es una constante positiva. ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de curvas? ¿Cómo difieren entre sí?

43–44
(a) Use una gráfica de f para estimar los valores máximo y mínimo. A continuación encuentre los valores exactos.
(b) Estime el valor de x en el que f aumenta con máxima rapidez. A continuación encuentre los valores exactos.

43. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

44. $f(x) = x^2 e^{-x}$

45–46
(a) Use una gráfica de f para dar una estimación aproximada de los intervalos de concavidad y las coordenadas de los puntos de inflexión.
(b) Use una gráfica de f'' para dar sus mejores estimaciones.

45. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

46. $f(x) = x^3(x-2)^4$

CAS **47–48** Estime los intervalos de concavidad a un lugar decimal usando un sistema computarizado de álgebra para calcular y graficar f''.

47. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ **48.** $f(x) = \dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^3}$

---

49. Sea $f(t)$ la temperatura en el tiempo t donde vive usted y suponga que en el tiempo $t = 3$ usted siente un clima incómodamente caliente. ¿Cómo se siente por los datos dados en cada caso?
(a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$
(b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$
(c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$
(d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

50. Suponga que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$, y $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x.
(a) Trace una posible gráfica de f.
(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$?
(c) ¿Es posible que $f'(2) = \frac{1}{3}$? ¿Por qué?

51–52 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2. ¿Para qué valores de t es cóncava hacia arriba la curva paramétrica?

51. $x = t^3 - 12t, \quad y = t^2 - 1$

52. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$

---

53. En teoría de relatividad, la masa de una partícula es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo, m es la masa cuando la partícula se mueve con velocidad v con respecto al observador, y c es la rapidez de la luz. Trace la gráfica de m como función de v.

54. En teoría de relatividad, la energía de una partícula es

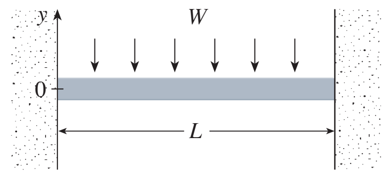
$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo, λ es su longitud de onda y h es la constante de Planck. Trace la gráfica de E como función de λ. ¿Qué dice la gráfica acerca de la energía?

55. La figura muestra una viga de longitud L incrustada en muros de concreto. Si una constante de carga W está distribuida uniformemente en su longitud, la viga toma la forma de la curva de deflexión

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

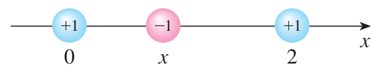
donde E e I son constantes positivas. (E es el módulo de elasticidad de Young e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga.) Trace la gráfica de la curva de deflexión.



56. La Ley de Coulomb expresa que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1, colocadas en las posiciones 0 y 2 en una recta coordenada, y una partícula con carga -1 en una posición x entre ellas. Se deduce de la Ley de Coulomb que la fuerza neta que actúa sobre la partícula intermedia es

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

donde k es una constante positiva. Trace la gráfica de la función de la fuerza neta. ¿Qué dice la gráfica acerca de la fuerza?



57. Una *curva de respuesta a un medicamento* describe el nivel de medicación en el torrente sanguíneo después de administrarla. Con frecuencia se usa una función de variación rápida $S(t) = At^p e^{-kt}$ para modelar la curva de respuesta, reflejando una variación rápida inicial del nivel de medicamento y luego una reducción más gradual. Si, para un medicamento en particular, $A = 0.01$, $p = 4$, $k = 0.07$, y t se mide en minutos, calcule los tiempos correspondientes a los puntos de inflexión y explique la importancia de ellos. Si usted cuenta con una calculadora graficadora, úsela para graficar la curva de respuesta del medicamento.

58. La familia de curvas en forma de campana

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

se presenta en probabilidad y estadística, donde recibe el nombre de *función de densidad normal*. La constante μ se denomina *media* y la constante positiva σ es la *desviación estándar*. Para mayor sencillez, pongamos escala a la función para eliminar el factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y analicemos el caso especial donde $\mu = 0$. Así estudiamos la función

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encuentre la asíntota, valor máximo y puntos de inflexión de f.
(b) ¿Qué papel desempeña σ en la forma de la curva?
(c) Ilustre al graficar cuatro miembros de esta familia en la misma pantalla.

59. Encuentre una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tiene un valor máximo local de 3 en $x = -2$ y un valor mínimo local de 0 en $x = 1$.

60. ¿Para qué valores de los números a y b tiene la función

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

el valor máximo de $f(2) = 1$?

61. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugerencia*: Demuestre que $f(x) = \tan x - x$ es creciente en $(0, \pi/2)$.]

62. (a) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.
(b) Deduzca que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.
(c) Use inducción matemática para demostrar que para $x \geqslant 0$ y cualquier entero positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

63. Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. La desigualdad da una restricción en la cantidad de crecimiento de f, que entonces impone una restricción en los posibles valores de f. Use el teorema del valor medio para determinar qué tan grande puede posiblemente ser $f(4)$.

64. Suponga que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. Demuestre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

65. Dos corredores arrancan en una carrera al mismo tiempo y terminan en empate. Demuestre que en algún tiempo durante la carrera ellos pueden tener la misma rapidez. [*Sugerencia*: Considere $f(t) = \mathtt{t}(t) - h(t)$, donde $\mathtt{t}$ y h son las funciones de posición de los dos corredores.]

66. A las 2:00 p.m. el velocímetro de un auto indica 30 mi/h. A las 2:10 p.m. indica 50 mi/h. Demuestre que en algún momento entre las 2:00 y las 2:10 la aceleración es exactamente de 120 mi/h^2.

67. Demuestre que la curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tiene tres puntos de inflexión y todos se encuentran en una recta.

68. Demuestre que las curvas $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$ tocan la curva $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$ en sus puntos de inflexión.

69. Demuestre que una función cúbica (un polinomio de tercer grado) siempre tiene exactamente un punto de inflexión. Si su gráfica tiene tres intersecciones en el eje x, es decir, x_1, x_2 y x_3, demuestre que la coordenada x del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

; **70.** ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tiene dos puntos de inflexión? ¿Un punto de inflexión? ¿Ninguno? Ilustre al graficar P para distintos valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando c disminuye?

71. (a) Si la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene el valor mínimo local $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ en $x = 1/\sqrt{3}$, ¿cuáles son los valores de a y b?
(b) ¿Cuál de las rectas tangentes a la curva en el inciso (a) tiene la pendiente más pequeña?

72. ¿Para qué valores de c es la función

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + 3}$$

creciente en $(-\infty, \infty)$?

4.4 Graficando con cálculo *y* calculadoras

Si usted no ha leído ya la Sección 1.4, debe hacerlo ahora. En particular, explica cómo evitar algunos de los problemas de calculadoras de gráficas para escoger rectángulos de observación apropiados.

El método empleado para trazar curvas en la sección anterior fue una culminación de mucho de nuestro estudio de cálculo diferencial. La gráfica fue el objeto final que produjimos. En esta sección nuestro punto de vista es completamente diferente. Aquí *empezamos* con una gráfica producida por una calculadora graficadora o computadora y luego la refinamos. Usamos cálculo para asegurarnos de descubrir todos los aspectos importantes de la curva. Y con el uso de calculadoras graficadoras podemos abordar las curvas que serían demasiado complicadas para considerar sin tecnología. El tema es la *interacción* entre cálculo y calculadoras.

EJEMPLO 1 **Descubrir comportamiento oculto**

Grafique el polinomio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use las gráficas de f' y f'' para calcular todos los puntos máximo y mínimo e intervalos de concavidad.

SOLUCIÓN Si especificamos un dominio pero no un rango, muchas calculadoras deducirán un rango apropiado a partir de los valores calculados. La Figura 1 muestra la gráfica de una de estas calculadoras si especificamos que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Aun cuando este rectángulo es útil para demostrar que el comportamiento asintótico (o comportamiento final) es el mismo que para $y = 2x^6$, obviamente está ocultando algún detalle más fino. Por tanto, cambiamos al rectángulo de observación $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$ que se ve en la Figura 2.

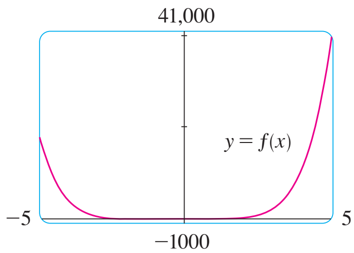


FIGURA 1

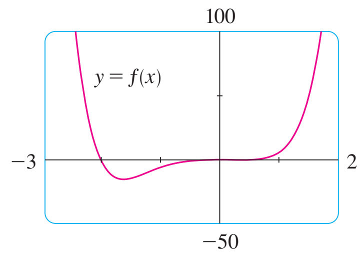


FIGURA 2

De esta gráfica se ve que hay un valor mínimo absoluto de alrededor de -15.33 cuando $x \approx -1.62$ (usando el cursor) y f es decreciente en $(-\infty, -1.62)$ y creciente en $(-1.62, \infty)$. También se observa que hay una tangente horizontal en el origen y puntos de inflexión cuando $x = 0$ y cuando x está en algún punto entre -2 y -1.

Ahora tratemos de confirmar estas impresiones usando cálculo. Derivamos y obtenemos

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

Cuando graficamos f' en la Figura 3 vemos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando $x \approx -1.62$; esto confirma (por la prueba de la primera derivada) el valor mínimo que encontramos antes. Pero, quizá para nuestra sorpresa, también observamos que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando $x = 0$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.35$. Esto significa que f tiene un máximo local en 0 y un mínimo local cuando $x \approx 0.35$, pero éstos estaban ocultos en la Figura 2. De hecho, si ahora hacemos acercamiento (zoom) hacia el origen en la Figura 4, vemos lo que nos habíamos perdido antes: un valor máximo local de 0 cuando $x = 0$ y un valor mínimo local de alrededor de -0.1 cuando $x \approx 0.35$.

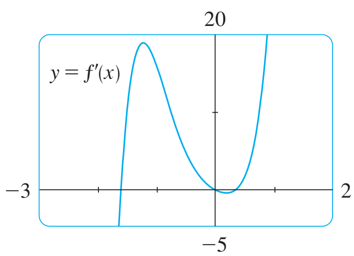


FIGURA 3

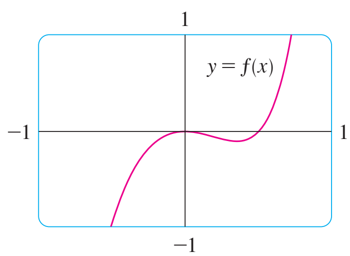


FIGURA 4

¿Qué se puede decir de la concavidad y puntos de inflexión? De las Figuras 2 y 4 parece haber puntos de inflexión cuando x está un poco a la izquierda de -1 y cuando x está un poco a la derecha de 0. Pero es difícil determinar puntos de inflexión a partir de la gráfica de f, de modo que graficamos la segunda derivada f'' en la Figura 5. Vemos que f'' cambia de positiva a negativa cuando $x \approx -1.23$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.19$. Por tanto, para corregir a dos lugares decimales, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1.23)$ y $(0.19, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1.23, 0.19)$. Los puntos de inflexión son $(-1.23, -10.18)$ y $(0.19, -0.05)$.

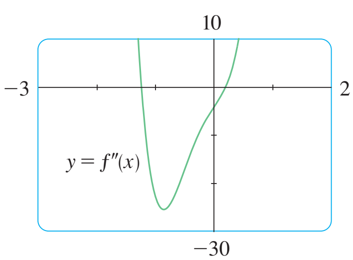


FIGURA 5

Hemos descubierto que ninguna gráfica por sí sola muestra todas las características importantes de este polinomio, pero las Figuras 2 y 4 tomadas juntas proporcionan una imagen precisa.

V EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

en un rectángulo de observación que contiene todas las características importantes de la función. Estime los valores máximo y mínimo y los intervalos de concavidad. A continuación use cálculo para hallar estas cantidades exactamente.

SOLUCIÓN La Figura 6, producida por una computadora con escala automática, es un desastre. Algunas calculadoras de gráficas usan $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ como rectángulo de observación predeterminado, de modo que intentémoslo. Obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 7; es una mejora importante.

El eje y parece ser una asíntota vertical y de hecho lo es porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

La Figura 7 también nos permite estimar las intersecciones en x: alrededor de -0.5 y -6.5. Los valores exactos se obtienen al usar la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 + 7x + 3 = 0$; obtenemos $x = \left(-7 \pm \sqrt{37}\right)/2$.

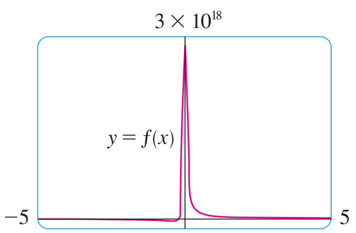


FIGURA 6

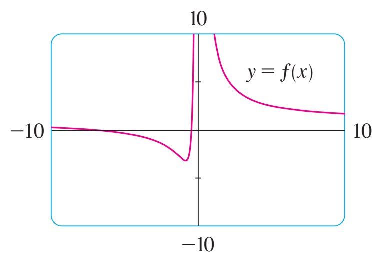


FIGURA 7

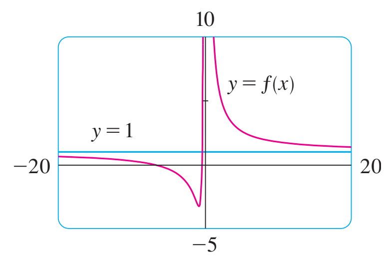


FIGURA 8

Para tener una mejor imagen de asíntotas horizontales, cambiamos al rectángulo de observación $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ en la Figura 8. Se ve que $y = 1$ es la asíntota horizontal y esto se confirma fácilmente:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

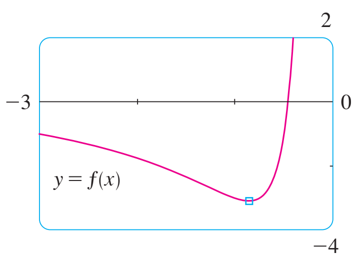


FIGURA 9

Para calcular el valor mínimo hacemos acercamiento al rectángulo de observación $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ en la Figura 9. El cursor indica que el valor mínimo absoluto es alrededor de -3.1 cuando $x \approx -0.9$, y vemos que la función decrece en $(-\infty, -0.9)$ y $(0, \infty)$ y aumenta en $(-0.9, 0)$. Los valores exactos se obtienen por derivación:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Esto demuestra que $f'(x) > 0$ cuando $-\frac{6}{7} < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $x < -\frac{6}{7}$ y cuando $x > 0$. El valor mínimo exacto es $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3.08$.

La Figura 9 también muestra que hay un punto de inflexión en algún punto entre $x = -1$ y $x = -2$. Podríamos calcularlo en forma mucho más precisa si usamos la gráfica de la segunda derivada, pero en este caso es igualmente fácil hallar valores exactos. Como

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x + 9)}{x^4}$$

vemos que $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. Por tanto, f es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ y $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

El análisis usando las primeras dos derivadas muestra que la Figura 8 presenta todos los aspectos importantes de la curva.

V EJEMPLO 3 Una gráfica no siempre es suficiente

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$.

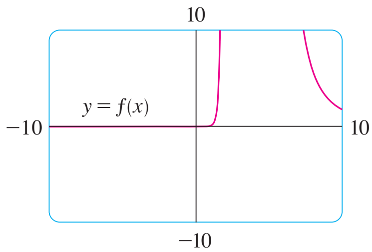


FIGURA 10

SOLUCIÓN Recurriendo a nuestra experiencia con una función racional del Ejemplo 2, empecemos por graficar f en el rectángulo de observación $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. De la Figura 10 tenemos la impresión de que vamos a tener que hacer acercamiento para ver algún detalle más fino y también para ver la imagen más grande. Pero, como guía a un acercamiento inteligente, primero veamos más de cerca la expresión de $f(x)$. Debido a los factores $(x-2)^2$ y $(x-4)^4$ del denominador, esperamos que $x = 2$ y $x = 4$ sean asíntotas verticales. De hecho,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 4} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$$

Para hallar las asíntotas horizontales, dividimos entre x^6 a numerador y denominador:

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\dfrac{x^2}{x^3}\cdot\dfrac{(x+1)^3}{x^3}}{\dfrac{(x-2)^2}{x^2}\cdot\dfrac{(x-4)^4}{x^4}} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^4}$$

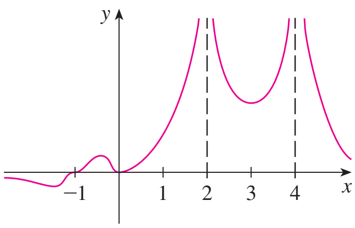


FIGURA 11

Esto demuestra que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, de modo que el eje x es una asíntota horizontal.

También es muy útil considerar el comportamiento de la gráfica cerca de las intercepciones con el eje x. Como x^2 es positiva, $f(x)$ no cambia de signo en 0 y su gráfica no cruza el eje x en 0, pero por el factor $(x+1)^3$, la gráfica cruza el eje x en -1 y tiene una tangente horizontal ahí. Uniendo toda esta información, pero sin usar derivadas, vemos que la curva tiene que verse un poco como en la Figura 11.

Ahora que sabemos qué buscar, hacemos acercamiento (varias veces) para obtener las gráficas de las Figuras 12 y 13 y alejamiento (varias veces) para obtener la Figura 14.

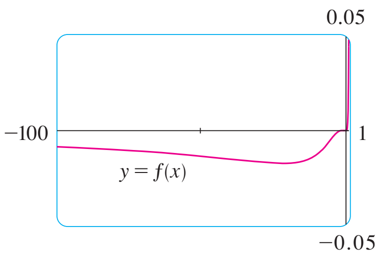


FIGURA 12

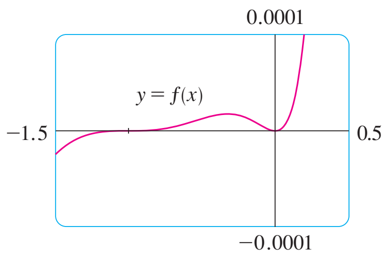


FIGURA 13

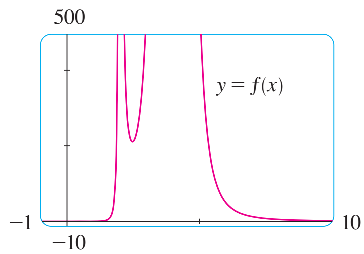


FIGURA 14

Podemos leer de estas gráficas que el mínimo absoluto es alrededor de -0.02 y se presenta cuando $x \approx -20$. También hay un máximo local ≈ 0.00002 cuando $x \approx -0.3$ y un mínimo local ≈ 211 cuando $x \approx 2.5$. Estas gráficas también muestran tres puntos de inflexión cerca de -35, -5 y -1 y dos entre -1 y 0. Para calcular los puntos de inflexión cercanamente necesitaríamos graficar f'', pero calcular f'' a mano es un trabajo nada razonable. Si usted cuenta con un sistema computarizado de álgebra, entonces es fácil hacerlo (véase el Ejercicio 13).

Hemos visto que, para esta función particular, *tres* gráficas (Figuras 12, 13 y 14) son necesarias para expresar toda la información útil. La única forma de desplegar todas estas características de la función en una sola gráfica es trazarla manualmente. A pesar de las exageraciones y distorsiones, la Figura 11 se las arregla para resumir la naturaleza esencial de la función.

La familia de funciones

$$f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, cx)$$

donde c es una constante, se presenta en aplicaciones de síntesis de frecuencia modulada (FM). Una onda senoidal está modulada por una onda con una frecuencia diferente ($\text{sen}\, cx$). El caso donde $c = 2$ se estudia en el Ejemplo 4. El Ejercicio 21 explora otro caso especial.

EJEMPLO 4 Grafique la función $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x)$. Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, calcule todos los valores máximo y mínimo, intervalos donde crece o decrece, así como puntos de inflexión.

SOLUCIÓN Primero observamos que f es periódica con periodo 2π. También, f es impar y $|f(x)| \leqslant 1$ para toda x. Por tanto, la selección de un rectángulo de observación no es un problema para esta función: empezamos con $[0, \pi]$ por $[-1.1, 1.1]$. (Véase la Figura 15.) Se ve que hay tres valores máximos locales y dos valores mínimos locales en esa ventana. Para confirmar esto y localizarlos con más precisión, calculamos que

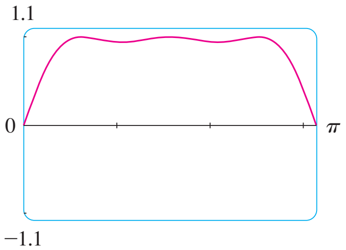


FIGURA 15

$$f'(x) = \cos(x + \text{sen}\, 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x)$$

y graficamos f y f' en la Figura 16. Usando acercamiento y la prueba de la primera derivada, encontramos los siguientes valores aproximados.

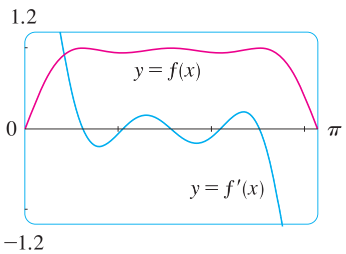


FIGURA 16

Intervalos donde crece:	$(0, 0.6), (1.0, 1.6), (2.1, 2.5)$
Intervalos donde decrece:	$(0.6, 1.0), (1.6, 2.1), (2.5, \pi)$
Valores máximos locales:	$f(0.6) \approx 1, f(1.6) \approx 1, f(2.5) \approx 1$
Valores mínimos locales:	$f(1.0) \approx 0.94, f(2.1) \approx 0.94$

La segunda derivada es

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2\, \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x) - 4\, \text{sen}\, 2x \cos(x + \text{sen}\, 2x)$$

Graficando tanto f como f'' en la Figura 17, obtenemos los siguientes valores aproximados:

Cóncava hacia arriba en:	$(0.8, 1.3), (1.8, 2.3)$
Cóncava hacia abajo en:	$(0, 0.8), (1.3, 1.8), (2.3, \pi)$
Puntos de inflexión:	$(0, 0), (0.8, 0.97), (1.3, 0.97), (1.8, 0.97), (2.3, 0.97)$

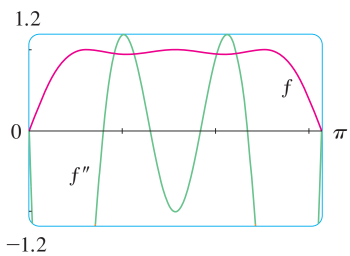


FIGURA 17

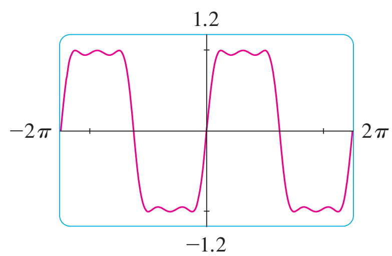


FIGURA 18

Habiendo comprobado que la Figura 15 en verdad representa f con precisión para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, podemos decir que la gráfica extendida de la Figura 18 representa f con precisión para $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

V **EJEMPLO 5** **Graficar una familia de funciones**

¿Cómo varía la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$ cuando varía c?

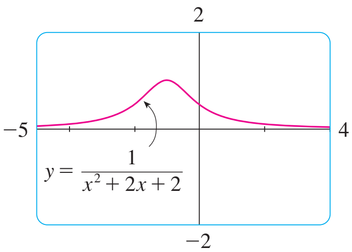


FIGURA 19
$c = 2$

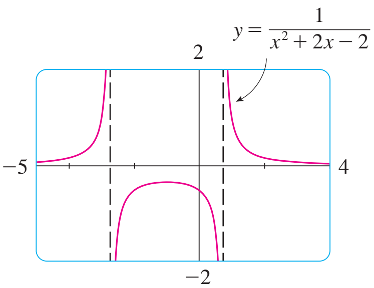


FIGURA 20
$c = -2$

SOLUCIÓN Las gráficas de las Figuras 19 y 20 (los casos especiales $c = 2$ y $c = -2$) muestran dos curvas de aspecto muy diferente. Antes de trazar más gráficas, veamos qué tienen en común los miembros de esta familia. Como

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para cualquier valor de c, todos tienen el eje x como asíntota horizontal. Una asíntota vertical se presentará cuando $x^2 + 2x + c = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, obtenemos $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$. Cuando $c > 1$, no hay asíntota vertical (como en la Figura 19). Cuando $c = 1$, la gráfica tiene una sola asíntota vertical $x = -1$ porque

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

Cuando $c < 1$, hay dos asíntotas verticales: $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$ (como en la Figura 20).

A continuación calculamos la derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Esto muestra que $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$ (si $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$, y $f'(x) < 0$ cuando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$, esto significa que f aumenta en $(-\infty, -1)$ y disminuye en $(-1, \infty)$. Para $c > 1$, hay un valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c - 1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c - 1)$ es un valor máximo local y los intervalos de aumento y disminución están interrumpidos en las asíntotas verticales.

La Figura 21 es una "película" que muestra cinco miembros de la familia, todos graficados en el rectángulo de observación $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Como fue pronosticado, $c = 1$ es el valor en el que tiene lugar una transición de dos asíntotas verticales a una, y luego a ninguna. Cuando c aumenta de 1, vemos que el punto máximo se hace más bajo; esto está explicado por el hecho de que $1/(c - 1) \to 0$ cuando $c \to \infty$. Cuando c disminuye de 1, las asíntotas verticales se hacen ampliamente separadas porque la distancia entre ellas es $2\sqrt{1 - c}$, que se hace más grande cuando $c \to -\infty$. De nuevo, el punto máximo se aproxima al eje x porque $1/(c - 1) \to 0$ cuando $c \to -\infty$.

TEC Véase una animación de la Figura 21 en Visual 4.4.

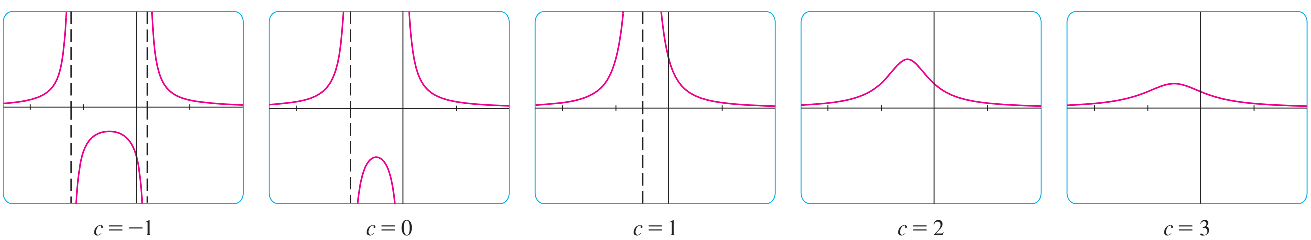


FIGURA 21 Familia de funciones $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Claramente se ve que no hay punto de inflexión cuando $c \leqslant 1$. Para $c > 1$ calculamos que

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

y deducimos que puntos de inflexión se presentan cuando $x = -1 \pm \sqrt{3(c - 1)}/3$. Por tanto, los puntos de inflexión se hacen más dispersos cuando c aumenta y esto parece aceptable a partir de las últimas dos partes de la Figura 21.

En la Sección 1.7 usamos calculadoras graficadoras para graficar curvas paramétricas y en la Sección 3.4 encontramos tangentes a curvas paramétricas. Pero, como lo demuestra nuestro ejemplo final, ahora estamos en una posición para usar cálculo para asegurarnos que un intervalo de parámetro o un rectángulo de observación dejarán ver todos los aspectos importantes de una curva.

EJEMPLO 6 Grafique la curva con ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 + t + 1 \quad y(t) = 3t^4 - 8t^3 - 18t^2 + 25$$

en un rectángulo de observación que despliegue las características importantes de la curva. Encuentre las coordenadas de los puntos interesantes de la curva.

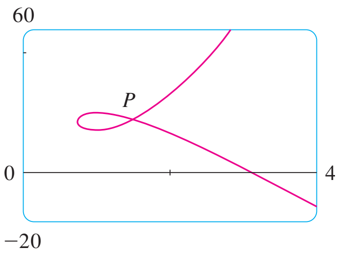


FIGURA 22

SOLUCIÓN La Figura 22 muestra la gráfica de esta curva en el rectángulo de observación [0, 4] por [−20, 60]. Al hacer acercamiento hacia el punto P donde la curva se interseca a sí misma, estimamos que las coordenadas de P son (1.50, 22.25). Estimamos que el punto más alto en el lazo tiene coordenadas (1, 25), el punto más bajo (1, 18), y el punto más a la izquierda (0.75, 21.7). Para estar seguros que hemos descubierto todos los aspectos interesantes de la curva, no obstante, necesitamos usar cálculo. De la Ecuación 3.4.7, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{12t^3 - 24t^2 - 36t}{2t + 1}$$

La tangente vertical se presenta cuando $dx/dt = 2t + 1 = 0$, es decir, $t = -\frac{1}{2}$. Entonces las coordenadas exactas del punto más a la izquierda del lazo son $x\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.75$ y $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 21.6875$. También,

$$\frac{dy}{dt} = 12t(t^2 - 2t - 3) = 12t(t + 1)(t - 3)$$

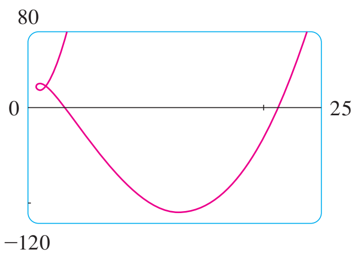


FIGURA 23

y entonces las tangentes horizontales se presentan cuando $t = 0, -1$ y 3. La base del lazo corresponde a $t = -1$ y, de hecho, sus coordenadas son $x(-1) = 1$ y $y(-1) = 18$. Análogamente, las coordenadas de la parte superior del lazo son exactamente lo que estimamos: $x(0) = 1$ y $y(0) = 25$. Pero, ¿qué se puede decir del valor del parámetro $t = 3$? El punto correspondiente en la curva tiene coordenadas $x(3) = 13$ y $y(3) = -110$. La Figura 23 muestra la gráfica de la curva en el rectángulo de observación [0, 25] por [−120, 80]. Esto muestra que el punto (13, −110) es el punto más bajo en la curva. Ahora podemos tener confianza en que no hay puntos ocultos máximo o mínimo.

4.4 Ejercicios

1–8 Trace gráficas de f que dejen ver todos los aspectos importantes de la curva. En particular, debe usar gráficas de f' y f'' para calcular los intervalos donde crecen y decrecen, valores extremos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

1. $f(x) = 4x^4 - 32x^3 + 89x^2 - 95x + 29$

2. $f(x) = x^6 - 15x^5 + 75x^4 - 125x^3 - x$

3. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 400x^4 + 2500x^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{40x^3 + x + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \tan x + 5\cos x$

7. $f(x) = x^2 - 4x + 7\cos x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 9}$

9–10 Trace gráficas de f que dejen ver todos los aspectos importantes de la curva. Calcule los intervalos donde crecen y decrecen e intervalos de concavidad, y use cálculo para hallar estos intervalos exactamente.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

11–12 Trace la gráfica manualmente usando asíntotas y puntos de intersección, pero no derivadas. A continuación use su trazo como guía para trazar gráficas (con calculadora graficadora) que muestren las características principales de la curva. Use estas gráficas para calcular los valores máximo y mínimo.

11. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$

12. $f(x) = \dfrac{(2x+3)^2(x-2)^5}{x^3(x-5)^2}$

CAS **13.** Si f es la función considerada en el Ejemplo 3, use un sistema computarizado de álgebra para calcular f' y a continuación grafíquela para confirmar que todos los valores máximo y mínimo son como se dan en el ejemplo. Calcule f'' y úsela para calcular los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

CAS **14.** Si f es la función del Ejercicio 12, encuentre f' y f'' y use sus gráficas para calcular los intervalos donde crece y decrece y concavidad de f.

CAS **15–19** Use un sistema computarizado de álgebra para graficar f y hallar f' y f''. Use gráficas de estas derivadas para calcular los intervalos donde crece y decrece, valores extremos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión de f.

15. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x+1}$

16. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1+x+x^4}$

17. $f(x) = \sqrt{x + 5\operatorname{sen} x}, \quad x \leqslant 20$

18. $f(x) = (x^2-1)e^{\arctan x}$

19. $f(x) = \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$

20. Grafique $f(x) = e^x + \ln|x-4|$ usando tantos rectángulos de observación como sea necesario para describir la verdadera naturaleza de la función.

21. En el Ejemplo 4 consideramos un miembro de la familia de funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$ que se presentan en síntesis de FM. Aquí investigamos la función con $c = 3$. Empiece por graficar f en el rectángulo de observación $[0, \pi]$ por $[-1.2, 1.2]$. ¿Cuántos puntos máximos locales se ven? La gráfica tiene más de los visibles a simple vista. Para descubrir los puntos máximo y mínimo ocultos será necesario examinar la gráfica de f' con gran cuidado. De hecho, ayuda ver la gráfica de f'' al mismo tiempo. Encuentre todos los valores máximo y mínimo y puntos de inflexión. A continuación grafique f en el rectángulo de observación $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ y comente sobre simetría.

22. Use una gráfica para calcular las coordenadas del punto de la extrema izquierda de la curva $x = t^4 - t^2$, $y = t + \ln t$. Después use cálculo para hallar las coordenadas exactas.

23–24 Grafique la curva en un rectángulo de observación que despliegue todos los aspectos importantes de la curva. ¿En qué puntos la curva tiene tangentes verticales u horizontales?

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

25. Investigue la familia de curvas dada por las ecuaciones paramétricas $x = t^3 - ct$, $y = t^2$. En particular, determine los valores de c para los cuales hay un lazo y encuentre el punto donde la curva se cruza a sí misma. ¿Qué ocurre al lazo cuando c aumenta? Encuentre las coordenadas de los puntos de la extrema izquierda y extrema derecha del lazo.

26. La familia de funciones $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y C son números positivos y $b > a$, se ha empleado para modelar la concentración de un medicamento inyectado en el torrente sanguíneo en el tiempo $t = 0$. Grafique varios miembros de esta familia. ¿Qué tienen en común? Para valores fijos de C y a, descubra gráficamente lo que ocurre cuando b aumenta. A continuación use cálculo para demostrar lo que haya descubierto.

27–33 Describa la forma en que la gráfica de f varía cuando c varía. Grafique varios miembros de la familia para ilustrar las tendencias que descubra. En particular, debe investigar cómo se mueven los puntos máximo y mínimo así como puntos de inflexión cuando c cambia. También debe identificar cualesquier valores de transición de c en los que cambia la forma básica de la curva.

27. $f(x) = x^4 + cx^2$

28. $f(x) = x^3 + cx$

29. $f(x) = e^x + ce^{-x}$

30. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

31. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2 + cx^2}$

33. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

34. Investigue la familia de curvas dadas por la ecuación $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Empiece por determinar el valor de transición de c en el que cambia el número de puntos de inflexión. Entonces grafique varios miembros de la familia para ver cuáles formas son posibles. Hay otro valor de transición de c en el que cambia el número de números críticos. Trate de descubrirlo gráficamente. A continuación demuestre lo que haya descubierto.

35. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. ¿Para qué valores de c tiene puntos mínimos la curva?
(b) Demuestre que los puntos mínimo y máximo de toda curva de la familia se encuentran en la parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre al graficar esta parábola y varios miembros de la familia.

36. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos máximo y mínimo?
(b) Demuestre que los puntos mínimo y máximo de toda curva de la familia se encuentran en la curva $y = x - x^3$. Ilustre al graficar esta curva y varios miembros de la familia.

4.5 Formas indeterminadas y Regla de l'Hospital

Supóngase que estamos tratando de analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aun cuando F no está definida cuando $x = 1$, necesitamos saber cómo se comporta F *cerca* de 1. En particular, nos gustaría conocer el valor del límite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Al calcular este límite no podemos aplicar la Ley 5 de los límites (el límite de un cociente es el cociente de los límites, véase Sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aun cuando el límite en (1) existe, su valor no es obvio porque tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definida.

En general, si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, entonces este límite puede o no existir y se denomina **forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$**. En el Capítulo 2 nos encontramos algunos límites de este tipo. Para funciones racionales, podemos cancelar factores comunes:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

Usamos un argumento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Pero estos métodos no funcionan para límites como (1), de modo que en esta sección introducimos un método sistemático, conocido como *Regla de l'Hospital*, para la evaluación de formas indeterminadas.

Otra situación en la que un límite no es obvio se presenta cuando buscamos una asíntota horizontal de F y necesitamos evaluar el límite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

No es obvio cómo evaluar este límite porque el numerador y el denominador se hacen grandes cuando $x \to \infty$. Hay una lucha entre numerador y denominador. Si el numerador gana, el límite será ∞; si el denominador gana, la respuesta será 0. O puede haber un punto intermedio, en cuyo caso la respuesta será algún número positivo finito.

En general, si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $f(x) \to \infty$ (o $-\infty$) y $g(x) \to \infty$ (o $-\infty$), entonces el límite puede o no existir y se denomina **forma indeterminada del tipo ∞/∞**. Vimos en la Sección 2.5 que este tipo de límite se puede evaluar para ciertas funciones, incluyendo funciones racionales, al dividir numerador y denominador entre la potencia de más alto grado de x que haya en el denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Este método no funciona para límites como el (2), pero la regla de l'Hospital también se aplica a este tipo de forma indeterminada.

L'Hospital

La Regla de l'Hospital se llama así en honor al noble francés marqués de l'Hospital (1661-1704), pero fue descubierta por un matemático suizo, John Bernoulli (1667-1748). Es posible que usted vea l'Hospital escrito como l'Hôpital, pero él escribía su propio nombre como l'Hospital, como era común en el siglo XVII. Véase en el Ejercicio 69 el ejemplo que el marqués usó para ilustrar su regla. En el proyecto en la página 299 véanse más detalles históricos.

Regla de l'Hospital Suponga que f y g son derivables y $g'(x) \neq 0$ cerca de a (excepto posiblemente en a). Suponga que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si existe el límite en el lado derecho (o es ∞ o $-\infty$).

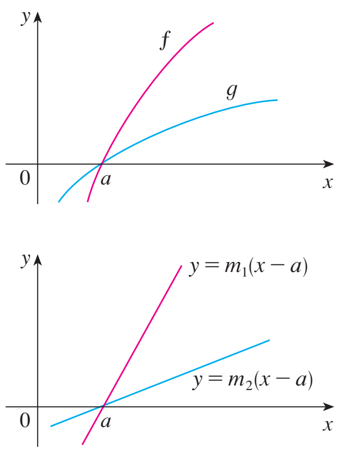


FIGURA 1

La Figura 1 sugiere visualmente por qué la regla de l'Hospital puede ser verdadera. La primera gráfica muestra dos funciones derivables f y g, cada una de las cuales se aproxima a 0 cuando $x \to a$. Si fuéramos a hacer acercamiento hacia el punto $(a, 0)$, las gráficas empezarían a verse casi lineales pero, si las funciones realmente *fueran* lineales, como en la segunda gráfica, entonces sus cocientes serían

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)}=\frac{m_1}{m_2}$$

que es el cociente de sus derivadas. Esto sugiere que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota 1: La Regla de l'Hospital dice que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se satisfagan las condiciones dadas. Es especialmente importante verificar las condiciones respecto a los límites de f y g antes de usar la Regla de l'Hospital.

Nota 2: La Regla de l'Hospital también es válida para límites laterales y para límites en el infinito o infinito negativo; esto es, "$x \to a$" puede ser sustituida por cualquiera de los símbolos $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Nota 3: Para el caso especial en el que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas, y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la Regla de l'Hospital es verdadera. De hecho, usando la forma alternativa de la definición de una derivada, tenemos

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

La versión general de la regla de l'Hospital es más difícil; su demostración se puede hallar en libros más avanzados.

V EJEMPLO 1 Una forma indeterminada del tipo 0/0 Encuentre $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Como

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

podemos aplicar la regla de l'Hospital:

Observe que cuando usamos la Regla de l'Hospital derivamos el numerador y el denominador *separadamente*. *No* usamos la Regla del cociente.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

V EJEMPLO 2 Una forma indeterminada del tipo ∞/∞ Calcule $\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

La gráfica de la función del Ejemplo 2 se muestra en la Figura 2. Hemos observado previamente que las funciones exponenciales crecen en forma mucho más rápida que las funciones de potencias, de modo que el resultado del Ejemplo 2 no es inesperado. Véase también el Ejercicio 63.

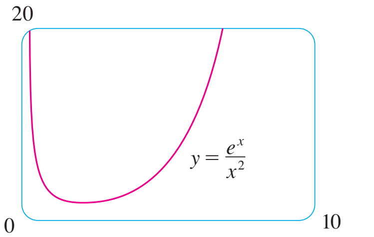


FIGURA 2

SOLUCIÓN Tenemos $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, y entonces la regla de l'Hospital da como resultado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Como $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, el límite del lado derecho también es indeterminado, pero una segunda aplicación de la regla de l'Hospital da como resultado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

V EJEMPLO 3 Calcule $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

La gráfica de la función del Ejemplo 3 se muestra en la Figura 3. Hemos estudiado ya antes el lento crecimiento de logaritmos, de modo que no es de sorprender que este cociente se aproxime a 0 cuando $x \to \infty$. Véase también el Ejercicio 64.

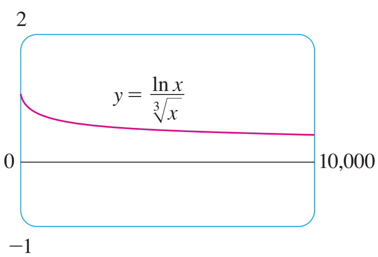


FIGURA 3

SOLUCIÓN Como $\ln x \to \infty$ y $\sqrt[3]{x} \to \infty$ cuando $x \to \infty$, aplica la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Observe que el límite en el lado derecho es ahora indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Pero en lugar de aplicar la regla de l'Hospital por segunda vez como hicimos en el Ejemplo 2, simplificamos la expresión y vemos que no es necesaria una segunda aplicación:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

EJEMPLO 4 **Usando tres veces la regla de l'Hospital** Encuentre $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

SOLUCIÓN Notando que $\tan x - x \to 0$ y $x^3 \to 0$ cuando $x \to 0$, usamos la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Como el límite del lado derecho es todavía indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos otra vez la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

La gráfica de la Figura 4 da confirmación visual del resultado del Ejemplo 4 pero, si hacemos zoom demasiado lejos, obtendríamos una gráfica imprecisa porque $\tan x$ es cercana a x cuando x es pequeña. Véase el Ejercicio 30(d) en la Sección 2.2.

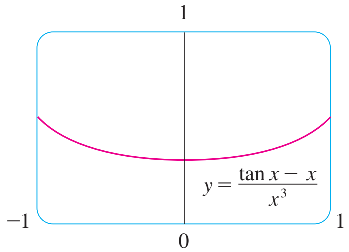


FIGURA 4

Puesto que $\lim_{x\to 0} \sec^2 x = 1$ el cálculo se simplifica escribiendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \sec^2 x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Podemos evaluar este último límite ya sea usando la regla de l'Hospital por tercera vez o escribiendo $\tan x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y haciendo uso de nuestro conocimiento de límites trigonométricos. Si reunimos todos los pasos, tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$

V **EJEMPLO 5** Encuentre $\lim_{x\to \pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si tratáramos de usar ciegamente la regla de l'Hospital, obtendríamos

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

¡Esto es un **error**! Aun cuando el numerador $\operatorname{sen} x \to 0$ cuando $x \to \pi^-$, observe que el denominador $(1 - \cos x)$ no se aproxima a 0, de modo que la regla de l'Hospital no se puede aplicar aquí.

El límite requerido es, de hecho, fácil de hallar porque la función es continua en π y el denominador es diferente de cero ahí:

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

El Ejemplo 5 muestra lo que puede ir mal si se usa la regla de l'Hospital sin pensarlo. Otros límites *pueden* hallarse con el uso de la regla de l'Hospital pero se encuentran con más facilidad con otros métodos. (Véase Ejemplos 3 y 5 en la Sección 2.3, Ejemplo 5 en la Sección 2.5, y la exposición al principio de esta sección.) Entonces, al evaluar cualquier límite, usted debe considerar otros métodos antes de usar la regla de l'Hospital.

Productos indeterminados

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no está claro cuál será el valor de $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$. Hay una lucha entre f y g. Si f gana, el límite será 0; si g gana, la respuesta será ∞ (o $-\infty$). O puede haber un punto intermedio donde la respuesta es un número finito diferente de cero. Esta clase de límite se denomina **forma indeterminada del tipo $\mathbf{0 \cdot \infty}$**. Podemos trabajar con él si escribimos el producto fg como cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞ de modo que podemos usar la regla de l'Hospital.

V EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$. Use el conocimiento de este límite, junto con información de derivadas, para trazar la curva $y = x \ln x$.

SOLUCIÓN El límite dado es indeterminado porque, cuando $x \to 0^+$, el primer factor (x) se aproxima a 0 mientras que el segundo factor ($\ln x$) se aproxima a $-\infty$. Escribiendo $x = 1/(1/x)$, tenemos $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, y entonces la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Si $f(x) = x \ln x$, entonces

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

y $f'(x) = 0$ cuando $\ln x = -1$, lo cual significa que $x = e^{-1}$. En realidad, $f'(x) > 0$ cuando $x > e^{-1}$ y $f'(x) < 0$ cuando $x < e^{-1}$, y f es creciente en $(1/e, \infty)$ y decreciente en $(0, 1/e)$. Entonces, por la prueba de la primera derivada, $f(1/e) = -1/e$ es un mínimo local (y absoluto). También, $f''(x) = 1/x > 0$, de modo que f es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$. Usamos esta información, junto con el conocimiento esencial de que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, para trazar la curva de la Figura 5.

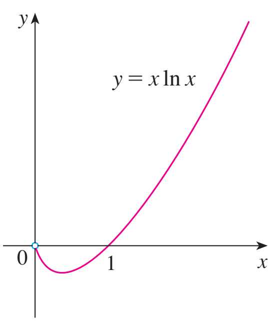


FIGURA 5

Nota: Al resolver el Ejemplo 6, otra posible opción hubiera sido escribir

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da como resultado una forma indeterminada del tipo $0/0$, pero si aplicamos la regla de l'Hospital obtenemos una expresión más complicada que aquella con la que empezamos. En general, cuando reescribimos un producto indeterminado, tratamos de escoger la opción que lleve al límite más sencillo.

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

se denomina **forma indeterminada del tipo $\mathbf{\infty - \infty}$**. De nuevo, hay competencia entre f y g. ¿La respuesta será ∞ (f gana) o será $-\infty$ (g gana) o habrá un término medio en un número finito? Para averiguarlo, tratamos de convertir la diferencia en un cociente (por ejemplo, usando un denominador común, o racionalización o factorizando un factor común) de modo que tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 **Una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$** Calcule $\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$.

SOLUCIÓN Primero observe que $\sec x \to \infty$ y $\tan x \to \infty$ cuando $x \to (\pi/2)^-$, y el límite es indeterminado. Aquí usamos un denominador común:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\ &= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0\end{aligned}$$

Observe que el uso de la regla de l'Hospital está justificado porque $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ y $\cos x \to 0$ cuando $x \to (\pi/2)^-$.

Potencias indeterminadas

Varias formas indeterminadas aparecen del límite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Aun cuando las formas del tipo 0^0, ∞^0, y 1^∞ son indeterminadas, la forma 0^∞ no es indeterminada. (Véase el Ejercicio 72.)

Cada uno de estos tres casos se puede tratar ya sea tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o escribiendo la función como exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Recuerde que estos dos métodos se usaron al derivar estas funciones.) Cualquiera de estos métodos nos lleva al producto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 8 **Una forma indeterminada del tipo 1^∞** Calcule $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN Primero observamos que cuando $x \to 0^+$, tenemos $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, de manera que el límite dado es indeterminado. Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $$\ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$$

de modo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora hemos calculado el límite de $\ln y$, pero lo que queremos es el límite de y. Para hallar éste usamos el hecho de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

V EJEMPLO 9 Una forma indeterminada del tipo 0^0 Encuentre $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Observe que este límite es indeterminado puesto que $0^x = 0$ para cualquier $x > 0$ pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Podríamos continuar como en el Ejemplo 8 o escribir la función como un exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

En el Ejemplo 6 usamos la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Por tanto,
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

La gráfica de la función $y = x^x$, $x > 0$, se muestra en la Figura 6. Observe que aun cuando 0^0 no está definida, los valores de la función se aproximan a 1 cuando $x \to 0^+$. Esto confirma el resultado del Ejemplo 9.

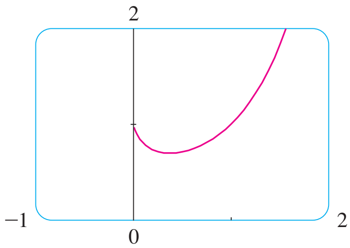


FIGURA 6

4.5 Ejercicios

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$
$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

¿cuáles de los siguientes límites son formas indeterminadas? Para las que no sean formas indeterminadas, evalúe el límite donde sea posible.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–46 Encuentre el límite. Use la regla de l'Hospital cuando sea apropiado. Si hay un método más elemental, considere usarlo. Si la regla de l'Hospital no aplica, explique por qué.

5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

6. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

7. $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\tan 5x}$

9. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t^3}$

10. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{3t} - 1}{t}$

11. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

12. $\lim_{\theta\to\pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\csc\theta}$

13. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

14. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$

16. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

17. $\lim_{t\to 0} \dfrac{5^t - 3^t}{t}$

18. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

20. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

21. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

23. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

26. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

27. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

28. $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

29. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

30. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

31. $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

32. $\lim_{x\to\infty} x \tan(1/x)$

33. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

34. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

35. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$

36. $\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$

37. $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$

38. $\lim_{x\to\infty} (xe^{1/x} - x)$

39. $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$

40. $\lim_{x\to 0^+} (\tan 2x)^x$

41. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

42. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

43. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

44. $\lim_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

45. $\lim_{x\to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

46. $\lim_{x\to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$

47–48 Use una gráfica para calcular el valor del límite. Use después la regla de l'Hospital para hallar el valor exacto.

47. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

48. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

49–50 Ilustre la regla de l'Hospital al graficar $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$ para ver que estos cocientes tengan el mismo límite cuando $x \to 0$. También, calcule el valor exacto del límite.

49. $f(x) = e^x - 1$, $\quad g(x) = x^3 + 4x$

50. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x$, $\quad g(x) = \sec x - 1$

51–54 Use la regla de l'Hospital para ayudar a encontrar las asíntotas de f. A continuación úselas, junto con información de f' y f'', para trazar la gráfica de f. Compruebe su trabajo con una calculadora graficadora.

51. $f(x) = xe^{-x}$

52. $f(x) = e^x/x$

53. $f(x) = (\ln x)/x$

54. $f(x) = xe^{-x^2}$

55–56

(a) Grafique la función.

(b) Use la regla de l'Hospital para explicar el comportamiento cuando $x \to 0$.

(c) Calcule el valor mínimo e intervalos de concavidad y luego use cálculo para hallar los valores exactos.

55. $f(x) = x^2 \ln x$

56. $f(x) = xe^{1/x}$

CAS **57–58**

(a) Grafique la función.

(b) Explique la forma de la gráfica al calcular el límite cuando $x \to 0^+$ o cuando $x \to \infty$.

(c) Calcule los valores máximo y mínimo y luego use cálculo para hallar los valores exactos.

(d) Use una gráfica de f'' para calcular las coordenadas x de los puntos de inflexión.

57. $f(x) = x^{1/x}$

58. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

59. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece por calcular los límites cuando $x \to \pm\infty$. Identifique cualesquier valores de transición de c donde cambie la forma básica. ¿Qué ocurre a los puntos máximo o mínimo y puntos de inflexión cuando cambia c? Ilustre al graficar varios miembros de la familia.

60. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = x^n e^{-x}$, donde n es un entero positivo. ¿Qué características tienen en común estas curvas? ¿Cómo difieren entre sí? En particular, ¿qué ocurre a los puntos máximo y mínimo y puntos de inflexión cuando n aumenta? Ilustre al graficar varios miembros de la familia.

61. ¿Qué pasa si usted trata de usar la regla de l'Hospital para evaluar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Evalúe el límite usando otro método.

62. Investigue la familia de curvas $f(x) = e^x - cx$. En particular, encuentre los límites cuando $x \to \pm\infty$ y determine los valores de c para los que f tiene un mínimo absoluto. ¿Qué ocurre a los puntos mínimos cuando c aumenta?

63. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier entero positivo n. Esto demuestra que la función exponencial se aproxima al infinito con más rapidez que cualquier potencia de x.

64. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica se aproxima al ∞ con más lentitud que cualquier potencia de x.

65. Si una cantidad inicial A_0 de dinero se invierte a una tasa de interés r capitalizada n veces al año, el valor de la inversión después de t años es

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Si hacemos $n \longrightarrow \infty$, recurrimos a la *capitalización continua* de interés. Use la regla de l'Hospital para demostrar que si el interés se capitaliza continuamente, entonces la cantidad después de t años es

$$A = A_0 e^{rt}$$

66. Si un objeto con masa m se deja caer desde el reposo, un modelo para su rapidez v después de t segundos, tomando en cuenta la resistencia del aire, es

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

donde t es la aceleración debida a la gravedad y c es una constante positiva. (En el Capítulo 7 podremos deducir esta ecuación a partir de la suposición de que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del objeto; c es la constante de proporcionalidad.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. ¿Cuál es el significado de este límite?

(b) Para t fija, use la regla de l'Hospital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. ¿Qué se puede concluir acerca de la rapidez de un objeto en caída en un vacío?

67. Si un campo electrostático E actúa sobre un líquido o un dieléctrico polar gaseoso, el momento neto de dipolo P por unidad de volumen es

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Demuestre que $\lim_{E\to 0^+} P(E) = 0$.

68. Un cable metálico tiene radio r y está cubierto de aislamiento, de manera que la distancia del centro del cable al exterior del aislamiento es R. La velocidad v de un impulso eléctrico en el cable es

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

donde c es una constante positiva. Encuentre los siguientes límites e interprete sus respuestas.

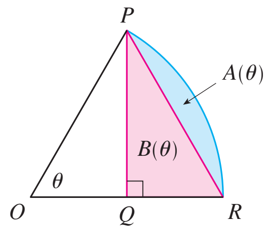
(a) $\lim\limits_{R\to r^+} v$ (b) $\lim\limits_{r\to 0^+} v$

69. La primera aparición impresa de la regla de l'Hospital fue en el libro *Analyse des Infiniment Petits* publicado por el marqués de l'Hospital en 1696. Éste fue el primer *libro de texto* de cálculo jamás publicado y el ejemplo que el marqués utilizó en ese libro para ilustrar su regla fue hallar el límite de la función

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x se aproxima a a, donde $a > 0$. (En ese tiempo era común escribir aa en lugar de a^2.) Resuelva este problema.

70. La figura muestra un sector de círculo con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



71. Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)\right]$.

72. Suponga que f es una función positiva. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, demuestre que

$$\lim_{x\to a}\,[f(x)]^{g(x)} = 0$$

Esto demuestra que 0^∞ no es una forma indeterminada.

73. Si f' es continua, $f(2) = 0$, y $f'(2) = 7$, evalúe

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+3x) + f(2+5x)}{x}$$

74. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la siguiente ecuación?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

75. Si f' es continua, use la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Explique el significado de esta ecuación con ayuda de un diagrama.

76. Sea

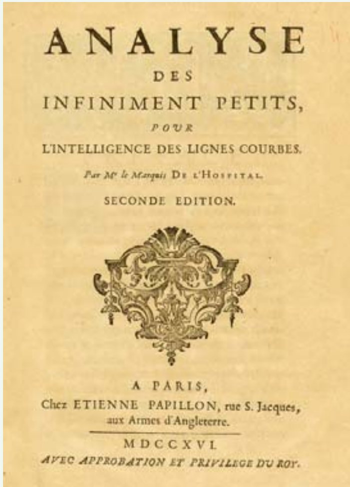
$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en 0.

(b) Investigue gráficamente si f es derivable en 0 al hacer acercamiento varias veces hacia el punto (0, 1) en la gráfica de f.

(c) Demuestre que f no es derivable en 0. ¿Cómo se puede reconciliar este dato con el aspecto de las gráficas del inciso (b)?

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN HISTÓRICA



Thomas Fisher Rare Book Library

www.stewartcalculus.com
La Internet es otra fuente de información para este proyecto. Haga clic en *History of Mathematics* para ver una lista de sitios web confiables.

Los orígenes de la Regla de l'Hospital

La Regla de l'Hospital fue publicada primero en 1696 en el libro de texto de cálculo *Analyse des Infiniment Petits*, del marqués de l'Hospital, pero la regla fue descubierta en 1694 por el matemático suizo John (Johann) Bernoulli. La explicación es que estos dos matemáticos habían entrado en un curioso arreglo de negocios donde el marqués de l'Hospital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. Los detalles, incluyendo una traducción de la carta de l'Hospital a Bernoulli proponiendo el arreglo, se pueden hallar en el libro de Eves [1].

Escriba un informe sobre los orígenes históricos y matemáticos de la Regla de l'Hospital. Empiece por presentar breves detalles biográficos de ambos hombres (el diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente) y haga un resumen del trato de negocios entre ellos. A continuación dé el enunciado de l'Hospital de esta regla, que se encuentra en el libro de consulta de Struik [4] y más brevemente en el libro de Katz [3]. Observe que l'Hospital y Bernoulli formularon la regla geométricamente y dieron la respuesta en términos de diferenciales. Compare los enunciados de ellos con la versión de la Regla de l'Hospital dada en la Sección 4.5 y demuestre que los dos enunciados son esencialmente iguales.

1. Howard Eves, *In Mathematical Circles (Volume 2: Quadrants III and IV)* (Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969), pp. 20–22.
2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's, 1974). See the article on Johann Bernoulli by E. A. Fellmann and J. O. Fleckenstein in Volume II and the article on the Marquis de l'Hospital by Abraham Robinson in Volume VIII.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (New York: HarperCollins, 1993), p. 484.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), pp. 315–316.

4.6 Problemas de optimización

Los métodos que hemos aprendido en este capítulo para hallar valores extremos tienen aplicaciones prácticas en muchos aspectos de la vida. Un negociante desea reducir al mínimo sus costos y maximizar sus utilidades. Un viajero desea minimizar el tiempo de transporte. El Principio de Fermat en óptica expresa que la luz sigue la trayectoria que tome el menor tiempo. En esta sección y la siguiente resolvemos problemas como es el de maximizar áreas, volúmenes y utilidades, así como minimizar distancias, tiempos y costos.

Al resolver estos problemas prácticos, la mayor dificultad es con frecuencia convertir el problema verbal en un problema de optimización matemática al establecer la función que ha de ser maximizada o minimizada. Recordemos los principios de resolución de problemas estudiados en la página 83 y adaptémoslos a esta situación:

RP

Pasos para resolver problemas de optimización

1. **Entender el problema** El primer paso es leer cuidadosamente el problema hasta que se entienda con claridad. Pregúntese a sí mismo: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Trace un diagrama** En casi todos los problemas es útil trazar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y pedidas.
3. **Introducir notación** Asignar un símbolo a la cantidad que ha de ser maximizada o minimizada (llamémosla Q por ahora). También seleccione símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos. Puede ayudar usar iniciales como símbolos sugestivos, por ejemplo A para área, h para altura, t para tiempo.

4. Exprese Q en términos de alguno de los otros símbolos del Paso 3.

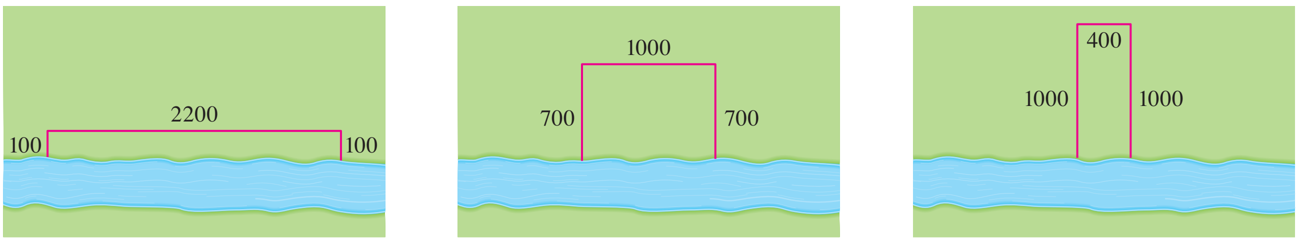
5. Si Q se ha expresado como función de más de una variable en el Paso 4, use la información dada para hallar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. A continuación use estas ecuaciones para eliminar todas las variables excepto una en la expresión de Q. Entonces Q se expresará como función de *una* variable x, por ejemplo $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.

6. Use los métodos de las Secciones 4.2 y 4.3 para hallar el valor máximo o mínimo *absoluto* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces se puede usar el Método del intervalo cerrado de la Sección 4.2.

EJEMPLO 1 **Maximizar un área** Un agricultor tiene 2400 pies de material para construir una valla y desea cercar un campo rectangular que está a la orilla de un río recto; no necesita construir una valla a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tenga el área más grande?

RP Entender el problema
RP Analogía: Intente casos especiales
RP Trace diagramas

SOLUCIÓN Para tener idea de lo que pasa en este problema, experimentemos con algunos casos especiales. La Figura 1 (no a escala) muestra tres posibles formas de trazar la cerca de 2400 pies.



Área = 100 · 2200 = 220,000 ft^2 Área = 700 · 1000 = 700,000 ft^2 Área = 1000 · 400 = 400,000 ft^2

FIGURA 1

Vemos que cuando intentamos con campos anchos y de poco fondo, o con campos angostos y de mucho fondo, obtenemos áreas relativamente pequeñas. Parece aceptable que hay alguna configuración intermedia que produce el área más grande.

RP Introducir notación

La Figura 2 ilustra el caso general. Deseamos maximizar el área A del rectángulo. Sean x y y la profundidad y ancho del rectángulo (en pies). Entonces expresamos A en términos de x y y:

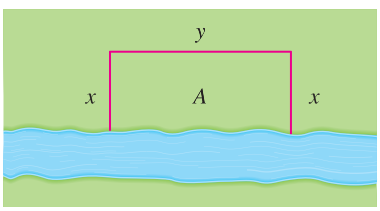


FIGURA 2

$$A = xy$$

Deseamos expresar A como función de sólo una variable, de modo que eliminamos y al expresarla en términos de x. Para hacer esto usamos la información dada de que la longitud total de la valla es de 2400 ft. Entonces

$$2x + y = 2400$$

De esta ecuación tenemos $y = 2400 - 2x$, que da

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1200$ (de otro modo $A < 0$). Entonces la función que deseamos maximizar es

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1200$$

La derivada es $A'(x) = 2400 - 4x$, de modo que para hallar los números críticos resolvemos la ecuación

$$2400 - 4x = 0$$

que da como resultado $x = 600$. El máximo valor de A debe ocurrir en este número crítico o en un punto extremo del intervalo. Como $A(0) = 0$, $A(600) = 720{,}000$ y $A(1200) = 0$, el método del intervalo cerrado da el máximo valor como $A(600) = 720{,}000$.

[Alternativamente, podríamos haber observado que $A''(x) = -4 < 0$ para toda x, de modo que A es siempre cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 600$ debe ser un máximo absoluto.]

Entonces el campo rectangular debe medir 600 ft de fondo y 1200 ft de ancho.

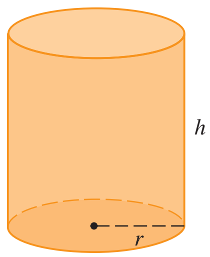


FIGURA 3

V EJEMPLO 2 Minimizar costo Se ha de hacer una lata cilíndrica para contener 1 L de aceite. Encuentre las dimensiones que reducirán al mínimo el costo del metal para manufacturar la lata.

SOLUCIÓN Dibuje el diagrama como en la Figura 3, donde r es el radio y h es la altura (ambos en centímetros). Para minimizar el costo del metal, minimizamos el área superficial total del cilindro (tapa, fondo y costados). De la Figura 4 vemos que los costados están hechos de una lámina rectangular con dimensiones $2\pi r$ y h. Por tanto, el área superficial es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

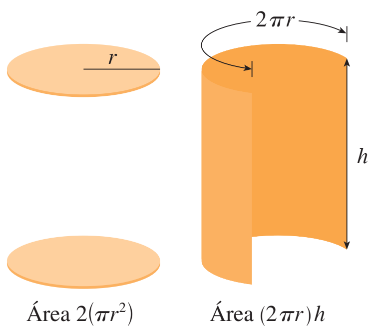


FIGURA 4

Para eliminar h usamos el hecho de que el volumen está dado como 1 L, que tomamos como 1000 cm^3. Entonces,

$$\pi r^2 h = 1000$$

lo que da $h = 1000/(\pi r^2)$. La sustitución de esto en la expresión para A resulta en

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Por lo tanto, la función que deseamos minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0$$

Para hallar los números críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Entonces $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = 500$, de modo que el único número crítico es $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

En el Proyecto Aplicado de la página 311 investigamos la forma más económica para una lata tomando en cuenta otros costos de manufactura.

Como el dominio de A es $(0, \infty)$, no podemos usar el argumento del Ejemplo 1 respecto a puntos extremos. Pero podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ y $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, de modo que A es decreciente para *toda* r a la izquierda del número crítico y creciente para *toda* r a la derecha. Entonces $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ debe dar lugar a un mínimo *absoluto*.

[Alternativamente, podríamos decir que $A(r) \to \infty$ cuando $r \to 0^+$ y $A(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, de modo que debe haber un valor mínimo de $A(r)$, que debe haber en el número crítico. Véase Figura 5.1]

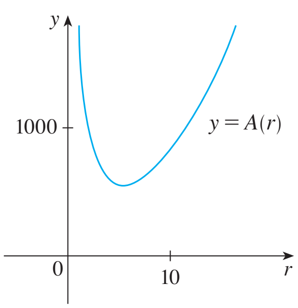


FIGURA 5

El valor de h correspondiente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Entonces, para minimizar el costo de la lata, el radio debe ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ y la altura debe ser igual al doble del radio, es decir, el diámetro.

Nota 1: El argumento empleado en el Ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (que aplica sólo a valores máximo o mínimo *locales*) y se expresa aquí para futura referencia.

TEC Module 4.6 lleva al lector por seis problemas de optimización más, incluyendo animaciones de las situaciones físicas.

Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida en un intervalo.

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

(b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

Nota 2: Un método alternativo para resolver problemas de optimización es usar derivación implícita. Veamos de nuevo el Ejemplo 2 para ilustrar el método. Trabajamos con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1000$$

pero en lugar de eliminar h, derivamos ambas ecuaciones implícitamente con respecto a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se presenta en un número crítico, de modo que hacemos $A' = 0$, simplificamos y llegamos a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y una resta da como resultado $2r - h = 0$, o sea $h = 2r$.

V EJEMPLO 3 Encuentre el punto en la parábola $y^2 = 2x$ que es más cercano al punto $(1, 4)$.

SOLUCIÓN La distancia entre el punto $(1, 4)$ y el punto (x, y) es

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

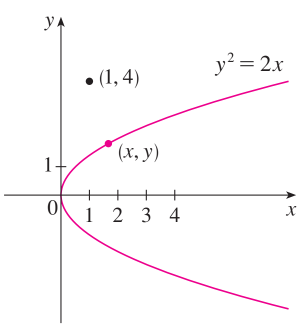


FIGURA 6

(Véase Figura 6.) Pero si (x, y) está en la parábola, entonces $x = \frac{1}{2}y^2$, de manera que la expresión para d se convierte en

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

(Alternativamente, podríamos haber sustituido $y = \sqrt{2x}$ para obtener d en términos sólo de x.) En lugar de minimizar d, maximizamos su cuadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

(Usted debe convencerse de que el mínimo de d se presenta en el mismo punto que el mínimo de d^2, pero con d^2 es más fácil trabajar.) Derivando, obtenemos

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y-4) = y^3 - 8$$

de modo que $f'(y) = 0$ cuando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ cuando $y < 2$ y $f'(y) > 0$ cuando $y > 2$, y por la prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos, el mínimo absoluto se presenta cuando $y = 2$. (O podríamos simplemente decir que debido a la naturaleza geométrica del problema, es obvio que hay un punto más cercano pero no un punto más lejano.) El valor correspondiente de x es $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Así, el punto en $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$ es $(2, 2)$.

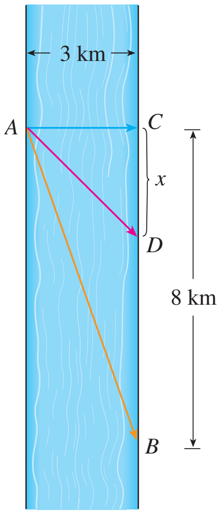


FIGURA 7

EJEMPLO 4 Reducir el tiempo al mínimo Un hombre echa al agua su bote desde el punto A en la margen de un río recto, de 3 km de ancho y desea llegar al punto B, a 8 km aguas abajo en la margen opuesta, en forma tan rápida como sea posible (véase Figura 7). Él podría remar en su bote directamente al otro lado del río al punto C y luego correr a B, o podría remar directamente a B o remar a algún punto D entre C y B y luego correr a B. Si él puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan rápido como sea posible? (Suponemos que la rapidez del agua es insignificante en comparación con la rapidez a la que el hombre rema.)

SOLUCIÓN Si hacemos que x sea la distancia de C a D, entonces la distancia para correr es $|DB| = 8 - x$ y el teorema de Pitágoras proporciona la distancia de remar como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Usamos la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

Entonces el tiempo de remar es $\sqrt{x^2 + 9}/6$ y el tiempo de correr es $(8 - x)/8$, de modo que el tiempo total T como función de x es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

El dominio de esta función T es $[0, 8]$. Observe que si $x = 0$, él rema a C y si $x = 8$, él rema directamente a B. La derivada de T es

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

Entonces, usando el hecho de que $x \geqslant 0$, tenemos

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2 + 9}$$

$$\iff 16x^2 = 9(x^2 + 9) \iff 7x^2 = 81$$

$$\iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

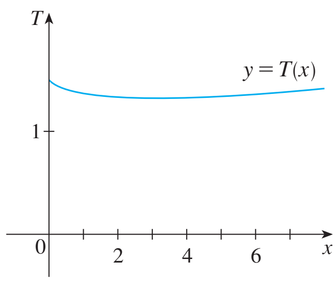


FIGURA 8

El único número crítico es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si el mínimo se presenta en este número crítico o en un punto extremo del dominio $[0, 8]$, evaluamos T en todos los tres puntos:

$$T(0) = 1.5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Como el más pequeño de estos valores de T ocurre cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo absoluto de T debe ocurrir ahí. La Figura 8 ilustra este cálculo al mostrar la gráfica de T.

Entonces el hombre debe desembarcar en un punto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$ 3.4 km) aguas abajo desde su punto de partida.

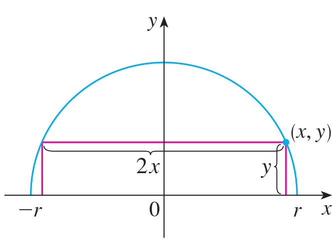


FIGURA 9

V EJEMPLO 5 Encuentre el área del rectángulo más grande que se pueda inscribir en una semicircunferencia de radio r.

SOLUCIÓN 1 Tomemos la semicircunferencia como la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con centro en el origen. Entonces la palabra *inscrito* significa que el rectángulo tiene dos vértices en el eje x como se muestra en la Figura 9.

Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. Entonces el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y y, por lo cual su área es

$$A = 2xy$$

Para eliminar y usamos el hecho de que (x, y) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y por tanto $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Así,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

El dominio de esta función es $0 \leqslant x \leqslant r$. Su derivada es

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que es 0 cuando $2x^2 = r^2$, es decir, $x = r/\sqrt{2}$ (porque $x \geqslant 0$). Este valor de x da un valor máximo de A porque $A(0) = 0$ y $A(r) = 0$. Por tanto, el área del rectángulo más grande inscrito es

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

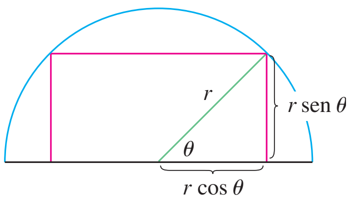


FIGURA 10

SOLUCIÓN 2 Es posible llegar a una solución más sencilla si consideramos usar un ángulo como una variable. Sea θ el ángulo mostrado en la Figura 10. Entonces el área del rectángulo es

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta) = r^2(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) = r^2\,\text{sen}\,2\theta$$

Sabemos que sen 2θ tiene un valor máximo de 1 y se presenta cuando $2\theta = \pi/2$. Entonces $A(\theta)$ tiene un valor máximo de r^2 y ocurre cuando $\theta = \pi/4$.

Observe que esta solución trigonométrica no comprende derivación alguna. De hecho, no necesitamos usar cálculo en absoluto.

Aplicaciones a negocios y economía

En la Sección 3.8 introdujimos la idea del costo marginal. Recuerde que si $C(x)$, la **función de costo**, es el costo de producir x unidades de un cierto producto, entonces el **costo marginal** es el cambio de C con respecto a x. En otras palabras, la función de costo marginal es la derivada, $C'(x)$, de la función de costo.

Ahora consideremos la mercadotecnia. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la compañía puede cobrar si vende x unidades. Entonces p recibe el nombre de **función de demanda** (o **función de precio**) y esperaríamos que fuera una función decreciente de x. Si se venden x unidades y el precio por unidad es $p(x)$, entonces el ingreso total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se denomina **función de ingreso**. La derivada R' de la función de ingreso se llama **función de ingreso marginal** y es el cambio de ingreso con respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P se llama **función de utilidad**. La **función de utilidad marginal** es P', la derivada de la función de utilidad. En los Ejercicios 43–48 se pide al estudiante usar las funciones de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal para reducir al mínimo costos y maximizar ingresos y utilidades.

V EJEMPLO 6 Maximizar ingresos Una tienda ha estado vendiendo 200 quemadores de DVD por semana a \$350 cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada \$10 de descuento a compradores, el número de unidades vendidas aumentará en 20 por semana. Encuentre la función de demanda y la función de ingresos. ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la tienda para maximizar sus ingresos?

SOLUCIÓN Si x es el número de quemadores de DVD vendidos por semana, entonces el aumento semanal en ventas es $x - 200$. Por cada aumento de 20 unidades vendidas, el precio se reduce en \$10. Por tanto, por cada unidad adicional vendida, la disminución en precio será $\frac{1}{20} \times 10$ y la función de demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función de ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Este valor de x da un máximo absoluto por la prueba de la primera derivada (o simplemente al observar que la gráfica de R es una parábola que abre hacia abajo). El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es $350 - 225 = 125$. Por tanto, para maximizar el ingreso, la tienda debe ofrecer un descuento de \$125.

4.6 Ejercicios

1. Considere el siguiente problema: Hallar dos números cuya suma sea 23 y cuyo producto sea un máximo.
   (a) Haga una tabla de valores, como la siguiente, de modo que la suma de los números en las primeras dos columnas sea siempre 23. Con base en la evidencia de esta tabla, calcule la respuesta al problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

   (b) Use cálculo para resolver el problema y compare con su respuesta al inciso (a).

2. Encuentre dos números cuya diferencia sea 100 y cuyo producto sea un mínimo.

3. Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 100 y cuya suma sea un mínimo.

4. La suma de dos números positivos es 16. ¿Cuál es el valor más pequeño posible de la suma de sus cuadrados?

5. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con perímetro 100 m cuya área es tan grande como sea posible.

6. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con área de 1000 m^2 cuyo perímetro es tan pequeño como sea posible.

7. Un modelo empleado para el rendimiento Y de una cosecha agrícola como una función del nivel de nitrógeno N en el suelo (medido en unidades apropiadas) es

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

   donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeno da el mejor rendimiento?

8. La cantidad (en mg de carbón/m^3/h) a la que tiene lugar la fotosíntesis para una especie de fitoplancton está modelada por la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

   donde I es la intensidad de la luz (medida en miles de pies-candelas). ¿Para qué intensidad de luz es P un máximo?

9. Considere el siguiente problema: Un agricultor con 750 ft de material para construir una valla desea encerrar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con vallas paralelas a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro corrales?
(a) Dibuje varios diagramas que ilustren la situación, algunos con corrales anchos y poco de fondo, y algunos con corrales angostos y mucho de fondo. Encuentre las áreas totales de estas configuraciones. ¿Parece que hay un área máxima? Si es así, calcúlela.
(b) Haga un diagrama que ilustre la situación general. Introduzca notación y marque el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el área total.
(d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Use el inciso (d) para escribir el área total como función de una variable.
(f) Termine resolviendo el problema y compare la respuesta con su estimación en el inciso (a).

10. Considere el siguiente problema: Se ha de construir una caja con tapa abierta, a partir de una pieza de cartón de 3 ft de ancho, cortando para ello un cuadrado de cada una de las cuatro esquinas y doblando los costados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que esa caja pueda tener.
(a) Haga varios diagramas para ilustrar la situación, algunas cajas de poca altura con bases grandes y algunas cajas altas con bases pequeñas. Encuentre los volúmenes de varias de estas cajas. ¿Parece que hay un volumen máximo? Si es así, calcúlelo.
(b) Trace un diagrama que ilustre la situación general. Proponga una notación y etiquete el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el volumen.
(d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Use el inciso (d) para escribir el volumen como función de una variable.
(f) Termine resolviendo el problema y compare la respuesta con su cálculo del inciso (a).

11. Si se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y tapa abierta, encuentre el volumen más grande posible de la caja.

12. Una caja con base cuadrada y tapa abierta debe tener un volumen de 32,000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que maximicen la cantidad de material empleado.

13. (a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área determinada, el de perímetro más pequeño es un cuadrado.
(b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tenga área más grande es un cuadrado.

14. Un recipiente rectangular con tapa abierta ha de tener un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado; el de los costados, cuesta \$6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de materiales para hacer el recipiente más barato.

15. Encuentre los puntos en la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estén más alejados del punto $(1, 0)$.

16. Encuentre, correctas a dos lugares decimales, las coordenadas del punto en la curva $y = \tan x$ que sea más cercano al punto $(1, 1)$.

17. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área más grande que pueda ser inscrito en un triángulo equilátero de lado L, si un lado del rectángulo está en la base del triángulo.

18. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área más grande que tiene su base en el eje x y sus otros dos vértices arriba del eje x y está en la parábola $y = 8 - x^2$.

19. Un cilindro circular recto está inscrito en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de este cilindro.

20. Encuentre el área del rectángulo más grande que pueda inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

21. Encuentre las dimensiones del triángulo isósceles del área más grande que pueda inscribirse en un círculo de radio r.

22. Una lata cilíndrica sin tapa está hecha para contener V cm^3 de líquido. Encuentre las dimensiones que reducirán al mínimo el costo del metal para hacer la lata.

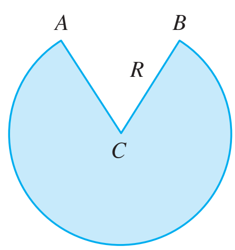
23. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. (De esta forma, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Véase el Ejercicio 58 en la página 24.) Si el perímetro de la ventana es 30 ft, encuentre las dimensiones de la ventana para que deje pasar la mayor cantidad posible de luz.

24. Un cilindro circular recto está inscrito en un cono con altura h y radio r de base. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.

25. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos piezas, una de las cuales se dobla en un cuadrado y la otra en un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total encerrada sea (a) máxima? (b) mínima?

26. Una valla de 8 ft de alto corre paralela a un edificio alto a una distancia de 4 ft del edificio. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta que llegue del suelo y pase sobre la cerca hasta la pared del edificio?

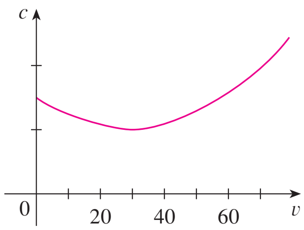
27. Una taza en forma de cono está hecha de una pieza circular de papel de radio R cuando se corta un sector y se unen los bordes CA y CB. Encuentre la máxima capacidad de esa taza.



28. Una taza en forma de cono está hecha para contener 27 cm^3 de agua. Encuentre la altura y radio de la taza que usará la más pequeña cantidad de papel.

29. Un cono con altura h está inscrito en un cono más grande con altura H para que su vértice esté en el centro de la base del cono más grande. Demuestre que el cono interior tiene volumen máximo cuando $h = \frac{1}{3}H$.

30. La gráfica muestra el consumo de combustible c de un auto (medido en galones por hora) como función de la rapidez v del auto. A muy baja rapidez el motor funciona en forma ineficiente, de modo que inicialmente c se reduce cuando la rapidez aumenta. Se puede ver que $c(v)$ se minimiza para este auto cuando $v \approx 30$ mi/h. No obstante, para eficiencia en el combustible, lo que debe reducirse al mínimo no es el consumo en galones por hora sino más bien el consumo en galones *por milla*. Llamemos G a este consumo. Usando la gráfica, calcule la rapidez a la que G tiene su valor mínimo.



31. Si un resistor de R ohms se conecta en paralelo una batería de E volts con resistencia interna de r ohms, entonces la potencia (en watts) en el resistor externo es

$$P = \frac{E^2R}{(R + r)^2}$$

Si E y r son fijos pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

32. Para un pez que nada a una rapidez v con respecto al agua, el gasto de energía por unidad de tiempo es proporcional a v^3. Se cree que los peces que emigran tratan de reducir al mínimo la energía total necesaria para nadar una distancia fija. Si los peces están nadando contra una corriente u ($u < v$), entonces el tiempo requerido para nadar una distancia L es $L/(v - u)$ y la energía total E requerida para nadar la distancia está dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

donde a es la constante de proporcionalidad.

(a) Determine el valor de v que minimice E.

(b) Trace la gráfica de E.

Nota: Este resultado ha sido verificado experimentalmente; los peces emigrantes nadan contra una corriente a una rapidez 50% mayor que la rapidez de la corriente.

33. En una colmena, cada celda es un prisma hexagonal regular, abierto en un extremo con un ángulo triédrico en el otro extremo como en la figura. Se piensa que las abejas forman sus celdas para reducir al mínimo el área superficial para un volumen determinado, haciendo así uso de la mínima cantidad de cera en la construcción de celdas. El examen de estas celdas ha demostrado que la medida del ángulo θ del vértice es sorprendentemente consistente. Con base en la geometría de la celda, se puede demostrar que el área superficial S está dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \cot\theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right)\csc\theta$$

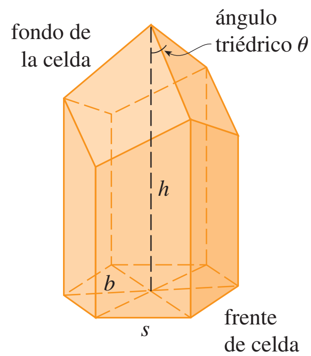
donde s, la longitud de los lados del hexágono, y h, la altura, son constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) ¿Qué ángulo deben preferir las abejas?

(c) Determine la mínima área superficial de la celda (en términos de s y h).

Nota: Se han hecho mediciones reales del ángulo θ en colmenas y las medidas de estos ángulos raras veces difieren en más de 2° del valor calculado.



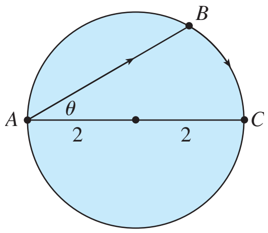
34. Un bote sale de un muelle a las 2:00 p.m. y navega hacia el sur a una rapidez de 20 km/h. Otro bote se ha estado dirigiendo hacia el este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 3:00 p.m. ¿En qué tiempo estuvieron más cerca los dos botes?

35. Una refinería de petróleo está ubicada en la margen norte de un río recto que mide 2 km de ancho. Un oleoducto se ha de construir de la refinería a tanques de almacenamiento situados en la margen sur del río, 6 km al este de la refinería. El costo de instalar la tubería es de \$400,000/km en tierra a un punto P en la margen norte y \$800,000/km bajo el río hasta los tanques. Para reducir al mínimo el costo del oleoducto, ¿dónde debe estar situado P?

36. Suponga que la refinería del Ejercicio 35 está situada 1 km al norte del río. ¿Dónde debe situarse P?

37. La iluminación de un objeto por medio de una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad de la fuente, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente. Si dos fuentes de luz, una tres veces más intensa que la otra, se colocan a 10 ft entre sí, ¿dónde debe colocarse un objeto en la línea entre las fuentes para que reciba la menor iluminación?

38. Una mujer en un punto A, que se encuentra en la orilla de un lago circular de 2 millas de radio, desea llegar al punto C diametralmente opuesto a A en el otro lado del lago en el tiempo más corto posible (véase la figura). Ella puede caminar a razón de 4 mi/h y remar en bote a 2 millas/h. ¿Cómo debe avanzar?



39. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 5) que corta el área mínima del primer cuadrante.

40. ¿En qué puntos de la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ la recta tangente tiene la máxima pendiente?

41. ¿Cuál es la longitud más corta posible del segmento de recta que es cortado por el primer cuadrante y es tangente a la curva $y = 3/x$ en algún punto?

42. ¿Cuál es el área más pequeña posible del triángulo que es cortado por el primer cuadrante y cuya hipotenusa es tangente a la parábola $y = 4 - x^2$ en algún punto?

43. (a) Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de una mercancía, entonces el **costo promedio** por unidad es $c(x) = C(x)/x$. Demuestre que si el costo promedio es un mínimo, entonces el costo marginal es igual al costo promedio.

(b) Si $C(x) = 16{,}000 + 200x + 4x^{3/2}$, en dólares, encuentre (i) el costo, costo promedio y costo marginal a un nivel de producción de 1000 unidades; (ii) el nivel de producción que reducirá al mínimo el costo promedio; y (iii) el costo promedio mínimo.

44. (a) Demuestre que si la utilidad $P(x)$ es máxima, entonces el ingreso marginal es igual al costo marginal.

(b) Si $C(x) = 16{,}000 + 500x - 1.6x^2 + 0.004x^3$ es la función de costo y $p(x) = 1700 - 7x$ es la función de demanda, encuentre el nivel de producción que maximice la utilidad.

45. Un equipo de beisbol juega en un estadio con capacidad para 55,000 espectadores. Con precios de \$10 por boleto, la asistencia promedio había sido de 27,000. Cuando los precios de boletos se bajaron a \$8, la asistencia promedio subió a 33,000.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.

(b) ¿En cuánto deben fijarse los precios de boletos para maximizar el ingreso?

46. Durante los meses de verano Terry hace y vende collares en la playa. El verano pasado vendió los collares en \$10 y sus ventas promediaron 20 por día. Cuando él aumentó el precio en \$1, encontró que el promedio bajó en dos ventas por día.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.

(b) Si el material para cada collar cuesta a Terry \$6, ¿cuál debería ser el precio de venta para maximizar su utilidad?

47. Un fabricante ha estado vendiendo 1000 televisores por semana a \$450 cada uno. Un estudio de mercado indica que por cada \$10 de rebaja ofrecido al cliente, el número de aparatos vendidos aumentará en 100 por semana.

(a) Encuentre la función de demanda.

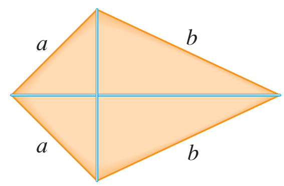
(b) ¿Qué tan grande debe ser la rebaja que la compañía ofrezca al comprador para maximizar su utilidad?

(c) Si su función de costo semanal es $C(x) = 68{,}000 + 150x$, ¿cómo debe el fabricante fijar el monto de la rebaja para maximizar su utilidad?

48. El gerente de un complejo de 100 departamentos sabe por experiencia que todas las unidades estarán ocupadas si la renta es \$800 por mes. Un estudio de mercado sugiere que, en promedio, una unidad adicional estará desocupada por cada \$10 de aumento en la renta. ¿Qué renta debe cobrar el gerente para maximizar los ingresos?

49. Sean a y b números positivos. Encuentre la longitud del segmento de recta más corto que es cortado por el primer cuadrante y pasa por el punto (a, b).

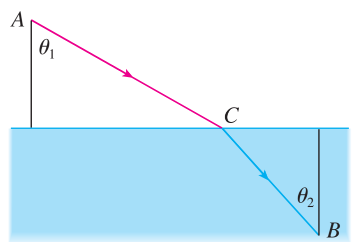
CAS **50.** El marco de una cometa ha de hacerse de seis piezas de madera. Las cuatro piezas exteriores han sido cortadas con las longitudes indicadas en la figura. Para maximizar el área de la cometa, ¿qué longitud deben tener las piezas diagonales?



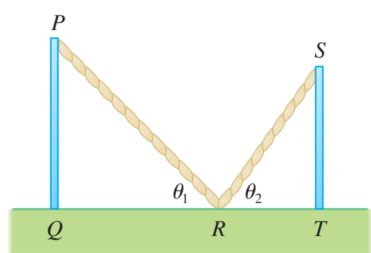
51. Sea v_1 la velocidad de la luz en aire y v_2 la velocidad de la luz en agua. De acuerdo con el principio de Fermat, un rayo de luz se desplazará del punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo transcurrido. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

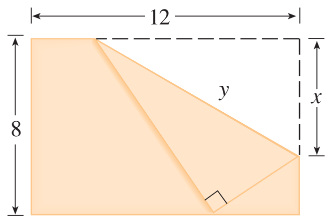
donde se muestran θ_1 (el ángulo de incidencia) y θ_2 (el ángulo de refracción). Esta ecuación se conoce como Ley de Snell.



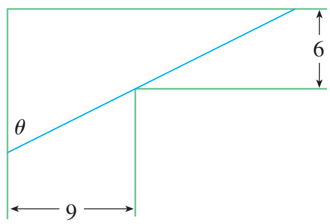
52. Dos postes verticales PQ y ST están asegurados por una cuerda PRS que va de lo alto del primer poste a un punto R en el suelo, situado entre los postes, y luego a lo alto del segundo poste como se ve en la figura. Demuestre que la longitud más corta de esa cuerda ocurre cuando $\theta_1 = \theta_2$.



53. La esquina superior derecha de una hoja de papel, de 12 in. por 8 in., como se ve en la figura, se dobla hasta llegar al borde inferior. ¿Cómo se debe doblarla para minimizar la longitud del doblez? En otras palabras, ¿cómo se debe escoger x para minimizar y?

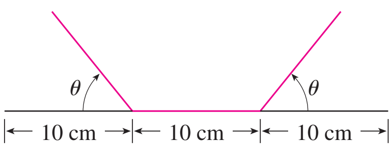


54. Un tubo de acero está siendo llevado por un pasillo de 9 ft de ancho. Al final del pasillo hay una vuelta a la derecha que va a un pasillo más angosto, de 6 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que puede ser pasado horizontalmente por la esquina?

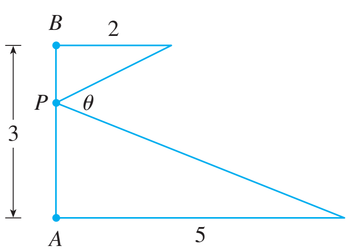


55. Encuentre el área máxima de un rectángulo que pueda ser circunscrito alrededor de un rectángulo determinado con longitud L y ancho W. [*Sugerencia:* Exprese el área como función de un ángulo θ.]

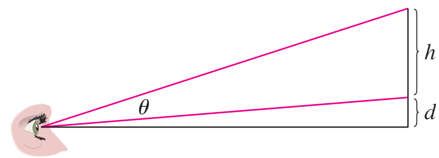
56. Un canal (o canalón) de tejado se ha de construir de una lámina de metal de 30 cm de ancho, doblando hacia arriba un tercio de la lámina a cada lado, en un ángulo θ. ¿Cómo debe escogerse θ para que el canal lleve la máxima cantidad de agua?



57. ¿Dónde debe escogerse el punto P en el segmento de recta AB para maximizar el ángulo θ?



58. Una pintura en una galería de arte tiene una altura h y está colgada de modo que su borde inferior esté a una distancia d sobre los ojos de un observador (como en la figura). ¿A qué distancia de la pared debe encontrarse el observador para tener la mejor vista? (En otras palabras, ¿dónde debe colocarse el observador para maximizar el ángulo θ subtendido en su ojo por la pintura?)



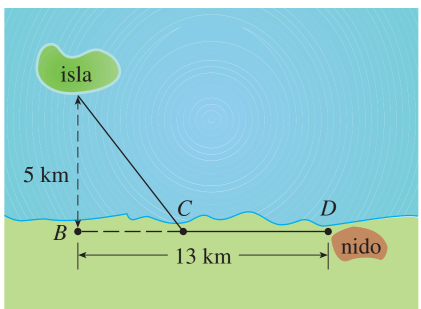
59. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre cuerpos de agua grandes durante horas con luz diurna. Se piensa que se requiere más energía para volar sobre el agua que sobre tierra porque el aire generalmente sube sobre tierra y cae sobre agua durante el día. Un ave con estas tendencias se libera de una isla que está a 5 km del punto más cercano B en una orilla recta, vuela a un punto C en la orilla y luego vuela a lo largo de la orilla hasta su área de anidar D. Suponga que el ave instintivamente escoge una trayectoria que minimiza su gasto de energía. Los puntos B y D están a 13 km entre sí.

(a) En general, si se requiere de 1.4 veces más energía volar sobre agua que sobre tierra, ¿a qué punto C debe volar el ave para reducir al mínimo la energía total consumida en regresar a su área de anidar?

(b) Con W y L denotemos la energía (en joules) por kilómetro que vuele el ave sobre agua y tierra, respectivamente. ¿Qué significaría un valor grande del cociente W/L en términos del vuelo del ave? ¿Qué significaría un valor pequeño? Determine la razón W/L correspondiente al mínimo gasto de energía.

(c) ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele directamente a su área de anidar D? ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele a B y luego a lo largo de la orilla a D?

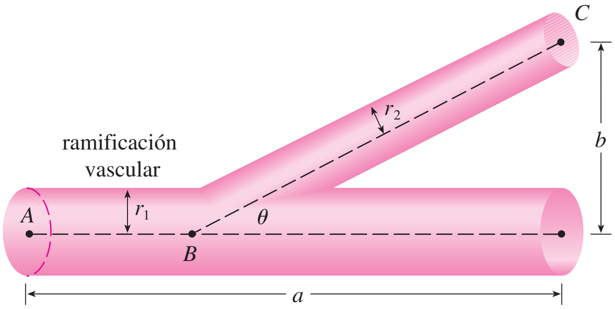
(d) Si los ornitólogos observan que aves de cierta especie llegan a la orilla en un punto a 4 km de B, ¿cuántas veces más energía necesita un ave para volar sobre agua que sobre tierra?



60. El sistema vascular está formado por vasos sanguíneos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que llevan sangre del corazón a los órganos y la regresan al corazón. Este sistema debe funcionar de modo que minimice el gasto de energía por parte del corazón al bombear sangre. En particular, esta energía se reduce cuando la resistencia de la sangre se reduce. Una de las Leyes de Poiseuille da la resistencia R de la sangre como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es el radio y C es la constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre. (Poiseuille estableció esta ley experimentalmente, pero también se deduce de la Ecuación 6.7.2.) La figura muestra un vaso sanguíneo principal con radio r_1 que se ramifica a un ángulo θ en un vaso más pequeño de radio r_2.



(a) Use la Ley de Poiseuille para demostrar que la resistencia total de la sangre a lo largo de la trayectoria ABC es

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

donde a y b son las distancias mostradas en la figura.

(b) Demuestre que esta resistencia se minimiza cuando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

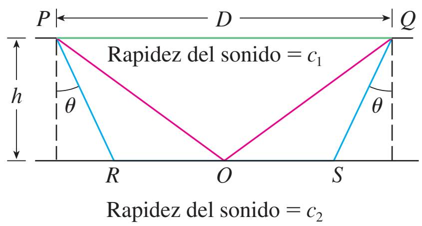
(c) Encuentre el ángulo óptimo de ramificación (correcto al grado más cercano) cuando el radio del vaso sanguíneo más pequeño es dos tercios del radio del vaso más grande.

61. Las magnitudes de rapidez del sonido c_1 en una capa superior, así como c_2 en una capa inferior de rocas y el grosor h de la capa superior, se pueden determinar por exploración sísmica si la rapidez del sonido en la capa inferior es mayor que la de la capa superior. Una carga de dinamita se detona en un punto P y las señales transmitidas se registran en un punto Q, que está a una distancia D de P. La primera señal en llegar a Q se desplaza a lo largo de la superficie y toma T_1 segundos. La siguiente señal se mueve de P a un punto R, de R a S en la capa inferior y luego a Q, tomando T_2 segundos. La tercera señal es reflejada de la capa inferior en el punto medio O de RS y toma T_3 segundos para llegar a Q.

(a) Exprese T_1, T_2 y T_3 en términos de D, h, c_1, c_2 y θ.

(b) Demuestre que T_2 es un mínimo cuando sen $\theta = c_1/c_2$.

(c) Suponga que $D = 1$ km, $T_1 = 0.26$, $T_2 = 0.32$ s y $T_3 = 0.34$ s. Encuentre c_1, c_2 y h.



Nota: Los geofísicos usan esta técnica cuando estudian la estructura de la corteza terrestre, ya sea en busca de petróleo o para examinar líneas de fallas.

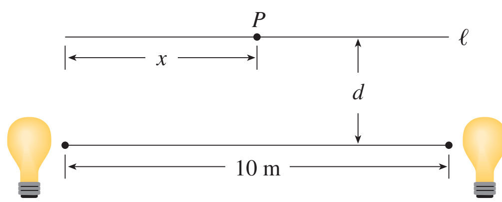
62. Dos fuentes luminosas de idéntica intensidad están instaladas a 10 m entre sí. Un objeto se ha de colocar en un punto P en una recta ℓ paralela a la recta que une las fuentes de luz y a una distancia d metros de ella (véase la figura). Deseamos localizar P en ℓ para que la intensidad de iluminación se minimice. Necesitamos usar el hecho de que la intensidad de iluminación para una sola fuente es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente.

(a) Encuentre una expresión para la intensidad $I(x)$ en el punto P.

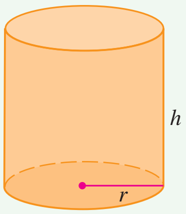
(b) Si $d = 5$ m, use las gráficas de $I(x)$ y de $I'(x)$ para demostrar que la intensidad se minimiza cuando $x = 5$ m, es decir, cuando P está en el punto medio de ℓ.

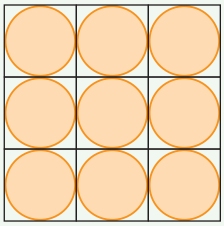
(c) Si $d = 10$ m, demuestre que la intensidad (quizá sorprendentemente) *no* se minimiza en el punto medio.

(d) En algún punto entre $d = 5$ m y $d = 10$ m hay un valor de transición de d en el que el punto de mínima iluminación cambia en forma abrupta. Calcule este valor de d por métodos gráficos. A continuación encuentre el valor exacto de d.

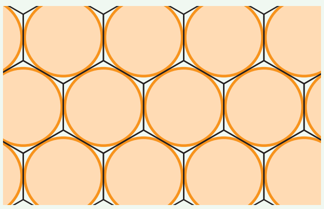


PROYECTO DE APLICACIÓN La forma de una lata





Discos cortados de cuadrados



Discos cortados de hexágonos

En este proyecto investigamos la forma más económica para una lata. Primero interpretamos esto para decir que nos dan el volumen V de una lata cilíndrica y necesitamos hallar la altura h y radio r que minimicen el costo del metal para hacer la lata (véase la figura). Si hacemos caso omiso de cualquier desperdicio de metal en el proceso de manufactura, entonces el problema es minimizar el área superficial del cilindro. Resolvimos este problema en el Ejemplo 2 de la Sección 4.6 y encontramos que $h = 2r$; esto es, la altura debe ser igual que el diámetro. Pero si tenemos una hoja de cartoncillo, o vamos al supermercado con una regla, veremos que la altura suele ser mayor que el diámetro y la relación h/r varía de 2 hasta 3.8. Veamos si podemos explicar este fenómeno.

1. El material para las latas se corta de láminas de metal. Los costados cilíndricos se forman al doblar rectángulos; estos rectángulos se cortan de las láminas con poco o ningún desperdicio. Pero si los discos de la tapa y fondo se cortan de cuadrados de lado $2r$ (como en la figura, esto deja considerable material de desperdicio, que se puede reciclar pero tiene muy poco o ningún valor para el fabricante de las latas. Si éste es el caso, demuestre que la cantidad de metal empleado se minimiza cuando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

2. Un empaque más eficiente de los discos se obtiene al dividir la lámina metálica en hexágonos y cortar las tapas cilíndricas y bases a partir de los hexágonos (véase la figura). Demuestre que si se adopta esta estrategia, entonces

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$

3. Los valores de h/r que encontramos en los Problemas 1 y 2 son un poco más cercanos a los que en realidad hay en estantes de supermercados, pero aún no lo explican todo. Si vemos más de cerca algunas latas reales, vemos que la tapa y la base están formadas de discos con radio mayor que r y dobladas sobre los extremos de la lata. Si tomamos en cuenta esto, aumentaríamos h/r. También es importante considerar que, además del costo del metal, necesitamos incorporar la manufactura de la lata en el costo. Supongamos que la mayor parte del gasto se incurre al unir los lados de los bordes de las latas. Si cortamos los discos de los hexágonos como en el Problema 2, entonces el costo total es proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

donde k es el recíproco de la longitud que se puede unir para el costo de una unidad de área de metal. Demuestre que esta expresión se minimiza cuando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Grafique $\sqrt[3]{V}/k$ como una función de $x = h/r$ y use su gráfica para argumentar que cuando una lata es grande o la unión de piezas es barata, deberíamos hacer h/r aproximadamente de 2.21 (como en el Problema 2). Pero cuando la lata es pequeña o la unión es costosa, h/r debe ser considerablemente más grande.

5. Nuestro análisis muestra que latas grandes deben ser casi cuadradas pero las latas pequeñas deben ser altas y delgadas. Observe las formas relativas de las latas en un supermercado. ¿Nuestra conclusión suele ser verdadera en la práctica? ¿Hay excepciones? ¿Puede usted sugerir razones por las que latas pequeñas no son siempre altas y delgadas?

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

4.7 Método de Newton

Supongamos que un distribuidor de autos ofrece al lector venderle un auto en \$18,000 en efectivo, o en pagos de \$375 por mes durante cinco años. Al comprador le gustaría saber cuál es la tasa mensual de interés que el distribuidor le cobrará. Para hallar la respuesta, tiene que resolver la ecuación

$$\boxed{1} \qquad 48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

(Los detalles se explican en el Ejercicio 33.) ¿Cómo resolvería la ecuación?

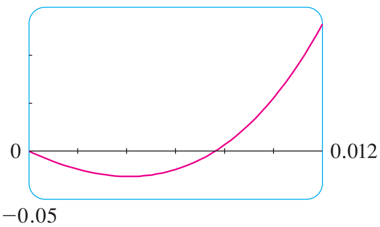


FIGURA 1

Trate de resolver la Ecuación 1 usando el buscador de raíces de su calculadora o computadora. Algunas máquinas no pueden resolverla, pero otras sí la resuelven pidiendo sólo especificar un punto de partida para la búsqueda.

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ hay una bien conocida fórmula para las raíces. Para ecuaciones de tercer y cuarto grados también hay fórmulas para las raíces, pero son muy complicadas. Si f es un polinomio de grado 5 o superior, no hay esa fórmula (véase la nota en la página 213). Del mismo modo, no hay fórmula que haga posible que encontremos las raíces exactas de una ecuación trascendental como por ejemplo $\cos x = x$.

Podemos hallar una solución *aproximada* a la Ecuación 1 al graficar el lado izquierdo de la ecuación. Usando una calculadora graficadora, y después experimentando con rectángulos de observación, obtenemos la gráfica de la Figura 1.

Vemos que además de la solución $x = 0$, que no nos interesa, hay una solución entre 0.007 y 0.008. Al hacer acercamiento se ve que la raíz es aproximadamente 0.0076. Si se requiere de más precisión se pueden hacer acercamientos en repetidas veces pero esto es algo tedioso. Una alternativa más rápida es usar un buscador numérico de raíces en una calculadora o sistema computarizado de álgebra. Con esto encontramos la raíz, correcta a nueve lugares decimales, y es 0.007628603.

¿Cómo funcionan los buscadores numéricos de raíces? Usan diversos métodos, pero casi todos ellos usan el **método de Newton**, también llamado **método de Newton-Raphson.** Explicaremos cómo funciona este método, en parte para demostrar lo que ocurre dentro de una calculadora o computadora o en parte como aplicación de la idea de aproximación lineal.

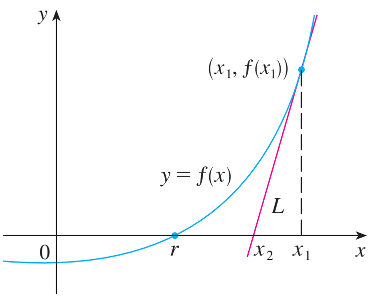


FIGURA 2

La geometría que hay detrás del método de Newton se muestra en la Figura 2, donde la raíz que estamos tratando de hallar está marcada como r. Empezamos con una primera aproximación x_1, que se obtiene por suposiciones o cálculos, o a partir de un bosquejo aproximado de la gráfica de f, o de una gráfica de f generada por computadora. Considere la recta tangente L a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y ver la intersección x de L, marcada x_2. La idea detrás del método de Newton es que la recta tangente está cercana a la curva y entonces su intersección con el eje x, x_2, está cercana a la intersección con el eje x de la curva (es decir, la raíz r que estamos buscando). Debido a que la tangente es una recta, fácilmente podemos hallar su intersección con el eje x.

Para hallar una fórmula para x_2 en términos de x_1 usamos el hecho de que la pendiente de L es $f'(x_1)$, de modo que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Como la intersección con el eje x de L es x_2, hacemos $y = 0$ y obtenemos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, de esta ecuación podemos despejar x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Usamos x_2 como una segunda aproximación a r.

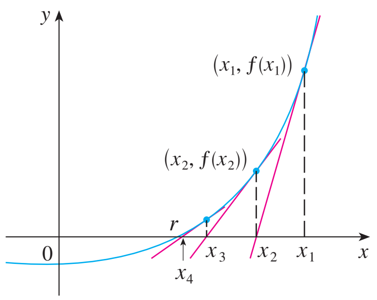


FIGURA 3

A continuación repetimos este procedimiento con x_1 sustituida por la segunda aproximación x_2, usando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Esto da como resultado una tercera aproximación:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Si seguimos repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión de aproximaciones x_1, x_2, x_3, x_4, . . . como se muestra en la Figura 3. En general, si la n-ésima aproximación es x_n y $f'(x_n) \neq 0$, entonces la siguiente aproximación está dada por

2
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Las sucesiones se introdujeron brevemente en *Un Repaso de Cálculo* en la página 6. Un examen más completo se inicia en la Sección 8.1.

Si los números x_n se acercan cada vez más a r cuando n se hace grande, entonces decimos que la sucesión *converge* a r y escribimos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

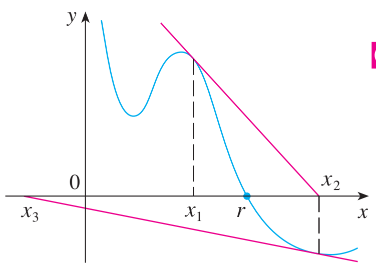


FIGURA 4

Aun cuando la secuencia de aproximaciones sucesivas converge a la raíz deseada para funciones del tipo ilustrado en la Figura 3, en ciertas circunstancias la sucesión puede no converger. Por ejemplo, considere la situación mostrada en la Figura 4. Se puede ver que x_2 es una aproximación peor que x_1. Es probable que éste sea el caso cuando $f'(x_1)$ es cercana a 0. Podría incluso ocurrir que una aproximación (por ejemplo x_3 en la Figura 4) caiga fuera del dominio de f. Entonces el método de Newton falla y debe escogerse una mejor aproximación inicial x_1. En los Ejercicios 25−27 véanse ejemplos específicos en los que el método de Newton funciona muy lentamente o no funciona en absoluto.

V EJEMPLO 1 Empezando con $x_1 = 2$, encuentre la tercera aproximación x_3 a la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN Aplicamos el método de Newton con $x_1 = 2$ luego de estar experimentando, ya que $f(1) = -6$, $f(2) = -1$, y $f(3) = 16$. La ecuación 2 se convierte en

TEC En Module 4.7 se puede investigar cómo funciona el método de Newton para varias funciones y qué pasa cuando se cambia x_1.

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

El propio Newton utilizó esta ecuación para ilustrar su método y eligió $x_1 = 2$ luego de estar experimentando, ya que $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 16$. La ecuación 2 se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

La Figura 5 muestra la geometría que hay detrás del primer paso del método de Newton en el Ejemplo 1. Como $f'(2) = 10$, la recta tangente a $y = x^3 - 2x - 5$ en $(2, -1)$ tiene ecuación $y = 10x - 21$ y su intersección con el eje x es $x_2 = 2.1$.

Con $n = 1$ tenemos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

Entonces con $n = 2$ obtenemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2} = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

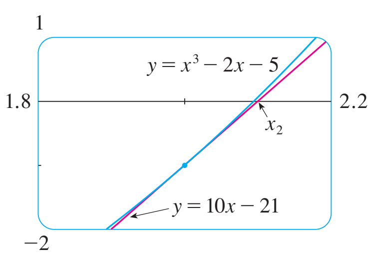


FIGURA 5

Resulta que esta tercera aproximación $x_3 \approx 2.0946$ es precisa a cuatro lugares decimales.

Suponga que deseamos alcanzar una precisión determinada, por ejemplo a ocho lugares decimales, usando el método de Newton. ¿Cómo sabemos cuándo parar? La regla práctica que se usa generalmente es que podemos parar cuando aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} coinciden en ocho lugares decimales. (Un enunciado exacto respecto a la precisión del método de Newton se dará en el Ejercicio 33 de la Sección 8.8.)

Observe que el procedimiento que va de n a $n + 1$ es el mismo para todos los valores de n. (Se denomina proceso *iterativo*.) Esto significa que el método de Newton es particularmente conveniente para usarlo con una calculadora programable o computadora.

V EJEMPLO 2 Use el método de Newton para hallar $\sqrt[6]{2}$ correcto a ocho lugares decimales.

SOLUCIÓN Primero observamos que hallar $\sqrt[6]{2}$ es equivalente a hallar la raíz positiva de la ecuación

$$x^6 - 2 = 0$$

de modo que tomamos $f(x) = x^6 - 2$. Entonces $f'(x) = 6x^5$ y la Fórmula 2 (método de Newton) se convierten en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Si escogemos $x_1 = 1$ como la aproximación inicial, entonces obtenemos

$$x_2 \approx 1.16666667$$
$$x_3 \approx 1.12644368$$
$$x_4 \approx 1.12249707$$
$$x_5 \approx 1.12246205$$
$$x_6 \approx 1.12246205$$

Como x_5 y x_6 concuerdan a ocho lugares decimales, concluimos que

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

a ocho lugares decimales.

V EJEMPLO 3 Encuentre, correcta a seis lugares decimales, la raíz de la ecuación $\cos x = x$.

SOLUCIÓN Primero reescribimos la ecuación en forma estándar:

$$\cos x - x = 0$$

Por tanto hacemos $f(x) = \cos x - x$. Entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$, por lo cual la Fórmula 2 se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\operatorname{sen} x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\operatorname{sen} x_n + 1}$$

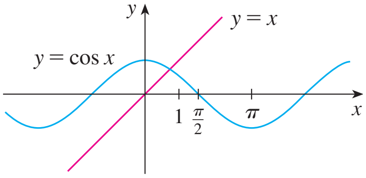


FIGURA 6

Para calcular un valor apropiado para x_1 trazamos las gráficas de $y = \cos x$ y $y = x$ en la Figura 6. Se ve que se intersecan en un punto cuya coordenada x es un poco menor a 1, de manera que tomamos $x_1 = 1$ como primera aproximación conveniente. A continuación, recordando poner nuestra calculadora en el modo de radianes, obtenemos

$$x_2 \approx 0.75036387$$
$$x_3 \approx 0.73911289$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$
$$x_5 \approx 0.73908513$$

Como x_4 y x_5 coinciden a seis lugares decimales (ocho, en realidad), concluimos que la raíz de la ecuación, correcta a seis lugares decimales, es 0.739085.

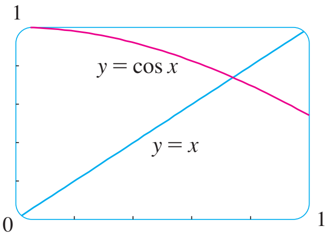


FIGURA 7

En lugar de usar el trazo aproximado de la Figura 6 para obtener una aproximación inicial para el método de Newton en el Ejemplo 3, podríamos haber usado la gráfica más precisa que proporciona una calculadora o computadora. La Figura 7 sugiere que usemos $x_1 = 0.75$ como aproximación inicial. Entonces el método de Newton resulta en

$$x_2 \approx 0.73911114 \qquad x_3 \approx 0.73908513 \qquad x_4 \approx 0.73908513$$

y así obtenemos la misma respuesta que antes, pero con un paso menos.

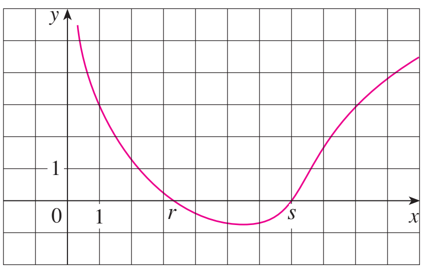
Podríamos preguntarnos para qué molestarnos en absoluto con el método de Newton si contamos con una calculadora graficadora. ¿No es más fácil hacer acercamiento en repetidas veces y hallar las raíces como hicimos en la Sección 1.4? Si sólo se requiere de una precisión de uno o dos lugares decimales, entonces el método de Newton es inapropiado y una calculadora graficadora es suficiente. Pero si se requiere de seis u ocho lugares decimales, entonces hacer acercamiento en repetidas ocasiones se hace tedioso. En general es más rápido y eficiente usar una computadora y el método de Newton juntos: la calculadora graficadora para empezar y el método de Newton para terminar.

4.7 Ejercicios

1. La figura muestra la gráfica de una función f. Suponga que se usa el método de Newton para aproximar la raíz r de la ecuación $f(x) = 0$ con aproximación inicial $x_1 = 1$.

(a) Trace las rectas tangentes que se usan para hallar x_2 y x_3, y calcule los valores numéricos de x_2 y x_3.

(b) ¿Sería $x_1 = 5$ una primera aproximación mejor? Explique.

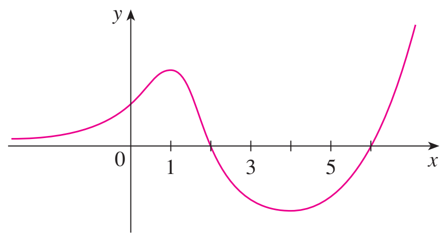


2. Siga las instrucciones del Ejercicio 1(a) pero use $x_1 = 9$ como la aproximación inicial para hallar la raíz s.

3. Suponga que la recta $y = 5x - 4$ es tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = 3$. Si se usa el método de Newton para localizar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y la aproximación inicial es $x_1 = 3$, encuentre la segunda aproximación x_2.

4. Para cada aproximación inicial, determine gráficamente lo que ocurre si se usa el método de Newton para la función cuya gráfica se muestra.

(a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$
(d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$



5–8 Use el método de Newton con la aproximación inicial x_1 especificada para hallar x_3, la tercera aproximación a la raíz de la ecuación dada. (Dé su respuesta a cuatro lugares decimales.)

5. $x^3 + 2x - 4 = 0, \quad x_1 = 1$

6. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0, \quad x_1 = -3$

7. $x^5 - x - 1 = 0, \quad x_1 = 1$

8. $x^5 + 2 = 0, \quad x_1 = -1$

9. Use el método de Newton con aproximación inicial $x_1 = -1$ para hallar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$. Explique cómo funciona el método al graficar primero la función y su recta tangente en $(-1, 1)$.

10. Use el método de Newton con aproximación inicial $x_1 = 1$ para hallar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^4 - x - 1 = 0$. Explique cómo funciona el método al graficar primero la función y su recta tangente en $(1, -1)$.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

11–12 Use el método de Newton para aproximar el número dado correcto a ocho lugares decimales.

11. $\sqrt[5]{20}$ **12.** $\sqrt[100]{100}$

13–16 Use el método de Newton para hallar todas las raíces de la ecuación correctas a seis lugares decimales

13. $x^4 = 1 + x$ **14.** $e^x = 3 - 2x$

15. $(x - 2)^2 = \ln x$ **16.** $\dfrac{1}{x} = 1 + x^3$

17–22 Use el método de Newton para hallar todas las raíces de la ecuación correctas a ocho lugares decimales. Empiece por trazar una gráfica para hallar aproximaciones iniciales.

17. $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 10 = 0$

18. $x^2(4 - x^2) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

19. $x^2\sqrt{2 - x - x^2} = 1$ **20.** $3\ \mathrm{sen}(x^2) = 2x$

21. $4e^{-x^2}\,\mathrm{sen}\,x = x^2 - x + 1$ **22.** $e^{\arctan x} = \sqrt{x^3 + 1}$

23. (a) Aplique el método de Newton para hallar todas las raíces de la ecuación $x^2 - a = 0$ para derivar el siguiente algoritmo de raíz cuadrada (empleada por los antiguos babilonios para calcular $\sqrt{a}$):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Use el inciso (a) para calcular $\sqrt{1000}$ correcta a seis lugares decimales.

24. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $1/x - a = 0$ para derivar el siguiente algoritmo recíproco

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Este algoritmo hace posible que una computadora encuentre recíprocos sin hacer realmente una división.)

(b) Use el inciso (a) para calcular $1/1.6984$ correcto a seis lugares decimales.

25. Explique por qué el método de Newton no funciona para hallar la raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 6 = 0$ si la aproximación inicial se escoge como $x_1 = 1$.

26. (a) Use el método de Newton con $x_1 = 1$ para hallar la raíz de la ecuación $x^3 - x = 1$ correcta a seis lugares decimales.

(b) Resuelva la ecuación del inciso (a) usando $x_1 = 0.6$ como la aproximación inicial.

(c) Resuelva la ecuación en el inciso (a) usando $x_1 = 0.57$ (Necesitará una calculadora programable para esta parte.)

(d) Grafique $f(x) = x^3 - x - 1$ y sus rectas tangentes en $x_1 = 1$, 0.6 y 0.57 para explicar por qué el método de Newton es tan sensible al valor de la aproximación inicial.

27. Explique por qué el método de Newton falla cuando se aplica a la ecuación $\sqrt[3]{x} = 0$ con cualquier aproximación inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre su explicación con una gráfica.

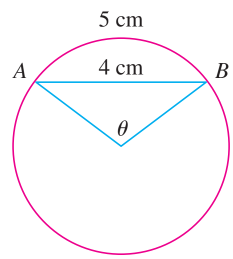
28. Use el método de Newton para hallar el valor máximo absoluto de la función $f(x) = x\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, correcto a seis lugares decimales.

29. Use el método de Newton para hallar las coordenadas del punto de inflexión de la curva $y = e^{\cos x}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, correcto a seis lugares decimales.

30. Del número infinito de rectas que son tangentes a la curva $y = -\mathrm{sen}\,x$ y pasan por el origen, hay una que tiene la pendiente más grande. Use el método de Newton para hallar la pendiente de esa recta correcta a seis lugares decimales.

31. Use el método de Newton para hallar las coordenadas, correctas a seis lugares decimales, del punto en la parábola $y = (x - 1)^2$ que es más cercano al origen.

32. En la figura, la longitud de la cuerda AB es 4 cm y la longitud del arco AB es 5 cm. Encuentre el ángulo central θ, en radianes, correcto a cuatro lugares decimales. A continuación dé la respuesta al grado más cercano.



33. Un distribuidor de autos vende un auto nuevo en \$18,000. También ofrece vender el mismo auto por pagos de \$375 al mes durante cinco años. ¿Qué tasa mensual de interés está cobrando el distribuidor?

Para resolver este problema, usted necesitará usar la fórmula para el valor presente A de una anualidad formada por pagos iguales de magnitud R con tasa de interés i por periodo:

$$A = \frac{R}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

Sustituyendo i con x, demuestre que

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

Use el método de Newton para resolver esta ecuación.

34. La figura muestra el Sol situado en el origen y la Tierra en el punto (1, 0). (La unidad aquí es la distancia entre los centros de la Tierra y el Sol, llamada *unidad astronómica*: 1 UA $\approx$ 1.496×10^8 km.) Hay cinco ubicaciones L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 en este plano de rotación de la Tierra alrededor del Sol, donde un satélite permanece sin moverse con respecto a la Tierra debido a que las fuerzas que actúan sobre el satélite, incluyendo las atracciones gravitacionales de la Tierra y el Sol, se equilibran entre sí. Estas ubicaciones se denominan *puntos de libración.*

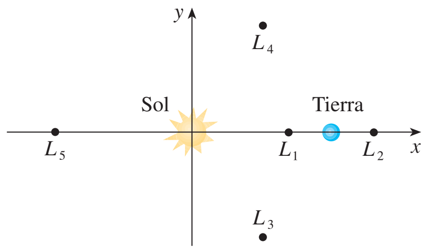
(Un satélite de investigación solar se ha colocado en uno de estos puntos de libración.) Si m_1 es la masa del Sol, m_2 es la masa de la Tierra, y $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que la coordenada x de L_1 es la única raíz de la ecuación de quinto grado

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2 + 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

y la coordenada x de L_2 es la raíz de la ecuación

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Usando el valor $r \approx 3.04042 \times 10^{-6}$, encuentre las ubicaciones de los puntos de libración (a) L_1 y (b) L_2.



4.8 Antiderivadas

Un físico que conoce la velocidad de una partícula podría desear conocer su posición en un momento determinado. Un ingeniero que puede medir la cantidad variable a la que se fuga agua de un tanque desea saber la cantidad de agua que se fugó en cierto periodo. Un biólogo que conoce la rapidez a la que una población de bacterias está creciendo podría desear deducir de qué tamaño será la población en algún momento en el futuro. En cada caso, el problema es hallar una función F cuya derivada es una función conocida f. Si existe esa función F, recibe el nombre de *antiderivada* de f.

Definición Una función F se denomina **antiderivada** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

En la Sección 2.8 introdujimos la idea de una antiderivada y aprendimos a trazar la gráfica de una antiderivada de f si nos dan la gráfica de f. Ahora que ya conocemos las fórmulas de derivación, estamos en una posición para hallar expresiones explícitas para antiderivadas. Por ejemplo, sea $f(x) = x^2$. No es difícil descubrir una antiderivada de f si recordamos la regla de potencias. De hecho, si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, entonces $F'(x) = x^2 = f(x)$. Pero la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ también satisface $G'(x) = x^2$. Por tanto, tanto F como G son antiderivadas de f. De hecho, cualquier función de la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, donde C es una constante, es una antiderivada de f. [El siguiente teorema dice que f no tiene otra antiderivada. Una demostración del Teorema 1, usando el teorema del valor medio, está compendiado en el Ejercicio 55.

1 Teorema Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f en I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

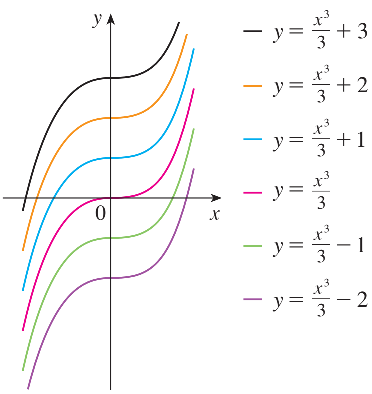


FIGURA 1
Miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = x^2$

Regresando a la función $f(x) = x^2$, vemos que la antiderivada general de f es $x^3/3 + C$. Al asignar valores específicos a la constante C, obtenemos una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales entre sí (véase Figura 1). Esto tiene sentido porque cada curva debe tener la misma pendiente en cualquier valor determinado de x.

EJEMPLO 1 Encuentre la antiderivada más general de cada una de las siguientes funciones.
(a) $F(x) = \text{sen}\, x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$

SOLUCIÓN
(a) Si $F(x) = -\cos x$, entonces $F'(x) = \text{sen}\, x$, por lo cual una antiderivada de sen x es $-\cos x$. Por el Teorema 1, la antiderivada más general es $G(x) = -\cos x + C$.
(b) Recuerde de la Sección 3.7 que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Entonces, en el intervalo $(0, \infty)$ la antiderivada general de $1/x$ es $\ln x + C$. También aprendimos que

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

para toda $x \neq 0$. El Teorema 1 entonces nos dice que la antiderivada general de $f(x) = 1/x$ es $\ln|x| + C$ en cualquier intervalo que no contenga 0. En particular, esto es verdadero en cada uno de los intervalos y $(0, \infty)$. Por tanto, la antiderivada general de f es

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(c) Usamos la regla de potencias para descubrir una antiderivada de x^n. De hecho, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Entonces la antiderivada general de $f(x) = x^n$ es

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Esto es válido para $n \geqslant 0$ porque entonces $f(x) = x^n$ está definida en un intervalo. Si n es negativa (pero $n \neq -1$), es válido en cualquier intervalo que no contenga 0.

Como en el Ejemplo 1, toda fórmula de derivación, cuando se lee de derecha a izquierda, da lugar a una fórmula de antiderivación. En la Tabla 2 vemos una lista de algunas antiderivadas particulares. Cada fórmula de la tabla es verdadera porque la derivada de la función de la columna derecha aparece en la columna izquierda. En particular, la primera columna dice que la antiderivada de una constante por una función es la constante por la antiderivada de la función. La segunda fórmula dice que la antiderivada de una suma es la suma de las antiderivadas. (Usamos la notación $F' = f$, $G' = g$.)

2 Tabla de fórmulas de antiderivación

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\text{sen}\, x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$1/x$	$\ln\|x\|$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
$\cos x$	$\text{sen}\, x$		

Para obtener las antiderivadas más generales de las particulares de la Tabla 2, tenemos que sumar una constante (o constantes) como en el Ejemplo 1.

EJEMPLO 2 **Hallar una función, dada su derivada** Encuentre todas las funciones g tales que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUCIÓN Primero reescribimos la función dada como sigue:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Entonces deseamos hallar una antiderivada de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Usando las fórmulas de la Tabla 2 junto con el Teorema 1, obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= -4 \cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

En aplicaciones de cálculo es muy común tener una situación como en el Ejemplo 2, donde se requiere hallar una función, dado un conocimiento acerca de sus derivadas. Una ecuación que contenga las derivadas de una función se denomina **ecuación diferencial**. Éstas se estudiarán con algún detalle en el Capítulo 7, pero por ahora podemos resolver algunas ecuaciones diferenciales elementales. La solución general de una ecuación diferencial contiene una constante arbitraria (o constantes) como en el Ejemplo 2. No obstante, puede haber algunas condiciones adicionales dadas que determinarán las constantes y por tanto especificar de manera única la solución.

La Figura 2 muestra las gráficas de la función f' del Ejemplo 3 y su antiderivada f. Observe que $f'(x) > 0$, de modo que f es siempre creciente. También observe que cuando f' tiene un máximo o mínimo, f parece tener un punto de inflexión. En consecuencia, la gráfica sirve como comprobación de nuestro cálculo.

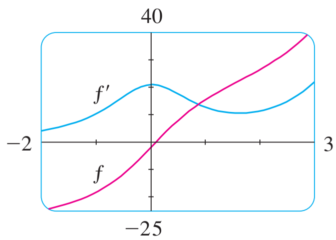


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Encuentre f si $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ y $f(0) = -2$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

es

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1}x + C$$

Para determinar C usamos el hecho de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \tan^{-1} 0 + C = -2$$

Por tanto determinamos que $C = -2 - 1 = -3$, de modo que la solución particular es

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1}x - 3$$

V **EJEMPLO 4** **Hallar una función, dada su segunda derivada**
Encuentre f si $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$, y $f(1) = 1$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ es

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Usando las reglas de antiderivación una vez más, encontramos que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C y D usamos las condiciones dadas de que $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$. Como $f(0) = 0 + D = 4$, tenemos $D = 4$. Como

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

tenemos $C = -3$. Por tanto, la función pedida es

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Movimiento rectilíneo

La antiderivación es particularmente útil para analizar el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. Recuerde que si el objeto tiene función de posición $s = f(t)$, entonces la función de velocidad es $v(t) = s'(t)$. Esto significa que la función de posición es una antiderivada de la función de velocidad. Del mismo modo, la función de aceleración es $a(t) = v'(t)$, de modo que la función de velocidad es una antiderivada de la aceleración. Si la aceleración y los valores iniciales $s(0)$ y $v(0)$ se conocen, entonces la función de posición se puede hallar al antiderivar dos veces.

V **EJEMPLO 5** **Hallar la posición, dada la aceleración** Una partícula se mueve en línea recta y tiene aceleración dada por $a(t) = 6t + 4$. Su velocidad inicial es $v(0) = -6$ cm/s y su desplazamiento inicial es $s(0) = 9$. Encuentre su función de posición $s(t)$.

SOLUCIÓN Como $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, la antiderivación da

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Pero nos indican que $v(0) = -6$, y entonces $C = -6$ y

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Como $v(t) = s'(t)$, s es la antiderivada de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Esto resulta en $s(0) = D$. Nos dicen que $s(0) = 9$, de modo que $D = 9$ y la función de posición pedida es

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$

Un objeto cerca de la superficie terrestre está sometido a una fuerza gravitacional que produce una aceleración hacia abajo denotada por g. Para movimientos cercanos al suelo podemos suponer que g es constante, siendo su valor de alrededor de 9.8 m/s^2 (o 32 ft/s^2).

EJEMPLO 6 Una pelota es lanzada hacia arriba con una rapidez de 48 ft/s desde el borde de un acantilado a 432 ft del suelo. Encuentre su altura sobre el suelo t segundos después. ¿Cuándo alcanza su máxima altura? ¿Cuándo cae al suelo?

SOLUCIÓN El movimiento es vertical y escogemos la dirección positiva hacia arriba. En el tiempo t la distancia sobre el suelo es $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ es decreciente. Por tanto, la aceleración debe ser negativa y tenemos

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$$

Tomando antiderivadas, tenemos

$$v(t) = -32t + C$$

Para determinar C usamos la información dada de que $v(0) = 48$. Esto da como resultado $48 = 0 + C$, de manera que

$$v(t) = -32t + 48$$

La altura máxima es alcanzada cuando $v(t) = 0$, esto es, después de 1.5 s. Como $s'(t) = v(t)$, antiderivamos de nuevo y tenemos

$$s(t) = -16t^2 + 48t + D$$

La Figura 3 muestra la función de posición de la pelota del Ejemplo 6. La gráfica corrobora las conclusiones a las que llegamos. La pelota alcanza su máxima altura después de 1.5 s y cae al suelo después de 6.9 s.

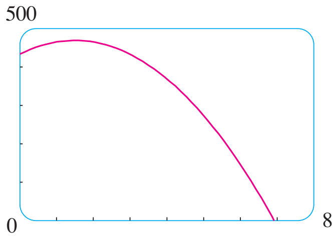


FIGURA 3

Usando el hecho de que $s(0) = 432$, tenemos $432 = 0 + D$ y

$$s(t) = -16t^2 + 48t + 432$$

La expresión para $s(t)$ es válida hasta que la bola llega al suelo. Esto ocurre cuando $s(t) = 0$, es decir, cuando

$$-16t^2 + 48t + 432 = 0$$

o bien, lo que es equivalente, $$t^2 - 3t - 27 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación, tenemos

$$t = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

Rechazamos la solución con el signo menos porque da un valor negativo para t. Por tanto, la pelota llega al suelo después de $3(1 + \sqrt{13})/2 \approx 6.9$ s.

4.8 Ejercicios

1–16 Encuentre la antiderivada más general de la función. (Compruebe su respuesta por derivación.)

1. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$
2. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$
3. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$
4. $f(x) = x(2 - x)^2$
5. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$
6. $f(x) = 2x + 3x^{1.7}$
7. $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$
8. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$
9. $f(x) = \dfrac{10}{x^9}$
10. $g(x) = \dfrac{5 - 4x^3 + 2x^6}{x^6}$
11. $f(u) = \dfrac{u^4 + 3\sqrt{u}}{u^2}$
12. $f(x) = 3e^x + 7\sec^2 x$
13. $g(\theta) = \cos\theta - 5\operatorname{sen}\theta$
14. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6\cos x$
15. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$
16. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

17–18 Encuentre la antiderivada F de f que satisfaga la condición dada. Compruebe su respuesta al comparar las gráficas de f y F.

17. $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, $F(0) = 4$
18. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}$, $F(1) = 0$

19–36 Encuentre f.

19. $f''(x) = 6x + 12x^2$
20. $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$
21. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$
22. $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$
23. $f'(x) = 1 - 6x$, $f(0) = 8$
24. $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3$, $f(1) = 6$
25. $f'(x) = \sqrt{x}(6 + 5x)$, $f(1) = 10$
26. $f'(x) = 2x - 3/x^4$, $x > 0$, $f(1) = 3$
27. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, $f(\pi/3) = 4$
28. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
29. $f''(x) = -2 + 12x - 12x^2$, $f(0) = 4$, $f'(0) = 12$
30. $f''(x) = 8x^3 + 5$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 8$
31. $f''(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 4$
32. $f''(t) = 3/\sqrt{t}$, $f(4) = 20$, $f'(4) = 7$
33. $f''(x) = 2 - 12x$, $f(0) = 9$, $f(2) = 15$
34. $f''(t) = 2e^t + 3\operatorname{sen} t$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$
35. $f''(x) = 2 + \cos x$, $f(0) = -1$, $f(\pi/2) = 0$
36. $f'''(x) = \cos x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$

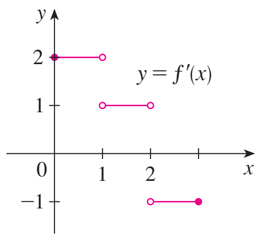
Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

37. Dado que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 6)$ y que la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$, encuentre $f(2)$.

38. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ es tangente a la gráfica de f.

39. La gráfica de f' se muestra en la figura. Trace la gráfica de f si f es continua y $f(0) = -1$.



40. (a) Use calculadora graficadora para graficar $f(x) = e^x - 2x$.
(b) Empezando con la gráfica del inciso (a), trace una gráfica aproximada de la antiderivada F que satisfaga $F(0) = 1$.
(c) Use las reglas de esta sección para hallar una expresión para $F(x)$.
(d) Grafique F usando la expresión del inciso (c). Compare con su gráfica en el inciso (b).

41. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con función de velocidad $v(t) = \operatorname{sen} t - \cos t$ y su desplazamiento inicial es $s(0) = 0$ m. Encuentre su función de posición $s(t)$.

42. Una partícula se mueve con función de aceleración $a(t) = 5 + 4t - 2t^2$. Su velocidad inicial es $v(0) = 3$ m/s y su desplazamiento inicial es $s(0) = 10$ m. Encuentre su posición después de t segundos.

43. Una piedra se deja caer desde la plataforma superior de observación (Plataforma Espacial) de la Torre CN, a 450 m sobre el suelo.
(a) Encuentre la distancia de la piedra arriba del nivel del suelo en el tiempo t.
(b) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?
(c) ¿Con qué velocidad cae al suelo?
(d) Si la piedra es lanzada hacia abajo con una rapidez de 5 m/s, ¿cuánto tarda en llegar al suelo?

44. Demuestre que para movimiento en línea recta con aceleración constante a, velocidad inicial v_0, y desplazamiento inicial s_0, el desplazamiento después del tiempo t es

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

45. Un objeto es proyectado hacia arriba con velocidad inicial de v_0 metros por segundo desde un punto a s_0 metros sobre el suelo. Demuestre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19.6[s(t) - s_0]$$

46. Dos pelotas se lanzan hacia arriba desde el borde del acantilado del Ejemplo 6. La primera es lanzada con una rapidez de 48 ft/s y la otra es lanzada un segundo después con una rapidez de 24 ft/s. ¿Alguna vez se rebasan entre sí?

47. Una compañía calcula que el costo marginal (en dólares por pieza) de producir x piezas es $1.92 - 0.002x$. Si el costo de producir una pieza es \$562, encuentre el costo de producir 100 piezas.

48. La densidad lineal de una varilla de 1 m de longitud está dada por $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$, en gramos por centímetro, donde x se mide en centímetros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa de la varilla.

49. Una piedra se dejó caer desde un acantilado y llegó al suelo con una rapidez de 120 ft/s. ¿Cuál es la altura del acantilado?

50. Un auto está corriendo a 50 mi/h cuando se aplican los frenos al máximo, produciendo una desaceleración constante de 22 ft/s^2. ¿Cuál es la distancia recorrida antes que el auto se detenga?

51. ¿Qué aceleración constante se requiere para aumentar la rapidez de un auto de 30 mi/h a 50 mi/h en 5 s?

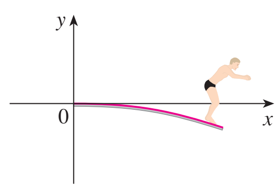
52. Un auto frenó con una desaceleración constante de 16 ft/s^2, produciendo marcas de patinazo que miden 200 ft antes de detenerse. ¿Con qué rapidez se movía el auto cuando se aplicaron los frenos primero?

53. Un auto está corriendo a 100 km/h cuando el conductor ve un accidente a 80 m frente a él y aplica al máximo los frenos. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener el auto a tiempo para evitar una "carambola"?

54. Si un nadador de masa m está de pie en el extremo de un trampolín con longitud L y densidad lineal p, entonces la tabla toma la forma de una curva $y = f(x)$, donde

$$EIy'' = mg(L - x) + \tfrac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

E e I son constantes positivas que dependen del material de la tabla y $g(< 0)$ es la aceleración debida a la gravedad.
(a) Encuentre una expresión para la forma de la curva.
(b) Use $f(L)$ para calcular la distancia bajo la horizontal en el extremo de la tabla.



55. Para demostrar el Teorema 1, sean F y G dos antiderivadas cualesquiera de f en I y sea $H = G - F$.
(a) Si x_1 y x_2 son cualesquier dos números en I con $x_1 < x_2$, aplique el teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$ para demostrar que $H(x_1) = H(x_2)$. ¿Por qué esto demuestra que H es una función constante?
(b) Deduzca el Teorema 1 a partir del resultado del inciso (a).

56. Como las gotas de lluvia aumentan de tamaño conforme caen, su área superficial aumenta y por tanto aumenta la resistencia a su caída. Una gota de lluvia tiene una velocidad inicial hacia abajo de 10 m/s y su aceleración de descenso es

$$a = \begin{cases} 9 - 0.9t & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Si la gota de lluvia está inicialmente a 500 m sobre el suelo, ¿cuánto tarda en caer?

57. Un tren bala de alta velocidad acelera y desacelera a razón de 4 ft/s^2. Su máxima rapidez de crucero es de 90 mi/h.
(a) ¿Cuál es la máxima distancia que el tren puede avanzar si acelera desde el reposo hasta que alcanza su rapidez de crucero y luego corre a esa rapidez durante 15 minutos?
(b) Suponga que el tren arranca desde el reposo y debe detenerse por completo en 15 minutos. ¿Cuál es la máxima distancia que puede correr bajo estas condiciones?
(c) Encuentre el tiempo mínimo que el tren tarde en correr entre dos estaciones consecutivas que están a 45 millas una de otra.
(d) El viaje de una estación a la siguiente tarda 37.5 minutos. ¿A qué distancia están las estaciones entre sí?

58. Un cohete modelo es disparado verticalmente hacia arriba desde el reposo. Su aceleración durante los primeros tres segundos es $a(t) = 60t$, tiempo en el que el combustible se agota y se convierte en un cuerpo en caída "libre". Catorce segundos después, se abre el paracaídas del cohete y la rapidez (hacia abajo) se reduce linealmente a -18 ft/s en 5 s. El cohete entonces "flota" hasta el suelo a ese paso.
(a) Determine la función de posición s y la función de velocidad v (para todo tiempo t). Trace las gráficas de s y v.
(b) ¿En qué tiempo alcanza el cohete su máxima altura y cuál es esa altura?
(c) ¿En qué tiempo llega el cohete al suelo?

4 Repaso

Revisión de conceptos

1. Explique la diferencia entre un máximo absoluto y un máximo local. Ilustre con un dibujo.

2. (a) ¿Qué dice el teorema del valor extremo?
(b) Explique cómo funciona el método de intervalo cerrado.

3. (a) Exprese el teorema de Fermat.
(b) Defina un número crítico de f.

4. Exprese el teorema del valor medio y dé una interpretación geométrica.

5. (a) Exprese la Prueba creciente/decreciente.
(b) ¿Qué significa decir que f es cóncava hacia arriba en un intervalo I?
(c) Exprese la prueba de concavidad.
(d) ¿Qué son puntos de inflexión? ¿Cómo se les encuentra?

6. (a) Exprese la prueba de la primera derivada.
(b) Exprese la prueba de la segunda derivada.
(c) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas relativas de estas pruebas?

7. (a) ¿Qué dice la regla de l'Hospital?
(b) ¿Cómo se puede usar la regla de l'Hospital si se tiene un producto $f(x)g(x)$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?
(c) ¿Cómo se puede usar la regla de l'Hospital si se tiene una diferencia $f(x) - g(x)$ donde $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?
(d) ¿Cómo se puede usar la regla de l'Hospital si se tiene una potencia $[f(x)]^{g(x)}$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$?

8. Si el estudiante cuenta con calculadora graficadora o computadora, ¿por qué necesita cálculo para graficar una función?

9. (a) Dada una aproximación inicial x_1 a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, explique geométricamente, con un diagrama, cómo se obtiene la segunda aproximación x_2 en el método de Newton.
(b) Escriba una expresión para x_2 en términos de x_1, $f(x_1)$ y $f'(x_1)$.
(c) Escriba una expresión para x_{n+1} en términos de x_n, $f(x_n)$ y $f'(x_n)$.
(d) ¿Bajo qué circunstancias es probable que el método de Newton falle o funcione muy lentamente?

10. (a) ¿Qué es una antiderivada de una función f?
(b) Suponga que F_1 y F_2 son antiderivadas de f en un intervalo I. ¿Cómo están relacionadas F_1 y F_2?

Preguntas de verdadero-falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué; si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si $f'(c) = 0$, entonces f tiene un máximo o mínimo locales en c.

2. Si f tiene un valor mínimo absoluto en c, entonces $f'(c) = 0$.

3. Si f es continua en (a, b), entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en (a, b).

4. Si f es derivable y $f(-1) = f(1)$, entonces hay un número c tal que $|c| < 1$ y $f'(c) = 0$.

5. Si $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, entonces f es decreciente en $(1, 6)$.

6. Si $f''(2) = 0$, entonces $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.

7. Si $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, entonces $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.

8. Existe una función f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para toda x.

9. Existe una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x.

10. Existe una función f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda x.

11. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces $f + g$ es creciente en I.

12. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces $f - g$ es creciente en I.

13. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces fg es creciente en I.

14. Si f y g son funciones crecientes positivas en un intervalo I, entonces fg es creciente en I.

15. Si f es creciente y $f(x) > 0$ en I, entonces $g(x) = 1/f(x)$ es decreciente en I.

16. Si f es par, entonces f' es par.

17. Si f es periódica, entonces f' es periódica.

18. La antiderivada más general de $f(x) = x^{-2}$ es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

19. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para toda x, entonces $f(1) \neq f(0)$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x} = 1$

Ejercicios

1–6 Encuentre los valores extremos local y absoluto de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $[2, 4]$

2. $f(x) = x\sqrt{1 - x}$, $[-1, 1]$

3. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 1}$, $[-2, 2]$

4. $f(x) = (x^2 + 2x)^3$, $[-2, 1]$

5. $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x$, $[0, \pi]$

6. $f(x) = (\ln x)/x^2$, $[1, 3]$

7–14
(a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
(b) Encuentre los intervalos de creciente o decreciente.
(c) Encuentre los valores máximo y mínimo locales.
(d) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(e) Use la información de los incisos (a)–(d) para trazar la gráfica de f. Compruebe su trabajo con una calculadora graficadora.

7. $f(x) = 2 - 2x - x^3$

8. $f(x) = x^4 + 4x^3$

9. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

11. $y = \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x$,

12. $y = e^{2x - x^2}$

13. $y = e^x + e^{-3x}$

14. $y = \ln(x^2 - 1)$

15–18 Genere gráficas de f que dejen ver todos los aspectos importantes de la curva. Use gráficas de f' y f'' para calcular los intervalos de aumento y disminución, valores extremos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión. En el Ejercicio 15 use cálculo para hallar estas cantidades exactamente.

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$

16. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x + 3}$

17. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

18. $f(x) = x^2 + 6.5 \operatorname{sen} x$, $-5 \leqslant x \leqslant 5$

19. Grafique $f(x) = e^{-1/x^2}$ en un rectángulo de observación que muestre todos los aspectos principales de esta función. Estime los puntos de inflexión. A continuación use cálculo para hallarlos exactamente.

CAS **20.** (a) Grafique la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
(b) Explique la forma de la gráfica al calcular los límites de $f(x)$ cuando x se aproxima al ∞, $-\infty$, 0^+ y 0^-.
(c) Use la gráfica de f para estimar las coordenadas de los puntos de inflexión.
(d) Use su sistema computarizado de álgebra para calcular y graficar f''.
(e) Use la gráfica del inciso (d) para estimar los puntos de inflexión con más precisión.

CAS **21–22** Use las gráficas de f, f' y f'' para estimar las coordenadas x de los puntos máximo y mínimo y puntos de inflexión de f.

21. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

22. $f(x) = e^{-0.1x} \ln(x^2 - 1)$

23. Investigue la familia de funciones $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$. ¿Qué características tienen en común los miembros de esta familia? ¿Cómo difieren? ¿Para qué valores de C es f continua en $(-\infty, \infty)$? ¿Para qué valores de C no tendrá f una gráfica en absoluto? ¿Qué ocurre cuando $C \to \infty$?

24. Investigue la familia de funciones $f(x) = cxe^{-cx^2}$. ¿Qué ocurre a los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión cuando c cambia? Ilustre sus conclusiones al graficar varios miembros de la familia.

25. ¿Para qué valores de las constantes a y b es $(1, 6)$ un punto de inflexión de la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$?

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

26. Sea $g(x) = f(x^2)$, donde f es derivable dos veces para toda x, $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 0$ y f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.
(a) ¿En qué números tiene g un valor extremo?
(b) Analice la concavidad de g.

27–34 Evalúe el límite.

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan \pi x}{\ln(1 + x)}$

28. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

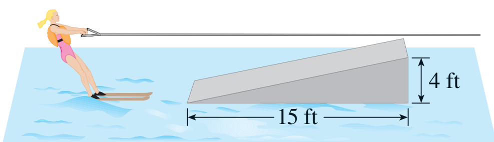
34. $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$

35. El ángulo de elevación del Sol es decreciente a razón de 0.25 rad/h. ¿Con qué rapidez aumenta la sombra proyectada por un edificio de 400 ft de alto cuando el ángulo de elevación del Sol es $\pi/6$?

36. Una taza de papel tiene la forma de un cono con altura de 10 cm y radio de 3 cm (en la parte superior). Si se vierte agua en la taza a razón de 2 cm^3/s, ¿con qué rapidez sube el nivel del agua cuando el agua tiene 5 cm de profundidad?

37. Un globo está subiendo a una rapidez constante de 5 ft/s. Un muchacho pasea en bicicleta en un camino recto con una rapidez de 15 ft/s. Cuando pasa bajo el globo, éste está 45 ft sobre él. ¿Con qué rapidez está aumentando la distancia entre el muchacho y el globo 3 s después?

38. Una esquiadora salta en la rampa que se ve en la figura a una rapidez de 30 ft/s. ¿Con qué rapidez está ella subiendo cuando sale de la rampa?



39. Encuentre dos enteros positivos tales que la suma del primer número y cuatro veces el segundo número es 1000, y el producto de los números es tan grande como sea posible.

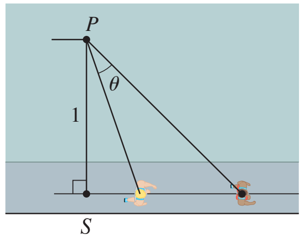
40. Encuentre el punto en la hipérbola $xy = 8$ que sea más cercano al punto $(3, 0)$.

41. Encuentre el área más pequeña posible de un triángulo isósceles que está circunscrito alrededor de un círculo de radio r.

42. Encuentre el volumen del cono circular más grande que se pueda inscribir en una esfera de radio r.

43. En ΔABC, D se encuentra en AB, $|CD| = 5$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|BD| = 4$ cm, y $CD \perp AB$. ¿En dónde debe escogerse un punto P en CD de modo que la suma $|PA| + |PB| + |PC|$ sea mínima? ¿Qué pasa si $|CD| = 2$ cm?

44. Un observador está de pie en un punto P, a una unidad de una pista. Dos corredores arrancan en el punto S de la figura y corren a lo largo de la pista. Un corredor es tres veces más rápido que el otro. Encuentre el valor máximo del ángulo de vista θ del observador entre los corredores. [*Sugerencia:* Maximice $\tan \theta$.]



45. La velocidad de una onda de longitud L en aguas profundas es

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

donde K y C son constantes positivas conocidas. ¿Cuál es la longitud de la onda que dé la mínima velocidad?

46. Un tanque metálico de almacenamiento, con volumen V, se ha de construir en forma de cilindro circular recto rematado por una semiesfera. ¿Qué dimensiones requieren la mínima cantidad de metal?

47. Un equipo de hockey juega en una arena con capacidad de 15,000 espectadores con asiento. Con el precio del boleto fijo en \$12, la asistencia promedio a un juego ha sido de 11,000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que el precio se baje, la asistencia promedio aumentará en 1000. ¿Cómo deben los propietarios del equipo fijar el precio del boleto para maximizar sus ingresos por la venta de boletos?

48. Un fabricante determina que el costo de hacer x unidades de una mercancía es $C(x) = 1800 + 25x - 0.2x^2 + 0.001x^3$ y la función de demanda es $p(x) = 48.2 - 0.03x$.
(a) Grafique las funciones de costo e ingresos y use las gráficas para estimar el nivel de producción para máxima utilidad.
(b) Use cálculo para hallar el nivel de producción para máxima utilidad.
(c) Estime el nivel de producción que minimice el costo promedio.

49. Use el método de Newton para hallar el valor máximo absoluto de la función $f(t) = \cos t + t - t^2$ correcta a ocho lugares decimales.

50. Use el método de Newton para hallar todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ correcta a seis lugares decimales.

51–52 Encuentre la antiderivada más general de la función.

51. $f(x) = e^x - (2/\sqrt{x})$

52. $g(t) = (1 + t)/\sqrt{t}$

53–56 Encuentre $f(x)$.

53. $f'(t) = 2t - 3 \operatorname{sen} t, \quad f(0) = 5$

54. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \quad f(1) = 3$

55. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

56. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0$

57–58 Una partícula se está moviendo con los datos dados. Encuentre la posición de la partícula.

57. $v(t) = 2t - 1/(1 + t^2), \quad s(0) = 1$

58. $a(t) = \operatorname{sen} t + 3\cos t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 2$

59. (a) Si $f(x) = 0.1e^x + \operatorname{sen} x$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$, use una gráfica de f para trazar una gráfica aproximada de la antiderivada F de f que satisfaga $F(0) = 0$.
(b) Encuentre una expresión para $F(x)$.
(c) Grafique F usando la expresión del inciso (b). Compare con su trazo en el inciso (a).

60. Trace la gráfica de una función f par continua tal que $f(0) = 0, f'(x) = 2x$ si $0 < x < 1, f'(x) = -1$ si $1 < x$ 3, y $f'(x) = 1$ si $x > 3$.

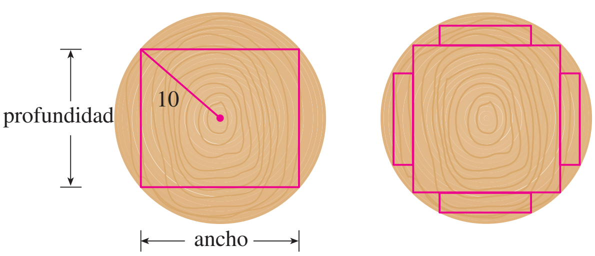
61. Una pequeña caja se deja caer de un helicóptero a 500 m sobre el suelo. Su paracaídas no se abre, pero la caja ha sido diseñada para resistir una velocidad de impacto de 100 m/s. ¿Se romperá?

62. Investigue la familia de curvas dada por

$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

En particular, el estudiante debe determinar el valor de transición de c al que cambia el número de números críticos y el valor de transición al que cambia el número de puntos de inflexión. Ilustre con gráficas las diversas formas posibles.

63. Una viga rectangular se ha de cortar de un tronco cilíndrico de 10 pulgadas de radio.
(a) Demuestre que la viga de máxima área de sección transversal es un cuadrado.
(b) Cuatro tablas rectangulares se cortarán de cuatro secciones del tronco que quede después de cortar la viga cuadrada. Determine las dimensiones de las tablas que tendrán máxima área de sección transversal.
(c) Suponga que la resistencia de una viga rectangular es proporcional al producto de su ancho y el cuadrado de su profundidad. Encuentre las dimensiones de la viga más fuerte que pueda cortarse del tronco cilíndrico.



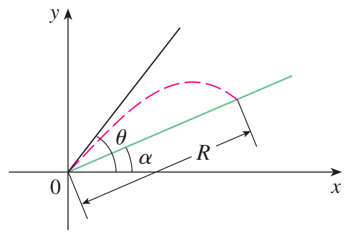
64. Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial v a un ángulo de inclinación θ con respecto a la horizontal, entonces su trayectoria, sin considerar la resistencia del aire, es la parábola

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

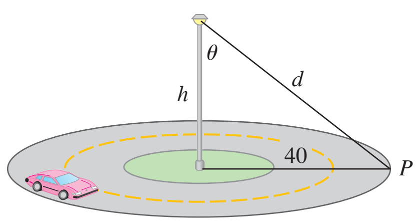
(a) Suponga que el proyectil es disparado desde la base de un plano que está inclinado a un ángulo α, $\alpha > 0$, de la horizontal, como se ve en la figura. Demuestre que el alcance del proyectil, medido arriba de la pendiente, está dado por

$$R(\theta) = \frac{2v^2\cos\theta\ \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

(b) Determine θ para que R sea máximo.
(c) Suponga que el plano está a un ángulo α *debajo de* la horizontal. Determine el alcance R en este caso, y determine el ángulo al cual el proyectil debe ser disparado para maximizar R.



65. Una luz se ha de colocar en lo alto de un poste de altura h pies para iluminar una glorieta, con tránsito denso, que tiene un radio de 40 ft. La intensidad de iluminación I en cualquier punto P en la glorieta es directamente proporcional al coseno del ángulo θ (véase la figura) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente.
(a) ¿De qué altura debe ser el poste para maximizar I?
(b) Suponga que el poste mide h pies de altura y que una mujer camina a razón de 4 ft/s alejándose de la base del poste. ¿Con qué rapidez está disminuyendo la intensidad de la luz en el punto de la espalda de ella a 4 ft sobre el suelo, cuando ella llega al borde exterior de la glorieta?



Principios de resolución de problemas

Uno de los principios más importantes de la resolución de problemas es la *analogía* (véase página 83). Si el estudiante tiene problemas para resolver un problema, a veces es útil empezar por resolver un problema similar pero más sencillo. El siguiente ejemplo ilustra el principio. Cubra la solución y trate de resolverlo por sí mismo.

EJEMPLO Si x, y y z son números positivos, demuestre que

$$\frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{xyz} \geqslant 8$$

SOLUCIÓN Puede ser difícil empezar en este problema. (Algunos estudiantes lo han abordado al multiplicar el numerador, pero eso resulta en todo un lío.) Empecemos por considerar un problema similar más sencillo. Cuando intervienen diversas variables, con frecuencia es útil pensar en un problema análogo con menos variables. En el presente caso podemos reducir el número de variables de tres a una y demostrar la desigualdad análoga

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para } x > 0$$

De hecho, si podemos demostrar (1), entonces la desigualdad deseada se deduce porque

$$\frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{xyz} = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)\left(\frac{y^2 + 1}{y}\right)\left(\frac{z^2 + 1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

La clave para demostrar (1) es reconocer que es una versión disfrazada de un problema mínimo. Si hacemos

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

entonces $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de modo que $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$. También, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Por tanto, el valor mínimo absoluto de f es $f(1) = 2$. Esto significa que

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos los valores positivos de } x$$

y, como ya dijimos, la desigualdad dada se obtiene por multiplicación.

La desigualdad en (1) también podría demostrarse sin cálculo. De hecho, si $x > 0$, tenemos

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geqslant 2 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x - 1)^2 \geqslant 0$$

Como la última desigualdad es obviamente verdadera, la primera también es verdadera.

RP Regrese

¿Qué ha aprendido de la solución de este ejemplo?

Para resolver un problema que contenga diversas variables, podría ser útil resolver un problema semejante con sólo una variable.

Cuando trate de demostrar una desigualdad, podría ser útil considerarla como un problema de máximos o mínimos.

Problemas

1. Si un rectángulo tiene su base en el eje x y dos vértices en la curva $y = e^{-x^2}$, demuestre que el rectángulo tiene el área más grande posible cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la curva.

2. Demuestre que $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para toda x.

3. Demuestre que, para todos los valores posibles de x y de y,

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2$$

4. Demuestre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos los números x y y tales que $|x| \leqslant 2$ y $|y| \leqslant 2$.

5. La función $f(x) = e^{10|x-2|-x^2}$ ¿tiene un máximo absoluto? Si es así, encuéntrelo. ¿Qué se puede decir de un mínimo absoluto?

6. Encuentre el punto en la parábola $y = 1 - x^2$ en el que la recta tangente corta del primer cuadrante al triángulo con el área más pequeña.

7. Encuentre los puntos más alto y más bajo en la curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

8. Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ. Sea $B(\theta)$ el área entre las rectas tangentes PR, QR y el arco. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

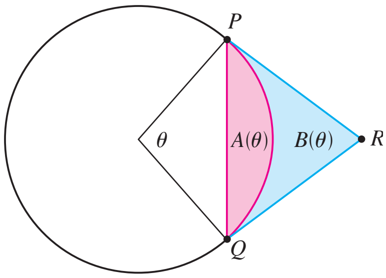


FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

9. Si a, b, c y d son constantes tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

encuentre el valor de la suma $a + b + c + d$.

10. Trace la región del plano formada por todos los puntos (x, y) tales que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

11. Determine los valores del número a para el cual la función f no tiene número crítico:

$$f(x) = (a^2 + a - 6)\cos 2x + (a - 2)x + \cos 1$$

12. ¿Para qué valores de a es verdadera la siguiente ecuación?

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^x = e$$

13. ¿Para qué valores de c tiene puntos de inflexión la curva $y = cx^3 + e^x$?

14. Trace el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $|x + y| \leqslant e^x$.

15. Si $P(a, a^2)$ es cualquier punto en la parábola $y = x^2$, excepto el origen, sea Q el punto donde la recta normal interseca a la parábola otra vez. Demuestre que el segmento de recta PQ tiene la longitud más corta posible cuando $a = 1/\sqrt{2}$.

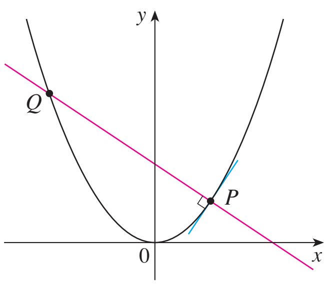


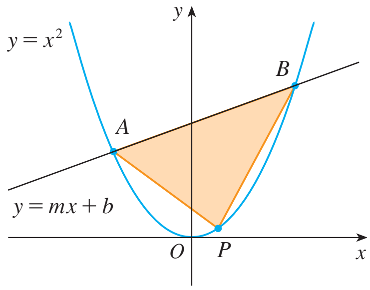
FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

16. ¿Para qué valores de c hay una recta que intersecta la curva

$$y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$$

en cuatro puntos distintos?

17. La recta $y = mx + b$ interseca la parábola $y = x^2$ en los puntos A y B. (Véase la figura.) Encuentre el punto P en el arco AOB de la parábola que maximice el área del triángulo PAB.



18. $ABCD$ es una hoja cuadrada de papel con lados de 1 m de largo. Se dibuja un cuarto de círculo de B a D con centro en A. La hoja de papel se dobla a lo largo de EF, con E en AB y F en AD, de modo que A cae en el cuarto de círculo. Determine las áreas máxima y mínima que el triángulo AEF puede tener.

19. En una carrera de automóviles a lo largo de una carretera recta, el auto A pasa al auto B dos veces. Demuestre que en algún momento durante la carrera sus aceleraciones fueron iguales.

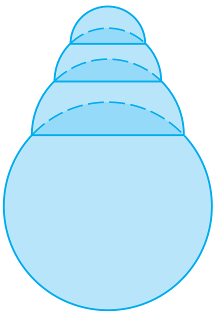


FIGURA PARA EL PROBLEMA 20

20. Una burbuja semiesférica se coloca en una burbuja esférica de radio 1. Una burbuja semiesférica más pequeña se coloca entonces sobre la primera. Este proceso se continúa hasta que se formen n cámaras, incluyendo la esfera. (La figura muestra el caso $n = 4$.) Use inducción matemática para demostrar que la altura máxima de cualquier torre de burbujas con n cámaras es $1 + \sqrt{n}$.

21. Uno de los problemas planteados por el marqués de l'Hospital en su libro de texto de cálculo *Analyse des Infiniment Petits* se refiere a una polea que está unida al techo de un cuarto en el punto C por una cuerda de longitud r. En otro punto B en el techo, a una distancia d de C (donde $d > r$), una cuerda de longitud ℓ está unida y pasa por la polea en F y conectada a un peso W. El peso se suelta y llega al reposo en su posición de equilibrio D. Como lo dijo l'Hospital, esto ocurre cuando la distancia $|ED|$ es máxima. Demuestre que cuando el sistema alcanza el reposo, el valor de x es

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

Observe que esta expresión es independiente de W y de ℓ.

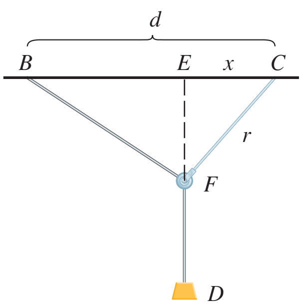
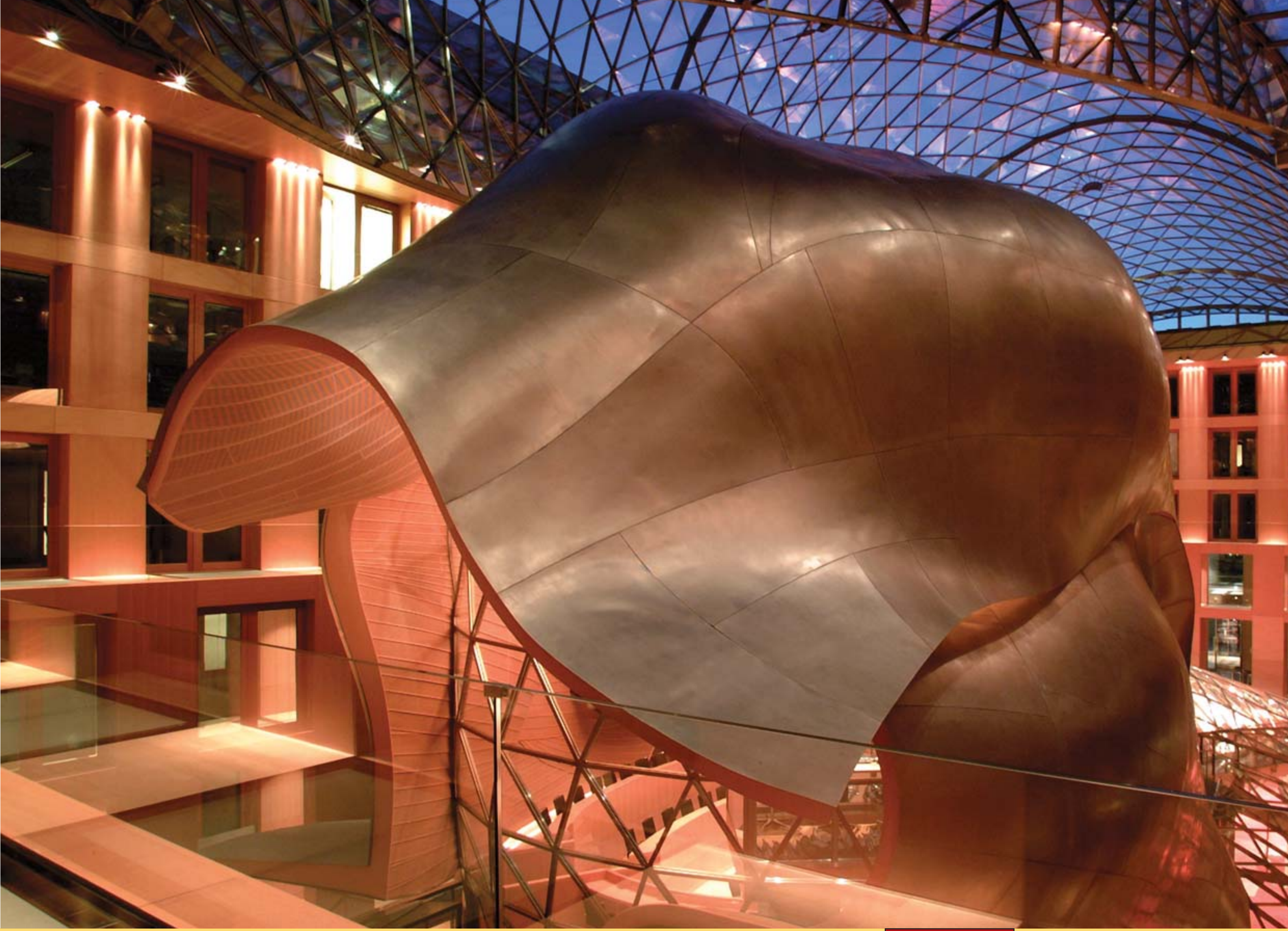


FIGURA PARA EL PROBLEMA 21

22. Dada una esfera con radio r, encuentre la altura de una pirámide de volumen mínimo cuya base es un cuadrado y cuya base y caras triangulares son todas tangentes a la esfera. ¿Qué pasa si la base de la pirámide es un polígono regular de n lados? (Un polígono regular de n lados es aquel que tiene n lados y ángulos iguales.) (Use el hecho de que el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base.)

23. Un recipiente en forma de cono invertido tiene altura de 16 cm y radio de 5 cm en la parte superior. Está parcialmente lleno de un líquido que se sale por los costados con rapidez proporcional al área del recipiente que está en contacto con el líquido. (El área superficial de un cono es πrl, donde r es el radio y l es la altura inclinada.) Si vertimos el líquido en el recipiente a razón de 2 cm^3/min, entonces la altura del líquido disminuye a razón de 0.3 cm/min cuando la altura es 10 cm. Si nuestra meta es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿con qué rapidez debemos verter el líquido en el recipiente?

24. Un cono de r centímetros de radio y altura h centímetros se baja de punta hacia abajo a razón de 1 cm/s en un cilindro alto de radio R centímetros, que está parcialmente lleno de agua. ¿Con qué rapidez está subiendo el nivel del agua en el instante en que el cono está sumergido por completo?



thomasmayerarchive.com

5 Integrales

En el Capítulo 2 empleamos problemas de la tangente y la velocidad para introducir la derivada, que es la idea central en el cálculo diferencial. En forma muy parecida, este capítulo se inicia con problemas de área y distancia y los usa para formular la idea de una integral definida, que es el concepto básico del cálculo integral. Veremos en los Capítulos 6 y 7 cómo usar la integral para resolver problemas relativos a volúmenes, longitudes de curvas, predicciones de población, rendimiento cardiaco, fuerzas en una presa, trabajo, excedentes de consumidores, y beisbol, entre otros muchos.

Hay un enlace entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El Teorema Fundamental del Cálculo relaciona la integral con la derivada, y veremos en este capítulo que simplifica en gran parte la solución de muchos problemas.

5.1 Áreas y distancias

Ahora es un buen momento para leer (o repasar) *A Preview of Calculus* (vea página X), que estudia las ideas unificadoras de cálculo y ayuda a poner en perspectiva dónde hemos estado y a dónde vamos.

En esta sección descubrimos que al tratar de hallar el área bajo una curva o la distancia recorrida por un auto, terminamos con el mismo tipo especial de límite.

El problema del área

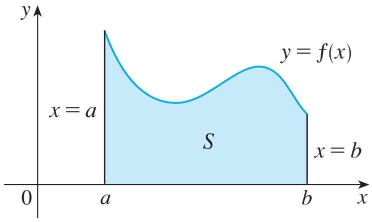


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Empezamos por tratar de resolver el *problema del área*: Hallar el área de la región S que se encuentra bajo la curva $y = f(x)$ de a a b. Esto significa que S, ilustrada en la Figura 1, está limitada por la gráfica de una función continua f [donde $f(x) \geqslant 0$], las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y el eje x.

Al tratar de resolver el problema del área tenemos que preguntarnos: ¿Cuál es el significado de la palabra *área*? Esta pregunta es fácil de contestar para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, el área está definida como el producto de la longitud y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. El área de un polígono se encuentra dividiéndolo en triángulos (como en la Figura 2) y sumando las áreas de los triángulos.

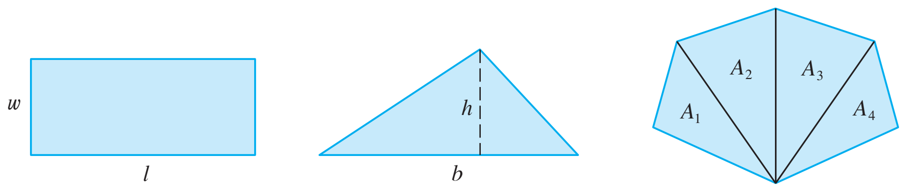


FIGURA 2 $A = lw$ $A = \frac{1}{2}bh$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Pero, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región, y parte del problema del área es hacer precisa esta idea intuitiva dándole una definición exacta de área.

Recuerde que para definir una tangente primero aproximamos la pendiente de la recta tangente por pendientes de rectas secantes y luego tomamos el límite de estas aproximaciones. Buscamos una idea similar para áreas. Primero aproximamos la región S por rectángulos y luego tomamos el límite de las áreas de estos rectángulos a medida que aumentamos el número de rectángulos. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

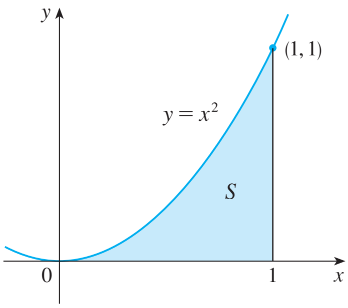


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Estimar un área Use rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$ de 0 a 1 (la región parabólica S ilustrada en la Figura 3).

SOLUCIÓN Primero nótese que el área de S debe estar entre 0 y 1 porque S está contenida en un cuadrado con longitud 1 de lado, pero podemos ciertamente mejorar esto. Suponga que dividimos S en cuatro franjas S_1, S_2, S_3 y S_4 trazando las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, y $x = \frac{3}{4}$ como en la Figura 4(a).

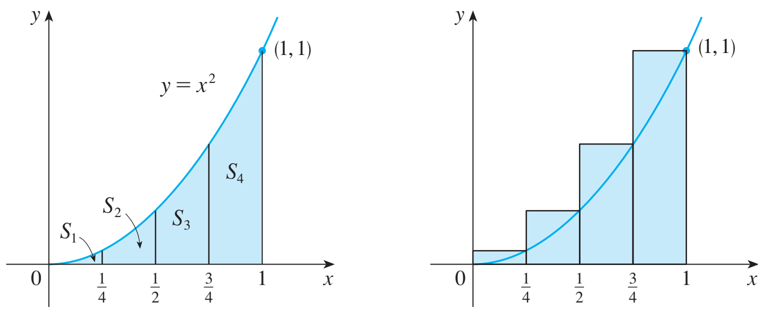


FIGURA 4 (a) (b)

Podemos aproximar cada franja por un rectángulo cuya base es la misma que la de la franja y cuya altura es igual que el borde derecho de la franja [vea Figura 4(b)]. En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos *derechos* de los subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, y $[\frac{3}{4}, 1]$.

Cada rectángulo tiene ancho $\frac{1}{4}$ y las alturas son $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$, y 1^2. Si hacemos R_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtenemos

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0.46875$$

De la Figura 4(b) vemos que el área A de S es menor que R_4, de modo que

$$A < 0.46875$$

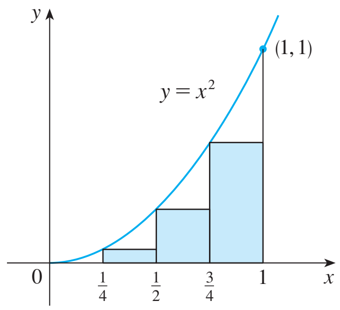


FIGURA 5

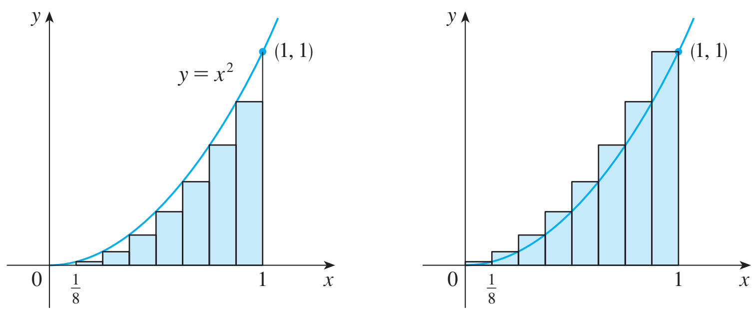
En lugar de usar los rectángulos de la Figura 4(b) podríamos usar los rectángulos más pequeños de la Figura 5, cuyas alturas son los valores de f en los puntos extremos *izquierdos* de los subintervalos. (El rectángulo de la extrema izquierda se ha colapsado porque su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{7}{32} = 0.21875$$

Vemos que el área de S es mayor que L_4, de manera que tenemos estimaciones superior e inferior para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Podemos repetir este procedimiento con un número más grande de franjas. La Figura 6 muestra lo que ocurre cuando dividimos la región S en ocho franjas de igual ancho.



(a) Usando puntos extremos izquierdos (b) Usando puntos extremos derechos

FIGURA 6
Aproximación a S con ocho rectángulos

Al calcular la suma de áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), obtenemos mejores estimaciones superior e inferior para A:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

Entonces, una posible respuesta a la pregunta es decir que la verdadera área de S se encuentra entre 0.2734375 y 0.3984375.

Podríamos obtener mejores estimaciones si se aumenta el número de franjas. La tabla de la izquierda muestra los resultados de cálculos similares (con computadora) usando n rectángulos cuyas alturas se encuentran con puntos extremos izquierdos (L_n) o puntos extremos derechos (R_n). En particular, vemos al usar 50 franjas que el área se encuentra entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas lo reducimos aún más: A se encuentra entre 0.3328335 y 0.3338335. Una buena estimación se obtiene al promediar estos números: $A \approx 0.3333335$.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

De los valores de la tabla del Ejemplo 1, se ve como si R_n aproximara a $\frac{1}{3}$ cuando n aumenta. Confirmamos esto en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 2 Para la región S del Ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación altos se aproxima a $\frac{1}{3}$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

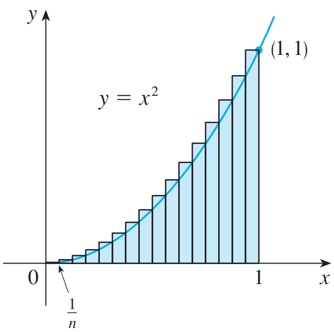


FIGURA 7

SOLUCIÓN R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos de la Figura 7. Cada rectángulo tiene ancho $1/n$ y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n$, $2/n$, $3/n$, . . . , n/n; esto es, las alturas son $(1/n)^2$, $(2/n)^2$, $(3/n)^2$, . . . , $(n/n)^2$. Entonces

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

Aquí necesitamos la fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Quizá el lector ha visto esta fórmula antes. Está demostrada en el Ejemplo 5 del Apéndice F.

Poniendo la Fórmula 1 en nuestra expresión para R_n, tenemos

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Aquí estamos calculando el límite de la sucesión $\{R_n\}$. Las sucesiones y sus límites se examinan en *A Preview of Calculus* y se estudiarán en detalle en la Sección 8.1. La idea es muy semejante a un límite en el infinito (Sección 2.5) excepto que al escribir $\lim_{n\to\infty}$ restringimos n a ser un entero positivo. En particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Cuando escribimos $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$ queremos decir que podemos hacer R_n tan cercana a $\frac{1}{3}$ como queramos si tomamos n suficientemente grande.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Se puede demostrar que las sumas de aproximación inferiores también se aproximan a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

De las Figuras 8 y 9 se ve que, a medida que n aumenta, tanto L_n como R_n se hacen cada vez mejores aproximaciones al área de S. Por tanto *definimos* el área A como el límite de la sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, es decir,

TEC En Visual 5.1 el usuario puede crear imágenes como las de las Figuras 8 y 9 para otros valores de n.

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

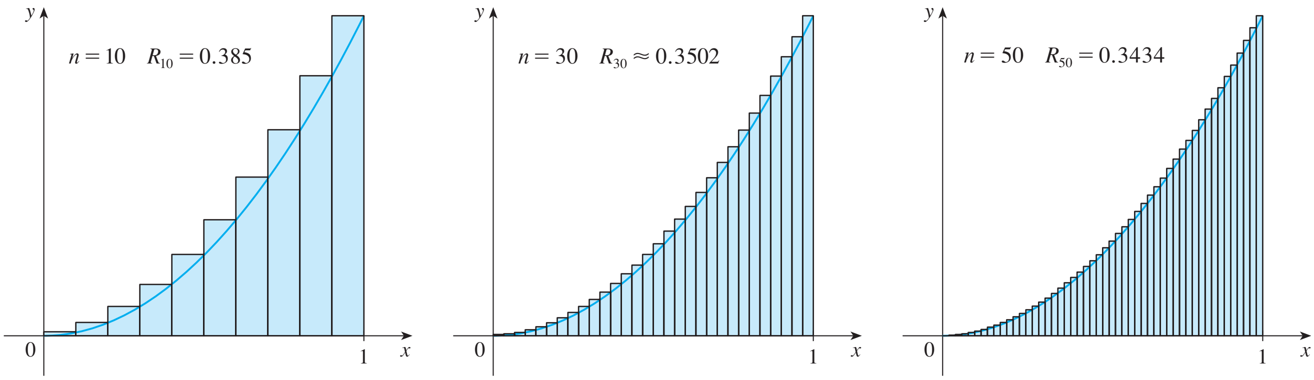


FIGURA 8

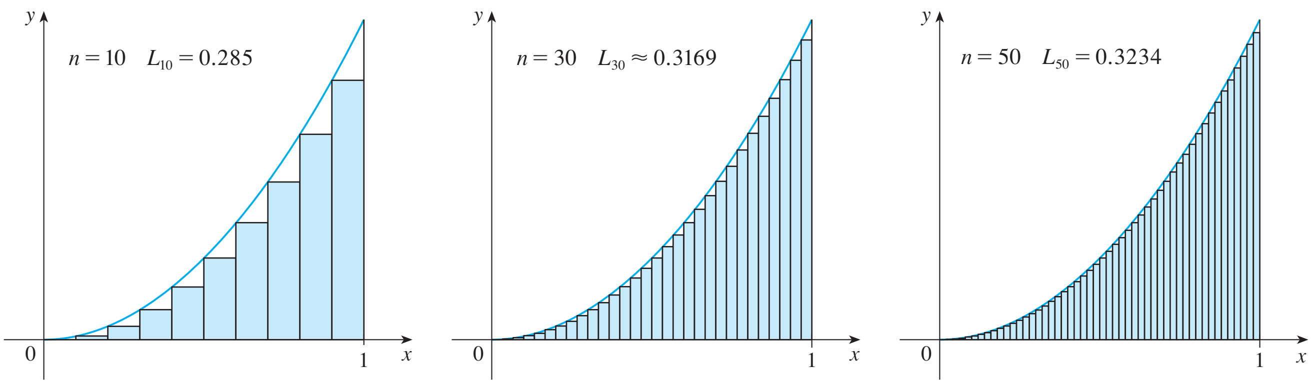


FIGURA 9 El área es el número que es menor que todas las sumas superiores y mayor que todas las sumas inferiores.

Apliquemos la idea de los Ejemplos 1 y 2 a la región S más general de la Figura 1. Empezamos por subdividir S en n franjas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual ancho como en la Figura 10.

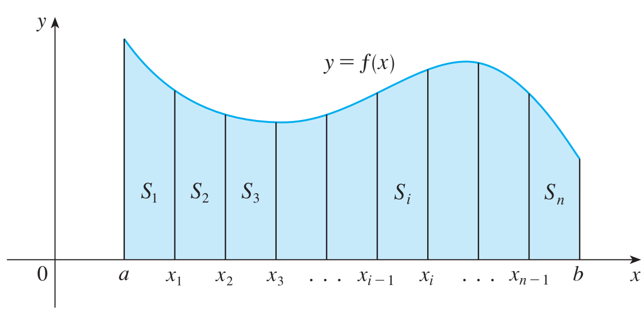


FIGURA 10

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, de modo que el ancho de cada una de las n franjas es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Estas franjas dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos extremos derechos de los subintervalos son

$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$

Aproximemos la i-ésima franja S_i por un rectángulo con ancho Δx y altura $f(x_i)$, que es el valor de f a la extrema derecha (vea Figura 11). Entonces el área del i-ésimo rectángulo es $f(x_i)\,\Delta x$. Lo que consideramos intuitivamente como el área de S se aproxima por medio de la suma de las áreas de estos rectángulos, que es

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

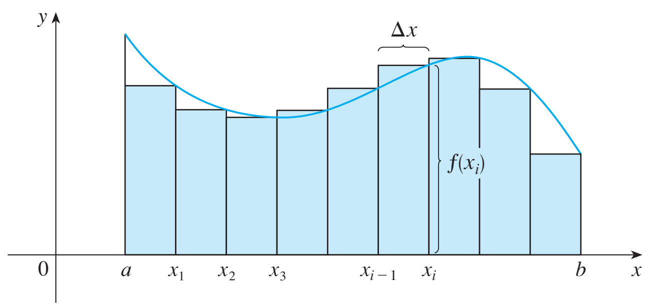
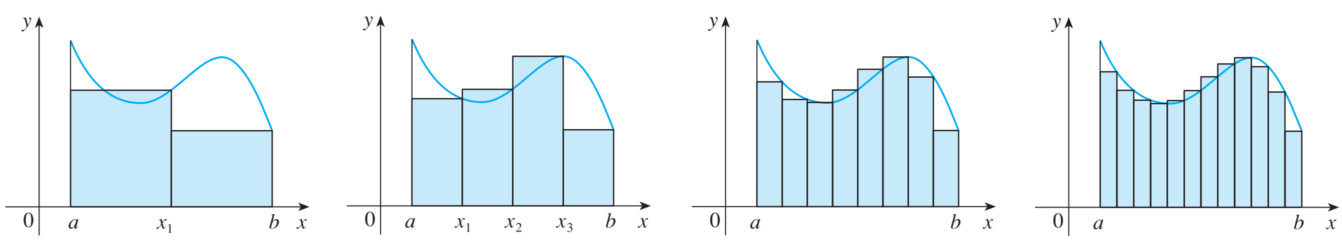


FIGURA 11

La Figura 12 muestra esta aproximación para $n = 2, 4, 8$ y 12. Nótese que esta aproximación parece ser cada vez mejor a medida que aumenta el número de franjas, es decir, cuando $n \to \infty$. Por tanto, definimos el área A de la región S en la forma siguiente.



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

FIGURA 12

2 Definición El **área** A de la región S que está bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Se puede demostrar que el límite en la Definición 2 siempre existe, puesto que estamos suponiendo que f es continua. También se puede demostrar que obtenemos el mismo valor si usamos puntos extremos izquierdos:

3 $$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De hecho, en lugar de usar puntos extremos izquierdos o puntos extremos derechos, podríamos tomar la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en *cualquier* número x_i^* del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A los números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ se les denomina **puntos muestrales.** La Figura 13 muestra rectángulos de aproximación cuando los puntos muestrales no se escogen como puntos extremos. Entonces una expresión más general para el área de S es

4 $$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

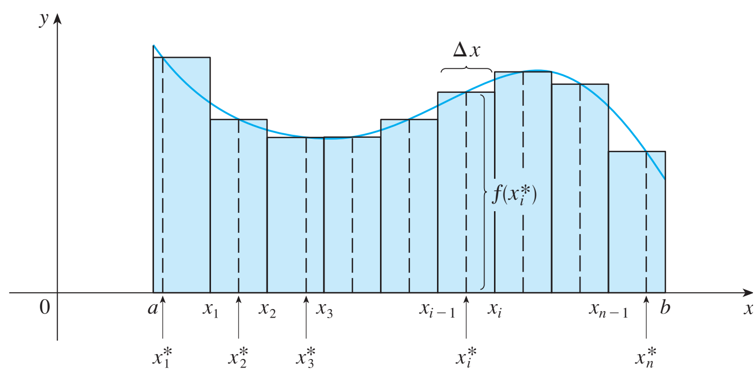


FIGURA 13

Esto nos indica terminar con $i = n$.
Esto nos indica sumar. $\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$
Esto nos indica empezar con $i = m$.

Con frecuencia usamos **notación sigma** para escribir sumas con muchos términos en forma más compacta. Por ejemplo

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Entonces las expresiones para área en las Ecuaciones 2, 3 y 4 se pueden escribir como sigue:

Si el lector necesita práctica con la notación sigma, vea los ejemplos y trate de hacer algunos de los ejercicios del Apéndice F.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

También podemos reescribir la Fórmula 1 en la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EJEMPLO 3 **Un área expresada como límite** Sea A el área de la región que se encuentra bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

(a) Usando puntos extremos derechos, encuentre una expresión para A como un límite. No evalúe el límite.

(b) Estime el área al tomar los puntos muestrales como puntos medios y usar cuatro subintervalos y luego diez subintervalos.

SOLUCIÓN

(a) Como $a = 0$ y $b = 2$, el ancho de un subintervalo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Entonces $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$, y $x_n = 2n/n$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación es

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acuerdo con la Definición 2, el área es

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Usando notación sigma podríamos escribir

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

Es difícil evaluar manualmente este límite en forma directa, pero con ayuda de un sistema computarizado de álgebra no es difícil (vea el Ejercicio 26). En la Sección 5.3 podremos hallar A con más facilidad usando un método diferente.

(b) Con $n = 4$ los subintervalos de igual ancho $\Delta x = 0.5$ son $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$. Los puntos medios de estos subintervalos son $x_1^* = 0.25$, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$, y $x_4^* = 1.75$, y la suma de las áreas de los cuatro rectángulos de aproximación (vea Figura 14) es

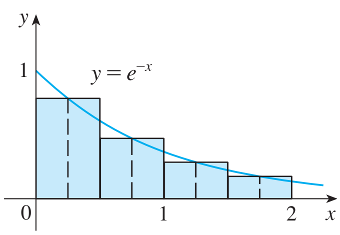


FIGURA 14

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0.25)\,\Delta x + f(0.75)\,\Delta x + f(1.25)\,\Delta x + f(1.75)\,\Delta x \\ &= e^{-0.25}(0.5) + e^{-0.75}(0.5) + e^{-1.25}(0.5) + e^{-1.75}(0.5) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}\right) \approx 0.8557 \end{aligned}$$

Entonces una estimación para el área es

$$A \approx 0.8557$$

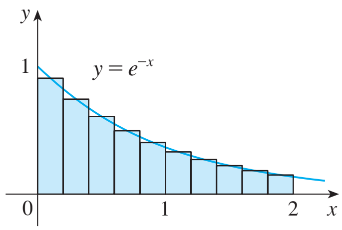


FIGURA 15

Con $n = 10$ los subintervalos son $[0, 0.2], [0.2, 0.4], \ldots, [1.8, 2]$ y los puntos medios son $x_1^* = 0.1, x_2^* = 0.3, x_3^* = 0.5, \ldots, x_{10}^* = 1.9$. Entonces

$$A \approx M_{10} = f(0.1)\,\Delta x + f(0.3)\,\Delta x + f(0.5)\,\Delta x + \cdots + f(1.9)\,\Delta x$$
$$= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \cdots + e^{-1.9}) \approx 0.8632$$

De la Figura 15 se ve que esta estimación es mejor que la estimación con $n = 4$.

El problema de la distancia

Consideremos ahora el *problema de la distancia:* Encuentre la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo si la velocidad del objeto se conoce en todo momento. (En cierto sentido, éste es el problema inverso del problema de la velocidad que estudiamos en la Sección 2.1.) Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia se resuelve fácilmente por medio de la fórmula

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

Pero si la velocidad varía, no es tan fácil hallar la distancia recorrida. Investiguemos el problema en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 4 **Estimar una distancia** Suponga que el odómetro de nuestro auto está descompuesto y deseamos estimar la distancia recorrida en un intervalo de 30 segundos. Tomamos lecturas del velocímetro a cada cinco segundos y las registramos en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades consistentes, convirtamos las lecturas de velocidad a pies por segundo (1 mi/h = 5280/3600 ft/s):

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (ft/s)	25	31	35	43	47	46	41

Durante los primeros cinco segundos la velocidad no cambia mucho, de modo que podemos estimar la distancia recorrida durante ese tiempo si suponemos que la velocidad es constante. Si consideramos que la velocidad durante ese intervalo es la velocidad inicial (25 ft/s), entonces obtenemos la distancia aproximada recorrida durante los primeros cinco segundos:

$$25 \text{ ft/s} \times 5 \text{ s} = 125 \text{ ft}$$

Análogamente, durante el segundo intervalo la velocidad es más o menos constante y la tomamos como la velocidad cuando $t = 5$ s. Entonces nuestra estimación para la distancia recorrida de $t = 5$ s a $t = 10$ s es

$$31 \text{ ft/s} \times 5 \text{ s} = 155 \text{ ft}$$

Si sumamos estimaciones similares para los otros intervalos, obtenemos una estimación para la distancia total recorrida:

$$(25 \times 5) + (31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) = 1135 \text{ ft}$$

En la misma forma podríamos haber usado la velocidad al *final* de cada periodo en lugar de la velocidad al principio como nuestra velocidad constante supuesta. Entonces nuestra estimación se convierte en

$$(31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) + (41 \times 5) = 1215 \text{ ft}$$

Si hubiéramos deseado una estimación más precisa, podríamos haber tomado lecturas de velocidad a cada dos segundos, o incluso cada segundo.

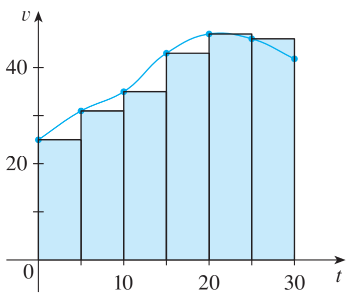


FIGURA 16

Quizá los cálculos del Ejemplo 4 recuerdan las sumas que empleamos antes para estimar áreas. La similitud se explica cuando en la Figura 16 trazamos una gráfica de la función de velocidad del auto y trazamos rectángulos cuyas alturas son las velocidades iniciales para cada intervalo. El área del primer rectángulo es $25 \times 5 = 125$, que también es nuestra estimación para la distancia recorrida en los primeros cinco segundos. De hecho, el área de cada rectángulo se puede interpretar como una distancia porque la altura representa velocidad y el ancho representa tiempo. La suma de las áreas de los rectángulos de la Figura 16 es $L_6 = 1135$, que es nuestra estimación inicial para la distancia total recorrida.

En general, suponga que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$, donde $a \leqslant t \leqslant b$ y $f(t) \geqslant 0$ (así que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva). Tomamos lecturas de velocidad en los tiempos $t_0 (= a), t_1, t_2, \ldots, t_n (= b)$ de modo que la velocidad es aproximadamente constante en cada subintervalo. Si estos tiempos están igualmente espaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = (b - a)/n$. Durante el primer intervalo la velocidad es aproximadamente $f(t_0)$ y por tanto la distancia recorrida es aproximadamente $f(t_0)\,\Delta t$. Del mismo modo, la distancia recorrida durante el segundo intervalo es alrededor de $f(t_1)\,\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Si usamos la velocidad en puntos extremos derechos en lugar de puntos extremos izquierdos, nuestra estimación para la distancia total se convierte en

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Cuanto mayor sea la frecuencia con que midamos la velocidad, más precisas serán nuestras estimaciones y parece plausible que la distancia d recorrida *exacta* es el *límite* de tales expresiones:

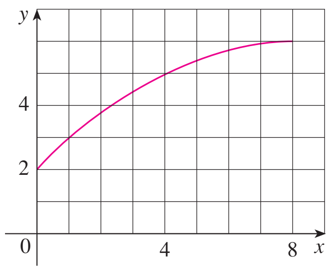
$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Veremos en la Sección 5.3 que esto es verdadero.

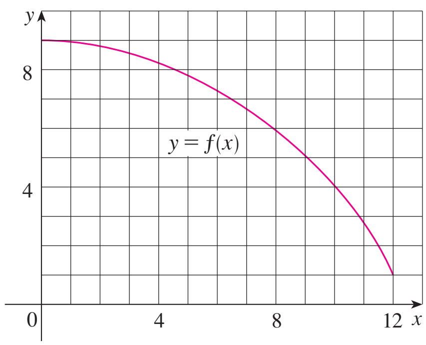
Como la Ecuación 5 tiene la misma forma que nuestras expresiones para área en las Ecuaciones 2 y 3, se deduce que la distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función de velocidad. En el Capítulo 6 veremos que otras cantidades de interés en ciencias naturales y sociales, por ejemplo el trabajo realizado por una fuerza variable o el rendimiento cardiaco del corazón, se pueden interpretar como el área bajo una curva. Entonces, cuando calculamos áreas en este capítulo, recuerde que se pueden interpretar en una amplia variedad de formas prácticas.

5.1 Ejercicios

1. (a) Leyendo valores de la gráfica dada de f, use cuatro rectángulos para hallar una estimación baja y una estimación alta para el área bajo la gráfica dada de f de $x = 0$ a $x = 8$. En cada caso trace los rectángulos que use.
(b) Encuentre nuevas estimaciones usando ocho rectángulos en cada caso.



2. (a) Use seis rectángulos para hallar estimaciones de cada tipo para el área bajo la gráfica dada de f de $x = 0$ a $x = 12$.
 (i) L_6 (puntos muestrales son puntos extremos izquierdos)
 (ii) R_6 (puntos muestrales son puntos extremos derechos)
 (iii) M_6 (puntos muestrales son puntos medios)
(b) ¿L_6 es una subestimación o una estimación excesiva de la verdadera área?
(c) ¿R_6 es una subestimación o una estimación excesiva de la verdadera área?
(d) ¿Cuál de los números L_6, R_6 o M_6 da la mejor estimación? Explique.



3. (a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \cos x$ de $x = 0$ a $x = \pi/2$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos extremos derechos. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una subestimación o una estimación excesiva?
(b) Repita el inciso (a) usando puntos extremos izquierdos.

4. (a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ de $x = 0$ a $x = 4$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos extremos derechos. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una subestimación o una estimación excesiva?
(b) Repita el inciso (a) usando puntos extremos izquierdos.

5. (a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ a $x = 2$ usando tres rectángulos y puntos extremos derechos. A continuación mejore su estimación usando seis rectángulos. Trace la curva y los rectángulos de aproximación.
(b) Repita el inciso (a) usando puntos extremos izquierdos.
(c) Repita el inciso (a) usando puntos medios.
(d) De sus diagramas en los incisos (a)–(c), ¿cuál parece ser la mejor estimación?

6. (a) Grafique la función $f(x) = x - 2 \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 5$.
(b) Estime el área bajo la gráfica de f usando cuatro rectángulos de aproximación y tomando los puntos muestrales como (i) puntos extremos derechos y (ii) puntos medios. En cada caso trace la curva y los rectángulos.
(c) Mejore sus estimaciones del inciso (b) usando ocho rectángulos.

7–8 Con una calculadora programable (o computadora), es posible evaluar las expresiones para las sumas de áreas de rectángulos de aproximación, incluso para valores grandes de n, usando iteración. (En una TI use el comando Is> o una repetición For-EndFor, en una Casio use Isz, en una HP o en BASIC use una repetición FOR-NEXT.) Calcule la suma de las áreas de rectángulos de aproximación usando subintervalos iguales y puntos extremos derechos para $n = 10$, 30, 50 y 100. A continuación calcule el valor del área exacta.

7. La región bajo $y = x^4$ de 0 a 1

8. La región bajo $y = \cos x$ de 0 a $\pi/2$

CAS **9.** Algunos sistemas computarizados de álgebra tienen comandos que trazarán rectángulos de aproximación y evaluarán las sumas de sus áreas, al menos si x_i^* es un punto extremo izquierdo o derecho. (Por ejemplo, en Maple use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum` y `rightsum`.)
(a) Si $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, encuentre las sumas izquierda y derecha para $n = 10$, 30 y 50.
(b) Ilustre al graficar los rectángulos del inciso (a).
(c) Demuestre que el área exacta bajo f está entre 0.780 y 0.791.

CAS **10.** (a) Si $f(x) = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, use los comandos citados en el Ejercicio 9 para hallar las sumas izquierda y derecha para $n = 10$, 30 y 50.
(b) Ilustre al graficar los rectángulos del inciso (a).
(c) Demuestre que el área exacta bajo f está entre 2.50 y 2.59.

11. La rapidez de una corredora aumentaba continuamente durante los primeros tres segundos de una carrera. Su rapidez a intervalos de medio segundo está dada en la tabla siguiente. Encuentre las estimaciones baja y alta para la distancia que ella recorrió durante estos tres segundos.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (ft/s)	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

12. Lecturas del velocímetro para una motocicleta a intervalos de 12 segundos se dan en la tabla siguiente.
(a) Estime la distancia recorrida por la motocicleta durante este periodo usando las velocidades al principio de los intervalos.
(b) Dé otra estimación usando las velocidades al final de los periodos.
(c) ¿Sus estimaciones de los incisos (a) y (b) son por arriba y por abajo? Explique.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (ft/s)	30	28	25	22	24	27

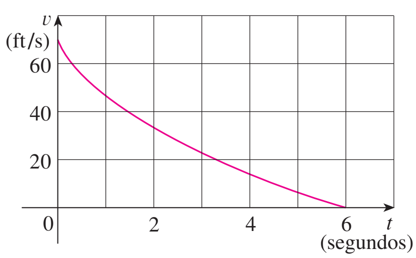
13. Se fuga aceite de un tanque a razón de $r(t)$ litros por hora. La rapidez disminuyó conforme pasaba el tiempo y los valores de la rapidez de fuga a intervalos de dos horas se muestran en la tabla siguiente. Encuentre estimaciones baja y alta para la cantidad total de aceite que se fugaba.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

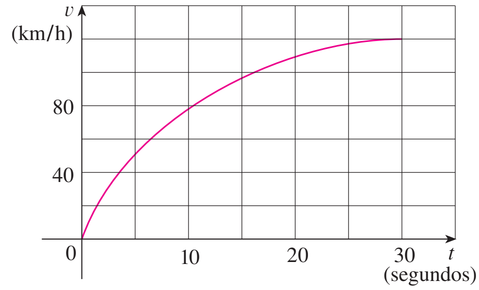
14. Cuando estimamos distancias a partir de datos de velocidad, a veces es necesario usar tiempos $t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots$ que no están igualmente espaciados. Todavía podemos estimar usando los periodos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por ejemplo, el 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuyo propósito era instalar un nuevo motor de impulsión en perigeo en un satélite de comunicaciones INTELSAT. La tabla siguiente, proporcionada por la NASA, da los datos de velocidad para el transbordador entre el despegue y la expulsión de los impulsores de combustible sólido del cohete. Use el lector estos datos para estimar la altura del *Endeavour* sobre la superficie terrestre 62 segundos después del despegue.

Evento	Tiempo (s)	Velocidad (ft/s)
Lanzamiento	0	0
Inicia maniobra de tonel	10	185
Termina maniobra de tonel	15	319
Acelerador a 89%	20	447
Acelerador a 67%	32	742
Acelerador a 104%	59	1325
Máxima presión dinámica	62	1445
Separación de impulsor de combustible sólido del cohete	125	4151

15. En la gráfica se muestra la rapidez de un auto que frena. Úsela para estimar la distancia recorrida por el auto mientras los frenos están aplicados.



16. A continuación se muestra la gráfica de velocidad de un auto que acelera desde el reposo a una rapidez de 120 km/h en un periodo de 30 segundos. Estime la distancia recorrida durante este periodo.



17–19 Use la Definición 2 para hallar una expresión para el área bajo la gráfica de f como límite. No evalúe el límite.

17. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

18. $f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 7$

19. $f(x) = x \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

20–21 Determine la región cuya área es igual al límite dado. No evalúe el límite.

20. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$

21. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n}$

22. (a) Use la Definición 2 para hallar una expresión para el área bajo la curva $y = x^3$ de 0 a 1 como límite.
(b) La siguiente fórmula para la suma de los cubos de los primeros n enteros aparece en el Apéndice F. Úsela para evaluar el límite del inciso (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

23. Sea A el área bajo la gráfica de una función f continua creciente de a a b, y sean L_n y R_n las aproximaciones a A con n subintervalos usando puntos extremos izquierdo y derecho, respectivamente.
(a) ¿Cómo están relacionadas A, L_n y R_n?
(b) Demuestre que

$$R_n - L_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

(c) Deduzca que

$$R_n - A < \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

24. Si A es el área bajo la curva $y = e^x$ de 1 a 3, use el Ejercicio 23 para hallar un valor de n tal que $R_n - A < 0.0001$.

CAS **25.** (a) Exprese el área bajo la curva $y = x^5$ de 0 a 2 como un límite.
(b) Use un sistema computarizado de álgebra para hallar la suma en su expresión del inciso (a).
(c) Evalúe el límite en el inciso (a).

CAS **26.** Encuentre el área exacta de la región bajo la gráfica de $y = e^{-x}$, de 0 a 2, usando un sistema computarizado de álgebra para evaluar la suma y luego el límite del Ejemplo 3(a). Compare su respuesta con la estimación obtenida en el Ejemplo 3(b).

CAS **27.** Encuentre el área exacta bajo la curva de coseno $y = \cos x$ de $x = 0$ a $x = b$, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use un sistema computarizado de álgebra para evaluar la suma y calcular el límite.) En particular, ¿cuál es el área de $b = \pi/2$?

28. (a) Sea A_n el área de un polígono con n lados iguales inscrito en un círculo de radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $2\pi/n$, demuestre que

$$A_n = \tfrac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugerencia:* Use la Ecuación 3.3.2 de la página 191.]

5.2 La integral definida

Vimos en la Sección 5.1 que un límite de la forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

aparece cuando calculamos un área. También vimos que este límite aparece cuando tratamos de hallar la distancia recorrida por un objeto. Resulta que este mismo tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones aun cuando f no sea necesariamente una función positiva. En el Capítulo 6 veremos que los límites de la forma (1) también aparecen al buscar longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, fuerza debida a presión del agua, y trabajo, así como otras cantidades. Por tanto, damos a este tipo de límite un nombre y notación especiales.

Una definición precisa de este tipo de límite se da en el Apéndice D.

$\boxed{2}$ **Definición de una integral definida** Si f es una función definida para $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $x_0\ (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n (= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ cualesquier **puntos muestrales** en estos subintervalos, y x_i^* está en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f de a a b** es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que este límite exista. Si no existe, decimos que f es **integrable** en $[a, b]$.

Nota 1: El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y recibe el nombre de **signo de integral**. Es una S alargada y se escogió porque una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ se llama **integrando** y a y b son los **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b el **límite superior**. Por ahora, el símbolo dx no tiene significado en sí: $\int_a^b f(x)\,dx$ es todo un símbolo. La dx simplemente indica que la variable independiente es x. El procedimiento de calcular una integral se denomina **integración**.

Nota 2: La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número; no depende de x. De hecho, podríamos usar cualquier letra en lugar de x sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

Nota 3: La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que tenemos en la Definición 2 se denomina **suma de Riemann** en honor al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). Así, la Definición 2 dice que la integral definida de una función integrable se puede aproximar a cualquier grado deseado de precisión por una suma de Riemann.

Riemann

Bernhard Riemann recibió su doctorado (Ph.D) bajo la dirección del legendario Gauss en la Universidad de Göttingen y se quedó ahí para enseñar. Gauss, que no tenía el hábito de elogiar a otros matemáticos, habló de la "mente creativa, activa, verdaderamente matemática y originalidad gloriosamente fértil" de Riemann. La definición (2) de una integral que usamos se debe a Riemann. Él también hizo importantes aportaciones a la teoría de funciones de una variable compleja, física matemática, teoría de números y fundamentos de geometría. El amplio concepto del espacio y geometría de Riemann resultaron ser el escenario correcto, 50 años después, para la teoría general de relatividad de Einstein. Riemann fue enfermizo toda su vida y murió de tuberculosis a la edad de 39 años.

Sabemos que si f es positiva, entonces la suma de Riemann se puede interpretar como una suma de áreas de rectángulos de aproximación (vea la Figura 1). Al comparar la Definición 2 con la definición de área en la Sección 5.1, vemos que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b. (Vea la Figura 2.)

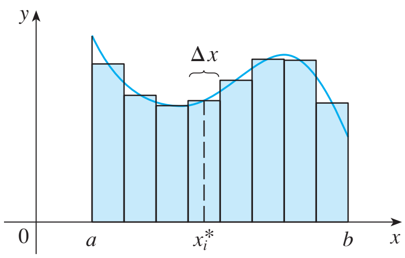


FIGURA 1
Si $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann $\Sigma\, f(x_i^*)\,\Delta x$ es la suma de áreas de rectángulos.

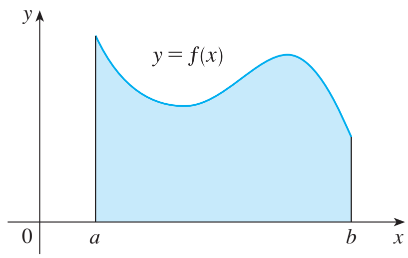


FIGURA 2
Si $f(x) \geqslant 0$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b.

Si f toma valores positivos y negativos, como en la Figura 3, entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que están arriba del eje x, y los *negativos* de las áreas de los rectángulos abajo del eje x (las áreas de los rectángulos azules *menos* las áreas de los rectángulos color oro). Cuando tomamos el límite de estas sumas de Riemann, obtenemos la situación ilustrada en la Figura 4. Una integral definida se puede interpretar como un **área neta**, es decir, una diferencia de áreas:

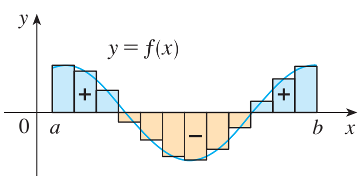


FIGURA 3
$\Sigma\, f(x_i^*)\,\Delta x$ es una aproximación al área neta.

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f, y A_2 es el área de la región abajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

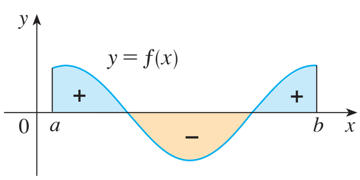


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área neta.

Nota 4: Aun cuando hemos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ al dividir $[a, b]$ en subintervalos de igual ancho, hay situaciones en las que es ventajoso trabajar con subintervalos de ancho desigual. Por ejemplo, en el Ejercicio 14 de la Sección 5.1 la NASA dio datos de velocidad en tiempos que no estaban igualmente espaciados, pero aún así podremos estimar la distancia recorrida. Y hay métodos para integración numérica que aprovechan los subintervalos desiguales.

Si los anchos de subintervalos son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, tenemos que asegurar que todos estos anchos se aproximan a 0 en el proceso limitador. Esto ocurre si el ancho más grande, $\max \Delta x_i$, se aproxima a 0. Entonces en este caso la definición de una integral definida se convierte en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

Nota 5: Hemos definido la integral definida para una función integrable, pero no todas las funciones son integrables (vea Ejercicios 55-56). El siguiente teorema muestra que las funciones que se presentan con más frecuencia son en verdad integrables. Esto se demuestra en cursos más avanzados.

3 Teorema Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene sólo un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable en $[a, b]$; esto es, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Si f es integrable en $[a, b]$, entonces el límite de la Definición 2 existe y da el mismo valor sin importar cómo se escojan los puntos muestrales x_i^*. Para simplificar el cálculo de la integral con frecuencia tomamos los puntos muestrales como puntos extremos derechos. Entonces $x_i^* = x_i$ y la definición de una integral se simplifica como sigue:

4 Teorema Si f s integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde $\quad \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \quad$ y $\quad x_i = a + i\,\Delta x$

EJEMPLO 1 **Escribir un límite de sumas de Riemann como una integral** Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como una integral en el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN Comparando el límite dado con el límite del Teorema 4, vemos que serán idénticos si escogemos $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. Nos indican que $a = 0$ y $b = \pi$. Por tanto, por el Teorema 4, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$

Más adelante, cuando apliquemos la integral definida a situaciones físicas, será importante reconocer límites de sumas como integrales, como hicimos en el Ejemplo 1. Cuando Leibniz escogió la notación para una integral, seleccionó los ingredientes como recordatorios del proceso de límite. En general, cuando escribimos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

sustituimos $\lim \Sigma$ por $\int$, x_i^* por x, y Δx por dx.

Evaluación de integrales

Cuando usamos un límite para evaluar una integral definida, es necesario saber cómo trabajar con sumas. Las siguientes tres ecuaciones dan fórmulas para sumas de potencias de enteros positivos. La Ecuación 5 puede serle conocida al lector por sus cursos de álgebra. Las Ecuaciones 6 y 7 se estudiaron en la Sección 5.1 y se demuestran en el Apéndice F.

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Las fórmulas restantes son reglas sencillas para trabajar con notación sigma:

Las fórmulas 8 a la 11 se demuestran al escribir cada lado en forma expandida. El lado izquierdo de la Ecuación 9 es

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

El lado derecho es

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Éstas son iguales por la propiedad distributiva. Las otras fórmulas se presentan en el Apéndice F.

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

11 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

EJEMPLO 2 **Evaluación de una integral como límite de sumas de Riemann**

(a) Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestrales como puntos extremos derechos y $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$.

(b) Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 6$ el ancho de intervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

y los puntos extremos derechos son $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$ y $x_6 = 3.0$. Entonces la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x + f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$

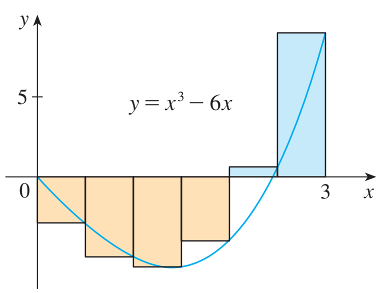


FIGURA 5

Nótese que f no es una función positiva y por tanto la suma de Riemann no representa una suma de áreas de rectángulos, pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos azules (arriba del eje x) menos la suma de las áreas de rectángulos de color oro (abajo del eje x) en la Figura 5.

(b) Con n subintervalos tenemos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

De esta forma, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ y, en general, $x_i = 3i/n$. Como estamos usando puntos extremos derechos, podemos usar el Teorema 4:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

En la suma, n es una constante (a diferencia de i), de modo que podemos pasar $3/n$ al frente del signo Σ.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(Ecuación 9 con } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(Ecuaciones 11 y 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right\} \qquad \text{(Ecuaciones 7 y 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$

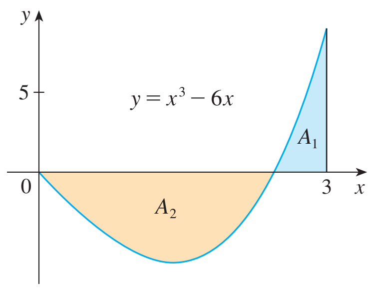


FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Esta integral no se puede interpretar como un área porque f toma valores tanto positivos como negativos. Pero se puede interpretar como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 y A_2 se muestran en la Figura 6.

La Figura 7 ilustra el cálculo al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha para $n = 40$. Los valores de la tabla muestran las sumas de Riemann que aproximan el valor exacto de la integral, -6.75, cuando $n \to \infty$.

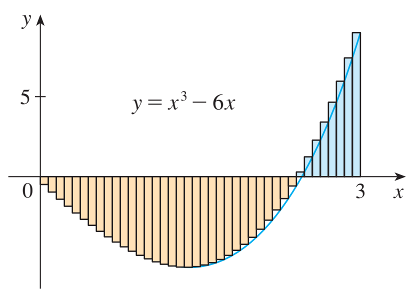


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	-6.3998
100	-6.6130
500	-6.7229
1000	-6.7365
5000	-6.7473

Un método mucho más sencillo para evaluar la integral del Ejemplo 2 se dará en la Sección 5.3 después que hayamos demostrado el Teorema de Evaluación.

Como $f(x) = e^x$ es positiva, la integral del Ejemplo 3 representa el área mostrada en la Figura 8.

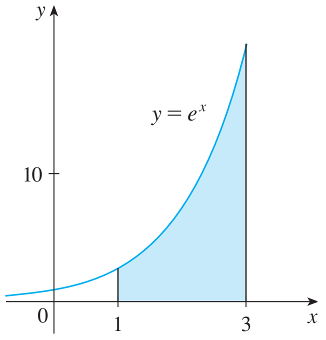


FIGURA 8

EJEMPLO 3

(a) Establezca una expresión para $\int_1^3 e^x\,dx$ como límite de sumas.

(b) Use un sistema computarizado de álgebra para evaluar la expresión.

SOLUCIÓN

(a) Aquí tenemos $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$, y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

Entonces $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$, y

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

Del Teorema 4 tenemos

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}\end{aligned}$$

Un sistema computarizado de álgebra es capaz de hallar una expresión explícita para esta suma porque es una serie geométrica. El límite podría hallarse usando la Regla de l'Hospital.

(b) Si le pedimos a un sistema computarizado de álgebra que evalúe la suma y simplifique, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Ahora le pedimos al sistema computarizado de álgebra que evalúe el límite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

Aprenderemos un método mucho más fácil para la evaluación de integrales en la sección siguiente.

V EJEMPLO 4 Uso de geometría para evaluar integrales Evalúe las siguientes integrales al interpretar cada una en términos de áreas.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (b) $\int_0^3 (x-1)\,dx$

SOLUCIÓN

(a) Como $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, podemos interpretar esta integral como el área bajo la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ de 0 a 1. Pero, como $y^2 = 1 - x^2$, obtenemos $x^2 + y^2 = 1$, que muestra que la gráfica de f es el cuarto de circunferencia con radio 1 de la Figura 9. Por tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

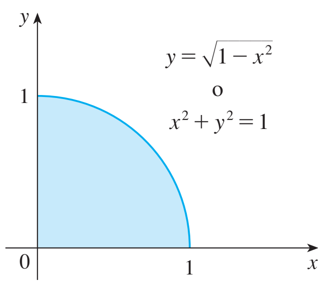


FIGURA 9

(En la Sección 5.7 podremos *demostrar* que el área de un círculo de radio r es πr^2.)

(b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se muestra en la Figura 10. Calculamos la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x - 1)\, dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1.5$$

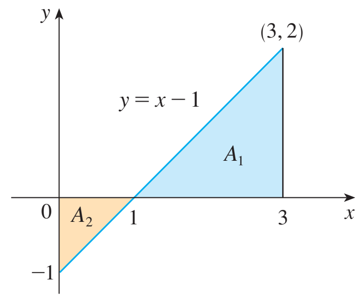


FIGURA 10

La Regla del punto medio

Con frecuencia escogemos el punto muestral x_i^* como el punto extremo derecho del i-ésimo subintervalo porque es conveniente para calcular el límite. Pero si el propósito es hallar una *aproximación* a una integral, suele ser mejor escoger x_i^* como el punto medio del intervalo, que denotamos por $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usamos puntos medios obtenemos la siguiente aproximación.

TEC El Module 5.2/5.9 muestra cómo las estimaciones de la Regla del punto medio mejoran cuando n aumenta.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x = \Delta x \left[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n) \right]$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

y $\qquad \bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$

V EJEMPLO 5 Estimar una integral con la Regla del punto medio

Use la Regla del punto medio con $n = 5$ para aproximar $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$.

SOLUCIÓN Los puntos extremos de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0, y los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. El ancho de los subintervalos es $\Delta x = (2 - 1)/5 = \frac{1}{5}$, y la Regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \approx \Delta x \left[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9) \right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9} \right)$$

$$\approx 0.691908$$

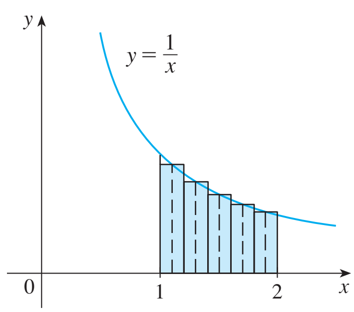


FIGURA 11

Como $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, la integral representa un área, y la aproximación dada por la Regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos mostrados en la Figura 11.

Por ahora no sabemos qué tan precisa es la aproximación del Ejemplo 5, pero en la Sección 5.9 aprenderemos un método para estimar el error involucrado en el uso de la Regla del punto medio. En esa sección explicaremos otros métodos para aproximar integrales definidas.

Si aplicamos la Regla del punto medio a la integral del Ejemplo 2, obtenemos la imagen de la Figura 12. La aproximación $M_{40} \approx -6.7563$ es mucho más cercana al valor verdadero de -6.75 que la aproximación del punto extremo derecho, $R_{40} \approx -6.3998$, que se ve en la Figura 7.

TEC En Visual 5.2 el usuario puede comparar aproximaciones izquierda, derecha y de punto medio a la integral del Ejemplo 2 para diferentes valores de n.

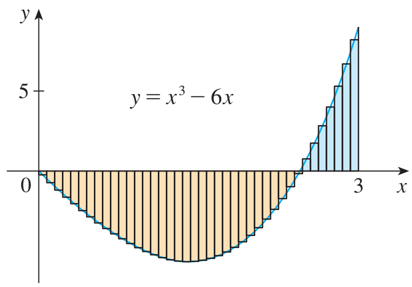


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6.7563$

Propiedades de la integral definida

Cuando definimos la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, implícitamente supusimos que $a < b$. Pero la definición como un límite de sumas de Riemann tiene sentido incluso si $a > b$. Nótese que si invertimos a y b, entonces Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. Por tanto

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Si $a = b$, entonces $\Delta x = 0$ y

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

A continuación desarrollamos algunas propiedades básicas de integrales que nos ayudarán a evaluar integrales de una manera más sencilla. Suponemos que f y g son funciones continuas.

Propiedades de la integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, donde c es cualquier constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

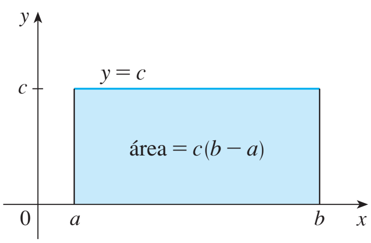


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$

La propiedad 1 dice que la integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, esto debe esperarse porque $c(b - a)$ es el área del rectángulo sombreado de la Figura 13.

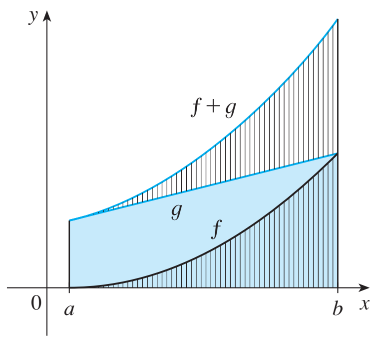


FIGURA 14

$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

La Propiedad 2 dice que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para funciones positivas dice que el área bajo $f + g$ es el área bajo f más el área bajo g. La Figura 14 nos ayuda a entender por qué esto es cierto: En vista de cómo funciona la adición gráfica, los correspondientes segmentos de recta verticales tienen igual altura.

En general, la Propiedad 2 se sigue del Teorema 4 y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + g(x_i)]\, \Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i)\, \Delta x + \sum_{i=1}^n t(x_i)\, \Delta x \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\, \Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n t(x_i)\, \Delta x \\
&= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx
\end{aligned}$$

La Propiedad 3 parece intuitivamente razonable porque sabemos que multiplicar una función por un número positivo c estira o contrae su gráfica verticalmente en un factor de c. Por tanto, estira o contrae cada rectángulo de aproximación en un factor c y por tanto tiene el efecto de multiplicar el área por c.

La Propiedad 3 se puede demostrar en forma semejante y dice que la integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero *sólo* una constante) se puede pasar al frente de un signo de integral. La Propiedad 4 se demuestra al escribir $f - g = f + (-g)$ y usar las Propiedades 2 y 3 con $c = -1$.

EJEMPLO 6 Use las propiedades de integrales para evaluar $\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx$.

SOLUCIÓN Usando las Propiedades 2 y 3 de integrales, tenemos

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx = \int_0^1 4\, dx + \int_0^1 3x^2\, dx = \int_0^1 4\, dx + 3\int_0^1 x^2\, dx$$

Sabemos de la Propiedad 1 que

$$\int_0^1 4\, dx = 4(1 - 0) = 4$$

y encontramos en el Ejemplo 2 de la Sección 5.1 que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx &= \int_0^1 4\, dx + 3\int_0^1 x^2\, dx \\
&= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5
\end{aligned}$$

La siguiente propiedad nos dice cómo combinar integrales de la misma función en intervalos adyacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

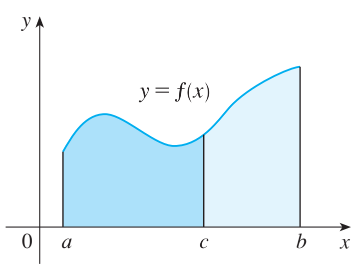


FIGURA 15

Esto no es fácil de demostrar en general, pero para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $a < c < b$ la Propiedad 5 se puede ver desde la interpretación geométrica en la Figura 15: El área bajo $y = f(x)$ de a a c más el área de c a b es igual al área total de a a b.

V EJEMPLO 7 Si se sabe que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ y $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)\,dx$.

SOLUCIÓN Por la Propiedad 5, tenemos

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

y entonces
$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

Las Propiedades 1–5 son verdaderas siempre que $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Las siguientes propiedades, en las que comparamos tamaños de funciones y tamaños de integrales, son verdaderas sólo si $a \leqslant b$.

Propiedades de Comparación de la Integral

6. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

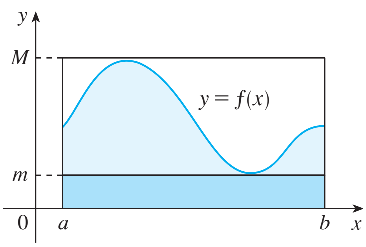


FIGURA 16

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la gráfica de f, de modo que la interpretación geométrica de la Propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas. (También se deduce directamente de la definición porque todas las cantidades involucradas son positivas.) La Propiedad 7 dice que una función más grande tiene una integral más grande. Se deduce de las Propiedades 6 y 4 porque $f - g \geqslant 0$.

La Propiedad 8 está ilustrada por la Figura 16 para el caso donde $f(x) \geqslant 0$. Si f es continua podríamos tomar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f en el intervalo $[a, b]$. En este caso la Propiedad 8 dice que el área bajo la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

PRUEBA DE LA PROPIEDAD 8 Como $m \leqslant f(x) \leqslant M$, la Propiedad 7 da

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Usando la Propiedad 1 para evaluar las integrales en los lados izquierdo y derecho, obtenemos

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

La Propiedad 8 es útil cuando todo lo que deseamos es una estimación aproximada del tamaño de una integral sin llegar a la molestia de usar la Regla del Punto Medio.

EJEMPLO 8 Use la Propiedad 8 para estimar $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Como $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente en $[0, 1]$, su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$. Entonces, por

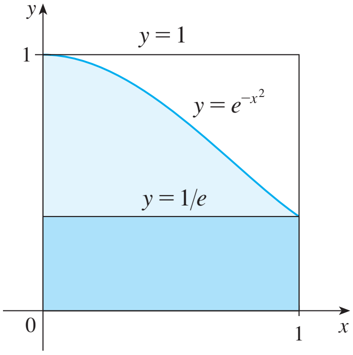


FIGURA 17

la Propiedad 8,

$$e^{-1}(1 - 0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1 - 0)$$

o bien,

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0.3679$, podemos escribir

$$0.367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

El resultado del Ejemplo 8 está ilustrado en la Figura 17. La integral es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del cuadrado.

5.2 Ejercicios

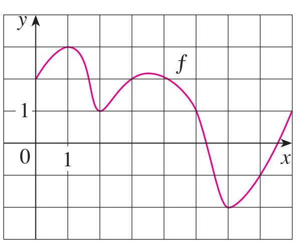
1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \leqslant x \leqslant 14$, con seis subintervalos, tomando los puntos muestrales como puntos extremos izquierdos. Explique, con ayuda de un diagrama, lo que representa la suma de Riemann.

2. Si $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, evalúe la suma de Riemann con $n = 6$, tomando los puntos muestrales como puntos extremos derechos. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

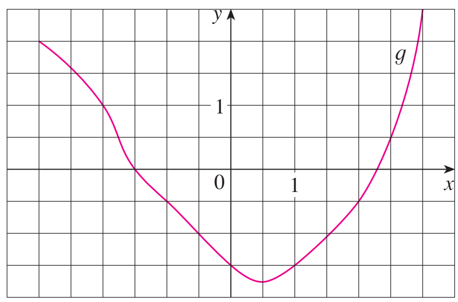
3. Si $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, encuentre la suma de Riemann con $n = 4$ correcta a seis lugares decimales, tomando los puntos muestrales como puntos medios. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

4. (a) Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, con seis términos, tomando los puntos muestrales como puntos extremos derechos. (Dé su respuesta correcta a seis lugares decimales.) Con ayuda de un diagrama, explique lo que la suma de Riemann representa.
(b) Repita el inciso (a) con puntos medios como puntos muestrales.

5. Vea la gráfica de una función f. Estime $\int_0^8 f(x)\,dx$ usando cuatro subintervalos con (a) puntos extremos derechos, (b) puntos extremos izquierdos, y (c) puntos medios.



6. A continuación se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-3}^3 g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando (a) puntos extremos derechos, (b) puntos extremos izquierdos y (c) puntos medios.



7. Se ilustra una tabla de valores de una función f creciente. Use la tabla para hallar estimaciones baja y alta para $\int_{10}^{30} f(x)\,dx$.

x	10	14	18	22	26	30
$f(x)$	-12	-6	-2	1	3	8

8. La tabla siguiente da los valores de una función obtenidos de un experimento. Úselos para estimar $\int_3^9 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con (a) puntos extremos derechos, (b) puntos extremos izquierdos y (c) puntos medios. Si se sabe que la función es creciente, ¿puede el estudiante decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-3.4	-2.1	-0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

9–12 Use la Regla del Punto Medio con el valor dado de n para aproximar la integral. Redondee la respuesta a cuatro lugares decimales.

9. $\int_2^{10} \sqrt{x^3 + 1}\, dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx, \quad n = 4$

11. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx, \quad n = 5$

12. $\int_1^5 x^2 e^{-x}\, dx, \quad n = 4$

CAS **13.** Si el estudiante cuenta con un sistema computarizado de álgebra que evalúe aproximaciones de punto medio y grafique los rectángulos correspondientes (usa comandos `middlesum` y `middlebox` en Maple), compruebe la respuesta al Ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. A continuación repita con $n = 10$ y $n = 20$.

14. Con una calculadora programable o computadora (vea las instrucciones para el Ejercicio 7 de la Sección 5.1), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ en el intervalo $[0, 1]$ con $n = 100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$0.306 < \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx < 0.315$$

Deduzca que la aproximación usando la Regla del Punto Medio con $n = 5$ en el Ejercicio 11 es precisa a dos lugares decimales.

15. Use una calculadora o computadora para hacer una tabla de valores de sumas de Riemann R_n derechas para la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿A qué valor parecen aproximarse estos números?

16. Use una calculadora o computadora para hacer una tabla de valores de sumas de Riemann izquierdas y derechas L_n y R_n para la integral $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿Entre cuáles dos números debe estar el valor de la integral? ¿Puede el lector hacer un enunciado similar para la integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$? Explique.

17–20 Exprese el límite como una integral definida en el intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\, \Delta x, \quad [2, 6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\cos x_i}{x_i}\, \Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\, \Delta x, \quad [1, 8]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5]\, \Delta x, \quad [0, 2]$

21–25 Use la forma de la definición de la integral dada en el Teorema 4 para evaluar la integral.

21. $\int_{-1}^5 (1 + 3x)\, dx$

22. $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\, dx$

23. $\int_0^2 (2 - x^2)\, dx$

24. $\int_0^5 (1 + 2x^3)\, dx$

25. $\int_1^2 x^3\, dx$

26. (a) Encuentre una aproximación a la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$ usando una suma de Riemann con puntos extremos derechos y $n = 8$.
(b) Trace un diagrama como el de la Figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso (a).
(c) Use el Teorema 4 para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.
(d) Interprete la integral del inciso (c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la Figura 4.

27–28 Exprese la integral como un límite de sumas de Riemann. No evalúe el límite.

27. $\int_2^6 \dfrac{x}{1 + x^5}\, dx$

28. $\int_1^{10} (x - 4 \ln x)\, dx$

CAS **29–30** Exprese la integral como un límite de sumas. A continuación evalúe, usando un sistema computarizado de álgebra para hallar la suma y el límite.

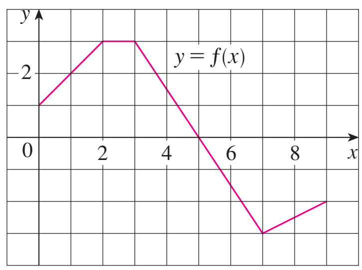
29. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 5x\, dx$

30. $\int_2^{10} x^6\, dx$

31. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral al interpretarla en términos de áreas.

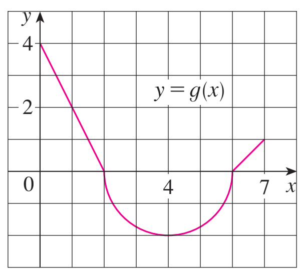
(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\, dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\, dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\, dx$



32. La gráfica de g consta de dos rectas y una semicircunferencia. Úsela para evaluar cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\, dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\, dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\, dx$



33–38 Evalúe la integral al interpretarla en términos de áreas.

33. $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx$

34. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$

35. $\int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

36. $\int_{-1}^{3} (3 - 2x)\, dx$

37. $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

38. $\int_0^{10} |x - 5|\, dx$

39. Evalúe $\int_\pi^\pi \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

40. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\, dx = 5\sqrt{5} - 8$, ¿qué es $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\, du$?

41. Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\, dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx + \int_2^5 f(x)\, dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$$

42. Si $\int_1^5 f(x)\, dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)\, dx = 3.6$, encuentre $\int_1^4 f(x)\, dx$.

43. Si $\int_0^9 f(x)\, dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\, dx = 16$, encuentre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\, dx$.

44. Encuentre $\int_0^5 f(x)\, dx$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

45. Use el resultado del Ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 e^{x+2}\, dx$.

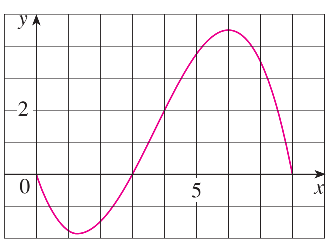
46. Use las propiedades de integrales y el resultado del Ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 (2e^x - 1)\, dx$.

47. Para la función f cuya gráfica se muestra, ordene las siguientes cantidades en orden creciente, de menor a mayor y explique su razonamiento.

(A) $\int_0^8 f(x)\, dx$ (B) $\int_0^3 f(x)\, dx$

(C) $\int_3^8 f(x)\, dx$ (D) $\int_4^8 f(x)\, dx$

(E) $f'(1)$

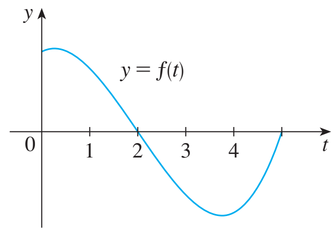


48. Si $F(x) = \int_2^x f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se ilustra, ¿cuál de los siguientes valores es más grande?

(A) $F(0)$ (B) $F(1)$

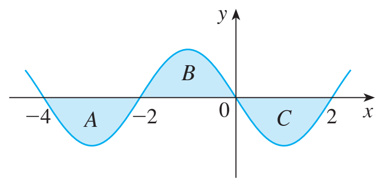
(C) $F(2)$ (D) $F(3)$

(E) $F(4)$



49. Cada una de las regiones A, B y C limitadas por la gráfica de f y el eje x tiene área 3. Encuentre el valor de

$$\int_{-4}^{2} [f(x) + 2x + 5]\, dx$$



50. Suponga que f tiene valor mínimo absoluto m y valor máximo absoluto M. ¿Entre qué dos valores debe estar $\int_0^2 f(x)\, dx$? ¿Cuál propiedad de integrales permite hacer conclusiones?

51. Use las propiedades de integrales para verificar que

$$2 \leqslant \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$$

52. Use la Propiedad 8 para estimar el valor de la integral

$$\int_0^2 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

53–54 Exprese el límite como una integral definida.

53. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia:* Considere $f(x) = x^4$.]

54. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^2}$

55. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$.

56. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1/x$ si $0 < x \leqslant 1$. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$. [*Sugerencia:* Demuestre que el primer término de la suma de Riemann, $f(x_i^*)\, \Delta x$, se puede hacer arbitrariamente grande.]

5.3 Evaluación de integrales definidas

En la Sección 5.2 calculamos integrales usando la definición como un límite de sumas de Riemann y vimos que este procedimiento es a veces más largo y difícil. Sir Isaac Newton descubrió un método mucho más sencillo para evaluar integrales y, unos pocos años después, Leibniz hizo el mismo descubrimiento. Se dieron cuenta que podían calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ si conocieran una antiderivada F de f. Su descubrimiento, llamado Teorema de Evaluación, es parte del Teorema Fundamental de Cálculo, que se estudia en la sección siguiente.

Teorema de Evaluación Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$.

Este teorema expresa que si conocemos una antiderivada F de f, entonces podemos evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ simplemente restando los valores de F en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$. Es sorprendente que $\int_a^b f(x)\,dx$, que fue definida por un complicado procedimiento que contenía todos los valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, pueda hallarse si se conocen los valores de $F(x)$ en sólo dos puntos, a y b.

Por ejemplo, sabemos de la Sección 4.8 que una antiderivada de la función $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, de modo que el Teorema de Evaluación nos dice que

$$\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - \tfrac{1}{3} \cdot 0^3 = \tfrac{1}{3}$$

Comparando este método con el cálculo del Ejemplo 2 en la Sección 5.1, donde encontramos el área bajo la parábola $y = x^2$ de 0 a 1 al calcular un límite de sumas, vemos que el Teorema de Evaluación nos da un método sencillo pero poderoso.

Aun cuando el Teorema de Evaluación puede ser sorprendente a primera vista, es plausible si lo interpretamos en términos físicos. Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto y $s(t)$ es su posición en el tiempo t, entonces $v(t) = s'(t)$, y s es una antiderivada de v. En la Sección 5.1 consideramos un objeto que siempre se mueve en la dirección positiva e hicimos el cálculo de que el área bajo la curva de velocidad es igual a la distancia recorrida. En símbolos:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Eso es exactamente lo que dice el Teorema de Evaluación en este contexto.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE EVALUACIÓN Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ y con longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Sea F cualquier antiderivada de f. Al restar y sumar términos semejantes, podemos expresar la diferencia total de los valores F como la suma de las diferencias sobre los intervalos:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \end{aligned}$$

El Teorema del Valor Medio se explicó en la Sección 4.3.

Ahora F es continua (porque es derivable) y entonces podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a F en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces existe un número x_i^* entre x_{i-1} y x_i tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)\,\Delta x$$

Por tanto,
$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Ahora tomamos el límite de cada lado de esta ecuación cuando $n \to \infty$. El lado izquierdo es una constante y el lado derecho es una suma de Riemann para la función f, por lo cual

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Cuando apliquemos el Teorema de Evaluación usamos la notación

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

y podemos escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{donde} \qquad F' = f$$

Otras notaciones comunes son $F(x)\big|_a^b$ y $[F(x)]_a^b$.

EJEMPLO 1 **Uso del Teorema de Evaluación** Evalúe $\int_1^3 e^x\,dx$.

Al aplicar el Teorema de Evaluación usamos una antiderivada particular F de f. No es necesario usar la antiderivada más general $(e^x + C)$.

SOLUCIÓN Una antiderivada de $f(x) = e^x$ es $F(x) = e^x$, y usamos el Teorema de Evaluación como sigue:

$$\int_1^3 e^x\,dx = e^x\Big]_1^3 = e^3 - e$$

Si se compara el cálculo del Ejemplo 1 con el del Ejemplo 3 de la Sección 5.2, se ve que el Teorema de Evaluación da un método *mucho* más corto.

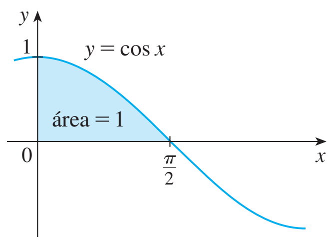


FIGURA 1

EJEMPLO 2 Encuentre el área bajo la curva coseno de 0 a b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Como una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$, tenemos

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, tomando $b = \pi/2$, hemos demostrado que el área bajo la curva coseno de 0 a $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. (Vea Figura 1.)

Cuando el matemático francés Gilles de Roberval halló primero el área bajo las curvas seno y coseno en 1635, éste era un problema sumamente difícil que requería un gran ingenio. Si no hubiéramos tenido el beneficio del Teorema de Evaluación, tendríamos la dificultad de calcular un límite difícil de sumas usando identidades trigonométricas oscuras (o un sistema computarizado de álgebra como en el Ejercicio 27 de la Sección 5.1). Fue incluso más difícil para Roberval porque el aparato de límites no había sido inventado en 1635. Pero en las décadas de 1660 y 1670, cuando el Teorema de Evaluación fue descubierto por Newton y Leibniz, estos problemas se hicieron muy fáciles, como se puede ver del Ejemplo 2.

Integrales indefinidas

Necesitamos una notación conveniente para antiderivadas que las haga fáciles de trabajar. Como la relación dada por el Teorema de Evaluación entre antiderivadas e integrales, la notación $\int f(x)\,dx$ se usa tradicionalmente para una antiderivada de f y recibe el nombre de **integral indefinida**. Entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)$$

Se debe distinguir cuidadosamente entre integrales definidas e indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número,* en tanto que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o familia de funciones). La relación entre ellas está dada por el Teorema de Evaluación: si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

Recuerde de la Sección 4.8 que si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f en I es $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria. Por ejemplo, la fórmula

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

es válida (en cualquier intervalo que no contenga 0) porque $(d/dx)\ln|x| = 1/x$. Entonces una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ puede representar ya sea una antiderivada particular de f o toda una *familia* de antiderivadas (una por cada valor de la constante C).

La efectividad del Teorema de Evaluación depende de tener una fuente de antiderivadas de funciones. Por lo tanto, expresamos de nuevo la Tabla de Fórmulas de Antiderivación de la Sección 4.8, junto con otras más, en la notación de integrales indefinidas. Cualquier fórmula se puede verificar al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

1 Tabla de integrales indefinidas

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

Adoptamos la convención de que cuando se da una fórmula para una integral indefinida general, es válida sólo en un intervalo.

EJEMPLO 3 Encuentre la integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUCIÓN Usando nuestra convención y la Tabla 1 y propiedades de integrales, tenemos

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$$

$$= 10\,\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C$$

$$= 2x^5 - 2\tan x + C$$

El estudiante debe comprobar su respuesta al derivarla.

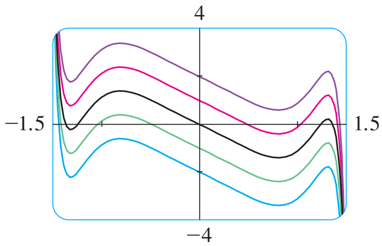


FIGURA 2

La integral indefinida del Ejemplo 3 está graficada en la Figura 2 para diversos valores de C. Aquí el valor de C es la intercepción con el eje y.

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Usando el Teorema de Evaluación y la Tabla 1, tenemos

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\Big]_0^3$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$

$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75$$

Compare este cálculo con el Ejemplo 2(b) de la Sección 5.2.

V EJEMPLO 5 Una integral interpretada como un área neta

Encuentre $\displaystyle\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$ e interprete el resultado en términos de áreas.

SOLUCIÓN El teorema de evaluación da

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx = 2\,\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0$$

$$= -4 + 3\tan^{-1}2$$

Éste es el valor exacto de la integral. Si se desea una aproximación decimal, podemos usar una calculadora para aproximar $\tan^{-1} 2$. Al hacerlo, obtenemos

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx \approx -0.67855$$

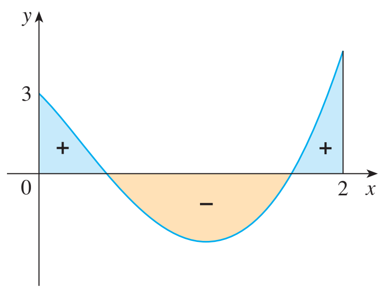


FIGURA 3

La Figura 3 muestra la gráfica del integrando. Sabemos de la Sección 5.2 que el valor de la integral se puede interpretar como un área neta: la suma de las áreas marcadas con un signo más menos el área marcada con un signo menos.

EJEMPLO 6 **Simplificar antes de integrar** Evalúe $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUCIÓN Primero necesitamos escribir el integrando en una forma más sencilla al realizar la división:

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt &= \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt \\ &= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9 \\ &= \left[2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right) \\ &= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}\end{aligned}$$

Aplicaciones

El Teorema de Evaluación dice que si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F' = f$, y la ecuación se puede reescribir como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa la rapidez de cambio de $y = F(x)$ con respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio en y cuando x cambia de a a b. [Nótese que y podría, por ejemplo, aumentar, luego disminuir, luego aumentar de nuevo. Aun cuando y podría cambiar en ambas direcciones, $F(b) - F(a)$ representa el cambio *neto* en y.] Por tanto, podemos reformular el Teorema de Evaluación en palabras como sigue.

Teorema de Cambio Neto La integral de una rapidez de cambio es el cambio neto:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este principio se puede aplicar a todas las razones de cambio en ciencias naturales y sociales que estudiamos en la Sección 3.8. Aquí tenemos unos pocos ejemplos de esta idea:

- Si $V(t)$ es el volumen de agua en un depósito en el tiempo t, entonces su derivada $V'(t)$ es la rapidez a la que el agua entra al depósito en el tiempo t. Por tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

  es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2.

- Si $[C](t)$ es la concentración del producto de una reacción química entre el tiempo t, entonces la rapidez de cambio es la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$. Entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

  es el cambio en la concentración de C del tiempo t_1 al tiempo t_2.

- Si la masa de una varilla medida del extremo izquierdo a un punto x es $m(x)$, entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Por tanto,

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

es la masa del segmento de la varilla que está entre $x = a$ y $x = b$.

- Si la rapidez de crecimiento de una población es dn/dt, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

es el cambio neto en población durante el periodo de t_1 a t_2. (La población aumenta cuando hay nacimientos y disminuye cuando hay muertes. El cambio neto toma en cuenta nacimientos y muertes.)

- Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de una mercancía, entonces el costo marginal es la derivada $C'(x)$. Por tanto,

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

es el aumento en costo cuando la producción se aumenta de x_1 unidades a x_2 unidades.

- Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$, y

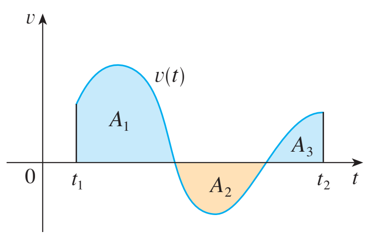
2 $$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

es el cambio neto de posición, o *desplazamiento*, de la partícula durante el periodo de t_1 a t_2. En la Sección 5.1 calculamos que esto es verdadero para el caso donde el objeto se mueve en la dirección positiva, pero ahora hemos demostrado que siempre es verdadero.

- Si deseamos calcular la distancia que el objeto recorre durante el intervalo, tenemos que considerar los intervalos cuando $v(t) \geqslant 0$ (la partícula se mueve a la derecha) y también los intervalos cuando $v(t) \leqslant 0$ (la partícula se mueve a la izquierda). En ambos casos la distancia se calcula al integrar $|v(t)|$, la rapidez. Por tanto,

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = \text{distancia total recorrida}$$

La Figura 4 muestra cómo se pueden interpretar el desplazamiento y la distancia recorrida en términos de áreas bajo una curva de velocidad.



desplazamiento $= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$

distancia $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$

FIGURA 4

- La aceleración del objeto es $a(t) = v'(t)$, y

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

es el cambio en velocidad del tiempo t_1 al tiempo t_2.

V **EJEMPLO 7** **Desplazamiento contra distancia** Una partícula se mueve a lo largo de una recta de manera que su velocidad en el tiempo t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).

(a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el periodo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Encuentre la distancia recorrida durante este periodo.

SOLUCIÓN

(a) Por la Ecuación 2, el desplazamiento es

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Esto significa que la posición de la partícula en el tiempo $t = 4$ es 4.5 m a la izquierda de su posición al inicio del periodo.

(b) Nótese que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$ y entonces $v(t) \leqslant 0$ en el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ en $[3, 4]$. Así, de la Ecuación 3, la distancia recorrida es

Para integrar el valor absoluto de $v(t)$, usamos la Propiedad 5 de integrales de la Sección 5.2 para dividir la integral en dos partes, una donde $v(t) \leqslant 0$ y una donde $v(t) \geqslant 0$.

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}$$

EJEMPLO 8 **Calcular energía por integración de la potencia** La Figura 5 muestra el consumo de energía eléctrica en la ciudad de San Francisco para un día en septiembre (P se mide en megawatts; t se mide en horas iniciando a medianoche). Estime la energía eléctrica consumida en ese día.

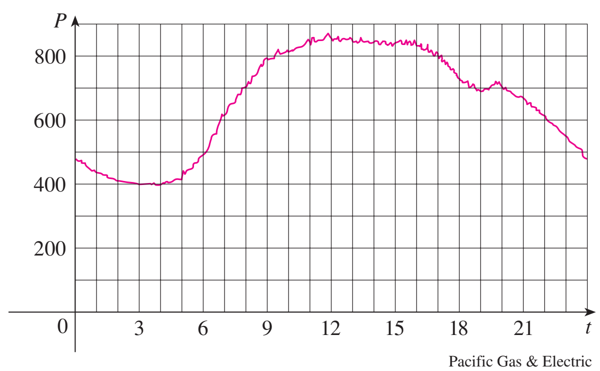


FIGURA 5

SOLUCIÓN La potencia es la rapidez de cambio de energía: $P(t) = E'(t)$. Entonces, por el Teorema de Cambio Neto,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía consumida ese día. Aproximamos el valor de la integral usando la Regla del Punto Medio con 12 subintervalos y $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t\\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850\\ &\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)\\ &= 15{,}840\end{aligned}$$

La energía eléctrica consumida fue aproximadamente 15,840 megawatts-hora.

Una nota sobre unidades

¿Cómo sabíamos qué unidades usar para energía eléctrica en el Ejemplo 8? La integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ está definida como el límite de sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Ahora $P(t_i^*)$ se mide en megawatts y Δt se mide en horas, por tanto su producto se mide en megawatt-hora. Lo mismo es cierto del límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.3 Ejercicios

1–30 Evalúe la integral.

1. $\int_{-2}^{3} (x^2 - 3)\,dx$
2. $\int_1^2 x^{-2}\,dx$
3. $\int_0^2 \left(x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right) dx$
4. $\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$
5. $\int_0^1 x^{4/5}\,dx$
6. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$
7. $\int_{-1}^{0} (2x - e^x)\,dx$
8. $\int_{-5}^{5} e\,dx$
9. $\int_1^2 (1 + 2y)^2\,dy$
10. $\int_0^2 (y - 1)(2y + 1)\,dy$
11. $\int_1^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$
12. $\int_{-1}^{1} t(1 - t)^2\,dt$
13. $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$
14. $\int_0^{\pi/4} \sec\theta\tan\theta\,d\theta$
15. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$
16. $\int_1^{18} \sqrt{\frac{3}{z}}\,dz$
17. $\int_1^9 \frac{1}{2x}\,dx$
18. $\int_0^5 (2e^x + 4\cos x)\,dx$
19. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt$
20. $\int_0^1 10^x\,dx$
21. $\int_{-1}^{1} e^{u+1}\,du$
22. $\int_0^1 \frac{4}{t^2 + 1}\,dt$
23. $\int_1^2 \frac{v^3 + 3v^6}{v^4}\,dv$
24. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$
25. $\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$
26. $\int_1^2 \frac{(x - 1)^3}{x^2}\,dx$
27. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\,dt$
28. $\int_0^2 |2x - 1|\,dx$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

29. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x - 2|x|)\,dx$

30. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$

31–32 ¿Qué está mal en la ecuación?

31. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\bigg]_{-1}^{3} = -\frac{4}{3}$

32. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi} = 0$

33–34 Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que está bajo la curva dada. A continuación encuentre el área exacta.

33. $y = \operatorname{sen} x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

34. $y = \sec^2 x,\ \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

35. Use una gráfica para estimar las intercepciones con el eje x de la curva $y = 1 - 2x - 5x^4$. A continuación use esta información para estimar el área de la región que está bajo la curva y arriba del eje x.

36. Repita el Ejercicio 35 para la curva $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$.

37–38 Evalúe la integral e interprételа como una diferencia de áreas. Ilustre con un dibujo.

37. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\,dx$

38. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{2\pi} \cos x\,dx$

39–40 Verifique por derivación que la fórmula sea correcta.

39. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

40. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C$

41–42 Encuentre la integral indefinida general. Ilustre al graficar varios miembros de la familia en la misma pantalla.

41. $\displaystyle\int \left(\cos x + \tfrac{1}{2}x\right) dx$

42. $\displaystyle\int (e^x - 2x^2)\,dx$

43–48 Encuentre la integral indefinida general.

43. $\displaystyle\int (1 - t)(2 + t^2)\,dt$

44. $\displaystyle\int v(v^2 + 2)^2\,dv$

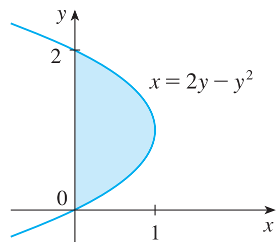
45. $\displaystyle\int (1 + \tan^2\alpha)\,d\alpha$

46. $\displaystyle\int \sec t\,(\sec t + \tan t)\,dt$

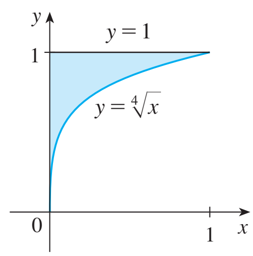
47. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

49. El área de la región que está a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (la región sombreada en la figura) está dada por la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Gire el lector su vista en sentido de las manecillas del reloj y considere la región como que se encuentra debajo de la curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ a $y = 2$.) Encuentre el área de la región.



50. Las fronteras de la región sombreada son el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encuentre el área de esta región al escribir x como una función de y e integrando con respecto a y (como en el Ejercicio 49).



51. Si $w'(t)$ es la rapidez de crecimiento de un niño en libras por año, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t)\,dt$?

52. La corriente en un alambre está definida como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Vea el Ejemplo 3 en la Sección 3.8.) ¿Qué representa $\int_a^b I(t)\,dt$?

53. Si se fuga aceite de un tanque a razón de $r(t)$ galones por minuto en el tiempo t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\,dt$?

54. Una población de una colmena empieza con 100 abejas y aumenta a razón de $n'(t)$ abejas por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

55. En la Sección 4.6 definimos la función de ingreso marginal $R'(x)$ como la derivada de la función de ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Qué representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

56. Si $f(x)$ es la pendiente de la vereda a una distancia de x millas del inicio de la vereda, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\,dx$?

57. Si x se mide en metros y $f(x)$ se mide en newtons, ¿cuáles son las unidades para $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

58. Si las unidades para x son pies y las unidades para $a(x)$ son libras por pie, ¿cuáles son las unidades para da/dx? ¿Qué unidades tiene $\int_2^8 a(x)\,dx$?

59–60 La función de velocidad (en metros por segundo) está dada por una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre (a) el desplazamiento y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo dado.

59. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

60. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

61–62 La función de aceleración (en m/s^2) y la velocidad inicial están dadas para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre (a) la velocidad en el tiempo t y (b) la distancia recorrida durante el intervalo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

63. La densidad lineal de una varilla de 4 m de longitud está dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa total de la varilla.

64. Sale agua del fondo de un tanque a razón de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encuentre la cantidad de agua que sale del tanque durante los primeros 10 minutos.

65. La rapidez de un auto fue indicada por un velocímetro a intervalos de 10 segundos y registrada en la tabla. Use la Regla del Punto Medio para estimar la distancia recorrida por el auto.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

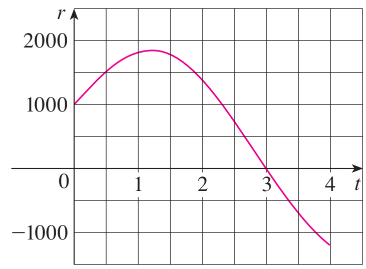
66. Suponga que un volcán está haciendo erupción y que las lecturas de la rapidez $r(t)$ a la que materias sólidas son lanzadas a la atmósfera se dan en la tabla siguiente. El tiempo t se mide en segundos y las unidades para $r(t)$ son toneladas (métricas) por segundo.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

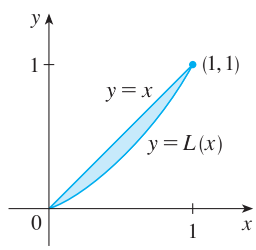
(a) Dé estimaciones altas y bajas para la cantidad total $Q(6)$ de materias lanzadas después de 6 segundos.
(b) Use la Regla del Punto Medio para estimar $Q(6)$.

67. El costo marginal de manufacturar x yardas de cierta tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (en dólares por yarda). Encuentre el aumento en costo si el nivel de producción se eleva de 2000 yardas a 4000 yardas.

68. Entra y sale agua de un tanque de almacenamiento. Se muestra una gráfica de esta rapidez de cambio $r(t)$ del volumen de agua en el tanque, en litros por día. Si la cantidad de agua del tanque en el tiempo $t = 0$ es 25,000 L, use la Regla del Punto Medio para estimar la cantidad de agua cuatro días después.



69. Los economistas usan una distribución acumulativa llamada *curva de Lorenz* para describir la distribución de ingreso entre familias en un país determinado. Típicamente, una curva de Lorenz está definida en [0, 1] con puntos extremos (0, 0) y (1, 1), y es continua, creciente y cóncava hacia arriba. Las puntas de esta curva se determinan al clasificar todas las familias por ingreso y luego calcular el porcentaje de familias cuyo ingreso es menor o igual a un porcentaje determinado del ingreso total del país. Por ejemplo, el punto $(a/100, b/100)$ está en la curva de Lorenz si la parte más baja de a% de las familias recibe menos o igual a b% del ingreso total. La *igualdad absoluta* de distribución de ingreso ocurriría si la parte más baja de a% de la familia recibe a% del ingreso, en cuyo caso la curva de Lorenz sería la recta $y = x$. El área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ mide cuánto de la distribución de ingreso difiere de la igualdad absoluta. El *coeficiente de desigualdad* es la razón entre el área, entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$, y el área bajo $y = x$.



(a) Demuestre que el coeficiente de desigualdad es el doble del área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$, es decir, demuestre que

$$\text{coeficiente de desigualdad} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) La distribución de ingreso para cierto país está representada por la curva de Lorenz definida por la ecuación

$$L(x) = \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{7}{12}x$$

¿Cuál es el porcentaje de ingreso total recibido por el 50% más bajo de las familias? Encuentre el coeficiente de desigualdad.

70. El 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuyo propósito era instalar un nuevo motor de impulsión en perigeo en un satélite de comunicaciones INTELSAT. La tabla siguiente da los datos de velocidad para el transbordador entre el despegue y la expulsión de los impulsores de combustible sólido del cohete.

(a) Use una calculadora de gráficas o computadora para modelar estos datos por un polinomio de tercer grado.

(b) Use el modelo del inciso (a) para estimar la altura alcanzada por el *Endeavour*, 125 segundos después del despegue.

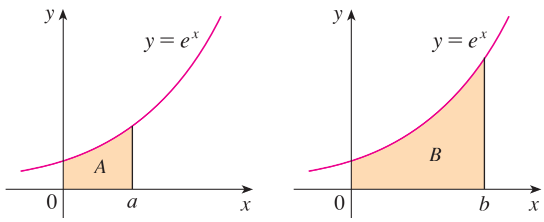
Evento	Tiempo (s)	Rapidez (ft/s)
Lanzamiento	0	0
Inicia maniobra de tonel	10	185
Termina maniobra de tonel	15	319
Acelerador al 89%	20	447
Acelerador al 67%	32	742
Acelerador al 104%	59	1325
Máxima presión dinámica	62	1445
Separación de impulsores de combustible sólido del cohete	125	4151

71. (a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.
(b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx \leqslant 1.25$.

72. (a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(b) Deduzca que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\, dx \geqslant \frac{1}{2}$.

73. Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$, y h'' es continua en todas partes. Evalúe $\int_1^2 h''(u)\, du$.

74. El área marcada B es tres veces el área marcada A. Exprese b en términos de a.



75–76 Evalúe el límite al reconocer primero la suma como una suma de Riemann para una función definida en [0, 1].

75. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

76. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Funciones de área

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y use geometría para hallar el área bajo esta recta, arriba del eje t, y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.
(b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que está bajo la recta $y = 2t + 1$ entre $t = 1$ y $t = x$. Trace esta región y use geometría para hallar una expresión para $A(x)$.
(c) Derive la función de área $A(x)$. ¿Qué se observa?

2. (a) Si $0 \leqslant x \leqslant \pi$, sea $A(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t\, dt$. $A(x)$ representa el área de la región. Trace esa región.
(b) Use el Teorema de Evaluación para hallar una expresión para $A(x)$.
(c) Encuentre $A'(x)$. ¿Qué se observa?
(d) Si x es un número entre 0 y π, y h es un número positivo pequeño, entonces $A(x + h) - A(x)$ representa el área de la región. Describa y trace la región.
(e) Trace un rectángulo que aproxime la región en el inciso (d). Al comparar las áreas de estas dos regiones, demuestre que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx \operatorname{sen} x$$

(f) Use el inciso (e) para dar una explicación intuitiva para el resultado del inciso (c).

3. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ en el rectángulo de observación [0, 2] por [−1.25, 1.25].
(b) Si definimos una nueva función g por

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

entonces $g(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 a x [hasta que $f(x)$ se haga negativa, en cuyo punto $g(x)$ se convierte en diferencia de áreas]. Use el inciso (a) para determinar el valor de x en el que $g(x)$ empieza a disminuir. [A diferencia de la integral del Problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]

(c) Use el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6, \ldots, g(1.8)$, $g(2)$. A continuación use estos valores para trazar una gráfica de g.

(d) Use su gráfica de g del inciso (c) para trazar la gráfica de g' usando la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de la recta tangente. ¿Cómo se compara la gráfica de g' con la gráfica de f?

4. Suponga que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y definimos una nueva función g por medio de la ecuación

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Con base en sus resultados de los Problemas 1–3, haga conjeturas sobre una expresión para $g'(x)$.

5.4 El Teorema fundamental del cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo recibe ese apropiado nombre porque establece una conexión entre las dos ramas de cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El cálculo diferencial apareció a partir del problema de la tangente, en tanto que el cálculo integral surgió de uno aparentemente sin relación, el problema del área. El maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que estos dos problemas estaban en realidad relacionados en forma muy estrecha y vio que derivación e integración eran procesos inversos. El Teorema Fundamental del Cálculo da la precisa relación inversa entre la derivada y la integral. Fueron Newton y Leibniz quienes explotaron esta relación y la usaron para perfeccionar sistemáticamente el cálculo con un método matemático.

La primera parte del Teorema Fundamental se refiere a funciones definidas por una ecuación de la forma

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

donde f es una función continua en $[a, b]$ y x varía entre a y b. Observe que g depende sólo de x, que aparece como el límite superior variable en la integral. Si x es un número fijo, entonces la integral $\int_a^x f(t)\, dt$ es un número definido. Si entonces hacemos que x varíe, el número $\int_a^x f(t)\, dt$ también varía y define una función de x denotada por $g(x)$.

Si f es una función positiva, entonces $g(x)$ se puede interpretar como el área bajo la gráfica de f de a a x, donde x puede variar de a a b. (Considere a g como la función "área hasta aquí"; vea Figura 1.)

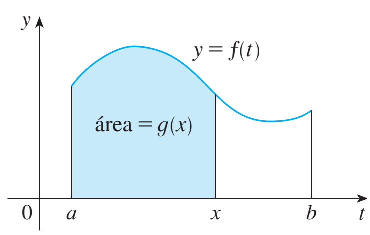


FIGURA 1

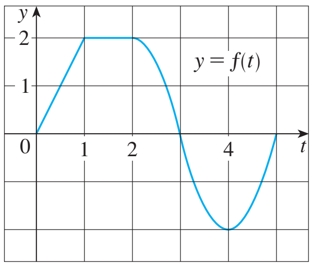


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 Una función definida como integral Si f es la función cuya gráfica se muestra en la Figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. A continuación trace una gráfica aproximada de g.

SOLUCIÓN Primero observamos que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. De la Figura 3 vemos que $g(1)$ es el área de un triángulo:

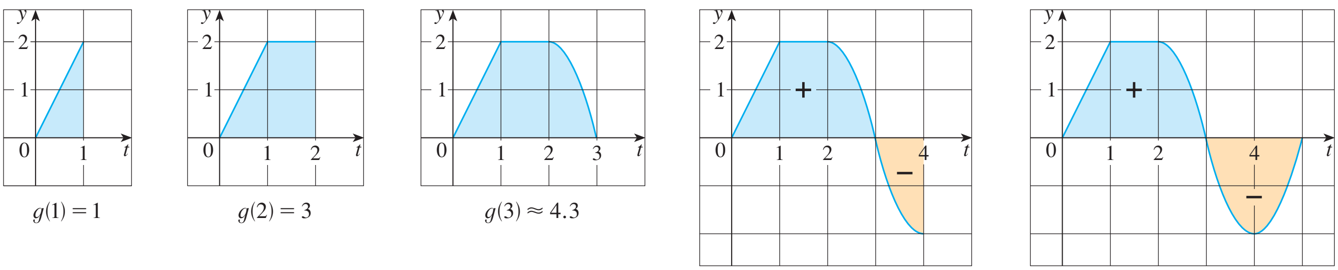
$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ de nuevo vemos la Figura 3 y sumamos a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estimamos que el área bajo f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, y

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$



$g(1) = 1$ $g(2) = 3$ $g(3) \approx 4.3$ $g(4) \approx 3$ $g(5) \approx 1.7$

FIGURA 3

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y por tanto empezamos a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

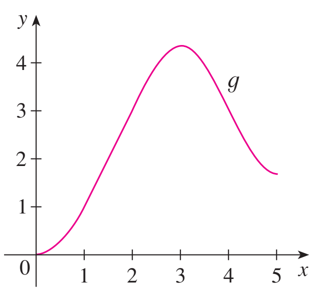


FIGURA 4
$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Usamos estos valores para trazar la gráfica de g en la Figura 4. Nótese que, como $f(t)$ es positiva para $t < 3$, seguimos sumando área para $t < 3$ y por tanto g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, disminuye porque $f(t)$ es negativa.

EJEMPLO 2 Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, donde $a = 1$ y $f(t) = t^2$, encuentre una fórmula para $g(x)$ y calcule $g'(x)$.

SOLUCIÓN En este caso podemos calcular $g(x)$ explícitamente usando el Teorema de Evaluación:

$$g(x) = \int_1^x t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\bigg]_1^x = \frac{x^3 - 1}{3}$$

Entonces $$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}\right) = x^2$$

Para la función del Ejemplo 2 nótese que $g'(x) = x^2$, es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g está definida como la integral de f por la Ecuación 1, entonces g resulta ser una antiderivada de f, al menos en este caso. Y si trazamos la derivada de la función g mostrada en la Figura 4 al estimar pendientes de tangentes, obtenemos una gráfica como la de f en la Figura 2. Entonces sospechamos que $g' = f$ en el Ejemplo 1 también.

Para ver por qué esto podría ser generalmente cierto consideramos cualquier función continua f con $f(x) \geqslant 0$. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puede ser interpretada como el área bajo la gráfica de f de a a x, como en la Figura 1.

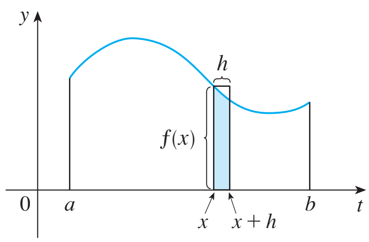


FIGURA 5

Para calcular $g'(x)$ a partir de la definición de una derivada primero observamos que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene al restar áreas, de modo que es el área bajo la gráfica de f de x a $x + h$ (el área azul en la Figura 5). Para h pequeña se puede ver de la figura que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

y entonces

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

Intuitivamente, esperamos por tanto que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto es verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo.

Abreviamos el nombre de este teorema como FTC1. En palabras, dice que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado en el límite superior.

El Teorema Fundamental del Cálculo, Primera Parte Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es una antiderivada de f, es decir, $g'(x) = f(x)$ para $a < x < b$.

Usando notación de Leibniz para derivadas, podemos escribir este teorema como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

cuando f es continua. En términos generales, esta ecuación dice que si primero integramos f y luego derivamos el resultado, regresamos a la función original f.

TEC Module 5.4 da evidencia visual para el FTC1.

Es fácil demostrar el Teorema Fundamental si hacemos la suposición de que f posee una antiderivada F. (Esto es ciertamente plausible. Después de todo, trazamos gráficas de antiderivadas en la Sección 2.8.) Entonces, por el Teorema de Evaluación,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

para cualquier x entre a y b. Por tanto,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x)$$

como se requiere. Al final de esta sección presentamos una prueba sin la suposición de que existe una antiderivada.

V EJEMPLO 3 Derivando una integral

Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Como $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la Parte 1 del Teorema Fundamental del Cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

EJEMPLO 4 Una función de física Aun cuando una fórmula de la forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ puede parecer como una manera extraña de definir una función, libros de física, química y estadística están llenos de estas funciones. Por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

recibe ese nombre en honor al físico francés Augustin Fresnel (1788-1827), quien es famoso por sus trabajos en óptica. Esta función apareció primero en la teoría de Fresnel de la difracción de ondas de luz, pero más recientemente ha sido aplicada al diseño de carreteras.

La Primera Parte del Teorema Fundamental nos dice cómo derivar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$$

Esto significa que podemos aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (ver el Ejercicio 27).

La Figura 6 muestra las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ y la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Se usó una computadora para graficar S al calcular el valor de esta integral para numerosos valores de x. Se ve como si $S(x)$ es el área bajo la gráfica de f de 0 a x [hasta $x \approx 1.4$ cuando $S(x)$ se convierte en diferencia de áreas]. La Figura 7 muestra una parte más grande de la gráfica de S.

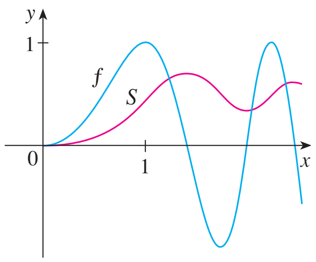


FIGURA 6
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

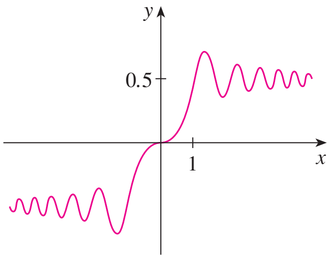


FIGURA 7
La función de Fresnel
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

Si ahora empezamos con la gráfica de S en la Figura 6 y consideramos cómo debería verse su derivada, parece razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$]. Entonces esto da una confirmación visual de la Primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo.

EJEMPLO 5 Combinación de la Regla de la Cadena con el FTC1 Encuentre $\dfrac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUCIÓN Aquí debemos tener cuidado de usar la Regla de la Cadena en coordinación con la Primera Parte del Teorema Fundamental. Sea $u = x^4$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t\, dt &= \frac{d}{dx} \int_1^{u} \sec t\, dt \\
&= \frac{d}{du}\left[\int_1^u \sec t\, dt\right] \frac{du}{dx} && \text{(por la Regla de la cadena)} \\
&= \sec u \frac{du}{dx} && \text{(por el FTC1)} \\
&= \sec(x^4) \cdot 4x^3
\end{aligned}$$

Derivación e integración como procesos inversos

Ahora unimos las dos partes del Teorema Fundamental. Consideramos la Primera Parte como fundamental porque relaciona integración y derivación. Pero el Teorema de Evaluación de la Sección 5.3 también relaciona integrales y derivadas, de modo que le cambiamos el nombre como Parte Segunda del Teorema Fundamental.

El Teorema Fundamental del Cálculo Suponga que f es continua en $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, esto es, $F' = f$.

Observamos que la Primera Parte se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

que dice que si f se integra y luego el resultado se deriva, regresamos a la función original f. En la Sección 5.3 reformulamos la Segunda Parte como el Teorema de Cambio Neto:

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Esta versión dice que si tomamos una función F, primero la derivamos, y luego integramos el resultado, regresamos a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del Teorema Fundamental del Cálculo dice que la derivación e integración son procesos inversos. Cada uno deshace lo que el otro hace.

El Teorema Fundamental del Cálculo es incuestionablemente el teorema más importante en cálculo y, de hecho, se clasifica como uno de los grandes logros de la mente humana. Antes que fuera descubierto, del tiempo de Eudoxio y Arquímedes al tiempo de Galileo y Fermat, problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio pudo satisfacer el desafío. Pero ahora, armados con el método sistemático con que Newton y Leibniz desarrollaron el Teorema Fundamental, veremos en los capítulos siguientes que estos difíciles problemas son accesibles para todos nosotros.

Demostración del FTC1

Aquí damos una demostración de la Primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo sin suponer la existencia de una antiderivada de f. Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Si x y $x + h$ están en el intervalo abierto (a, b), entonces

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt\right) - \int_a^x f(t)\, dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\, dt \end{aligned}$$

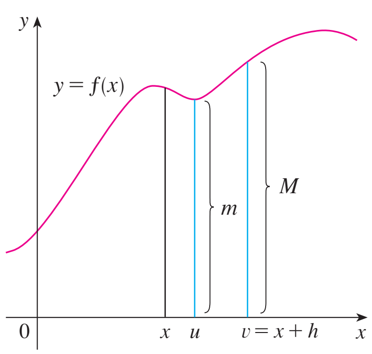


FIGURA 8

y entonces, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Por ahora supongamos que $h > 0$. Como f es continua en $[x, x + h]$, el Teorema de Valor Extremo dice que hay números u y v en $[x, x + h]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores mínimo y máximo absolutos de f en $[x, x + h]$. (Vea Figura 8.)

Por la Propiedad 8 de integrales, tenemos

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

esto es,

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Como $h > 0$, podemos dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Ahora usamos la Ecuación 2 para sustituir la parte media de esta desigualdad:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leqslant \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

La Desigualdad 3 se puede demostrar de un modo semejante para el caso donde $h < 0$. Ahora hacemos que $h \to 0$. Entonces $u \to x$ y $v \to x$, porque u y v están entre x y $x + h$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. Concluimos, de (3) y el Teorema de compresión, que

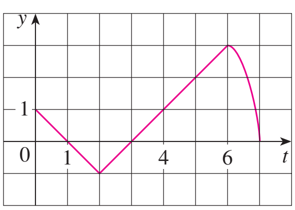
$$\boxed{4} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, entonces la Ecuación 4 se puede interpretar como un límite lateral. Entonces el Teorema 2.7.4 (modificado para límites laterales) demuestra que g es continua en $[a, b]$.

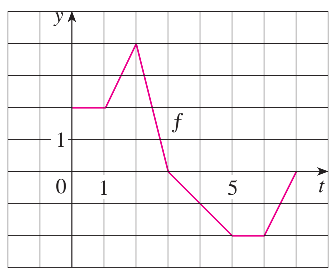
5.4 Ejercicios

1. Explique exactamente lo que se quiere decir con el enunciado de que "derivación e integración son procesos inversos."

2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) ¿Dónde tiene g un valor máximo? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.



3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
(b) ¿En qué intervalo es g creciente?
(c) ¿Dónde tiene g un valor máximo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.

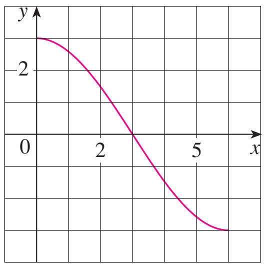


4. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$ y $g(6)$.

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

(b) Estime $g(x)$ para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5.
(c) ¿En qué intervalo es g creciente?
(d) ¿Dónde tiene g un valor máximo?
(e) Trace una gráfica aproximada de g.
(f) Use la gráfica del inciso (e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compare con la gráfica de f.



5–6 Trace el área representada por $g(x)$. A continuación encuentre $g'(x)$ en dos formas: (a) usando la Primera Parte del Teorema Fundamental y (b) evaluando la integral usando la Segunda Parte y luego derivando.

5. $g(x) = \int_0^x (1 + t^2)\,dt$ **6.** $g(x) = \int_0^x \left(1 + \sqrt{t}\right)dt$

7–18 Use la Primera Parte del Teorema Fundamental del Cálculo para hallar la derivada de la función.

7. $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$ **8.** $g(x) = \displaystyle\int_3^x e^{t^2 - t}\,dt$

9. $g(y) = \displaystyle\int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\,dt$ **10.** $g(r) = \displaystyle\int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\,dx$

11. $F(x) = \displaystyle\int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$$\left[\textit{Sugerencia: } \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$$

12. $G(x) = \displaystyle\int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \displaystyle\int_2^{1/x} \arctan t\,dt$ **14.** $h(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\,dr$

15. $y = \displaystyle\int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$ **16.** $y = \displaystyle\int_{e^x}^0 \operatorname{sen}^3 t\,dt$

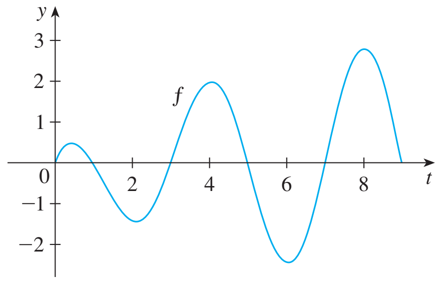
17. $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du$

$$\left[\textit{Sugerencia: } \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_0^{3x} f(u)\,du\right]$$

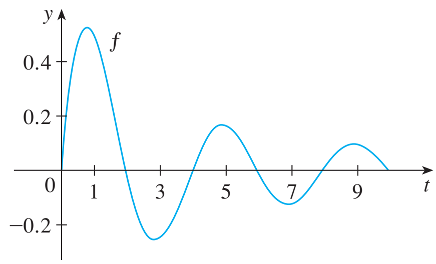
18. $y = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} (1 + v^2)^{10}\,dv$

19–20 Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) ¿En qué valores de x se presentan los valores máximo y mínimo locales de g?
(b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?
(c) ¿En qué intervalos es g cóncava hacia abajo?
(d) Trace la gráfica de g.

19.



20.



---

21. Si $f(x) = \int_0^x (1 - t^2)e^{t^2}\,dt$, ¿en qué intervalo es f creciente?

22. Si $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\,dt$ y $g(y) = \int_3^y f(x)\,dx$, encuentre $g''(\pi/6)$.

23. ¿En qué intervalo es la curva

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2}\,dt$$

cóncava hacia abajo?

24. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva con ecuaciones paramétricas $x = \int_0^t \sqrt{1 + u^3}\,du$, $y = 1 + 2t - t^3$ en el punto $(0, 1)$.

25. Si $f(1) = 12$, f' es continua, y $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, ¿cuál es el valor de $f(4)$?

26. La **función de error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.
(a) Demuestre que $\int_a^b e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.
(b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

CAS **27.** La función S de Fresnel se definió en el Ejemplo 4 y se graficó en las Figuras 6 y 7.
(a) ¿En qué valores de x tiene valores máximos locales esta función?
(b) ¿En qué intervalos es cóncava hacia arriba la función?
(c) Use una gráfica para resolver la siguiente ecuación correcta a dos lugares decimales:

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0.2$$

CAS **28.** La **función integral seno**

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

es importante en ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero sabemos que su límite es 1 cuando $t \to 0$. Entonces definimos $f(0) = 1$ y esto hace f una función continua en todas partes.]

(a) Trace la gráfica de Si.

(b) ¿En qué valores de x tiene valores máximos locales esta función?

(c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

(d) ¿Esta función tiene asíntotas horizontales?

(e) Resuelva la siguiente ecuación correcta a un lugar decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

29. Encuentre una función f tal que $f(1) = 0$ y $f'(x) = 2^x/x$.

30. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y $$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

(a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la de $f(x)$.

(b) Trace las gráficas de f y g.

(c) ¿Dónde es f derivable? ¿Dónde es g derivable?

31. Encuentre una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt = 2\sqrt{x}$$

para toda $x > 0$.

32. Una empresa de alta tecnología adquiere un nuevo sistema de computación cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará a razón de $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento a una tasa $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para cambiar el sistema.

(a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\, ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y $$g(t) = \frac{Vt^2}{12{,}900} \qquad t > 0$$

Determine el tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ iguale el valor inicial V.

(c) Determine el mínimo absoluto de C en $(0, T]$.

(d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas, y verifique el resultado del inciso (a) en este caso.

33. Una empresa manufacturera es propietaria de una pieza importante de equipo que se deprecia a una tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que fue sometida a una reparación general. Debido a que se incurre en un costo fijo A cada vez que la máquina es reparada, la empresa desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre reparaciones.

(a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\, ds$ representa la pérdida en valor de la máquina en el periodo t desde la última reparación.

(b) Sea $C = C(t)$ dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\, ds\right]$$

¿Qué representa C y por qué la compañía desearía minimizar C?

(c) Demuestre que C tiene un valor mínimo en los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN HISTÓRICA

Newton, Leibniz y la invención del cálculo

A veces leemos que los inventores del cálculo fueron Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero sabemos que las ideas básicas que hay detrás de la integración fueron investigadas hace 2500 años por antiguos griegos como Eudoxio y Arquímedes, y los métodos para hallar tangentes fueron iniciados por Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow (1630-1677), y otros. Barrow, que dio clases en Cambridge y tuvo gran influencia en Newton, fue el primero en entender la relación inversa entre derivación e integración. Lo que hicieron Newton y Leibniz fue usar esta relación, en la forma del Teorema Fundamental de Cálculo, para desarrollar el cálculo en una disciplina matemática sistemática. Es en este sentido que Newton y Leibniz reciben crédito con la invención del cálculo.

El estudiante debe leer las aportaciones de estos hombres en una o más de las obras de referencia dadas y escribir un informe sobre uno de los tres temas siguientes. Puede incluir detalles biográficos, pero la observación principal de su informe debe ser una descripción, con algún detalle, de sus métodos y notaciones. En particular, el estudiante debe consultar uno de los libros de consulta, que dan extractos de las publicaciones originales de Newton y Leibniz, traducidas del latín al inglés.

- The Role of Newton in the Development of Calculus
- The Role of Leibniz in the Development of Calculus
- The Controversy between the Followers of Newton and Leibniz over Priority in the Invention of Calculus

Referencias

1. Carl Boyer and Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (New York: Wiley, 1987), Chapter 19.
2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development* (New York: Dover, 1959), Chapter V.
3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (New York: Springer-Verlag, 1979), Chapters 8 and 9.
4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics,* 6th ed. (New York: Saunders, 1990), Chapter 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's, 1974). See the article on Leibniz by Joseph Hofmann in Volume VIII and the article on Newton by I. B. Cohen in Volume X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (New York: HarperCollins, 1993), Chapter 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972), Chapter 17.

Libros de consulta

1. John Fauvel and Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader* (London: MacMillan Press, 1987), Chapters 12 and 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics* (New York: Dover, 1959), Chapter V.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), Chapter V.

5.5 La Regla de sustitución

Debido al Teorema Fundamental, es importante tener capacidad para hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no nos dicen cómo evaluar integrales como por ejemplo

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

RP Para hallar esta integral usamos la estrategia de resolución de problemas de *introducir algo extra*. Aquí ese "algo extra" es una nueva variable; cambiamos de la variable x a una nueva variable u. Suponga que hacemos que u sea la cantidad bajo el signo de raíz en (1): $u = 1 + x^2$. Entonces la diferencial de u es $du = 2x\, dx$. Nótese que si dx en la notación para una integral fuera a interpretarse como una diferencial, entonces la diferencial

Las derivadas se definieron en la Sección 3.9. Si $u = f(x)$, entonces

$$du = f'(x)\, dx$$

$2x\,dx$ ocurriría en (1) y así, formalmente, sin justificar nuestro cálculo, podríamos escribir

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

Pero ahora podemos comprobar que tenemos la respuesta correcta al usar la Regla de la Cadena para derivar la función final de la Ecuación 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

En general, este método funciona siempre que tengamos una integral que podamos escribir en la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Observe que si $F' = f$, entonces

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la Regla de la Cadena,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Si hacemos el "cambio de variable" o "sustitución" $u = g(x)$, entonces de la Ecuación 3 tenemos

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o bien, escribiendo $F' = f$, tenemos

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Así hemos demostrado la regla siguiente.

> $\boxed{4}$ **Regla de sustitución** Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua en I, entonces
>
> $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Nótese que la Regla de sustitución para integración fue demostrada usando la Regla de la cadena para derivación. Nótese también que si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, y una forma de recordar la Regla de sustitución es considerar dx y du en (4) como diferenciales.

Así, la Regla de la sustitución dice: **Es permisible operar con *dx* y *du* después de signos de integral como si fueran diferenciales.**

EJEMPLO 1 **Uso de la Regla de sustitución** Encuentre $\int x^3\cos(x^4+2)\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, que, aparte del factor constante 4, se presenta en la integral. Así, usando $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ y la

Regla de sustitución, tenemos

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx = \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du$$
$$= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C$$
$$= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C$$

Compruebe su respuesta al derivarla.

Nótese que en la etapa final tuvimos que regresar a la variable original x.

La idea que hay tras de la Regla de la sustitución es sustituir una integral relativamente complicada con una integral más sencilla. Esto se logra cambiando de la variable original x a una nueva variable u que es una función de x. Así, en el Ejemplo 1, sustituimos la integral $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$ por la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

La principal dificultad para usar la Regla de la sustitución es considerar una sustitución apropiada. El estudiante debe tratar de escoger u como una función en el integrando cuya diferencial también se presenta (excepto para un factor constante). Éste fue el caso en el Ejemplo 1. Si eso no es posible, trate de escoger u para que sea alguna parte complicada del integrando (quizá la función interior en una función compuesta). Hallar la sustitución correcta es un poco de arte; no es raro que se hagan errores pero, si la sustitución no funciona intente con otra.

EJEMPLO 2 **Dos posibles sustituciones** Evalúe $\int \sqrt{2x + 1}\,dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Entonces $du = 2\,dx$, y por tanto $dx = \frac{1}{2}\,du$. Así, la Regla de la Sustitución da

$$\int \sqrt{2x + 1}\,dx = \int \sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2} + C$$

SOLUCIÓN 2 Otra posible sustitución es $u = \sqrt{2x + 1}$. Entonces

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}} \qquad \text{y entonces} \qquad dx = \sqrt{2x + 1}\,du = u\,du$$

(O bien, observe que $u^2 = 2x + 1$ por lo que $2u\,du = 2\,dx$.) Por tanto

$$\int \sqrt{2x + 1}\,dx = \int u \cdot u\,du = \int u^2\,du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2} + C$$

V **EJEMPLO 3** Encuentre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Entonces $du = -8x\,dx$, y entonces $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$$
$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C$$

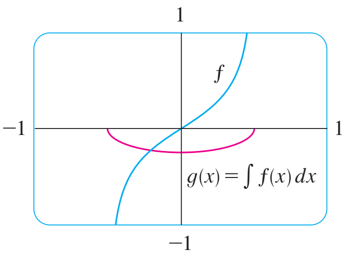


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2}$

La respuesta al Ejemplo 3 podría comprobarse por derivación, pero en lugar de ello probémosla con una gráfica. En la Figura 1 hemos empleado computadora para graficar el integrando $f(x) = x/\sqrt{1 - 4x^2}$ y su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2}$ (tomamos el caso $C = 0$). Nótese que $g(x)$ disminuye cuando $f(x)$ es negativa, aumenta cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De la evidencia gráfica parece razonable que g sea una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUCIÓN Si hacemos $u = 5x$, entonces $du = 5\,dx$, y $dx = \frac{1}{5}\,du$. Por tanto,

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int e^u\,du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

V **EJEMPLO 5** Calcule $\int \tan x\,dx$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$

Esto sugiere que deberíamos sustituir $u = \cos x$, porque entonces $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ y por tanto $\operatorname{sen} x\,dx = -du$:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Como $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, el resultado del Ejemplo 5 también se puede escribir como

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

Integrales definidas

Cuando se evalúe una integral *definida* por sustitución, son posibles dos métodos. Un método es evaluar la integral indefinida primero y luego usar el Teorema de Evaluación. Por ejemplo, usando el resultado del Ejemplo 2, tenemos

$$\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\,dx = \int \sqrt{2x + 1}\,dx\Big]_0^4 = \frac{1}{3}(2x + 1)^{3/2}\Big]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}(9)^{3/2} - \frac{1}{3}(1)^{3/2} = \frac{1}{3}(27 - 1) = \frac{26}{3}$$

Otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

Esta regla dice que cuando se usa una sustitución en una integral definida, debemos poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx sino también los límites de integración. Los nuevos límites son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

5 **Regla de la sustitución para integrales definidas** Si g' es continua en $[a, b]$ y f es continua en el intervalo de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. Entonces, por (3), $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, y por el Teorema de Evaluación tenemos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, aplicando el Teorema de Evaluación una segunda vez, también tenemos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

EJEMPLO 6 Sustitución en una integral definida Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando (5).

SOLUCIÓN Usando la sustitución de la Solución 1 del Ejemplo 2, tenemos $u = 2x + 1$ y $dx = \frac{1}{2}\,du$. Para hallar los nuevos límites de integración vemos que

$$\text{cuando } x = 0,\ u = 2(0) + 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \text{cuando } x = 4,\ u = 2(4) + 1 = 9$$

Por tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

La interpretación geométrica del Ejemplo 6 se muestra en la Figura 2. La sustitución $u = 2x + 1$ estira el intervalo $[0, 4]$ en un factor de 2 y lo traslada a la derecha en 1 unidad. La Regla de la Sustitución muestra que las dos áreas son iguales.

Observe que cuando se usa (5) *no* regresamos a la variable x después de integrar. Simplemente evaluamos la expresión en u entre los valores apropiados de u.

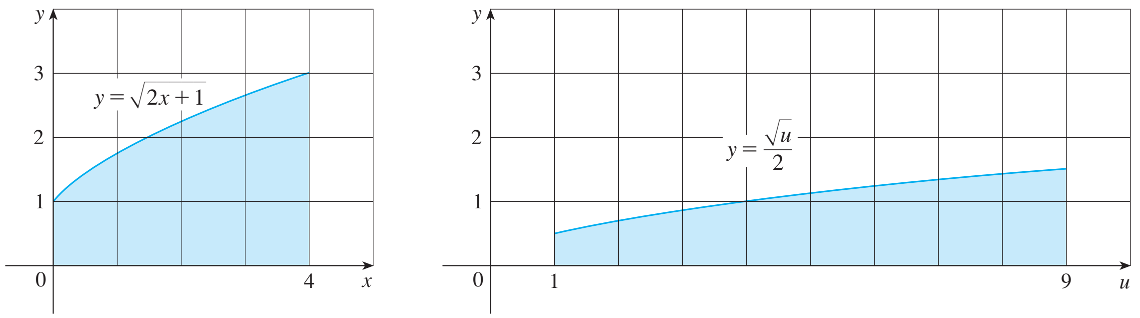


FIGURA 2

La integral dada en el Ejemplo 7 es una abreviación para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. Entonces $du = -5\,dx$, y $dx = -\frac{1}{5}\,du$. Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Entonces

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}$$
$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Big]_{-2}^{-7}$$
$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

Como la función $f(x) = (\ln x)/x$ en el Ejemplo 8 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada en la Figura 3.

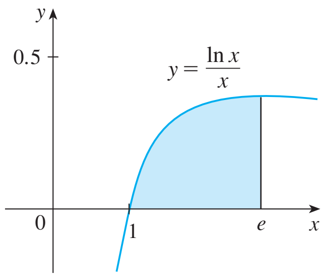


FIGURA 3

V EJEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos $u = \ln x$ porque su diferencial $du = dx/x$ existe en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Por tanto,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Simetría

El siguiente teorema usa la Regla de la Sustitución para Integrales Definidas (5) para simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

6 Integrales de funciones simétricas Suponga que f es continua en $[-a, a]$.

(a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Si f es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN Dividimos la integral en dos:

$$\boxed{7} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha hacemos la sustitución $u = -x$. Entonces $du = -dx$ y cuando $x = -a$, $u = a$. Por tanto,

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)\,(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

y entonces la Ecuación 7 se convierte en

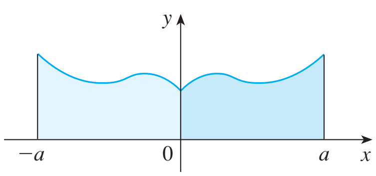
$$\boxed{8} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$

(a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$ y la Ecuación 8 da

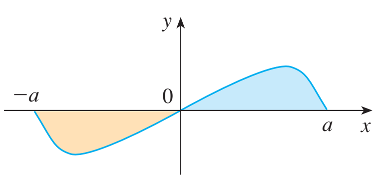
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$ y la Ecuación 8 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$



(a) f par, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



(b) f impar, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

El Teorema 6 está ilustrado por la Figura 4. Para el caso donde f es positiva y par, el inciso (a) dice que el área bajo $y = f(x)$ de $-a$ a a es el doble del área de 0 a a por la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ puede ser expresada como el área arriba del eje x y debajo de $y = f(x)$ menos el área abajo del eje y arriba de la curva. Entonces el inciso (b) dice que la integral es 0 porque las áreas se cancelan.

V EJEMPLO 9 Integración de una función par Como $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y por tanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\, dx = 2 \int_0^2 (x^6 + 1)\, dx$$
$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

EJEMPLO 10 Integración de una función impar Como $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\, dx = 0$$

5.5 Ejercicios

1–6 Evalúe la integral al hacer la sustitución dada.

1. $\int e^{-x}\, dx, \quad u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\, dx, \quad u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta, \quad u = \cos\theta$

6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\, dx, \quad u = 1/x$

7–36 Evalúe la integral indefinida.

7. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\, dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\, dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\, dt$

11. $\int \operatorname{sen} \pi t\, dt$

12. $\int e^x \cos(e^x)\, dx$

13. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

14. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

15. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

16. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

17. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\, dx$

18. $\int \frac{z^2}{z^3 + 1}\, dz$

19. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\, dx$

20. $\int \sec 2\theta \tan 2\theta\, d\theta$

21. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

22. $\int \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2}\, dx$

23. $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4\, dx$

24. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\, dx$

25. $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x\, dx$

26. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \operatorname{sen}^{-1} x}$

28. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1 + \tan t}}$

29. $\int \sec^3 x \tan x\, dx$

30. $\int x^2\sqrt{2 + x}\, dx$

31. $\int x(2x + 5)^8\, dx$

32. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$

33. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

34. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

35. $\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\, dx$

36. $\int \frac{x}{1 + x^4}\, dx$

37–40 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y pruebe que su respuesta sea razonable al graficar la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

37. $\int x(x^2 - 1)^3\, dx$

38. $\int \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$

39. $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx$

40. $\int \operatorname{sen} x \cos^4 x\, dx$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

41–57 Evalúe la integral definida.

41. $\int_0^1 \cos(\pi t/2)\,dt$

42. $\int_0^1 (3t - 1)^{50}\,dt$

43. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\,dx$

44. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

45. $\int_0^1 x^2(1 + 2x^3)^5\,dx$

46. $\int_{1/6}^{1/2} \csc \pi t \cot \pi t\,dt$

47. $\int_1^4 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

48. $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\,dx$

49. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x)\,dx$

50. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{1 + x^6}\,dx$

51. $\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\,dx$

52. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

53. $\int_0^1 \dfrac{e^z + 1}{e^z + z}\,dz$

54. $\int_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

55. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

56. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha)\,dt$

57. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

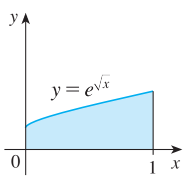
58. Verifique que $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}$ es una función impar y use ese hecho para demostrar que

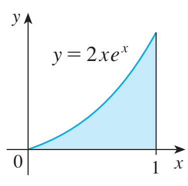
$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\,dx \leqslant 1$$

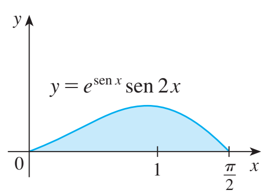
59. Evalúe $\int_{-2}^{2} (x + 3)\sqrt{4 - x^2}\,dx$ al escribirla como una suma de dos integrales e interpretando una de esas integrales en términos de un área.

60. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\,dx$ al hacer una sustitución e interprete la integral resultante en términos de un área.

61. ¿Cuáles de las siguientes áreas son iguales? ¿Por qué?







62. Un modelo para el ritmo de metabolismo basal, en kcal/h, de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas medido desde las 5:00 a.m. ¿Cuál es el metabolismo basal total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)\,dt$, en un periodo de 24 horas?

63. Un tanque de almacenamiento de aceite se rompe en el tiempo $t = 0$ y se fuga aceite del tanque a razón de $r(t) = 100e^{-0.01t}$ litros por minuto. ¿Cuánto aceite se fuga durante la primera hora?

64. Una población de bacterias empieza con 400 bacterias y crece a razón de $r(t) = (450.268)e^{1.12567t}$ bacterias por hora. ¿Cuántas bacterias habrá después de tres horas?

65. La respiración es cíclica y un ciclo respiratorio completo desde el inicio de la inhalación hasta el final de la exhalación tarda unos 5 segundos. La rapidez máxima de entrada de aire en los pulmones es de unos 0.5 L/s, lo cual explica, en parte, por qué la función $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi t/5)$ se ha empleado con frecuencia para modelar la rapidez de entrada de aire en los pulmones. Use este modelo para hallar el volumen de aire inhalado en los pulmones en el tiempo t.

66. La Alabama Instruments Company ha construido una línea de producción para manufacturar una nueva calculadora. La rapidez de producción de estas calculadoras después de t semanas es

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Nótese que la producción se aproxima a 5000 por semana con el tiempo, pero la producción inicial es menor porque los trabajadores no están acostumbrados a las nuevas técnicas.) Encuentre el número de calculadoras producidas desde principios de la tercera semana a fines de la cuarta semana.

67. Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encuentre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

68. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

69. Si f es continua en $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $0 < a < b$, trace un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

70. Si f es continua en $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x + c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$, trace un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

71. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1 - x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1 - x)^a\,dx$$

72. (a) Si f es continua, demuestre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

5.6 Integración por partes

Toda regla de derivación tiene una correspondiente regla de integración. Por ejemplo, la Regla de sustitución para integración corresponde a la Regla de la cadena para derivación. La regla que corresponde a la Regla del producto para derivación se denomina regla para *integración por partes*.

La Regla del producto expresa que si f y g son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

o bien,
$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Podemos reacomodar esta ecuación como

1
$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx}$$

La Fórmula 1 recibe el nombre de **fórmula para integración por partes**. Es quizá más fácil de recordar en la siguiente notación. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces las derivadas son $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$, y entonces, por la Regla de la Sustitución, la fórmula para integración por partes se convierte en

2
$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

EJEMPLO 1 **Integración por partes** Encuentre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN USANDO LA FÓRMULA 1 Suponga que escogemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Para g podemos escoger *cualquier* antiderivada de g'.) Así, usando la Fórmula 1, tenemos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Es prudente comprobar la respuesta al derivarla. Si lo hacemos así, obtenemos $x \operatorname{sen} x$, como es de esperarse.

SOLUCIÓN USANDO LA FÓRMULA 2 Sea

Es útil usar el modelo:

$$u = \square \qquad dv = \square$$
$$du = \square \qquad v = \square$$

$$u = x \qquad dv = \text{sen}\, x\, dx$$

Entonces $$du = dx \qquad v = -\cos x$$

y por tanto,

$$\int x \,\text{sen}\, x\, dx = \int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\text{sen}\, x\, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\, \underbrace{dx}_{du}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x\cos x + \text{sen}\, x + C$$

Nota: Nuestro objetivo de usar integración por partes es obtener una integral más sencilla que aquella con la que empezamos. Así, en el Ejemplo 1, empezamos con $\int x \,\text{sen}\, x\, dx$ y lo expresamos en términos de la integral más sencilla $\int \cos x\, dx$. En cambio, si hubiéramos escogido $u = \text{sen}\, x$ y $dv = x\, dx$, entonces $du = \cos x\, dx$ y $v = x^2/2$, de modo que la integración por partes da

$$\int x \,\text{sen}\, x\, dx = (\text{sen}\, x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Aun cuando esto es cierto, $\int x^2 \cos x\, dx$ es una integral más difícil que aquella con la que empezamos. En general, cuando se decida sobre una opción para u y dv, por lo general tratamos de escoger que $u = f(x)$ sea una función que se haga más sencilla cuando se derive (o al menos no más complicada) mientras $dv = g'(x)\, dx$ se pueda integrar fácilmente para obtener v.

V EJEMPLO 2 Evalúe $\int \ln x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí no tenemos mucha opción para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

Al integrar por partes tendremos

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

Se acostumbra escribir $\int 1\, dx$ como $\int dx$.

$$= x\ln x - \int dx$$

Compruebe su respuesta al derivarla.

$$= x \ln x - x + C$$

En este ejemplo, la integración por partes es efectiva porque la derivada de la función $f(x) = \ln x$ es más sencilla que f.

V EJEMPLO 3 Doble integración por partes Encuentre $\int t^2 e^t\, dt$.

SOLUCIÓN Nótese que t^2 se hace más sencilla cuando se deriva (mientras que e^t no cambia cuando se deriva o integra), de modo que escogemos

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\, dt$$

Entonces $$du = 2t\, dt \qquad v = e^t$$

La integración por partes da

$$\boxed{3} \qquad \int t^2e^t\,dt = t^2e^t - 2\int te^t\,dt$$

La integral que obtuvimos, $\int te^t\,dt$, es más sencilla que la integral original pero todavía no es obvia. Por tanto, usamos integración por partes una segunda vez, ahora con $u = t$ y $dv = e^t\,dt$. Entonces $du = dt$, $v = e^t$, y

$$\begin{aligned}\int te^t\,dt &= te^t - \int e^t\,dt\\ &= te^t - e^t + C\end{aligned}$$

Poniendo esto en la Ecuación 3, obtenemos

$$\begin{aligned}\int t^2e^t\,dt &= t^2e^t - 2\int te^t\,dt\\ &= t^2e^t - 2(te^t - e^t + C)\\ &= t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C\end{aligned}$$

V EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

Un método más sencillo, usando números complejos, se da en el Ejercicio 50 del Apéndice I.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x son más sencillos cuando se derivan, pero tratamos de escoger $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ de todas formas. Entonces $du = e^x dx$ y $v = -\cos x$, de modo que la integración por partes nos da

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

La integral que hemos obtenido, $\int e^x \cos x\,dx$, no es más sencilla que la original, pero al menos no es más difícil. Habiendo tenido éxito en el ejemplo precedente integrando por partes dos veces, perseveramos e integramos por partes de nuevo. Esta vez usamos $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$, y

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

La Figura 1 ilustra el Ejemplo 4 al mostrar las gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como comprobación visual de nuestro trabajo, nótese que $f(x) = 0$ cuando F tiene un máximo o mínimo.

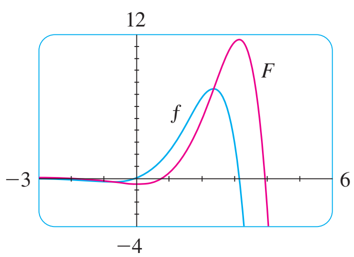


FIGURA 1

A primera vista, parece como si no hubiéramos logrado nada porque hemos llegado a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que es donde empezamos. No obstante, si ponemos la Ecuación 5 en la Ecuación 4 tendremos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Esto puede ser considerado como una ecuación de la que hay que despejar la integral desconocida. Sumando $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ a ambos lados, obtenemos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividiendo entre 2 y sumando la constante de integración, obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Si combinamos la fórmula para integración por partes con el Teorema de Evaluación, podemos evaluar integrales definidas por partes. Evaluar ambos lados de la Fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y usando el Teorema de Evaluación, obtenemos

6 $$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

EJEMPLO 5 **Integración definida por partes** Calcule $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = x$$

Por tanto, la Fórmula 6 nos da

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx &= x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= 1\cdot\tan^{-1}1 - 0\cdot\tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

Como $\tan^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, la integral del Ejemplo 5 se puede interpretar como el área de la región mostrada en la Figura 2.

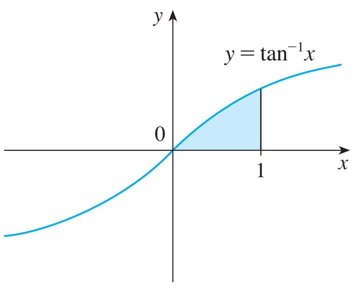


FIGURA 2

Para evaluar esta integral usamos la sustitución $t = 1 + x^2$ (porque u tiene otro significado en este ejemplo). Entonces $dt = 2x\,dx$, y entonces $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; cuando $x = 1$, $t = 2$; entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Por tanto, $$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

EJEMPLO 6 Demuestre la fórmula de reducción

7 $$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

La Ecuación 7 se denomina *fórmula de reducción* porque el exponente n ha sido *reducido* a $n - 1$ y $n - 2$.

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen}x\,dx$$

Entonces $$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$$

y la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

Como $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, tenemos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Al igual que en el Ejemplo 4, de esta ecuación despejamos la integral deseada al llevar el último término del lado derecho al lado izquierdo. Así, tenemos

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

o bien,
$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

La fórmula de reducción (7) es útil porque al usarla repetidas veces podríamos finalmente expresar $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (si n es par).

5.6 Ejercicios

1–2 Evalúe la integral usando integración por partes con las opciones indicadas de u y dv.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta \cos\theta\,d\theta$; $u = \theta$, $dv = \cos\theta\,d\theta$

3–24 Evalúe la integral.

3. $\int x \cos 5x\,dx$

4. $\int xe^{-x}\,dx$

5. $\int re^{r/2}\,dr$

6. $\int t \operatorname{sen} 2t\,dt$

7. $\int x^2 \operatorname{sen} \pi x\,dx$

8. $\int x^2 \cos mx\,dx$

9. $\int \ln \sqrt[3]{x}\,dx$

10. $\int p^5 \ln p\,dp$

11. $\int \arctan 4t\,dt$

12. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

13. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\,d\theta)$

14. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta\,d\theta$

15. $\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} 3t\,dt$

16. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

17. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

18. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

19. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

20. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

21. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x\,dx$

22. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

23. $\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

24. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\,ds$

25–30 Primero haga una sustitución y luego use integración por partes para evaluar la integral.

25. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

26. $\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

27. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

28. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\, dt$

29. $\displaystyle\int x \ln(1 + x)\, dx$

30. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

31–34 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, al graficar la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

31. $\displaystyle\int xe^{-2x}\, dx$

32. $\displaystyle\int x^{3/2} \ln x\, dx$

33. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1 + x^2}\, dx$

34. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$

35. (a) Use la fórmula de reducción del Ejemplo 6 para demostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use el inciso (a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

36. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\, dx$$

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x\, dx$.
(c) Use los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x\, dx$.

37. (a) Use la fórmula de reducción del Ejemplo 6 para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.
(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.
(c) Use el inciso (a) para demostrar que, para potencias impares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

38. Demuestre que, para potencias pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

39–40 Use integración por partes para demostrar la fórmula de reducción.

39. $\displaystyle\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$

40. $\displaystyle\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx$

41. Use el Ejercicio 39 para hallar $\int (\ln x)^3\, dx$.

42. Use el Ejercicio 40 para hallar $\int x^4 e^x\, dx$.

43. Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué distancia recorrerá durante los primeros t segundos?

44. Un cohete acelera al quemar su combustible de a bordo, de manera que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial del cohete al despegue (incluyendo su combustible) es m, el combustible se consume con rapidez r, y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (con respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t está dado por la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln\frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8\ \text{m/s}^2$, $m = 30{,}000$ kg, $r = 160$ kg/s, y $v_e = 3000$ m/s, encuentre la altura del cohete un minuto después del despegue.

45. Suponga que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 xf''(x)\, dx$.

46. (a) Use integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)\, dx = xf(x) - \int xf'(x)\, dx$$

(b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

[*Sugerencia:* Use el inciso (a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]
(c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, trace un diagrama para dar una interpretación geométrica del inciso (b).
(d) Use el inciso (b) para evaluar $\int_1^e \ln x\, dx$.

47. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, demuestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\, dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\, dx$$

48. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx$.
(a) Demuestre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.
(b) Use el Ejercicio 38 para demostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use los incisos (a) y (b) para demostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Use el inciso (c) y los Ejercicios 37 y 38 para demostrar que

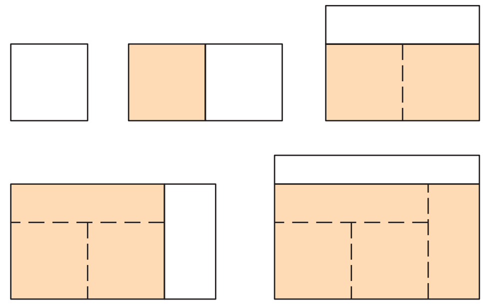
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Esta fórmula suele escribirse como un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

y recibe el nombre de *producto Wallis*.

(e) Construimos rectángulos como sigue. Empiece con un cuadrado de área 1 y fije rectángulos de área 1 alternativamente junto al rectángulo previo o sobre éste (vea la figura). Encuentre el límite de los cocientes entre ancho y altura de estos rectángulos.



5.7 Técnicas adicionales de integración

Hemos aprendido las dos técnicas básicas de integración, sustitución y por partes, en las Secciones 5.5 y 5.6. A continuación exponemos brevemente métodos que son especiales para clases particulares de funciones, por ejemplo como funciones trigonométricas y funciones racionales.

Integrales trigonométricas

Podemos usar identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas.

EJEMPLO 1 **Una integral y una potencia impar de cos x** Evalúe $\int \cos^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Nos gustaría usar la Regla de la Sustitución, pero sólo sustituir $u = \cos x$ no es útil porque entonces $du = -\text{sen}\,x\,dx$. Para integrar potencias de coseno, necesitaríamos un factor extra de sen x. (Análogamente, una potencia de seno requeriría un factor extra de cos x.) Aquí separamos un factor coseno y convertimos el factor $\cos^2 x$ restante en una expresión que contenga seno usando la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \text{sen}^2 x)\cos x$$

Entonces podemos evaluar la integral al sustituir $u = \text{sen}\,x$, de modo que $du = \cos x\,dx$ y

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - \text{sen}^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int (1 - u^2)\,du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \text{sen}\,x - \tfrac{1}{3}\text{sen}^3 x + C\end{aligned}$$

www.stewartcalculus.com

Para más detalles sobre la integración de funciones trigonométricas, haga clic en *Trigonometric Integrals* under *Additional Topics*.

En general, intentamos escribir un integrando que involucra potencias del seno y del coseno de manera que sólo exista un seno como factor (y el resto de la expresión en términos del coseno) o sólo un coseno como factor (y lo demás en términos del seno). La identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ permite expresar las potencias pares del seno y coseno, uno en términos de otro.

Si el integrando contiene sólo potencias pares de seno y coseno, no obstante, esta estrategia no funciona. En este caso, podemos aprovechar las *identidades de semiángulo*

Vea el Apéndice C, Fórmula 17.

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

y

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

El Ejemplo 2 muestra que el área de la región mostrada en la Figura 1 es $\pi/2$.

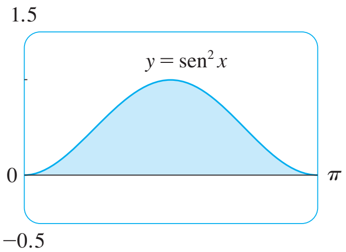


FIGURA 1

V EJEMPLO 2 Una integral con una potencia par de sen x Evalúe $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si escribimos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, la integral no es más sencilla de evaluar, pero usando la fórmula de semiángulo para $\operatorname{sen}^2 x$ tendremos

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi$$

Nótese que mentalmente hicimos la sustitución $u = 2x$ al integrar $\cos 2x$. Otro método para evaluar esta integral se dio en el Ejercicio 35 de la Sección 5.6.

Podemos usar una estrategia similar para integrar potencias de $\tan x$ y $\sec x$ usando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. (Vea Ejercicios 7-10.)

Sustitución trigonométrica

Diversos problemas prácticos nos piden integrar funciones algebraicas que contienen una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, o $\sqrt{x^2 - a^2}$. A veces, la mejor forma de efectuar la integración es hacer una sustitución trigonométrica que se deshaga del signo de raíz.

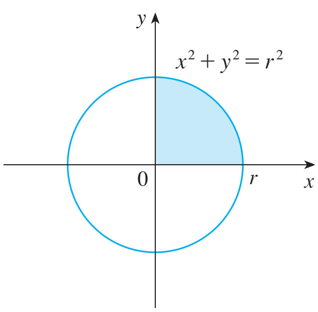


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Demuestre que el área de un círculo con radio r es πr^2.

SOLUCIÓN Ésta es, por supuesto, una bien conocida fórmula. Hace ya mucho tiempo que a usted, lector, *le dijeron* que es verdadera; pero la única forma de *demostrarla* realmente es por integración.

Para mayor sencillez, pongamos el círculo con su centro en el origen, de modo que su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$. Despejando y de esta ecuación, tendremos

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Como el círculo es simétrico con respecto a ambos ejes, el área total A es cuatro veces el área del primer cuadrante (vea Figura 2).

La parte del círculo del primer cuadrante está dada por la función

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant r$$

y por tanto

$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Para simplificar esta integral, nos gustaría hacer una sustitución que convierta $r^2 - x^2$ en el cuadrado de algo. La identidad trigonométrica $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ es útil aquí. De hecho, como

$$r^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta) = r^2\cos^2\theta$$

hacemos la sustitución

$$x = r\operatorname{sen}\theta$$

Esta sustitución es un poco diferente a nuestras sustituciones previas. Aquí la antigua variable x es una función de la nueva variable θ en lugar de que sea al contrario. Pero nuestra sustitución $x = r \operatorname{sen} \theta$ es equivalente a decir que $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/r)$.

Como $0 \leqslant x \leqslant r$, restringimos θ para que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Tenemos $dx = r \cos \theta \, d\theta$ y

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{r^2 \cos^2\theta} = r \cos \theta$$

porque $\cos \theta \geqslant 0$ cuando $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Por tanto la Regla de Sustitución da

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} (r \cos \theta)\, r \cos \theta \, d\theta = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta$$

Esta integral trigonométrica es semejante a la del Ejemplo 2; integramos $\cos^2\theta$ por medio de la identidad

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

Aquí hicimos la sustitución mental $u = 2\theta$.

Entonces
$$\tfrac{1}{4}A = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}r^2\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi r^2$$

Por tanto, hemos demostrado la famosa fórmula $A = \pi r^2$.

www.stewartcalculus.com

Para más ejemplos, haga clic en *Trigonometric Substitution* under *Additional Topics*.

El Ejemplo 3 sugiere que si un integrando contiene un factor de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, entonces una sustitución trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$ puede ser efectiva. Pero eso no significa que esa sustitución *siempre* sea el mejor método. Para evaluar $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, por ejemplo, una sustitución más sencilla es $u = a^2 - x^2$ porque $du = -2x\, dx$.

Cuando una integral contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, la sustitución $x = a \tan \theta$ debe ser considerada porque la identidad $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ elimina el signo de raíz. Del mismo modo, si el factor $\sqrt{x^2 - a^2}$ se presenta, la sustitución $x = a \sec \theta$ es efectiva.

Fracciones parciales

Vea en el Apéndice G un tratamiento más completo de fracciones parciales.

Integramos funciones racionales (razones entre polinomios) al expresarlas como sumas de fracciones más sencillas, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabemos cómo integrar. El siguiente ejemplo ilustra el caso más sencillo.

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\int \frac{5x - 4}{2x^2 + x - 1}\, dx$.

SOLUCIÓN Nótese que el denominador se puede factorizar como producto de factores lineales:

$$\frac{5x - 4}{2x^2 + x - 1} = \frac{5x - 4}{(x + 1)(2x - 1)}$$

En un caso como éste, donde el numerador tiene un menor grado que el denominador, podemos escribir la función racional dada como una suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x - 4}{(x + 1)(2x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{2x - 1}$$

donde A y B son constantes. Para hallar los valores de A y B multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $(x+1)(2x-1)$, obteniendo

$$5x-4=A(2x-1)+B(x+1)$$

o bien,
$$5x-4=(2A+B)x+(-A+B)$$

Los coeficientes de x deben ser iguales y los términos constantes también son iguales. Entonces

$$2A+B=5 \qquad \text{y} \qquad -A+B=-4$$

Despejando A y B de este sistema de ecuaciones lineales, obtenemos $A=3$ y $B=-1$, y entonces

Verifique que esta ecuación sea correcta al llevar las fracciones del lado derecho a un común denominador.

$$\frac{5x-4}{(x+1)(2x-1)}=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2x-1}$$

Cada una de las fracciones parciales resultantes es fácil de integrar (usando las sustituciones $u=x+1$ y $u=2x-1$, respectivamente). Entonces tendremos

$$\begin{aligned}\int\frac{5x-4}{2x^2+x-1}\,dx&=\int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2x-1}\right)dx\\&=3\ln|x+1|-\tfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C\end{aligned}$$

Nota 1: Si el grado del numerador del Ejemplo 4 hubiera sido el mismo que el del denominador, o de orden superior, hubiéramos tenido que tomar el paso preliminar de realizar una división larga. Por ejemplo,

$$\frac{2x^3-11x^2-2x+2}{2x^2+x-1}=x-6+\frac{5x-4}{(x+1)(2x-1)}$$

Nota 2: Si el denominador tiene más de dos factores lineales, necesitamos incluir un término correspondiente a cada factor. Por ejemplo,

$$\frac{x+6}{x(x-3)(4x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{4x+5}$$

donde A, B y C son constantes determinadas al resolver un sistema de tres ecuaciones con las incógnitas A, B y C.

Nota 3: Si un factor lineal se repite, necesitamos incluir términos extra en la expansión de fracción parcial. He aquí un ejemplo:

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x-1}$$

Nota 4: Cuando factorizamos un denominador tanto como sea posible, podría ocurrir que obtengamos un factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c, donde el discriminante b^2-4ac es negativo. Entonces la fracción parcial correspondientes de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

donde A y B son constantes a determinarse. Este término se puede integrar al completar el cuadrado y usar la fórmula

El lector puede verificar la Fórmula 1 al derivar el lado derecho.

1
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

V EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ no se puede factorizar más, escribimos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$ tendremos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

www.stewartcalculus.com

La integración es más difícil que la derivación porque no siempre es fácil reconocer cuál técnica de integración usar. Para asesoría sobre estrategia de integración, haga clic en *Strategy for Integration* under *Additional Topics*.

Entonces $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$ y por tanto

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right] dx$$

Para integrar el segundo término lo dividimos en dos partes:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 4}\,dx = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

Hacemos la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera de estas integrales para que $du = 2x\,dx$. Evaluamos la segunda integral por medio de la Fórmula 1 con $a = 2$:

Aquí usamos K para la constante de integración porque C ya se ha usado.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

5.7 Ejercicios

1–6 Evalúe la integral.

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$

3. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\,dx$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(mx)\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(6\theta)\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

7–8 Use la sustitución $u = \sec x$ para evaluar la integral.

7. $\displaystyle\int \tan^3 x \sec x\,dx$

8. $\displaystyle\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx$

9–10 Use la sustitución $u = \tan x$ para evaluar la integral.

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^4 x\,dx$

10. $\displaystyle\int \tan^4 x \sec^6 x\,dx$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

11. Use la sustitución $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, y la identidad $\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$ para evaluar

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$$

12. Use la sustitución $x = \sec \theta$, donde $0 \leq \theta < \pi/2$ o $\pi \leq \theta < 3\pi/2$, para evaluar

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4}\, dx$$

13. Use la sustitución $x = 2 \tan \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, para evaluar

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$$

14. (a) Verifique, por derivación, que

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\left(\sec \theta \tan \theta + \ln|\sec \theta + \tan \theta|\right) + C$$

(b) Evalúe $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$.

15–18 Evalúe la integral.

15. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}}\, dt$

16. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}}\, dx$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$

19–20 Escriba la forma de la expansión de fracción parcial de la función. No determine los valores numéricos de los coeficientes.

19. (a) $\displaystyle\frac{2x}{(x + 3)(3x + 1)}$ (b) $\displaystyle\frac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$

20. (a) $\displaystyle\frac{x}{x^2 + x - 2}$ (b) $\displaystyle\frac{x^2}{x^2 + x + 2}$

21–28 Evalúe la integral.

21. $\displaystyle\int \frac{5x + 1}{(2x + 1)(x - 1)}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 6}\, dx$

23. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}\, dx$

25. $\displaystyle\int \frac{10}{(x - 1)(x^2 + 9)}\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 5}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\, dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}\, dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x}\, dx$

29–32 Use división larga para evaluar la integral.

29. $\displaystyle\int \frac{x}{x - 6}\, dx$

30. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r + 4}\, dr$

31. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4}{x^2 + 4}\, dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 - 4x - 10}{x^2 - x - 6}\, dx$

33–34 Haga una sustitución para expresar el integrando como función racional y a continuación evalúe la integral.

33. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x - 4}\, dx$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x + 3} + x}$

35. Completando el cuadrado en la expresión cuadrática $x^2 + x + 1$ y haciendo una sustitución, evalúe

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

36. Completando el cuadrado en la expresión cuadrática $3 - 2x - x^2$ y haciendo una sustitución trigonométrica, evalúe

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$$

5.8 Integración usando tablas y sistemas computarizados de álgebra

En esta sección describimos la forma de evaluar integrales usando tablas y sistemas computarizados de álgebra.

Tablas de integrales

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando nos enfrentamos a una integral que es difícil de evaluar a mano y no tenemos acceso a un sistema computarizado de álgebra. Una tabla relativamente breve de 120 integrales, clasificada por su forma, aparece en las Páginas de Referencia al final de este libro. Hay tablas más extensas en *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae,* 31st ed. by Daniel Zwillinger (Boca Raton, FL, 2002) (709 entradas) o en *Table of Integrals, Series, and Products,* de Gradshteyn and Ryzhik, 6e (San Diego, 2000), que contiene cientos de páginas de integrales. Debe recordarse, no obstante, que las integrales no se presentan con frecuencia en exactamente la forma citada en una tabla. Por lo general es necesario usar la Regla de la Sustitución o manipulación algebraica para transformar una integral dada en una de las formas de la tabla.

La tabla de integrales aparece en las Páginas de Referencia 6-10 al final de este libro.

EJEMPLO 1 Use la Tabla de Integrales para evaluar $\int_0^2 \frac{x^2+12}{x^2+4}\,dx$.

SOLUCIÓN La única fórmula de la tabla que se asemeja a nuestra integral dada es la entrada 17:

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

Si realizamos división larga, obtenemos

$$\frac{x^2+12}{x^2+4} = 1 + \frac{8}{x^2+4}$$

Ahora podemos usar la Fórmula 17 con $a = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2+12}{x^2+4}\,dx &= \int_0^2 \left(1+\frac{8}{x^2+4}\right)dx \\ &= x + 8\cdot\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\bigg]_0^2 \\ &= 2 + 4\tan^{-1}1 = 2 + \pi\end{aligned}$$

V EJEMPLO 2 Use la Tabla de Integrales para hallar $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Si observamos la sección de la tabla titulada *Formas que Contienen* $\sqrt{a^2-u^2}$, veremos que la entrada más cercana es el número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Ésta no es exactamente lo que tenemos, pero podremos usarla si primero hacemos la sustitución $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5-u^2}}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du$$

A continuación usamos la Fórmula 34 con $a^2 = 5$ (de modo que $a = \sqrt{5}$):

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx &= \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du = \frac{1}{8}\left(-\frac{u}{2}\sqrt{5-u^2} + \frac{5}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C \\ &= -\frac{x}{8}\sqrt{5-4x^2} + \frac{5}{16}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Use la Tabla de Integrales para hallar $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$.

SOLUCIÓN Si vemos en la sección llamada *Formas Trigonométricas*, veremos que ninguna de las entradas explícitamente incluye un factor u^3, pero podemos usar la fórmula de reducción de la entrada 84 con $n = 3$:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x\, dx$$

85. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du$

Ahora necesitamos evaluar $\int x^2 \cos x\, dx$. Podemos usar la fórmula de reducción de la entrada 85 con $n = 2$, seguida por la entrada 82:

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - x \cos x) + K$$

Combinando estos cálculos, obtenemos

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C$$

donde $C = 3K$.

V EJEMPLO 4 Use la Tabla de Integrales para hallar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx$.

SOLUCIÓN Como la tabla da formas que contienen $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, y $\sqrt{x^2 - a^2}$, pero no $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ completamos el cuadrado:

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$$

Si hacemos la sustitución $u = x + 1$ (y entonces $x = u - 1$), el integrando contendrá la forma $\sqrt{a^2 + u^2}$:

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx = \int (u - 1)\sqrt{u^2 + 3}\, du$$

$$= \int u\sqrt{u^2 + 3}\, du - \int \sqrt{u^2 + 3}\, du$$

La primera integral se evalúa usando la sustitución $t = u^2 + 3$:

$$\int u\sqrt{u^2 + 3}\, du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} t^{3/2} = \tfrac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

Para la segunda integral usamos la Fórmula 21 con $a = \sqrt{3}$:

$$\int \sqrt{u^2 + 3}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 3} + \tfrac{3}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 3}\right)$$

Así,

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \frac{x + 1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \tfrac{3}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) + C$$

Sistemas computarizados de álgebra

Hemos visto que el uso de tablas comprende relacionar la forma del integrando dado con las formas de los integrandos de las tablas. Las calculadoras son particularmente buenas para relacionar formas y, así como usamos sustituciones en coordinación con tablas, un sistema computarizado de álgebra (CAS) puede realizar sustituciones que transforman un integrando dado en uno que se presenta en sus fórmulas guardadas. Por tanto, no es de sorprender que los CAS sean excelentes para integración. Eso no significa que la integración hecha manualmente sea obsoleta. Veremos que un cálculo manual a veces produce una integral indefinida de una forma que es más conveniente que una respuesta dada por una máquina.

Para empezar, veamos lo que ocurre cuando le pedimos a una máquina que integre la función relativamente sencilla $y = 1/(3x - 2)$. Usando la sustitución $u = 3x - 2$, un fácil cálculo manual dará

$$\int \frac{1}{3x - 2}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|3x - 2| + C$$

en tanto que Derive, Mathematica y Maple darán la respuesta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x - 2)$$

Lo primero que debemos observar es que los CAS omiten la constante de integración. En otras palabras, producen una antiderivada *particular*, no la más general. Por tanto, cuando se use integración a máquina, tendríamos que agregar una constante. En segundo término, se omiten signos de valor absoluto en la respuesta a máquina. Esto está bien si nuestro problema se limita sólo a valores de x mayores a $\frac{2}{3}$. Pero si estamos interesados en otros valores de x, entonces necesitamos insertar el símbolo de valor absoluto.

En el siguiente ejemplo reconsideramos la integral del Ejemplo 4, pero esta vez le pedimos la respuesta a una máquina.

EJEMPLO 5 Use un CAS para hallar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$.

SOLUCIÓN Maple responde con la respuesta

$$\tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \tfrac{1}{4}(2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x)$$

Esto se ve diferente a la respuesta que encontramos en el Ejemplo 4, pero es equivalente porque el tercer término se puede reescribir usando la identidad

Ésta es la fórmula del Problema 9(c) del Proyecto de Descubrimiento de la página 227.

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) &= \ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) + \sqrt{\tfrac{1}{3}(1 + x)^2 + 1}\right]\\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 + x + \sqrt{(1 + x)^2 + 3}\right]\\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right)\end{aligned}$$

El término extra resultante, $-\frac{3}{2}\ln\left(1/\sqrt{3}\right)$ puede ser absorbido en la constante de integración.

Mathematica da la respuesta

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1 + x}{\sqrt{3}}\right)$$

Mathematica combinó los primeros dos términos del Ejemplo 4 (y el resultado Maple) en un solo término por factorización.

Derive da la respuesta

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,(2x^2 + x + 5) - \tfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1\right)$$

El primer término es como el primer término en la respuesta de Mathematica, y el segundo término es idéntico al último término del Ejemplo 4.

EJEMPLO 6 Use un CAS para evaluar $\int x(x^2 + 5)^8\,dx$.

SOLUCIÓN Maple y Mathematica dan la misma respuesta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18} + \tfrac{5}{2}x^{16} + 50x^{14} + \tfrac{1750}{3}x^{12} + 4375x^{10} + 21875x^8 + \tfrac{218750}{3}x^6 + 156250x^4 + \tfrac{390625}{2}x^2$$

Es evidente que ambos sistemas deben haber expandido $(x^2 + 5)^8$ por el Teorema del Binomio y luego integraron cada término.

Si integramos manualmente, en cambio, usando la sustitución $u = x^2 + 5$, obtenemos

Derive y la TI-89 y TI-92 también dan esta respuesta.

$$\int x(x^2 + 5)^8\,dx = \tfrac{1}{18}(x^2 + 5)^9 + C$$

Para casi todos los fines, ésta es una forma más conveniente de la respuesta.

EJEMPLO 7 Use un CAS para hallar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$.

SOLUCIÓN Derive y Maple dan la respuesta

$$-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^4 x\cos^3 x - \tfrac{4}{35}\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x - \tfrac{8}{105}\cos^3 x$$

en tanto que Mathematica produce

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Sospechamos que hay identidades trigonométricas que muestran que estas tres respuestas son equivalentes. De hecho, si les pedimos a Derive, Maple y Mathematica que simplifiquen sus expresiones usando identidades trigonométricas, a final de cuentas producen la misma forma de la respuesta:

$$\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x$$

¿Podemos integrar todas las funciones continuas?

Surge la pregunta: ¿Nuestras fórmulas básicas de integración, junto con la Regla de Sustitución, integración por partes, tablas de integrales, y sistemas computarizados de álgebra, harán posible que hallemos la integral de toda función continua? En particular, ¿podemos usar estas técnicas para evaluar $\int e^{x^2}\,dx$? La respuesta es negativa, al menos no en términos de las funciones con las que estamos familiarizados.

Casi todas las funciones con que hemos estado trabajando en este libro son lo que se llama **funciones elementales**. Éstas no son polinomios, funciones racionales, funciones de potencias (x^a), funciones exponenciales (a^x), funciones logarítmicas, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas, y todas las funciones que se pueden obtener a partir de éstas por las cinco operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y composición. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cos x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

es una función elemental.

Si f es una función elemental, entonces f' es una función elemental pero $\int f(x)\, dx$ no necesita ser una función elemental. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Como f es continua, su integral existe, y si definimos la función F por

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

entonces sabemos por la Parte 1 del Teorema Fundamental de Cálculo que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

En consecuencia, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada F pero se ha demostrado que F no es una función elemental. Esto significa que sin importar cuánto lo intentemos, nunca tendremos éxito en evaluar $\int e^{x^2}\, dx$ en términos de las funciones que conocemos. (En el Capítulo 8, no obstante, veremos cómo expresar $\int e^{x^2}\, dx$ como una serie infinita.) Lo mismo se puede decir de las siguientes integrales:

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\, dx \qquad \int \cos(e^x)\, dx$$

$$\int \sqrt{x^3 + 1}\, dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\, dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

De hecho, la mayor parte de las funciones elementales no tienen antiderivadas elementales.

5.8 Ejercicios

1–22 Use la Tabla de Integrales de las Páginas de Referencia 6-10 para evaluar la integral.

1. $\int \tan^3(\pi x)\, dx$

2. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 + 9}}$

4. $\int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 7}}\, dx$

5. $\int e^{2x} \arctan(e^x)\, dx$

6. $\int \frac{\sqrt{2y^2 - 3}}{y^2}\, dy$

7. $\int_0^\pi x^3 \operatorname{sen} x\, dx$

8. $\int \frac{dx}{2x^3 - 3x^2}$

9. $\int \frac{\tan^3(1/z)}{z^2}\, dz$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\, dx$

11. $\int y\sqrt{6 + 4y - 4y^2}\, dy$

12. $\int x \operatorname{sen}(x^2) \cos(3x^2)\, dx$

13. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

14. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{5 - \operatorname{sen}\theta}}\, d\theta$

15. $\int \frac{e^x}{3 - e^{2x}}\, dx$

16. $\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2 - x^4}\, dx$

17. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

18. $\int_0^1 x^4 e^{-x}\, dx$

19. $\int \frac{\sqrt{4 + (\ln x)^2}}{x}\, dx$

20. $\int \frac{\sec^2\theta \tan^2\theta}{\sqrt{9 - \tan^2\theta}}\, d\theta$

21. $\int \sqrt{e^{2x} - 1}\, dx$

22. $\int e^t \operatorname{sen}(\alpha t - 3)\, dt$

23. Verifique la Fórmula 53 de la Tabla de Integrales (a) por derivación y (b) usando la sustitución $t = a + bu$.

24. Verifique la Fórmula 31 (a) por derivación y (b) por sustitución de $u = a \operatorname{sen}\theta$.

CAS **25–32** Use un sistema computarizado de álgebra para evaluar la integral. Compare la respuesta con el resultado de usar tablas. Si las respuestas no son iguales, demuestre que son equivalentes.

25. $\int \sec^4 x\, dx$

26. $\int x^2(1 + x^3)^4\, dx$

27. $\int x^2\sqrt{x^2 + 4}\, dx$

28. $\int \frac{dx}{e^x(3e^x + 2)}$

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

29. $\int x\sqrt{1+2x}\,dx$

30. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$

31. $\int \tan^5 x\,dx$

32. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx$

CAS **33.** (a) Use la tabla de integrales para evaluar $F(x) = \int f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

¿Cuál es el dominio de f y F?

(b) Use un CAS para evaluar $F(x)$. ¿Cuál es el dominio de la función F que produce el CAS? ¿Hay discrepancia entre este dominio y el dominio de la función F hallada en el inciso (a)?

CAS **34.** Los sistemas computarizados de álgebra a veces necesitan ayuda del estudiante. Trate de evaluar

$$\int (1+\ln x)\sqrt{1+(x\ln x)^2}\,dx$$

con un sistema computarizado de álgebra. Si éste no da una respuesta, haga una sustitución que cambie la integral en una que el CAS *pueda* evaluar.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

CAS Patrones en integrales

En este proyecto se usa un sistema computarizado de álgebra para investigar integrales indefinidas de familias de funciones. Al observar las formas que se presentan en las integrales de varios miembros de la familia, el lector primero calculará y luego demostrará una fórmula general para la integral de cualquier miembro de la familia.

1. (a) Use un sistema computarizado de álgebra para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+5)}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}\,dx$ (iv) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$

(b) Con base en la forma de sus respuestas del inciso (a) calcule el valor de la integral

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$$

si $a \neq b$. ¿Qué pasa si $a = b$?

(c) Compruebe sus cálculos pidiéndole a su CAS que evalúe la integral del inciso (b). A continuación demuéstrela usando fracciones parciales o por derivación.

2. (a) Use un sistema computarizado de álgebra para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \operatorname{sen} x\,\cos 2x\,dx$ (ii) $\int \operatorname{sen} 3x\,\cos 7x\,dx$ (iii) $\int \operatorname{sen} 8x\,\cos 3x\,dx$

(b) Con base en la forma de sus respuestas del inciso (a), calcule el valor de la integral

$$\int \operatorname{sen} ax\,\cos bx\,dx$$

(c) Compruebe su cálculo con un CAS. A continuación demuéstrelo por derivación. ¿Para qué valores de a y b es válido?

3. (a) Use un sistema computarizado de álgebra para evaluar las integrales siguientes.

(i) $\int \ln x\,dx$ (ii) $\int x\ln x\,dx$ (iii) $\int x^2\ln x\,dx$

(iv) $\int x^3\ln x\,dx$ (v) $\int x^7\ln x\,dx$

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

(b) Con base en la forma de sus respuestas del inciso (a), calcule el valor de

$$\int x^n \ln x \, dx$$

(c) Use el lector integración por partes para demostrar la conjetura que hizo en el inciso (b). ¿Para qué valores de n es válida?

4. (a) Use un sistema computarizado de álgebra para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int xe^x \, dx$ (ii) $\int x^2e^x \, dx$ (iii) $\int x^3e^x \, dx$

(iv) $\int x^4e^x \, dx$ (v) $\int x^5e^x \, dx$

(b) Con base en la forma de sus respuestas del inciso (a), calcule el valor de $\int x^6e^x \, dx$. A continuación use su CAS para comprobar su cálculo.

(c) Con base en las formas de los incisos (a) y (b), haga una conjetura referente al valor de la integral

$$\int x^n e^x \, dx$$

cuando n es un entero positivo.

(d) Use el lector inducción matemática para demostrar la conjetura que hizo en el inciso (c).

5.9 Integración aproximada

Hay dos situaciones en las que es imposible hallar el valor exacto de una integral definida.

La primera situación aparece del hecho que para evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ usando el Teorema de Evaluación necesitamos conocer una antiderivada de f. A veces, no obstante, es difícil, cuando no imposible, hallar una antiderivada (vea la Sección 5.8). Por ejemplo, es imposible evaluar exactamente las siguientes integrales:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$$

La segunda situación aparece cuando la función se determina de un experimento científico por medio de lecturas de instrumentos o datos recolectados. Puede que no haya fórmula para la función (vea Ejemplo 5).

En ambos casos necesitamos hallar valores aproximados de integrales definidas. Ya conocemos uno de estos métodos. Recuerde que la integral definida está definida como límite de sumas de Riemann, de modo que cualquier suma de Riemann se puede usar como aproximación a la integral: Si dividimos $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$, entonces tenemos

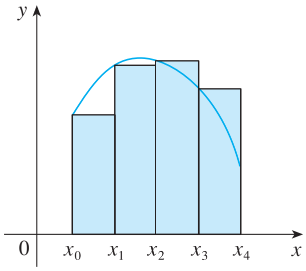
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

donde x_i^* es cualquier punto del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si x_i^* se escoge al punto extremo izquierdo del intervalo, entonces $x_i^* = x_{i-1}$ y tenemos

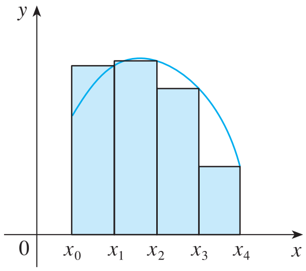
$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces la integral representa un área y (1) representa una aproximación de esta área por los rectángulos que se muestran en la Figura 1(a) con $n = 4$. Si escogemos que x_i^* sea el punto extremo derecho, entonces $x_i^* = x_i$ y tenemos

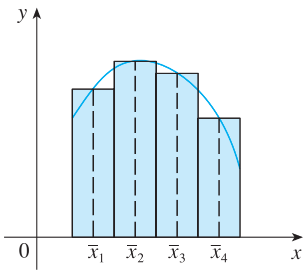
$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$



(a) Aproximación de punto extremo izquierdo



(b) Aproximación de punto extremo derecho



(c) Aproximación de punto medio

FIGURA 1

[Vea la Figura 1(b).] Las aproximaciones L_n y R_n definidas por las Ecuaciones 1 y 2 se denominan **aproximación de punto extremo izquierdo** y **aproximación de punto extremo derecho**, respectivamente.

En la Sección 5.2 también consideramos el caso donde x_i^* se escoge al punto medio $\bar{x}_i$ del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. La Figura 1(c) muestra la aproximación M_n de punto medio, que parece mejor que L_n o R_n.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

y $\qquad \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

Otra aproximación, llamada Regla del trapecio, resulta de promediar las aproximaciones de las Ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\right] \\
&= \frac{\Delta x}{2}\Big[\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\Big] \\
&= \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]
\end{aligned}$$

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde $\Delta x = (b-a)/n$ y $x_i = a + i\,\Delta x$.

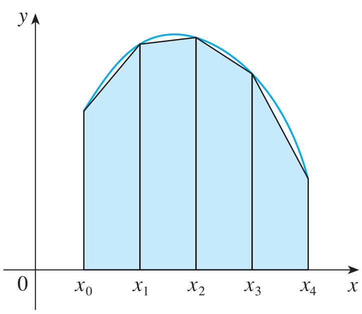


FIGURA 2
Aproximación del trapezoidal

La razón para el nombre de Regla del trapecio se puede ver de la Figura 2, que ilustra el caso con $f(x) \geqslant 0$ y $n = 4$. El área del trapecio que está arriba del i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

y si sumamos las áreas de todos los trapecios, obtenemos el lado derecho de la Regla del trapecio.

EJEMPLO 1 Use (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla del punto medio con $n = 5$ para aproximar la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 5$, $a = 1$ y $b = 2$, tenemos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0.2$, y por tanto la Regla del trapecio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0.2}{2}[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)]$$

$$= 0.1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.695635$$

Esta aproximación está ilustrada en la Figura 3.

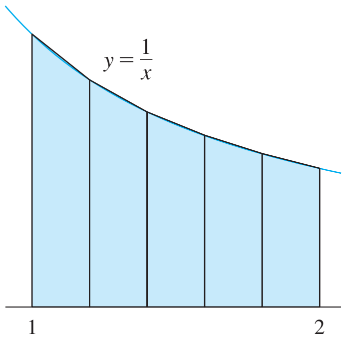


FIGURA 3

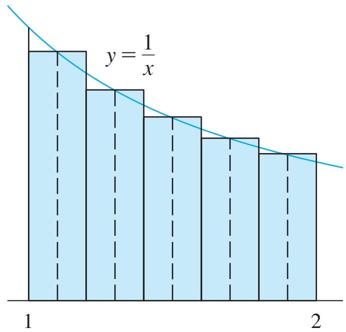


FIGURA 4

(b) Los puntos medios de los cinco subintervalos son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9, y la Regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

Esta aproximación está ilustrada en la Figura 4.

En el Ejemplo 1 deliberadamente escogimos una integral cuyo valor se puede calcular de manera explícita para que podamos ver qué tan precisas son las Reglas del trapecio y del punto medio. Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0.693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ aproximación $+$ error

El **error** al usar una aproximación se define como la cantidad que es necesario sumar a la aproximación para hacerla exacta. De los valores del Ejemplo 1 vemos que los errores de las aproximaciones de las Reglas del Trapecio y del Punto Medio para $n = 5$ son

$$E_T \approx -0.002488 \qquad \text{y} \qquad E_M \approx 0.001239$$

En general, tenemos

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{y} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

TEC Module 5.2/5.9 permite comparar métodos de aproximación.

Las tablas siguientes dan los resultados de cálculos similares a los del Ejemplo 1, pero para $n = 5$, 10 y 20 y para las aproximaciones de punto extremo izquierdas y derechas, así como las Reglas del trapecio y del punto medio.

Aproximaciones a $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.745635	0.645635	0.695635	0.691908
10	0.718771	0.668771	0.693771	0.692835
20	0.705803	0.680803	0.693303	0.693069

Errores correspondientes

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	-0.052488	0.047512	-0.002488	0.001239
10	-0.025624	0.024376	-0.000624	0.000312
20	-0.012656	0.012344	-0.000156	0.000078

Podemos hacer varias observaciones a partir de estas tablas:

1. En todos los métodos obtenemos aproximaciones más precisas cuando aumentamos el valor de n. (Pero valores muy grandes de n resultan en tantas operaciones aritméticas que debemos tener cuidado de errores de redondeo acumulados.)

Resulta que estas observaciones son verdaderas en la mayor parte de los casos.

2. Los errores de las aproximaciones de punto extremo izquierdo y derecho son de signo contrario y parecen disminuir por un factor de alrededor de 2 cuando duplicamos el valor de n.

3. Las Reglas del trapecio y el punto medio son mucho más precisas que las aproximaciones de punto extremo.

4. Los errores en las Reglas del trapecio y el punto medio son de signo contrario y parecen disminuir en un factor de alrededor de 4 cuando duplicamos el valor de n.

5. El tamaño del error en la Regla del punto medio es aproximadamente la mitad del tamaño del error en la Regla del trapecio.

La Figura 5 muestra por qué podemos esperar en general que la Regla del punto medio sea más precisa que la Regla del trapecio. El área de un rectángulo típico en la Regla del punto medio es la misma que el área del trapecio $ABCD$ cuyo lado superior es tangente a la gráfica en P. El área de este trapecio es más cercana al área bajo la gráfica de lo que es el área del trapecio $AQRD$ que se usa en la Regla del trapecio. [El error del punto medio (sombreado de rojo) es menor que el error del trapecio (sombreado de azul).]

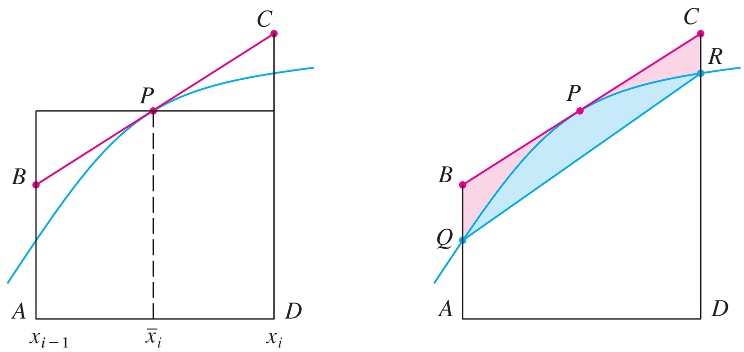


FIGURA 5

Estas observaciones están corroboradas en las siguientes estimaciones de error, que se demuestran en libros sobre análisis numérico. Nótese que la Observación 4 corresponde a la n^2 en cada denominador porque $(2n)^2 = 4n^2$. El hecho de que las estimaciones dependen del tamaño de la segunda derivada no es de sorprender si se ve la Figura 5, porque $f''(x)$ mide cuánto está curvada la gráfica. [Recuerde que $f''(x)$ mide la rapidez con que cambia la pendiente de $y = f(x)$.]

3 Límites de error Suponga que $|f''(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_T y E_M son los errores de las Reglas del trapecio y del punto medio, entonces

$$|E_T| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{y} \qquad |E_M| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Apliquemos esta estimación de error a la aproximación de la Regla del trapecio del Ejemplo 1. Si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. Como $1 \leqslant x \leqslant 2$, tenemos $1/x \leqslant 1$, y

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Por tanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ y $n = 5$ en la estimación de error (3), vemos que

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0.006667$$

K puede ser cualquier número mayor que todos los valores de $|f''(x)|$, pero valores más pequeños de K dan mejores límites de error.

Comparando esta estimación de error de 0.006667 con el error real de alrededor de 0.002488, vemos que puede ocurrir que el error real sea considerablemente menor que el límite superior para el error dado por (3).

V EJEMPLO 2 ¿Qué tan grande debemos tomar n para garantizar que las aproximaciones del trapecio y del punto medio para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ son precisas a no más de 0.0001?

SOLUCIÓN Vimos en el cálculo precedente que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, de modo que podemos tomar $K = 2$, $a = 1$ y $b = 2$ en (3). La precisión a no más de 0.0001 significa que el tamaño del error debe ser menor a 0.0001. Por tanto, escogemos n para que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.0001$$

Despejando n de la desigualdad, obtenemos

$$n^2 > \frac{2}{12(0.0001)}$$

o bien,

$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0006}} \approx 40.8$$

Es muy posible que un menor valor para n sea suficiente, pero 41 es el valor más pequeño para el cual la fórmula del límite de error puede *garantizar* una precisión a no más de 0.0001.

Entonces $n = 41$ asegura la precisión deseada.

Para la misma precisión con la Regla del punto medio escogemos n para que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.0001$$

que da
$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$$

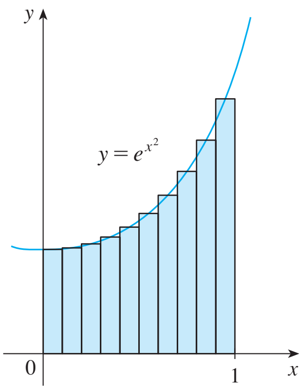


FIGURA 6

V EJEMPLO 3 Estimación del error al usar la Regla del punto medio

(a) Use la Regla del punto medio con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.

(b) Dé un límite superior para el error involucrado en esta aproximación.

SOLUCIÓN

(a) Como $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$, la Regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &\approx \Delta x\,[f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.85) + f(0.95)]\\ &= 0.1[e^{0.0025} + e^{0.0225} + e^{0.0625} + e^{0.1225} + e^{0.2025} + e^{0.3025}\\ &\qquad + e^{0.4225} + e^{0.5625} + e^{0.7225} + e^{0.9025}]\\ &\approx 1.460393\end{aligned}$$

La Figura 6 ilustra esta aproximación.

(b) Como $f(x) = e^{x^2}$, tenemos $f'(x) = 2xe^{x^2}$ y $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. También, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, tenemos $x^2 \leqslant 1$ y entonces

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

Las estimaciones de error dan límites superiores para el error. Son situaciones teóricas y del peor caso. El error real en este caso resulta ser de unos 0.0023.

Tomando $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$, y $n = 10$ en la estimación de error (3), vemos que un límite superior para el error es

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0.007$$

Regla de Simpson

Otra regla para integración aproximada resulta de usar parábolas en lugar de segmentos de rectas para aproximar una curva. Como antes, dividimos $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x\ (b - a)/n$, pero esta vez suponemos que n es un número *par*. Entonces, en cada par consecutivo de intervalos aproximamos la curva $y = f(x) \geqslant 0$ por una parábola como se ve en la Figura 7. Si $y_i = f(x_i)$, entonces $P_i(x_i, y_i)$ es el punto en la curva que está arriba de x_i. Una parábola típica pasa por tres puntos consecutivos P_i, P_{i+1} y P_{i+2}.

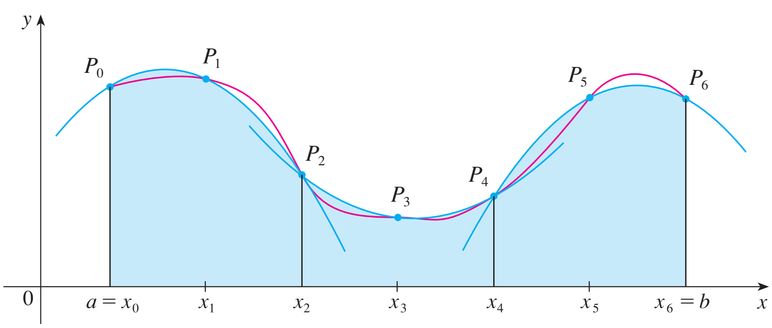


FIGURA 7

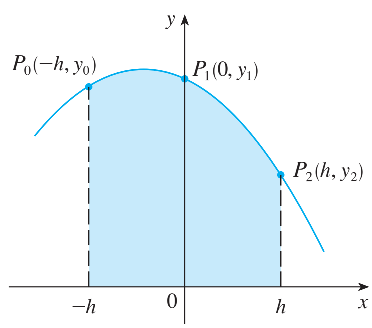


FIGURA 8

Para simplificar nuestros cálculos, primero consideramos el caso donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, y $x_2 = h$. (Vea Figura 8.) Sabemos que la ecuación de la parábola que pasa por P_0, P_1 y P_2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ y por tanto el área bajo la parábola de $x = -h$ a $x = h$ es

Aquí hemos usado el Teorema 5.5.6. Nótese que $Ax^2 + C$ es par y Bx es impar.

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx &= 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx \\ &= 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h \\ &= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)\end{aligned}$$

Pero, como la parábola pasa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ y $P_2(h, y_2)$, tenemos

$$\begin{aligned}y_0 &= A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C\end{aligned}$$

y por tanto $$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

En consecuencia, podemos reescribir el área bajo la parábola como

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ahora, al desplazar esta parábola horizontalmente no cambiamos el área bajo ella. Esto significa que el área bajo la parábola que pasa por P_0, P_1 y P_2 de $x = x_0$ a $x = x_2$ en la Figura 7 todavía es

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Análogamente, el área bajo la parábola que pasa por P_2, P_3 y P_4 de $x = x_2$ a $x = x_4$ es

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Si calculamos las áreas bajo todas las parábolas de este modo y sumamos los resultados, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\end{aligned}$$

Aun cuando hemos derivado esta aproximación para el caso en el que $f(x) \geqslant 0$, es una aproximación razonable para cualquier función continua f y se denomina Regla de Simpson en honor al matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761). Nótese el patrón de coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 4, 1.

Simpson

Thomas Simpson era un tejedor que aprendió matemáticas en forma autodidacta y continuó así hasta llegar a ser uno de los mejores matemáticos ingleses del siglo xviii. Lo que llamamos Regla de Simpson ya era conocida a Cavalieri y Gregory en el siglo xvii, pero Simpson la popularizó en su libro de texto de cálculo que fue un éxito de librería, *A New Treatise of Fluxions*.

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde n es par y $\Delta x = (b - a)/n$.

EJEMPLO 4 Use la Regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN Poniendo $f(x) = 1/x$, $n = 10$ y $\Delta x = 0.1$ en la Regla de Simpson, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx S_{10}\\ &= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]\\ &= \frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right)\\ &\approx 0.693150\end{aligned}$$

Nótese que, en el Ejemplo 4, la Regla de Simpson nos da una *mucho* mejor aproximación ($S_{10} \approx 0.693150$) al valor verdadero de la integral ($\ln 2 \approx 0.693147\ldots$) que la Regla del Trapecio ($T_{10} \approx 0.693771$) o la Regla del punto medio ($M_{10} \approx 0.692835$). Resulta (vea el Ejercicio 42) que las aproximaciones en la Regla de Simpson son promedios ponderados de los promedios de las Reglas del Trapecio y del Punto Medio:

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Recuerde que E_T y E_M por lo general tienen signos contrarios y $|E_M|$ es alrededor de la mitad del tamaño de $|E_T|$.)

En numerosas aplicaciones de cálculo necesitamos evaluar una integral incluso si no se conoce una fórmula explícita para y como función de x. Una función puede darse gráficamente o como tabla de valores de datos recolectados. Si hay evidencia de que los valores no están cambiando con gran rapidez, entonces la Regla del trapecio o la Regla de Simpson todavía se pueden usar para hallar un valor aproximado para $\int_a^b y\,dx$, la integral de y con respecto a x.

V EJEMPLO 5 **Estimación de la cantidad de datos transmitidos** La Figura 9 muestra el tráfico de datos en el vínculo de Estados Unidos a SWITCH, la red académica y de investigación suiza, el 10 de febrero de 1998. $D(t)$ es el gasto de información, medido en megabits por segundo (Mb/s). Use la Regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos en el vínculo de la medianoche al mediodía de ese día.

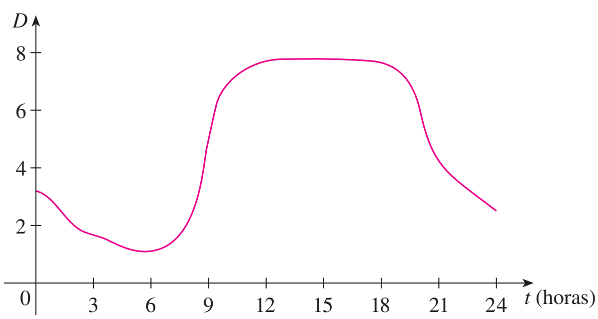


FIGURA 9

SOLUCIÓN Como buscamos que las unidades sean consistentes y $D(t)$ se mida en megabits por segundo, convertimos las unidades de t de horas a segundos. Si hacemos que $A(t)$ sea la cantidad de datos (en megabits) transmitida hasta el tiempo t, donde t se mide en segundos, entonces $A'(t) = D(t)$. Entonces, por el Teorema de Cambio Neto (vea la Sección 5.3), la cantidad total de datos transmitidos hasta el mediodía (cuando $t = 12 \times 60^2 = 43{,}200$) es

$$A(43{,}200) = \int_0^{43{,}200} D(t)\,dt$$

Estimamos los valores de $D(t)$ a intervalos de una hora desde la gráfica y los compilamos en la tabla.

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$	t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3.2	7	25,200	1.3
1	3,600	2.7	8	28,800	2.8
2	7,200	1.9	9	32,400	5.7
3	10,800	1.7	10	36,000	7.1
4	14,400	1.3	11	39,600	7.7
5	18,000	1.0	12	43,200	7.9
6	21,600	1.1			

A continuación usamos la Regla de Simpson con $n = 12$ y $\Delta t = 3600$ para estimar la integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43{,}200} A(t)\,dt &\approx \frac{\Delta t}{3}[D(0) + 4D(3600) + 2D(7200) + \cdots + 4D(39{,}600) + D(43{,}200)]\\ &\approx \frac{3600}{3}[3.2 + 4(2.7) + 2(1.9) + 4(1.7) + 2(1.3) + 4(1.0)\\ &\qquad + 2(1.1) + 4(1.3) + 2(2.8) + 4(5.7) + 2(7.1) + 4(7.7) + 7.9]\\ &= 143{,}880\end{aligned}$$

Entonces la cantidad total de datos transmitidos de la medianoche al mediodía es alrededor de 144,000 megabits, o sea 144 gigabits.

n	M_n	S_n
4	0.69121989	0.69315453
8	0.69266055	0.69314765
16	0.69302521	0.69314721

n	E_M	E_S
4	0.00192729	−0.00000735
8	0.00048663	−0.00000047
16	0.00012197	−0.00000003

La tabla del margen muestra la forma en que la Regla de Simpson se compara con la Regla del Punto Medio para la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$, cuyo verdadero valor es alrededor de 0.69314718. La segunda tabla muestra cómo disminuye el error E_s en la Regla de Simpson en un factor de alrededor de 16 cuando n se duplica. (En los Ejercicios 25 y 26 se pide al estudiante que verifique esto para dos integrales adicionales.) Esto es consistente con la aparición de n^4 en el denominador de la siguiente estimación de error para la Regla de Simpson. Es semejante a las estimaciones dadas en (3) para las Reglas del Trapecio y la del Punto Medio, pero usa la cuarta derivada de f.

4 Límite de error para la Regla de Simpson Suponga que $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_S es el error involucrado en el uso de la Regla de Simpson, entonces

$$|E_S| \leqslant \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande debemos tomar n para garantizar que la aproximación de la Regla de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ es precisa a no más de 0.0001?

SOLUCIÓN Si $f(x) = 1/x$, entonces $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Como $x \geqslant 1$, tenemos $1/x \leqslant 1$ y entonces

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

Numerosas calculadoras y sistemas computarizados de álgebra tienen un algoritmo integrado que calcula una aproximación de una integral definida. Algunas de estas máquinas usan la Regla de Simpson; otras usan técnicas más refinadas como es la integración numérica *adaptativa.* Esto significa que si una función fluctúa mucho más en cierta parte del intervalo que en otra parte, entonces esa parte es dividida en más subintervalos. Esta estrategia reduce el número de cálculos necesarios para alcanzar una precisión prescrita.

Por tanto, podemos tomar $K = 24$ en (4). Así, para un error menor a 0.0001, deberíamos escoger n para que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.0001$$

Esto da
$$n^4 > \frac{24}{180(0.0001)}$$

o bien,
$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0.00075}} \approx 6.04$$

Por tanto, $n = 8$ (n debe ser par) da la precisión deseada. (Compare esto con el Ejemplo 2, donde obtuvimos $n = 41$ para la Regla del Trapecio y $n = 29$ para la Regla del Punto Medio.)

EJEMPLO 7 **Estimación del error en el uso de la Regla de Simpson**

(a) Use la Regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Estime el error involucrado en esta aproximación.

SOLUCIÓN

(a) Si $n = 10$, entonces $\Delta x = 0.1$ y la Regla de Simpson da

La Figura 10 ilustra el cálculo del Ejemplo 7. Nótese que los arcos parabólicos están tan cerca de la gráfica de $y = e^{x^2}$ que prácticamente no se pueden distinguir de ella.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + \cdots + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)]\\ &= \frac{0.1}{3}[e^0 + 4e^{0.01} + 2e^{0.04} + 4e^{0.09} + 2e^{0.16} + 4e^{0.25} + 2e^{0.36}\\ &\qquad + 4e^{0.49} + 2e^{0.64} + 4e^{0.81} + e^1]\\ &\approx 1.462681\end{aligned}$$

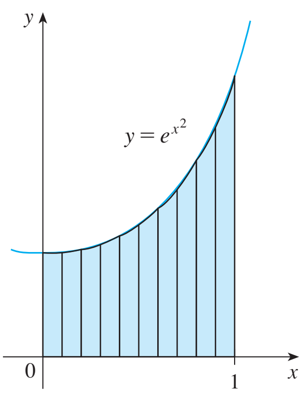


FIGURA 10

(b) La cuarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ es

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

y entonces, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, tenemos

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Por tanto, poniendo $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$ en (4), vemos que el error es cuando mucho

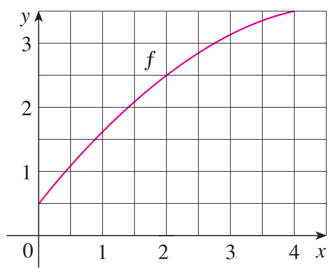
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0.000115$$

(Compare esto con el Ejemplo 3.) Así, correcta a tres lugares decimales, tenemos

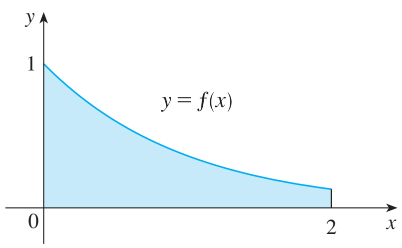
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1.463$$

5.9 Ejercicios

1. Sea $I = \int_0^4 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Use la gráfica para hallar L_2, R_2 y M_2.
(b) ¿Éstas son subestimaciones o estimaciones excesivas de I?
(c) Use la gráfica para hallar T_2. ¿Cómo se compara con I?
(d) Para cualquier valor de n, ordene los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente.



2. Las aproximaciones izquierda, derecha, de la Regla del Trapecio y del punto medio se emplearon para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra. Las estimaciones fueron 0.7811, 0.8675, 0.8632 y 0.9540, y se usó el mismo número de subintervalos en cada caso.
(a) ¿Cuál regla produjo cuál estimación?
(b) ¿Entre cuáles dos aproximaciones está el verdadero valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$?



3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ usando (a) la Regla del trapecio y (b) la Regla del punto medio, cada una con $n = 4$. De una gráfica del integrando, decida si sus respuestas son subestimaciones o estimaciones excesivas. ¿Qué se puede concluir acerca del verdadero valor de la integral?

4. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ en el rectángulo de observación de [0, 1] por [0, 0.5] y sea $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
(a) Use la gráfica para decidir si L_2, R_2, M_2 y T_2 subestiman o hacen una estimación excesiva de I.
(b) Para cualquier valor de n, ordene los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente.
(c) Calcule L_5, R_5, M_5 y T_5. De la gráfica, ¿cuál piensa usted que da la mejor estimación de I?

5–6 Use (a) La Regla del punto medio y (b) la Regla de Simpson para aproximar la integral dada con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis lugares decimales.) Compare sus resultados con el valor real para determinar el error en cada aproximación.

5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1 + x^2}\,dx,\quad n = 10$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,dx,\quad n = 4$

7–16 Use (a) la Regla del Trapecio, (b) la Regla del punto medio y (c) la Regla de Simpson para aproximar la integral dada con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis lugares decimales.)

7. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt[4]{1 + x^2}\,dx,\quad n = 8$

8. $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx,\quad n = 4$

9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{1 + x}\,dx,\quad n = 10$

10. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{1 + t^2 + t^4},\quad n = 6$

11. $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(e^{t/2})\,dt,\quad n = 8$

12. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx,\quad n = 8$

13. $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{t}}\operatorname{sen} t\,dt,\quad n = 8$

14. $\displaystyle\int_0^4 \cos\sqrt{x}\,dx,\quad n = 10$

15. $\displaystyle\int_1^5 \frac{\cos x}{x}\,dx,\quad n = 8$

16. $\displaystyle\int_4^6 \ln(x^3 + 2)\,dx,\quad n = 10$

17. (a) Encuentre las aproximaciones T_8 y M_8 para la integral $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$.
(b) Estime los errores en las aproximaciones del inciso (a).
(c) ¿Qué tan grande tenemos que escoger n para que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) sean precisas a no más de 0.0001?

18. (a) Encuentre las aproximaciones T_{10} y M_{10} para $\int_1^2 e^{1/x}\,dx$.
(b) Estime los errores en las aproximaciones del inciso (a).
(c) ¿Qué tan grande tenemos que escoger n para que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) sean precisas a no más de 0.0001?

19. (a) Encuentre las aproximaciones T_{10}, M_{10} y S_{10} para $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ y los errores correspondientes E_T, E_M y E_S.
(b) Compare los errores reales del inciso (a) con las estimaciones de error dadas por (3) y (4).
(c) ¿Qué tan grande tenemos que escoger n para que las aproximaciones T_n, M_n y S_n a la integral del inciso (a) sean precisas a no más de 0.00001?

20. ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que la aproximación de la Regla de Simpson a $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ es precisa a no más de 0.00001?

CAS **21.** El problema con las estimaciones de error es que con frecuencia es muy difícil calcular cuatro derivadas y obtener un buen límite superior K para $|f^{(4)}(x)|$ manualmente. Pero

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

sistemas computarizados de álgebra no tienen problema para calcular $f^{(4)}$ y graficarla, de manera que con facilidad podemos hallar un valor para K a partir de una gráfica de una máquina. Este ejercicio versa sobre aproximaciones a la integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, donde $f(x) = e^{\cos x}$.

(a) Use una gráfica para obtener un buen límite superior para $|f''(x)|$.
(b) Use M_{10} para aproximar I.
(c) Use el inciso (a) para estimar el error en el inciso (b).
(d) Use la función de integración numérica de su CAS para aproximar I.
(e) ¿Cómo se compara el error real con la estimación de error del inciso (c)?
(f) Use una gráfica para obtener un buen límite superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(g) Use S_{10} para aproximar I.
(h) Use el inciso (*f*) para estimar el error del inciso (g).
(i) ¿Cómo se compara el error real con la estimación de error del inciso (h)?
(j) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al usar S, sea menos de 0.0001?

CAS **22.** Repita el Ejercicio 21 para la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^3}\,dx$.

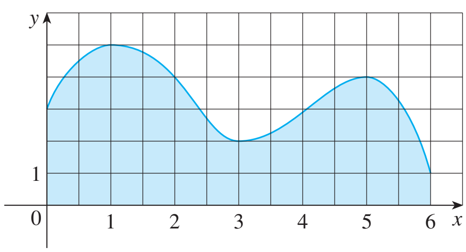
23–24 Encuentre las aproximaciones L_n, R_n, T_n y M_n para $n = 5$, 10 y 20. A continuación calcule los correspondientes errores E_L, E_R, E_T y E_M. (Redondee sus respuestas a seis lugares decimales. El lector puede usar el comando de suma de un sistema computarizado de álgebra.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué ocurre a los errores cuando n se duplica?

23. $\int_0^1 xe^x\,dx$ **24.** $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

25–26 Encuentre las aproximaciones T_n, M_n y S_n para $n = 6$ y 12. A continuación calcule los correspondientes errores E_T, E_M y E_S. (Redondee sus respuestas a seis lugares decimales. El lector puede usar el comando de suma de un sistema computarizado de álgebra.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué ocurre a los errores cuando n se duplica?

25. $\int_0^2 x^4\,dx$ **26.** $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

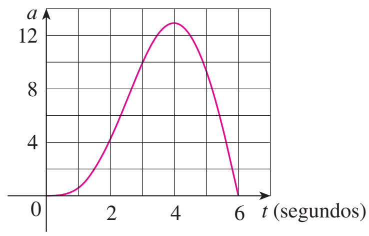
27. Calcule el área bajo la gráfica de la figura usando (a) la Regla del Trapecio, (b) la Regla del Punto Medio y (c) La Regla de Simpson, cada una con $n = 6$.



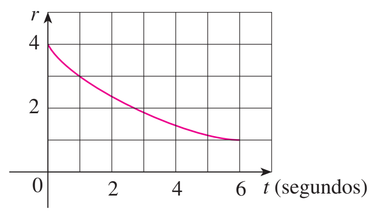
28. Se utilizó un cañón de radar para registrar la rapidez de un corredor durante los primeros 5 segundos de una carrera (vea la tabla). Use la Regla de Simpson para calcular la distancia que el corredor cubrió durante esos 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

29. A continuación vea gráfica de la aceleración $a(t)$ de un auto medida en ft/s^2. Use la Regla de Simpson para estimar el aumento en la velocidad del auto durante el intervalo de 6 segundos.



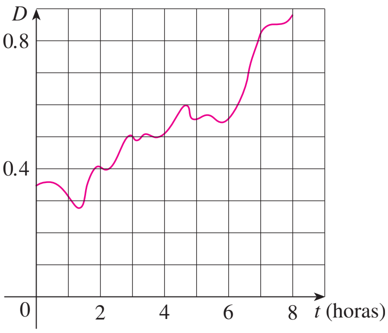
30. Se fuga agua de un tanque a razón de $r(t)$ litros por hora, donde se ilustra la gráfica de r. Use la Regla de Simpson para calcular la cantidad total de agua que se fugó durante las primeras seis horas.



31. La tabla (proporcionada por la San Diego Gas and Electric) da el consumo de la potencia P en megawatts en el condado de San Diego, de la medianoche a las 6:00 a.m. en un día de diciembre. Use la Regla de Simpson para calcular la potencia consumida durante ese periodo. (Use el hecho de que la potencia es la derivada de la energía.)

t	P	t	P
0:00	1814	3:30	1611
0:30	1735	4:00	1621
1:00	1686	4:30	1666
1:30	1646	5:00	1745
2:00	1637	5:30	1886
2:30	1609	6:00	2052
3:00	1604		

32. Se muestra la gráfica del tráfico en una línea de datos T1 de un servidor de Internet, de la medianoche a las 8:00 a.m. D es el gasto de información medido en megabits por segundo. Use la Regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese periodo.



33. (a) Use la Regla del punto medio y los datos dados para estimar el valor de la integral $\int_0^{3.2} f(x)\,dx$.

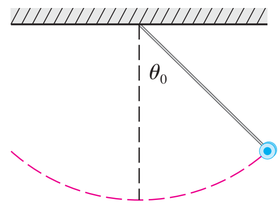
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	6.8	2.0	7.6
0.4	6.5	2.4	8.4
0.8	6.3	2.8	8.8
1.2	6.4	3.2	9.0
1.6	6.9		

(b) Si se sabe que $-4 \leqslant f''(x) \leqslant 1$ para toda x, calcule el error involucrado en la aproximación del inciso (a).

CAS **34.** La figura muestra un péndulo con longitud L que forma un ángulo máximo θ_0 con la vertical. Usando la Segunda Ley de Newton, se puede demostrar que el periodo T (el tiempo para una oscilación completa) está dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

donde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. Si $L = 1$ m y $\theta_0 = 42°$, use la Regla de Simpson con $n = 10$ para hallar el periodo.



35. La intensidad de luz con longitud de onda λ, que se desplaza por una rejilla de difracción con N aberturas a un ángulo θ, está dada por $I(\theta) = N^2 \operatorname{sen}^2 k/k^2$, donde $k = (\pi N d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$ y d es la distancia entre aberturas adyacentes. Un láser de helio-neón con longitud de onda $\lambda = 632.8 \times 10^{-9}$ m está emitiendo una angosta banda de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, por una rejilla con 10,000 aberturas espaciadas 10^{-4} m entre sí. Use la Regla del punto medio con $n = 10$ para estimar la intensidad total de luz $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\,d\theta$ que emerge de la rejilla.

36. Trace la gráfica de una función continua en [0, 2] para la cual la aproximación de punto extremo derecho con $n = 2$ es más precisa que la Regla de Simpson.

37. Trace la gráfica de una función continua en [0, 2] para la cual la Regla del trapecio con $n = 2$ es más precisa que la Regla del punto medio.

38. Use la Regla del trapecio con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20} \cos(\pi x)\,dx$. Compare su resultado con el valor real. ¿Puede explicar la discrepancia?

39. Si f es una función positiva y $f''(x) < 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, demuestre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\,dx < M_n$$

40. Demuestre que si f es un polinomio de grado 3 o menor, entonces la Regla de Simpson da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$.

41. Demuestre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

42. Demuestre que $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

5.10 Integrales impropias

Al definir una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ trabajamos con una función f definida en un intervalo finito $[a, b]$ y supusimos que f no tiene una discontinuidad infinita (vea la Sección 5.2). En esta sección ampliamos el concepto de una integral definida al caso donde el intervalo es infinito y también al caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$. En uno u otro de estos dos casos la integral se denomina integral *impropia*. Una de las aplicaciones más importantes de esta idea, las distribuciones de probabilidad, se estudiarán en la Sección 6.8.

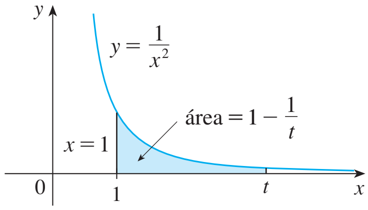


FIGURA 1

Tipo 1: Intervalos infinitos

Considere la región infinita S que se encuentra bajo la curva $y = 1/x^2$, arriba del eje x, y a la derecha de la recta $x = 1$. Podríamos pensar que, como S es infinita en extensión, esta área debe ser infinita, pero veamos esto más de cerca. El área de la parte de S que se encuentra a la izquierda de la recta $x = t$ (sombreada en la Figura 1) es

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Nótese que $A(t) < 1$ no importa lo grande que se escoja t.

También observamos que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada se aproxima a 1 cuando $t \to \infty$ (vea la Figura 2), de manera que decimos que el área de la región infinita S es igual a 1 y escribimos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

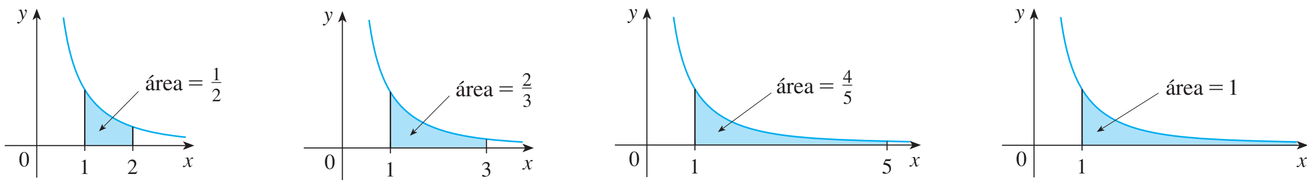


FIGURA 2

Usando este ejemplo como guía, definimos la integral de f (no necesariamente una función positiva) sobre un intervalo infinito como el límite de integrales sobre intervalos finitos.

1 **Definición de una integral impropia del Tipo 1**

(a) Si $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que este límite exista (como número finito).

(b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que este límite exista (como número finito).

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se denominan **convergentes** si existe el límite correspondiente y **divergentes** si el límite no existe.

(c) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

En el inciso (c) se puede usar cualquier número real a (vea Ejercicio 54).

Cualquiera de las integrales impropias de la Definición 1 puede ser interpretada como un área siempre que f sea una función positiva. Por ejemplo, en el caso (a) si $f(x) \geqslant 0$ y la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces definimos el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en la Figura 3 como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Esto es apropiado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es el límite cuando $t \to \infty$ del área bajo la gráfica de f de a a t.

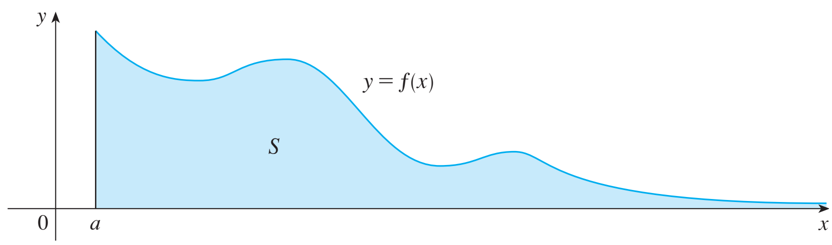


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Determine si la integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN De acuerdo al inciso (a) de la Definición 1, tenemos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

El límite no existe como un número finito y entonces la integral impropia $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente.

Comparemos el resultado del Ejemplo 1 con el ejemplo dado al principio de esta sección:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \;\text{ converge} \qquad\qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \;\text{ diverge}$$

Geométricamente, esto dice que aun cuando las curvas $y = 1/x^2$ y $y = 1/x$ se ven parecidas para $x > 0$, la región bajo $y = 1/x^2$ a la derecha de $x = 1$ (la región sombreada en la Figura 4) tiene área finita mientras que la correspondiente región bajo $y = 1/x$ (en la Figura 5) tiene área infinita. Nótese que $1/x^2$ y $1/x$ se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$ pero $1/x^2$ se aproxima a 0 con más rapidez que $1/x$. Los valores de $1/x$ no disminuyen con suficiente rapidez para que su integral tenga un valor finito.

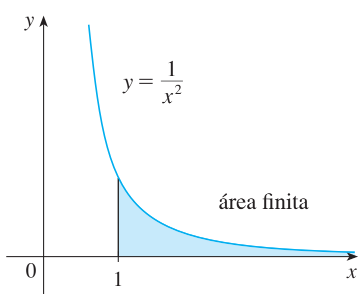


FIGURA 4 $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$ converge

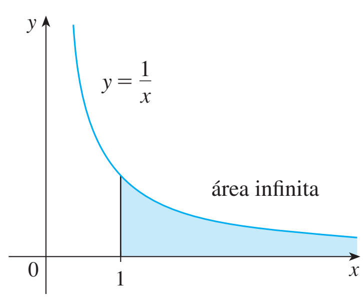


FIGURA 5 $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ diverge

EJEMPLO 2 **Uso de la Regla de l'Hospital con una integral impropia** Evalúe $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN Usando el inciso (b) de la Definición 1, tenemos

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} xe^x\,dx$$

Integramos por partes con $u = x$, $dv = e^x\,dx$ para que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_{t}^{0} xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_{t}^{0} e^x\,dx = -te^t - 1 + e^t$$

Sabemos que $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$, y por la Regla de l'Hospital tenemos

TEC En Module 5.10 se puede investigar visual y numéricamente si varias integrales impropias son convergentes o divergentes.

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (-e^t) = 0$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 + 0 = -1$$

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Es conveniente escoger $a = 0$ en la Definición 1(c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Debemos ahora evaluar separadamente las integrales del lado derecho:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\tan^{-1}t - \tan^{-1}0) = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como estas dos integrales son convergentes, la integral dada es convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

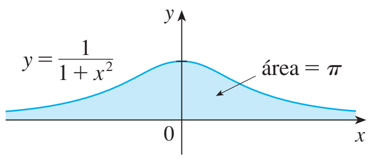


FIGURA 6

Como $1/(1 + x^2) > 0$, la integral impropia dada se puede interpretar como el área de la región infinita que está bajo la curva $y = 1/(1 + x^2)$ y arriba del eje x (vea la Figura 6).

EJEMPLO 4 ¿Para qué valores de p es convergente la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

SOLUCIÓN Sabemos del Ejemplo 1 que si $p = 1$, entonces la integral es divergente, de modo que supongamos que $p \neq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^{x=t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]\end{aligned}$$

Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$, de manera que cuando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ y $1/t^{p-1} \to 0$. Por tanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si } p > 1$$

y entonces la integral converge. Pero si $p < 1$, entonces $p - 1 < 0$ y

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{cuando } t \to \infty$$

y la integral diverge.

Resumimos el resultado del Ejemplo 4 para futura referencia:

2 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

Tipo 2: Integrandos discontinuos

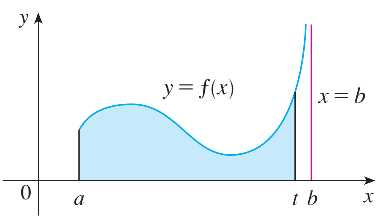


FIGURA 7

Suponga que f es una función continua positiva definida en un intervalo finito $[a, b)$ pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y arriba del eje x entre a y b. (Para integrales Tipo 1, las regiones se extienden indefinidamente en dirección horizontal. Aquí la región es infinita en una dirección vertical.) El área de la parte S entre a y t (la región sombreada de la Figura 7) es

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si ocurre que $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \to b^{-1}$, entonces decimos que el área de la región S es A y escribimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

Usamos esta ecuación para definir una integral impropia de Tipo 2 aun cuando f no sea una función positiva, sin importar qué tipo de discontinuidad tenga f en b.

Los incisos (b) y (c) de la definición 3 están ilustrados en las figuras 8 y 9 para los casos en los que $f(x) \geqslant 0$ y f tiene asíntotas verticales en a y c respectivamente.

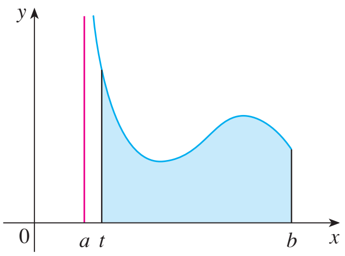


FIGURA 8

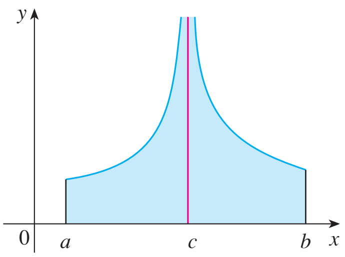


FIGURA 9

3 Definición de una integral impropia del tipo 2

(a) Si f es continua en $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como número finito).

(b) Si f es continua en $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se denomina **convergente** si el existe el límite correspondiente y **divergente** si el límite no existe.

(c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, y tanto $\int_a^c f(x)\,dx$ como $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 5 Integración de una función con una asíntota vertical Encuentre $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Observamos primero que la integral dada es impropia porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tiene la asíntota vertical $x = 2$. Como la discontinuidad infinita se presenta en el punto extremo izquierdo de $[2, 5]$, usamos el inciso (b) de la Definición 3:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}\\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5\\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right)\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

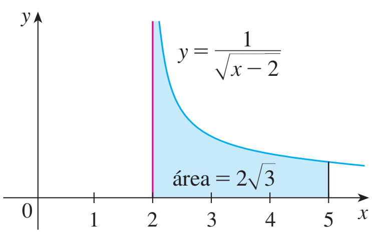


FIGURA 10

Entonces la integral impropia dada es convergente y, como el integrando es positivo, podemos interpretar el valor de la integral como el área de la región sombreada en la Figura 10.

V EJEMPLO 6 Determine si $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Nótese que la integral dada es impropia porque $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Usando el inciso (a) de la Definición 3 y la Fórmula 14 de la Tabla de Integrales, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^t\\ &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1] = \infty\end{aligned}$$

porque $\sec t \to \infty$ y $\tan t \to \infty$ cuando $t \to (\pi/2)^-$. Entonces la integral impropia dada es divergente.

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ si es posible.

SOLUCIÓN Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando. Como se presenta en la parte media del intervalo $[0, 3]$, debemos usar el inciso (c) de la Definición 3 con $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln|t-1| - \ln|-1|\right)$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

porque $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Entonces $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente. Esto implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. [No necesitamos evaluar $\int_1^3 dx/(x-1)$].

Atención: Si no hubiéramos observado la asíntota $x = 1$ en el Ejemplo 7 y en cambio hubiéramos confundido la integral con una integral ordinaria, entonces podríamos haber cometido el siguiente cálculo erróneo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esto es erróneo porque la integral es impropia y debe ser calculada en términos de límites.

De aquí en adelante, siempre que el lector vea el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ debe decidir, al observar la función f en $[a, b]$, si es una integral definida ordinaria o una integral impropia.

EJEMPLO 8 **Uso de la Regla de l'Hospital con una integral impropia** Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Sabemos que la función $f(x) = \ln x$ tiene una asíntota vertical en 0 porque $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$. Entonces la integral dada es impropia y tenemos

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\,dx$$

Ahora integramos por partes con $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$, y $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x\,dx = x\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$

$$= 1\ln 1 - t\ln t - (1-t)$$

$$= -t\ln t - 1 + t$$

Para hallar el límite del primer término usamos la Regla de l'Hospital:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

Por tanto, $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} (-t\ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$$

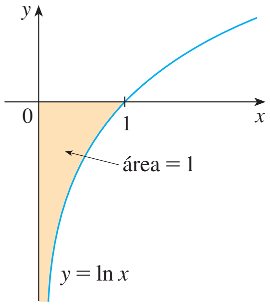


FIGURA 11

La Figura 11 muestra la interpretación geométrica de este resultado. El área de la región sombreada arriba de $y = \ln x$ y abajo del eje x es 1.

Una prueba de comparación para integrales impropias

A veces es imposible hallar el valor exacto de una integral impropia y aun así es importante saber si es convergente o divergente. En tales casos es útil el siguiente teorema. Aun cuando lo expresemos para integrales Tipo 1, un teorema similar es verdadero para integrales Tipo 2.

Teorema de comparación Suponga que f y g son funciones continuas con $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

(b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

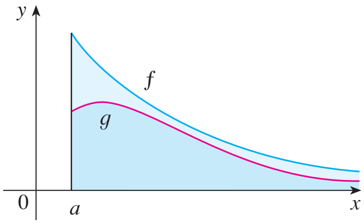


FIGURA 12

Omitimos la prueba del Teorema de Comparación, pero la Figura 12 lo hace parecer plausible. Si el área bajo la curva superior $y = f(x)$ es finita, entonces así es el área bajo la curva inferior $y = g(x)$. Y si el área bajo $y = g(x)$ es infinita, entonces así es el área bajo $y = f(x)$. [Nótese que lo contrario no es necesariamente cierto: Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ puede o no puede ser convergente, y si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ puede o no puede ser divergente.]

V EJEMPLO 9 Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ es convergente.

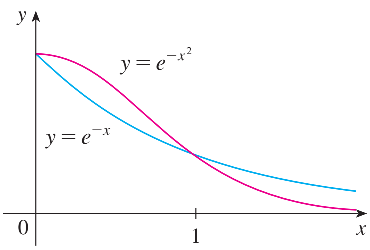


FIGURA 13

SOLUCIÓN No podemos evaluar la integral directamente porque la antiderivada de e^{-x^2} no es una función elemental (como se explica en la Sección 5.8). Escribimos

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

Y observamos que la primera integral en el lado derecho es precisamente una integral definida ordinaria. En la segunda integral usamos el hecho de que para $x \geqslant 1$ tenemos $x^2 \geqslant x$, de modo que $-x^2 \leqslant -x$ y por tanto $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. (Vea la Figura 13.) La integral de e^{-x} es fácil de evaluar:

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Así, tomando $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el Teorema de Comparación, vemos que $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ es convergente. Se deduce que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ es convergente.

TABLA 1

t	$\int_0^t e^{-x^2} dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

En el Ejemplo 9 demostramos que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ es convergente sin calcular su valor. En el Ejercicio 60 indicamos cómo demostrar que su valor es aproximadamente 0.8862. En teoría de probabilidad es importante saber el valor exacto de esta integral impropia, como veremos en la Sección 6.8; usando los métodos de cálculo de varias variables se puede demostrar que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$. La Tabla 1 ilustra la definición de una integral impropia al demostrar la forma en que los valores (generados en computadora) de $\int_0^t e^{-x^2} dx$ se aproximan a $\sqrt{\pi}/2$ cuando t se hace grande. De hecho, estos valores convergen con gran rapidez porque $e^{-x^2} \to 0$ muy rápidamente cuando $x \to \infty$.

TABLA 2

t	$\int_1^t [(1+e^{-x})/x]\,dx$
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1000	7.1271392134
10000	9.4297243064

EJEMPLO 10 Comparación con una función más sencilla La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente por el Teorema de Comparación porque

$$\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

y $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente por el Ejemplo 1 [o por (2) con $p = 1$].

La Tabla 2 ilustra la divergencia de la integral del Ejemplo 10. Parece que los valores no se aproximan a ningún número fijo.

5.10 Ejercicios

1. Explique por qué cada una de las siguientes integrales es impropia.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+5}\,dx$

2. ¿Cuáles de las siguientes integrales son impropias? ¿Por qué?

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x-1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x-1)\,dx$

3. Encuentre el área bajo la curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ y evalúela para $t = 10$, 100, y 1000. A continuación encuentre el área total bajo esta curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Grafique las funciones $f(x) = 1/x^{1.1}$ y $g(x) = 1/x^{0.9}$ en los rectángulos de observación $[0, 10]$ por $[0, 1]$ y $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
(b) Encuentre las áreas bajo las gráficas de f y g de $x = 1$ a $x = t$ y evalúe para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10} y 10^{20}.
(c) Encuentre el área total bajo cada curva para $x \geqslant 1$, si existe.

5–34 Determine si cada integral es convergente o divergente. Evalúe las que sean convergentes.

5. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}}\,dw$

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$

9. $\displaystyle\int_4^\infty e^{-y/2}\,dy$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

11. $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (y^3-3y^2)\,dy$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t\,dt$

17. $\displaystyle\int_0^\infty se^{-5s}\,ds$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^6 re^{r/3}\,dr$

19. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

23. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$

26. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

27. $\displaystyle\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

28. $\displaystyle\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{33} (x-1)^{-1/5}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4y-1}\,dy$

31. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

32. $\displaystyle\int_{\pi/2}^\pi \csc x\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

35–40 Trace la región y encuentre su área (si el área es finita).

35. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

36. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant -2,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x/2}\}$

37. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2/(x^2 + 9)\}$

38. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant xe^{-x}\}$

39. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$

40. $S = \left\{(x, y) \mid -2 < x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x+2}\right\}$

41. (a) Si $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, use su calculadora o computadora para hacer una tabla de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1000$ y $10{,}000$. ¿Parece que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente?
(b) Use el Teorema de Comparación con $f(x) = 1/x^2$ para demostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.
(c) Ilustre el inciso (b) al graficar f y g en la misma pantalla para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use su gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

42. (a) Si $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, use su calculadora o computadora para hacer una tabla de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5, 10, 100, 1{,}000$ y $10{,}000$. ¿Le parece que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es convergente o divergente?
(b) Use el Teorema de Comparación con $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para demostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es divergente.
(c) Ilustre el inciso (b) al graficar f y g en la misma pantalla para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use su gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es divergente.

43–48 Use el Teorema de Comparación para determinar si la integral es convergente o divergente.

43. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$

44. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

45. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2+e^x}\,dx$

47. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

48. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

49. La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

es impropia por dos razones: El intervalo $[0, \infty)$ es infinito y el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0. Evalúela al expresarla como una suma de integrales impropias del Tipo 2 y Tipo 1 como sigue:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

50–51 Encuentre los valores de p para los cuales la integral converge y evalúe la integral para esos valores de p.

50. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

52. (a) Evalúe la integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ y 3.
(b) Calcule el valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ cuando n sea un entero positivo arbitrario.
(c) Demuestre su cálculo usando inducción matemática.

53. (a) Demuestre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ es divergente.
(b) Demuestre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t x\,dx = 0$$

Esto demuestra que no podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$$

54. Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es convergente y a y b son números reales, demuestre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

55. Un fabricante de bombillas eléctricas desea producir bombillas que duren unas 700 horas pero, por supuesto, algunas se funden más rápido que otras. Sea $F(t)$ la fracción de bombillas de la compañía que se funden antes de t horas, de modo que $F(t)$ siempre está entre 0 y 1.
(a) Haga un dibujo aproximado del aspecto que usted piensa que podría tener la gráfica de F.
(b) ¿Cuál es el significado de la derivada $r(t) = F'(t)$?
(c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^\infty r(t)\,dt$? ¿Por qué?

56. El *promedio de rapidez* de moléculas en un gas perfecto es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas y v es la rapidez molecular. Demuestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

57. Como veremos en la Sección 7.4, una sustancia radiactiva se desintegra exponencialmente: La masa en el tiempo t es $m(t) = m(0)e^{kt}$, donde $m(0)$ es la masa inicial y k es una constante negativa. La *vida media* M de un átomo de la sustancia es

$$M = -k\int_0^\infty te^{kt}\,dt$$

Para el isótopo radiactivo de carbono, ^{14}C, empleado en la determinación de antigüedad por radiocarbono, el valor de k es -0.000121. Encuentre la vida media de un átomo de ^{14}C.

58. Los astrónomos usan una técnica llamada *estereografía estelar* para determinar la densidad de estrellas de un cúmulo de estrellas, a partir de la densidad observada (en dos dimensiones) que se puede analizar de una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R la densidad de estrellas depende sólo de la distancia r desde el centro del cúmulo. Si la densidad percibida de estrellas está dada por $y(s)$, donde s es la distancia plana observada desde el centro del cúmulo, y $x(r)$ es la densidad real, se puede demostrar que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\, x(r)\, dr$$

Si la densidad real de estrellas del cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

59. Determine qué tan grande tiene que ser el número a para que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0.001$$

60. Estime el valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ al escribirlo como la suma de $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$ y $\int_4^\infty e^{-x^2}\, dx$. Aproxime la primera integral al usar la Regla de Simpson con $n = 8$ y demuestre que la segunda integral es menor a $\int_4^\infty e^{-4x}\, dx$, que es menor a 0.0000001.

61. Demuestre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

62. Demuestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\, dy$ al interpretar las integrales como áreas.

63. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

64. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

65. Suponga que f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. ¿Es posible que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ sea convergente?

66. Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, entonces la siguiente integral es convergente.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$

5 Repaso

Revisión de conceptos

1. (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que utilice.
(b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.
(c) Si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

2. (a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua de a a b.
(b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\, dx$ si $f(x) \geqslant 0$?
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\, dx$ si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos? Ilustre con un diagrama.

3. (a) Exprese el Teorema de Evaluación.
(b) Exprese el Teorema de Cambio Neto.

4. Si $r(t)$ es la rapidez a la que entra agua a un depósito, ¿qué representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\, dt$?

5. Suponga que una partícula se mueve en un sentido y otro a lo largo de una recta con velocidad $v(t)$, medida en pies por segundo, y aceleración $a(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\, dt$?
(b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\, dt$?
(c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\, dt$?

6. (a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\, dx$.
(b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\, dx$?

7. Exprese ambas partes del Teorema Fundamental de Cálculo.

8. (a) Exprese la Regla de la Sustitución. En la práctica, ¿cómo se usa?

(b) Exprese la regla de integración por partes. En la práctica, ¿cómo se usa esta regla?

9. Exprese las reglas para aproximar la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ con la Regla del Punto Medio, la Regla del Trapecio y la Regla de Simpson. ¿Cuál esperaría el lector que dé la mejor estimación? ¿Cómo se aproxima el error para cada regla?

10. Defina las siguientes integrales impropias.

(a) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

11. Defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ para cada uno de los casos siguientes.

(a) f tiene una discontinuidad infinita en a.

(b) f tiene una discontinuidad infinita en b.

(c) f tiene una discontinuidad infinita en c, donde $a < c < b$.

12. Exprese el Teorema de Comparación para integrales impropias.

13. Explique exactamente lo que significa el enunciado de que "derivación e integración son procesos inversos."

Preguntas de verdadero-falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué; si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si f y g son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si f y g son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$, entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Si f' es continua en $[1, 3]$, entonces $\displaystyle\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$.

7. Si f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

8. Si f y g son derivables y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right)dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5}(ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2 - 1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln 15$

12. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ es convergente.

13. $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^3$ de 0 a 2.

14. Todas las funciones continuas tienen antiderivadas.

15. Todas las funciones continuas tienen derivadas.

16. La Regla del Punto Medio es siempre más precisa que la Regla del Trapecio.

17. Si f es continua, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$.

18. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente.

19. Si f es una función decreciente, continua, en $[1, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente.

20. Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ son convergentes ambas, entonces $\int_a^{\infty} [f(x) + g(x)]\,dx$ es convergente.

21. Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ son divergentes ambas, entonces $\int_a^{\infty} [f(x) + g(x)]\,dx$ es divergente.

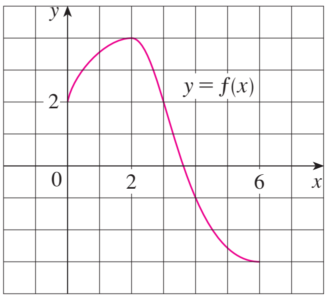
22. Si $f(x) \leqslant g(x)$ y $\int_0^{\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ también diverge.

23. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x)$$

Ejercicios

1. Use la gráfica dada de f para hallar la suma de Riemann con seis subintervalos. Tome los puntos muestrales como (a) puntos extremos izquierdos y (b) puntos medios. En cada caso trace un diagrama y explique lo que representa la suma de Riemann.



2. (a) Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

con cuatro subintervalos, tomando los puntos muestrales como puntos extremos derechos. Explique, con ayuda de un diagrama, lo que representa la suma de Riemann.

(b) Use la definición de una integral definida (con puntos extremos derechos) para calcular el valor de la integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\, dx$$

(c) Use el Teorema de Evaluación para comprobar su respuesta al inciso (b).

(d) Trace un diagrama para explicar el significado geométrico de la integral del inciso (b).

3. Evalúe

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

al interpretarla en términos de áreas.

4. Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \,\Delta x$$

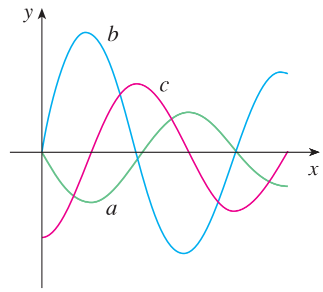
como integral definida en el intervalo $[0, \pi]$ y a continuación evalúe la integral.

5. Si $\int_0^6 f(x)\, dx = 10$ y $\int_0^4 f(x)\, dx = 7$, encuentre $\int_4^6 f(x)\, dx$.

CAS **6.** (a) Escriba $\int_0^2 e^{3x}\, dx$ como un límite de sumas de Riemann, tomando los puntos muestrales como puntos extremos derechos. Use un sistema computarizado de álgebra para evaluar la suma y calcular el límite.

(b) Use el Teorema de Evaluación para comprobar su respuesta del inciso (a).

7. La siguiente figura muestra las gráficas de f, f' y $\int_0^x f(t)\, dt$. Identifique cada gráfica y explique sus selecciones.



8. Evalúe:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\, dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\, dt$

9–34 Evalúe la integral.

9. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\, dx$

11. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\, dx$

13. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

14. $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\, du$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

16. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x}\, dx$

17. $\displaystyle\int_0^1 v^2 \cos(v^3)\, dv$

18. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\, dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi t}\, dt$

20. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2 - 3x}\, dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\, dx$

22. $\displaystyle\int_1^2 x^3 \ln x\, dx$

23. $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x + 10}\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^5 y e^{-0.6y}\, dy$

25. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \tan t}{2 + \cos t}\, dt$

26. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{(2t + 1)^3}$

27. $\displaystyle\int_1^4 x^{3/2} \ln x\, dx$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\, dx$

29. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 8}$

30. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$

31. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\, dx$

32. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\, dx$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

33. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta\ \tan\theta}{1+\sec\theta}\,d\theta$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

35–36 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta sea razonable al graficar tanto la función como su antiderivada (tome $C = 0$).

35. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

37. Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra bajo la curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. A continuación encuentre el área exacta.

38. Grafique la función $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x$ y use la gráfica para intuir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ A continuación evalúe la integral para confirmar su intuición.

39–42 Encuentre la derivada de la función.

39. $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$

40. $\displaystyle g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1-t^2}{1+t^4}\,dt$

41. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$

42. $\displaystyle y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

43–46 Use la Tabla de Integrales que aparece en las Páginas de Referencia para evaluar la integral.

43. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

44. $\displaystyle\int \csc^5 t\,dt$

45. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}\,dx$

47–48 Use (a) La Regla del Trapecio, (b) la Regla del Punto Medio y (c) la Regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral dada. Redondee sus respuestas a seis lugares decimales. ¿Puede el lector decir si sus respuestas son subestimaciones o estimaciones excesivas?

47. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$

48. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$

49. Estime los errores involucrados en el Ejercicio 47, incisos (a) y (b). ¿Qué tan grande debe ser n en cada caso para garantizar un error de menos de 0.00001?

50. Use la Regla de Simpson con $n = 6$ para estimar el área bajo la curva $y = e^x/x$ de $x = 1$ a $x = 4$

CAS **51.** (a) Si $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, use una gráfica para hallar un límite superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(b) Use la Regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ y use el inciso (a) para estimar el error.
(c) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al usar S_n es menor a 0.00001?

CAS **52.** (a) ¿Cómo evaluaría usted $\int x^5 e^{-2x}\,dx$ manualmente? (No haga realmente la integración.)
(b) ¿Cómo evaluaría usted $\int x^5 e^{-2x}\,dx$ usando tablas? (No la haga realmente.)
(c) Use un CAS para evaluar $\int x^5 e^{-2x}\,dx$.
(d) Grafique el integrando y la integral indefinida en la misma pantalla.

53. Use la Propiedad 8 de integrales para estimar el valor de

$$\int_1^3 \sqrt{x^2+3}\,dx$$

54. Use las propiedades de integrales para verificar que

$$0 \leqslant \int_0^1 x^4\cos x\,dx \leqslant 0.2$$

55–60 Evalúe la integral o demuestre que es divergente.

55. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

56. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^4}\,dx$

57. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-2x}\,dx$

58. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-3x}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

60. $\displaystyle\int_2^6 \frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy$

61. Use el Teorema de Comparación para determinar si la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^5+2}\,dx$$

es convergente o divergente.

62. ¿Para qué valores de a es $\int_0^{\infty} e^{ax}\cos x\,dx$ convergente? Use la Tabla de Integrales para evaluar la integral para esos valores de a.

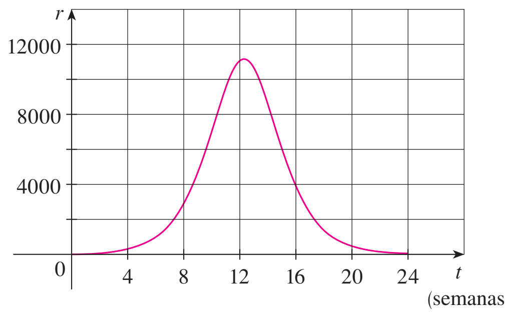
63. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con función de velocidad $v(t) = t^2 - t$, donde v se mide en metros por segundo. Encuentre (a) el desplazamiento y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

64. La lectura del velocímetro (v) en un auto se observó a intervalos de 1 minuto y se registró en la tabla siguiente. Use la Regla de Simpson para estimar la distancia recorrida por el auto.

t (min)	v (mi/h)	t (min)	v (mi/h)
0	40	6	56
1	42	7	57
2	45	8	57
3	49	9	55
4	52	10	56
5	54		

65. Sea $r(t)$ la rapidez a la que se consume el petróleo en el mundo, donde t se mide en años empezando en $t = 0$ el 1 de enero de 2000, y $r(t)$ se mide en barriles por año. ¿Qué representa $\int_0^8 r(t)\,dt$?

66. Una población de abejas aumentó con una rapidez $r(t)$ de abejas por semana, donde se muestra la gráfica de r. Use la Regla de Simpson con seis subintervalos para estimar el aumento de la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



67. Suponga que la temperatura en una varilla larga y delgada, colocada a lo largo del eje x, es inicialmente $C/(2a)$ si $|x| \leq a$ y 0 si $|x| > a$. Se puede demostrar que si la difusibilidad térmica de la varilla es k, entonces la temperatura de la varilla en el punto x en el tiempo t es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\,du$$

Para hallar la distribución de temperatura que resulta de un punto caliente inicial concentrado en el origen, necesitamos calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use la Regla de l'Hospital par hallar este límite.

68. La función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right)\,dx$ fue introducida en la Sección 5.4. Fresnel también empleó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right)\,dt$$

en su teoría de la difracción de ondas de luz.

(a) ¿En qué intervalos es C creciente?

(b) ¿En qué intervalos es C cóncava hacia arriba?

CAS (c) Use una gráfica para resolver la siguiente ecuación correcta a dos lugares decimales:

$$\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right)\,dt = 0.7$$

CAS (d) Trace las gráficas de C y S en la misma pantalla. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

69. Si f es una función continua tal que

$$\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

para toda x, encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

70. Encuentre una función f y un valor de la constante a tal que

$$2\int_a^x f(t)\,dt = 2 \operatorname{sen} x - 1$$

71. Si f' es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$2\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

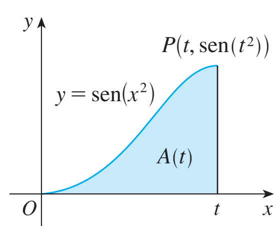
72. Si n es un entero positivo, demuestre que

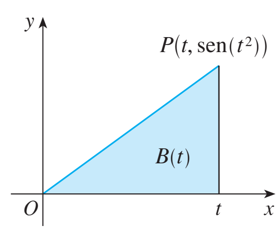
$$\int_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n n!$$

73. Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, demuestre que

$$\int_0^\infty f'(x)\,dx = -f(0)$$

74. La figura muestra dos regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ de 0 a t, y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O, P y $(t, 0)$. Encuentre $\lim_{t\to 0^+} A(t)/B(t)$.





Principios de resolución de problemas

Antes que el lector vea la solución del siguiente ejemplo, cúbralo y primero trate de resolver el problema por sí solo.

EJEMPLO Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right)$.

SOLUCIÓN Empecemos por tener una vista preliminar a los ingredientes de la función. ¿Qué pasa al primer factor, $x/(x-3)$, cuando x se aproxima a 3? El numerador se aproxima a 3 y el denominador se aproxima a 0, de modo que tenemos

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^+ \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{x-3} \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^-$$

El segundo factor aproxima $\int_3^3 (\operatorname{sen} t)/t\,dt$ que es 0. No está claro lo que ocurre a la función en su conjunto. (Un factor se hace grande mientras que el otro se hace pequeño.) Entonces, ¿qué hacemos?

RP Los principios de resolución de problemas se estudian en la página 83.

Uno de los principios de resolución de problemas es *reconocer algo ya conocido*. ¿Hay una parte de la función que nos recuerde de algo que ya hemos visto? Bien, la integral

$$\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

tiene x en su límite superior de integración y ese tipo de integral se presenta en la Parte 1 del Teorema Fundamental de Cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Esto sugiere que podría estar involucrada una derivación.

Una vez que empecemos a pensar en derivación, el denominador $(x-3)$ nos recuerda de algo más que debe sernos ya conocido: una de las formas de la definición de la derivada del Capítulo 2 es

$$F'(a) = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

y con $a = 3$ esto se convierte en

$$F'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$

Entonces, ¿cuál es la función F en nuestra situación? Nótese que si definimos

$$F(x) = \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

entonces $F(3) = 0$. ¿Qué se puede decir del factor x del numerador? Ése es un punto importante, de modo que factoricémoslo y pongamos juntos los cálculos:

Otro método es usar la Regla de l'Hospital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right) &= \lim_{x\to 3} x \cdot \lim_{x\to 3}\frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt}{x-3}\\
&= 3\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\\
&= 3F'(3) = 3\,\frac{\operatorname{sen} 3}{3} \qquad \text{(FTC1)}\\
&= \operatorname{sen} 3
\end{aligned}$$

Problemas

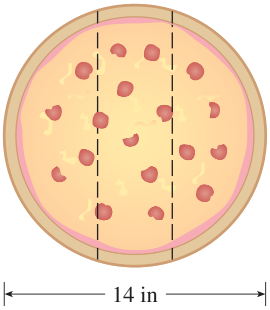


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. Tres estudiantes de matemáticas han pedido una pizza de 14 in. En lugar de rebanarla en la forma acostumbrada, deciden rebanarla en cortes paralelos, como se ve en la figura. Estando en un curso de especialización de matemáticas, pueden determinar dónde cortar para que cada uno obtenga la misma cantidad de pizza. ¿Dónde se hacen los cortes?

2. (a) Grafique varios miembros de la familia de funciones $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ y vea las regiones encerradas por estas curvas en el eje x. Haga una conjetura acerca de cómo están relacionadas estas regiones.

(b) Demuestre su conjetura del inciso (a).

(c) Vea de nuevo las gráficas del inciso (a) y úselas para dibujar la curva trazada por los vértices (puntos más altos) de la familia de funciones. ¿Puede el lector indicar qué clase de curva es ésta?

(d) Encuentre una ecuación de la curva trazada en el inciso (c).

3. Si $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$, donde f es una función continua, encuentre $f(4)$.

4. Si $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, encuentre $f'(x)$.

5. Si f es una función derivable tal que $f(x)$ nunca es 0 y $\int_0^x f(t)\,dt = [f(x)]^2$ para toda x, encuentre f.

6. Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n n!$$

7. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\,dt$.

8. Un disco circular de radio r se usa en un evaporador y gira en un plano vertical. Si ha de estar parcialmente sumergido en el líquido para maximizar el área húmeda expuesta del disco, demuestre que el centro del disco debe estar posicionado a una altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ arriba de la superficie del líquido.

9. Si $\int_0^4 e^{(x-2)^4}\,dx = k$, encuentre el valor de $\int_0^4 xe^{(x-2)^4}\,dx$.

10. Si $f(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\,dt$, donde $g(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\,dt$, encuentre $f'(\pi/2)$.

11. Encuentre una función f tal que $f(1) = -1$, $f(4) = 7$, y $f'(x) > 3$ para toda x, o demuestre que esa función no puede existir.

12. La figura muestra una región formada por todos los puntos dentro de un cuadrado que estan más cercanos al centro que a los lados del cuadrado. Encuentre el área de la región.

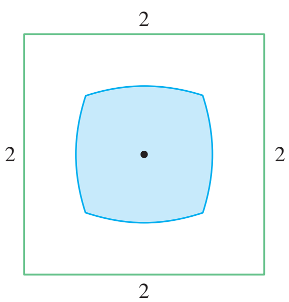


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

13. Encuentre el intervalo $[a, b]$ para el cual el valor de la integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\,dx$ es un máximo.

14. Suponga que f es continua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Encuentre el valor de la integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$.

15. Encuentre $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 + u^4}\,du\right) dt$.

16. Use una integral para estimar la suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i}$.

17. Evalúe $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \left(\frac{x^4}{1 + x^6}\right)^2 dx$.

18. Encuentre el valor mínimo del área de la región bajo la curva $y = x + 1/x$ de $x = a$ a $x = a + 1.5$, para toda $a > 0$.

19. Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right) dx$.

20. Evalúe $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\right)$.

21. Demuestre que

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Sugerencia: Empiece por demostrar que si I_n denota la integral, entonces

$$I_{k+1}=\frac{2k+2}{2k+3}I_k$$

22. Grafique $f(x)=\operatorname{sen}(e^x)$ y use la gráfica para estimar el valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\,dx$ es un máximo. A continuación encuentre el valor exacto de t que maximice esta integral.

23. Un hombre que inicialmente está de pie en el punto O camina a lo largo de un muelle tirando de un bote de remos mediante una cuerda de longitud L. El hombre mantiene la cuerda recta y tensa. La trayectoria seguida por el bote es una curva llamada *tractriz* (catenaria) y tiene la propiedad de que la cuerda es siempre tangente a la curva (vea la figura).

(a) Demuestre que si la trayectoria seguida por el bote es la gráfica de la función $y=f(x)$, entonces

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{-\sqrt{L^2-x^2}}{x}$$

(b) Determine la función $y=f(x)$.

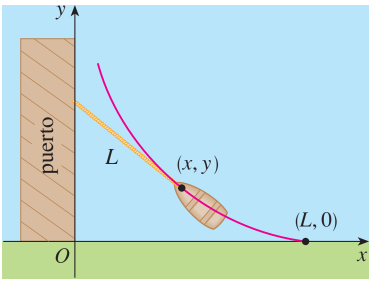
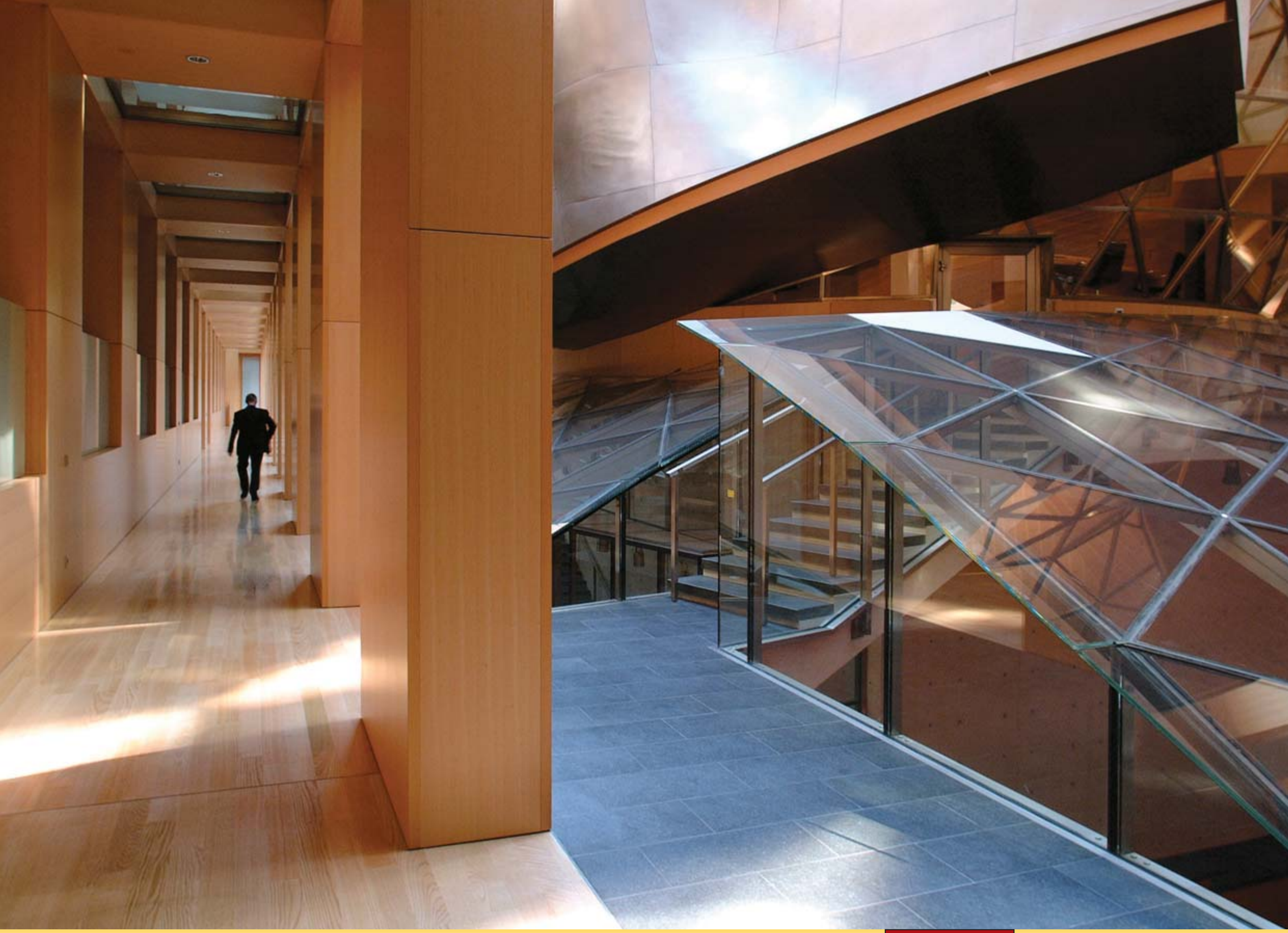


FIGURA PARA EL PROBLEMA 23

24. Para cualquier número c, hacemos que $f_c(x)$ sea el menor de dos números $(x-c)^2$ y $(x-c-2)^2$. Entonces definimos

$$g(c)=\int_0^1 f_c(x)\,dx$$

Encuentre los valores máximo y mínimo de $g(c)$ si $-2\leqslant c\leqslant 2$.



thomasmayerarchive.com

6 Aplicaciones de la integración

En este capítulo exploramos algunas de las aplicaciones de la integral definida, usándola para calcular áreas entre curvas, volúmenes de sólidos, longitudes de curvas, el valor promedio de una función, el trabajo realizado por una fuerza variable, el centro de gravedad de una placa, la fuerza en una represa, así como para calcular cantidades de interés en biología, economía y estadística. El tema común en casi todas estas aplicaciones es el siguiente método general, que es semejante al que empleamos para hallar áreas bajo curvas. Descomponemos la cantidad Q en un número grande de partes pequeñas y a continuación aproximamos cada una de las partes pequeñas por medio de una cantidad de la forma $f(x_i^*)\,\Delta x$ y así aproximamos Q por una suma de Riemann. Después tomamos el límite y expresamos Q como una integral. Por último, evaluamos la integral usando el Teorema de Evaluación o la Regla de Simpson o por medio de tecnología.

6.1 Más acerca de áreas

En el Capítulo 5 definimos y calculamos áreas de regiones que están bajo las gráficas de funciones. Aquí usamos integrales para hallar áreas de regiones más generales. Primero consideramos regiones que están entre las gráficas de dos funciones y, a continuación, vemos regiones encerradas por curvas paramétricas.

Áreas entre curvas

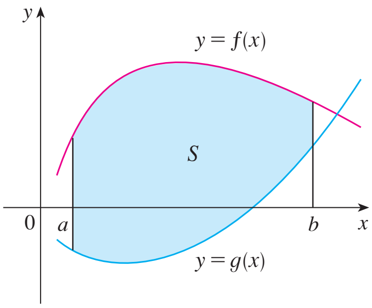


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Considere la región S que está entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$. (Vea Figura 1.)

Así como hicimos para áreas bajo curvas en la Sección 5.1, dividimos S en n franjas de anchos iguales y luego aproximamos la i-ésima franja por medio de un rectángulo con base Δx y altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Vea la Figura 2. Si nos parece, podríamos tomar todos los puntos muestrales de los puntos extremos derechos, en cuyo caso $x_i^* = x_i$.) La suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\, \Delta x$$

es por tanto una aproximación a lo que intuitivamente consideramos como el área de S.

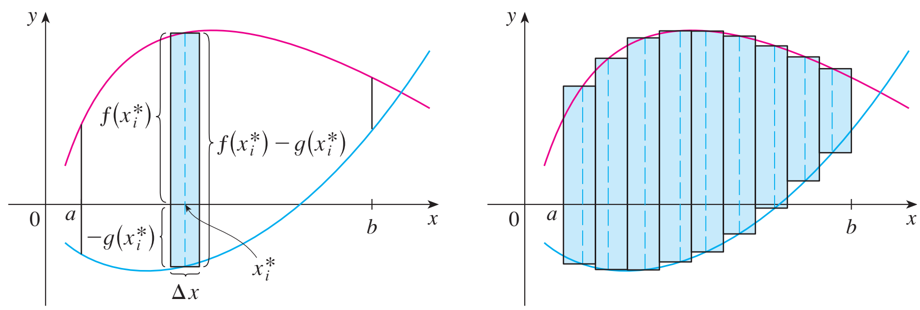


FIGURA 2 (a) Rectángulo típico (b) Rectángulos de aproximación

Esta aproximación parece mejorar cada vez más cuando $n \to \infty$. Por tanto, definimos el **área** A de la región S como el valor límite de la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación.

1 $$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\, \Delta x$$

Reconocemos el límite en la ecuación (1) como la integral definida de $f - g$. En consecuencia, tenemos la siguiente fórmula para el área.

2 El área A de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$, es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

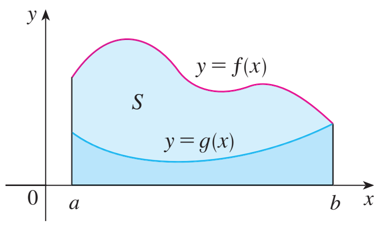


FIGURA 3

$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Nótese que en el caso especial donde $g(x) = 0$, S es la región bajo la gráfica de f y nuestra definición general de área (1) se reduce a nuestra definición previa (Definición 2 de la Sección 5.1).

En el caso donde f y g sean positivas, se puede ver de la Figura 3 por qué (2) es verdadera:

$$\begin{aligned} A &= [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)] \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 **Área entre dos curvas** Encuentre el área de la región acotada arriba por $y = e^x$, acotada abajo por $y = x$, y acotada a los lados por $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN La región se muestra en la Figura 4. La curva de frontera superior es $y = e^x$ y la curva de frontera inferior es $y = x$. Entonces usamos la fórmula del área (2) con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$, y $b = 1$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1 \\ &= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5 \end{aligned}$$

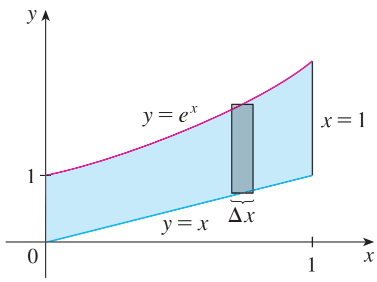


FIGURA 4

En la Figura 4 trazamos un rectángulo de aproximación típico con ancho Δx como recordatorio del procedimiento por el cual el área está definida en (1). En general, cuando establecemos una integral para un área, es útil trazar la región para identificar la curva superior y_T, la curva inferior y_B, y un rectángulo de aproximación típico como en la Figura 5. Entonces el área de un rectángulo típico es $(y_T - y_B)\,\Delta x$ y la ecuación

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\,dx$$

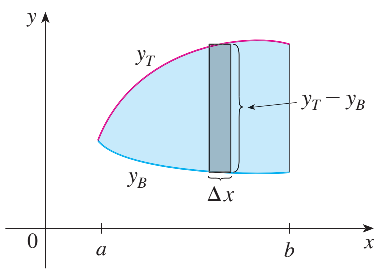


FIGURA 5

resume el procedimiento de sumar (en un sentido límite) las áreas de todos los rectángulos típicos.

Nótese que en la Figura 5 la frontera izquierda se reduce a un punto, mientras que en la figura 3 la frontera derecha se reduce a un punto. En el siguiente ejemplo ambas fronteras de sus lados se reducen a un punto, de modo que el primer paso es hallar a y b.

V **EJEMPLO 2** Encuentre el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Primero encontramos los puntos de intersección de las parábolas al resolver sus ecuaciones simultáneamente. Esto da $x^2 = 2x - x^2$, o $2x^2 - 2x = 0$. Así, $2x(x - 1) = 0$, de modo que $x = 0$ o 1. Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Vemos de la Figura 6 que las fronteras superior e inferior son

$$y_T = 2x - x^2 \qquad \text{y} \qquad y_B = x^2$$

El área de un rectángulo típico es

$$(y_T - y_B)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x = (2x - 2x^2)\,\Delta x$$

y la región está entre $x = 0$ y $x = 1$. Por tanto, el área total es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

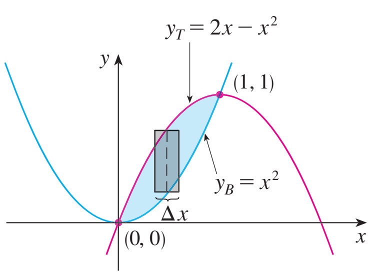


FIGURA 6

A veces es difícil, o hasta imposible, hallar los puntos de intersección de dos curvas exactamente. Como se ve en el siguiente ejemplo, podemos usar calculadora o computadora para hallar valores aproximados para los puntos de intersección y luego proseguimos como antes.

EJEMPLO 3 Encuentre el área aproximada de la región acotada por las curvas $y = x/\sqrt{x^2+1}$ y $y = x^4 - x$.

SOLUCIÓN Si intentáramos hallar los puntos exactos de intersección, tendríamos que resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x$$

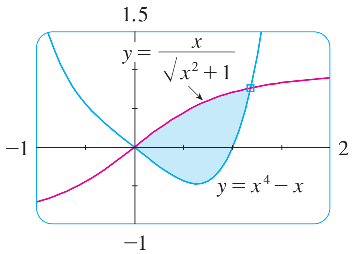


FIGURA 7

Esto se ve como una ecuación muy difícil de resolver exactamente (de hecho, es imposible), por lo cual usamos una calculadora de gráficas para trazar las gráficas de las dos curvas de la Figura 7. Un punto de intersección es el origen. Hacemos un acercamiento hacia el otro punto de intersección y encontramos que $x \approx 1.18$. (Si se desea mayor precisión, usaríamos el método de Newton o la función de hallar raíces en nuestra calculadora, si la tiene.) Entonces, una aproximación del área entre las curvas es

$$A \approx \int_0^{1.18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar el primer término usamos la sustitución $u = x^2 + 1$. Entonces $du = 2x\,dx$, y cuando $x = 1.18$ tenemos $u \approx 2.39$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
A &\approx \tfrac{1}{2}\int_1^{2.39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18} (x^4 - x)\,dx \\
&= \sqrt{u}\,\Big]_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1.18} \\
&= \sqrt{2.39} - 1 - \frac{(1.18)^5}{5} + \frac{(1.18)^2}{2} \\
&\approx 0.785
\end{aligned}$$

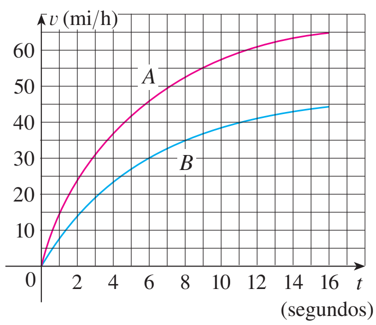


FIGURA 8

EJEMPLO 4 **Interpretación del área entre curvas de velocidad** La Figura 8 muestra curvas de velocidad para dos autos, A y B, que arrancan juntos y corren por el mismo camino. ¿Qué representa el área entre las dos curvas? Use la Regla de Simpson para estimarla.

SOLUCIÓN Sabemos de la Sección 5.3 que el área bajo la curva de velocidad A representa la distancia recorrida por el auto A durante los primeros 16 segundos. Análogamente, el área bajo la curva B es la distancia recorrida por el auto B durante ese periodo. Entonces el área entre estas curvas, que es la diferencia de las áreas bajo las curvas, es la distancia entre los autos después de 16 segundos. Leemos las velocidades a partir de la gráfica y las convertimos a pies por segundo (1 mi/h $= \frac{5280}{3600}$ ft/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

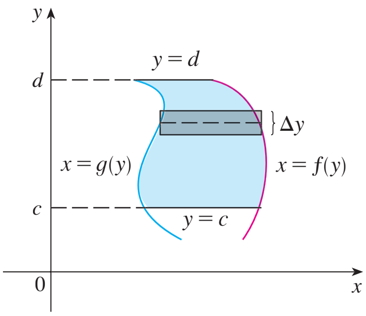


FIGURA 9

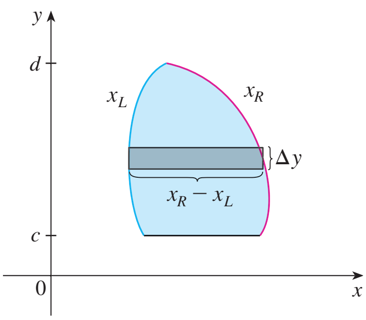


FIGURA 10

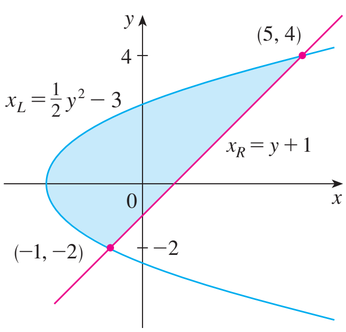


FIGURA 11

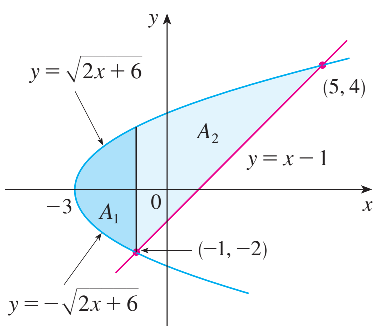


FIGURA 12

Usando la Regla de Simpson con $n = 8$ intervalos, de modo que $\Delta t = 2$, estimamos la distancia entre los autos después de 16 segundos:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\, dt$$

$$\approx \tfrac{2}{3}[0 + 4(13) + 2(20) + 4(23) + 2(25) + 4(28) + 2(29) + 4(29) + 30]$$

$$\approx 367 \text{ ft}$$

Algunas regiones se tratan mejor si se considera x como una función de y. Si una región está acotada por curvas con ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$, y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (vea Figura 9), entonces su área es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

Si escribimos x_R para la frontera derecha y x_L para la frontera izquierda, entonces, como se ilustra en la Figura 10, tenemos

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\, dy$$

Aquí un rectángulo de aproximación típico tiene dimensiones $x_R - x_L$ y Δy.

V EJEMPLO 5 Integrar con respecto a *y* es a veces más fácil
Encuentre el área encerrada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN Resolviendo las dos ecuaciones encontramos que los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. De la ecuación de la parábola despejamos x y observamos de la Figura 11 que las curvas de frontera izquierda y derecha son

$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad x_R = y + 1$$

Debemos integrar entre los valores y apropiados, $y = -2$ y $y = 4$. Entonces

$$A = \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\, dy = \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Bigg]_{-2}^{4}$$

$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18$$

Nota: Podríamos haber hallado el área del Ejemplo 5 al integrar con respecto a x en lugar de y, pero el cálculo es mucho más complicado. Hubiera significado dividir la región en dos y calcular las áreas marcadas A_1 y A_2 en la Figura 12. El método que empleamos en el Ejemplo 5 es *mucho* más fácil.

Áreas encerradas por curvas paramétricas

Sabemos que el área bajo una curva $y = F(x)$ de a a b es $A = \int_a^b F(x)\, dx$, donde $F(x) \geqslant 0$. Si la curva es trazada una vez por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, entonces podemos calcular una fórmula para el área usando la Regla de Sustitución para

Los límites de integración para t se encuentran como es usual con la Regla de Sustitución. Cuando $x = a$, t es α o β. Cuando $x = b$, t es el valor restante.

Integrales Definidas como sigue:

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \qquad \left[\text{o} \quad \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right]$$

V EJEMPLO 6 Encuentre el área bajo un arco del cicloide

$$x = r(\theta - \text{sen}\,\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

(Vea la Figura 13.)

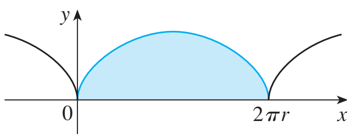


FIGURA 13

SOLUCIÓN Un arco del cicloide está dado por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Usando la Regla de Sustitución con $y = r(1 - \cos\theta)$ y $dx = r(1 - \cos\theta)\,d\theta$, tenemos

$$A = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)\,r(1 - \cos\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= r^2 \left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\,\text{sen}\,\theta + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right]_0^{2\pi}$$

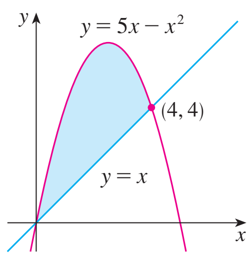
$$= r^2\left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2$$

El resultado del Ejemplo 6 dice que el área bajo un arco del cicloide es tres veces el área del círculo giratorio que genera el cicloide (vea el Ejemplo 7 en la Sección 1.7). Galileo calculó este resultado pero fue primero demostrado por el matemático francés Roberval y el matemático italiano Torricelli.

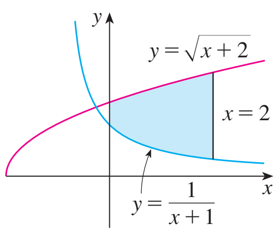
6.1 Ejercicios

1–4 Encuentre el área de la región sombreada.

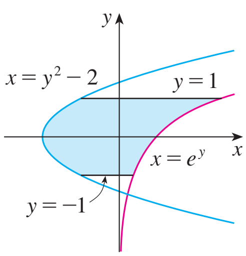
1.



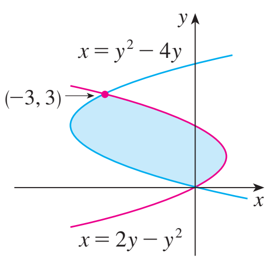
2.



3.



4.



5–12 Trace la región encerrada por las curvas dadas. Decida si integrar con respecto a x o a y. Dibuje un rectángulo de aproximación típico y marque su altura y ancho. A continuación encuentre el área de la región.

5. $y = e^x, \quad y = x^2 - 1, \quad x = -1, \quad x = 1$

6. $y = \ln x, \quad xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 3$

7. $y = x^2, \quad y^2 = x$

8. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

9. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

10. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

11. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

12. $y = \text{sen}\,x, \quad y = 2x/\pi, \quad x \geqslant 0$

13–18 Trace la región encerrada por las curvas dadas y encuentre su área.

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

14. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

15. $y = e^x, \quad y = xe^x, \quad x = 0$

16. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $y = 1/x, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$

18. $y = 3x^2, \quad y = 8x^2, \quad 4x + y = 4, \quad x \geqslant 0$

19–22 Use una gráfica para hallar coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. A continuación encuentre (aproximadamente) el área de la región acotada por las curvas.

19. $y = x \operatorname{sen}(x^2), \quad y = x^4$

20. $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}, \quad y = x^5 - x, \quad x \geqslant 0$

21. $y = x^2 \ln x, \quad y = \sqrt{x-1}$

22. $y = x \cos x, \quad y = x^{10}$

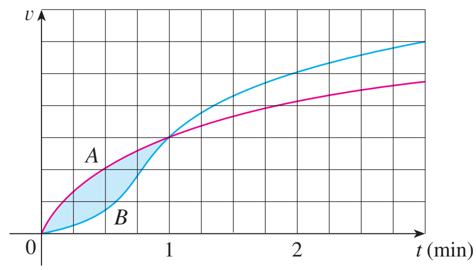
23. Dibuje la región que está entre las curvas $y = \cos x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$ y entre $x = 0$ y $x = \pi/2$. Observe que la región está formada por dos partes separadas. Encuentre el área de esta región.

24. Trace las curvas $y = \cos x$ y $y = 1 - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, y observe que la región entre ellas está formada por dos partes separadas. Encuentre el área de esta región.

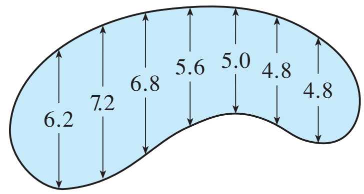
25. Los autos de carrera conducidos por Chris y Kelly están lado a lado en la salida de una carrera. La tabla muestra las velocidades de cada auto (en millas por hora) durante los primeros diez segundos de la carrera. Use la Regla de Simpson para calcular qué distancia recorre Kelly más que Chris durante los primeros diez segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

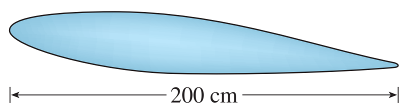
26. Dos autos, A y B, arrancan simultáneamente y aceleran desde el reposo. La figura siguiente muestra las gráficas de sus funciones de velocidad.
(a) ¿Cuál auto está adelante después de un minuto? Explique.
(b) ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?
(c) ¿Cuál auto está adelante después de dos minutos? Explique.
(d) Estime el tiempo en el que los autos están de nuevo lado a lado.



27. Los anchos (en metros) de una piscina en forma de riñón se midieron a intervalos de 2 metros como se indica en la figura. Use la Regla de Simpson para calcular el área de la piscina.

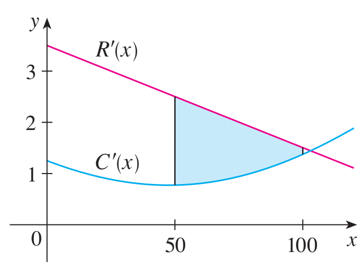


28. En la figura siguiente se ve la sección transversal de un ala de avión. Las mediciones del grosor del ala, en centímetros y a intervalos de 20 cm son 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1, 8.7 y 2.8. Use la Regla de Simpson para calcular el área de la sección transversal del ala.

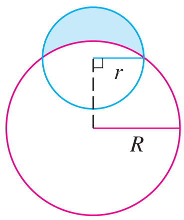


29. Si la tasa de nacimientos en una población es $b(t) = 2200e^{0.024t}$ personas por año, y la tasa de fallecimientos es $d(t) = 1460e^{0.018t}$ personas por año, encuentre el área entre estas curvas para $0 \leqslant t \leqslant 10$. ¿Qué representa esta área?

30. La figura siguiente muestra gráficas de la función ingreso marginal R' y la función de costo marginal C' para un fabricante. [Recuerde de la Sección 4.6 que $R(x)$ y $C(x)$ representan el ingreso y costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que R y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Use la Regla del punto medio para calcular el valor de esta cantidad.



31. Encuentre el área de la región en forma de media luna (llamada *luna*) acotada por arcos de círculos con radios r y R. (Vea la figura.)



32. Trace la región del plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ y encuentre su área.

33. Use las ecuaciones paramétricas de una elipse, $x = a\cos\theta$, $y = b\,\text{sen}\,\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, para hallar el área que encierra.

34. Encuentre el área encerrada por la curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ y el eje y.

35. Encuentre el área encerrada por el eje x y la curva $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$.

CAS **36.** Grafique el astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$ y establezca una integral para el área que encierra. A continuación use un sistema computarizado de álgebra para evaluar la integral.

37. Encuentre el área acotada por el lazo de la curva con ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.

38. Estime el área de la región encerrada por el lazo de la curva $x = t^3 - 12t$, $y = 3t^2 + 2t + 5$.

39. Encuentre los valores de c tales que el área de la región acotada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

40. Encuentre el área de la región acotada por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en $(1, 1)$ y el eje x.

41. Encuentre el número b tal que la recta $y = b$ divide la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones con área igual.

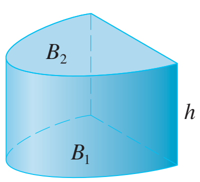
42. (a) Encuentre el número a tal que la recta $x = a$ biseca el área bajo la curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Encuentre el número b tal que la recta $y = b$ biseca el área del inciso (a).

43. Encuentre una función f continua positiva tal que el área bajo la gráfica de f de 0 a t es $A(t) = t^3$ para toda $t > 0$.

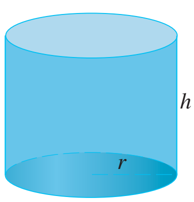
44. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valor de c el área de la región encerrada por las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ y $x = 0$ es igual al área de la región encerrada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

45. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ encierran una región? Encuentre el área de la región.

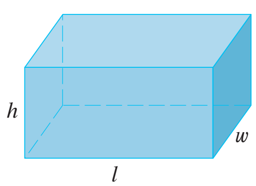
6.2 Volúmenes



(a) Cilindro $V = Ah$



(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$



(c) Caja rectangular $V = lwh$

FIGURA 1

Al tratar de hallar el volumen de un sólido vemos el mismo tipo de problema que para hallar áreas. Tenemos una idea intuitiva de lo que significa un volumen, pero debemos precisar esta idea mediante el cálculo para dar una definición exacta de volumen.

Empezamos con un tipo sencillo de sólido llamado **cilindro** (o, más precisamente, un *cilindro recto*). Como se ilustra en la Figura 1(a), un cilindro está acotado por una región plana B_1, llamada **base,** y una región congruente B_2 en un plano paralelo. El cilindro está formado por todos los puntos en segmentos de recta que son perpendiculares a la base y unen B_1 a B_2. Si el área de la base es A y la altura del cilindro (la distancia de B_1 a B_2) es h, entonces el volumen V del cilindro está definido como

$$V = Ah$$

En particular, si la base es un círculo con radio r, entonces el cilindro es circular con volumen $V = \pi r^2 h$ [vea Figura 1(b)], y si la base es un rectángulo con longitud l y ancho w, entonces el cilindro es una caja rectangular (también llamada *paralelepípedo rectangular*) con volumen $V = lwh$ [vea Figura 1(c)].

Para un sólido S que no es un cilindro primero "cortamos" S en piezas y aproximamos cada pieza por un cilindro. Calculamos el volumen de S al sumar los volúmenes de los cilindros. Llegamos al volumen exacto de S mediante un proceso limitador en el que el número de piezas se hace grande.

Empezamos por cortar S con un plano y obtener una región plana que se denomina **sección transversal** de S. Sea $A(x)$ el área de sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x y que pasa por el punto x, donde $a \leqslant x \leqslant b$. (Vea la Figura 2. Considere cortar S con un cuchillo que pase por x y calcular el área de esta rebanada.) El área de sección transversal $A(x)$ va a variar cuando x aumenta de a a b.

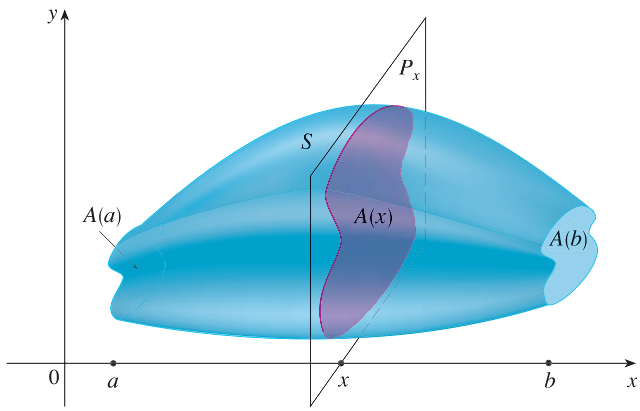


FIGURA 2

Dividamos S en n "placas" de igual ancho Δx usando los planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ para cortar el sólido. (Tómelo como una rebanada de una pieza de pan.) Si escogemos los puntos muestrales x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$, podemos aproximar la i-ésima placa S_i (la parte de S que está entre los planos $P_{x_{i-1}}$ y P_{x_i}) por un cilindro con área de base $A(x_i^*)$ y "altura" Δx. (Vea Figura 3.)

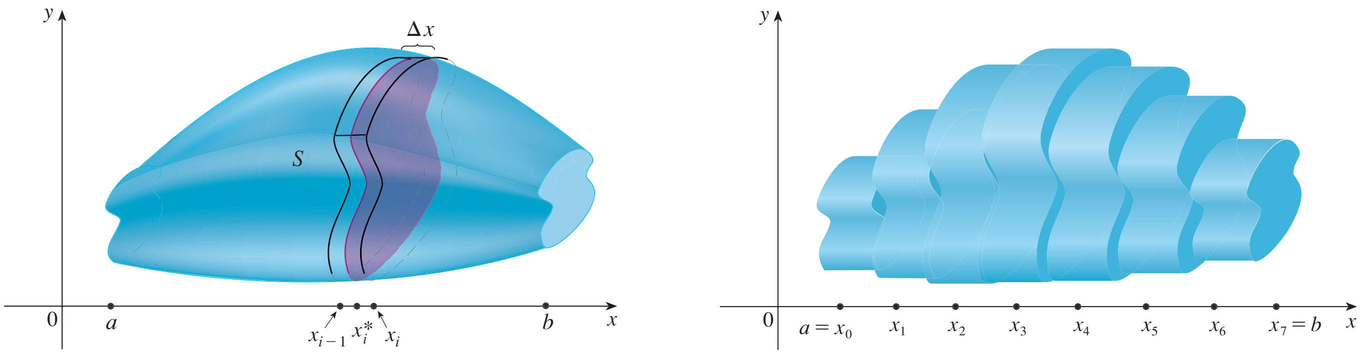


FIGURA 3

El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\,\Delta x$, de modo que una aproximación a nuestra concepción intuitiva del volumen de la i-ésima placa S_i es

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Sumando los volúmenes de estas placas obtenemos una aproximación del volumen total (es decir, lo que consideramos intuitivamente como el volumen):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximación mejora cada vez más cuando $n \to \infty$. (Considere las rebanadas como si se hicieran cada vez más delgadas.) Por tanto, *definimos* el volumen como el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$, pero reconocemos el límite de las sumas de Riemann como una integral definida y tenemos entonces la definición siguiente.

Se puede demostrar que esta definición es independiente de cómo S esté situada con respecto al eje x. En otras palabras, sin importar cómo se rebane S en planos paralelos siempre obtendremos la misma respuesta para V.

Definición de volumen Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de sección transversal de S del plano P_x, que pasa por x y perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el **volumen** de S es

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Cuando usemos la fórmula de volumen $V = \int_a^b A(x)\,dx$, es importante recordar que $A(x)$ es el área de una sección transversal en movimiento obtenida al cortar el eje x por una perpendicular x.

Observe que, para un cilindro, el área de sección transversal es constante: $A(x) = A$ para toda x. Entonces nuestra definición de volumen da $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; esto está acorde con la fórmula $V = Ah$.

EJEMPLO 1 Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

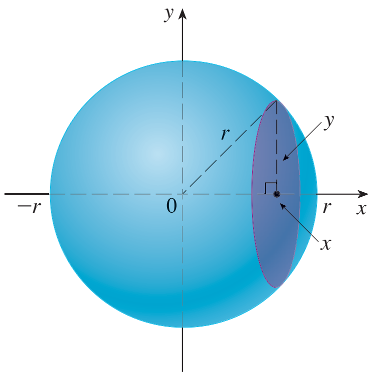


FIGURA 4

SOLUCIÓN Si colocamos la esfera de modo que su centro se encuentre en el origen (vea Figura 4), entonces el plano P_x corta la esfera en un círculo cuyo radio (por el Teorema de Pitágoras) es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Entonces, el área de sección transversal es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Usando la definición de volumen con $a = -r$ y $b = r$, tenemos

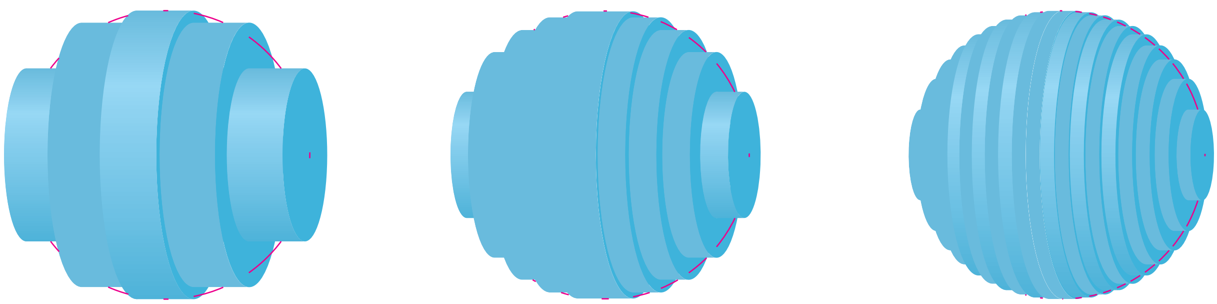
$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(El integrando es par.)} \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

La Figura 5 ilustra la definición de volumen cuando el sólido es una esfera con radio $r = 1$. Del resultado del Ejemplo 1, sabemos que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi$, que es aproximadamente 4.18879. Aquí las placas son cilindros circulares, o *discos*, y las tres partes de la Figura 5 muestran las interpretaciones geométricas de las sumas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

cuando $n = 5$, 10 y 20 si escogemos que los puntos muestrales x_i^* sean los puntos medios $\bar{x}_i$. Observe que cuando aumentamos el número de cilindros de aproximación, las correspondientes sumas de Riemann se acercan más al volumen verdadero.

TEC Visual 6.2A muestra una animación de la Figura 5.



(a) Usando 5 discos, $V \approx 4.2726$ (b) Usando 10 discos, $V \approx 4.2097$ (c) Usando 20 discos, $V \approx 4.1940$

FIGURA 5 Aproximación del volumen de una esfera con radio 1

V EJEMPLO 2 Uso del método de discos Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar, alrededor del eje x, la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1. Ilustre la definición de volumen al trazar un cilindro de aproximación típico.

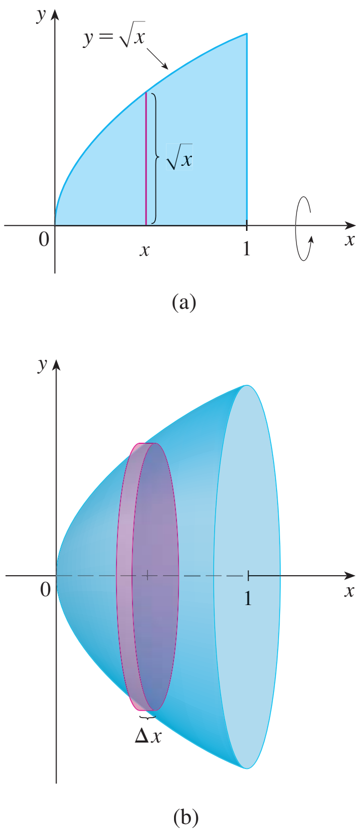


FIGURA 6

SOLUCIÓN La región se muestra en la Figura 6(a). Si giramos alrededor del eje x, obtenemos el sólido que se ve en la Figura 6(b). Cuando hacemos un corte que pase por el punto x, obtenemos un disco con radio $\sqrt{x}$. El área de esta sección transversal es

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

y el volumen del cilindro de aproximación (un disco con grosor Δx) es

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

El sólido se encuentra entre $x = 0$ y $x = 1$ y su volumen es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

¿Obtuvimos una respuesta razonable en el Ejemplo 2? Como verificación de nuestro trabajo, sustituyamos la región dada por un cuadrado con base [0, 1] y altura 1. Si hacemos girar este cuadrado, obtenemos un cilindro con radio 1, altura 1 y volumen $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Calculamos que el sólido dado tiene la mitad de este volumen. Esto está bien.

V EJEMPLO 3 Giro alrededor del eje *y* Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$ alrededor del eje y.

SOLUCIÓN La región se muestra en la Figura 7(a) y el sólido resultante se muestra en la Figura 7(b). Como la región se hace girar alrededor del eje y, tiene sentido cortar el sólido perpendicular al eje y y por tanto integrar con respecto a y. Si cortamos a una altura y, obtenemos un disco circular con radio x, donde $x = \sqrt[3]{y}$. Entonces el área de una sección transversal que pasa por y es

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

y el volumen del cilindro de aproximación ilustrado en la Figura 7(b) es

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Como el sólido se encuentra entre $y = 0$ y $y = 8$, su volumen es

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

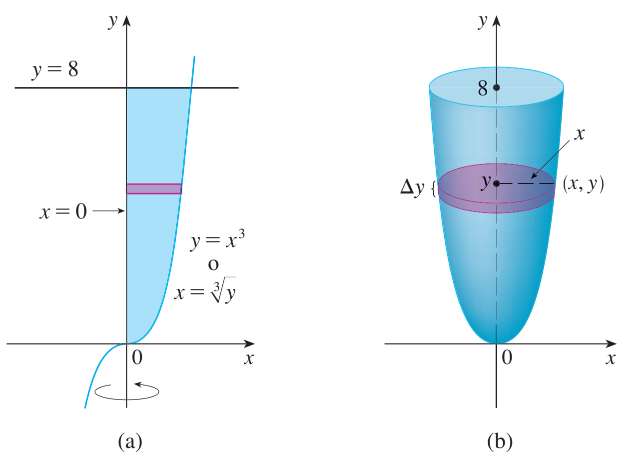


FIGURA 7

EJEMPLO 4 **Uso del método de una rondana** La región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ se gira alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

TEC En Visual 6.2B se muestra cómo se forman los sólidos de revolución.

SOLUCIÓN Las curvas $y = x$ y $y = x^2$ se cruzan en los puntos (0, 0) y (1, 1). La región entre ellos, el sólido de rotación, y la sección transversal perpendicular al eje x se muestran en la Figura 8. Una sección transversal del plano P_x tiene la forma de una *rondana* (una rodaja agujereada en el centro) con radio interior x^2 y radio exterior x, de modo que encontramos el área de sección transversal al restar el área del círculo interior del área del círculo exterior:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Por tanto, tenemos

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

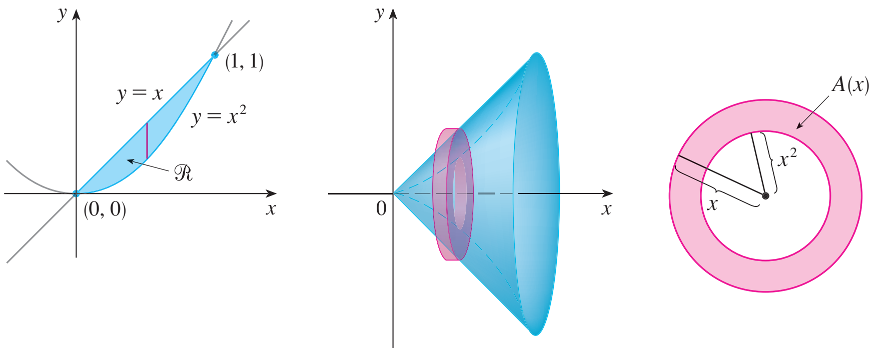


FIGURA 8 (a) (b) (c)

EJEMPLO 5 **Giro alrededor de una recta horizontal** Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región del Ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN El sólido y una sección transversal se ven en la Figura 9. De nuevo, la sección transversal es una rondana, pero esta vez el radio interior es $2 - x$ y el radio exterior es $2 - x^2$.

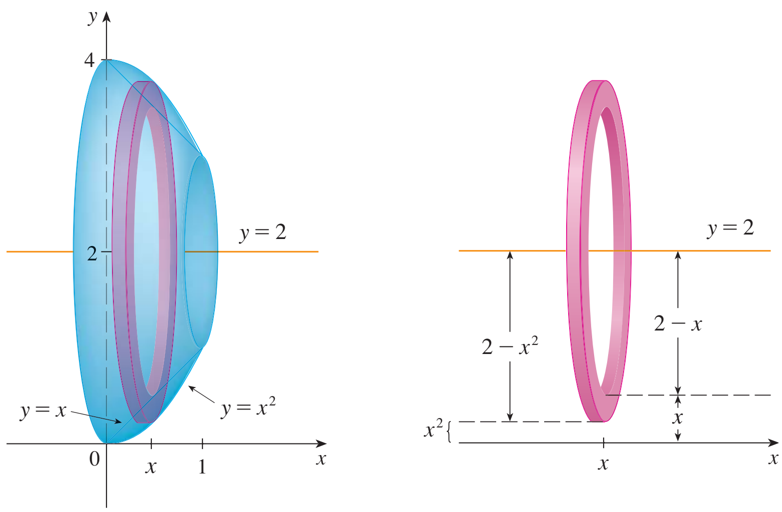


FIGURA 9

El área de sección transversal es

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

y entonces el volumen de S es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Los sólidos de los Ejemplos 1-5 se denominan **sólidos de revolución** porque se obtienen al hacer girar una región alrededor de una recta. En general, calculamos el volumen de un sólido de revolución cuando usamos la fórmula básica de definición

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

y encontramos el área de sección transversal $A(x)$ o $A(y)$ en una de las siguientes formas:

- Si la sección transversal es un disco (como en los Ejemplos 1–3), hallamos el radio del disco (en términos de x o de y) y usamos

$$A = \pi(\text{radio})^2$$

- Si la sección transversal es una rondana (como en los Ejemplos 4 y 5), hallamos el radio interior r_{int} y el radio exterior r_{ext} de un diagrama (como en las Figuras 8, 9 y 10) y calculamos el área de la rondana al restar el área del disco interior del área del disco exterior:

$$A = \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$

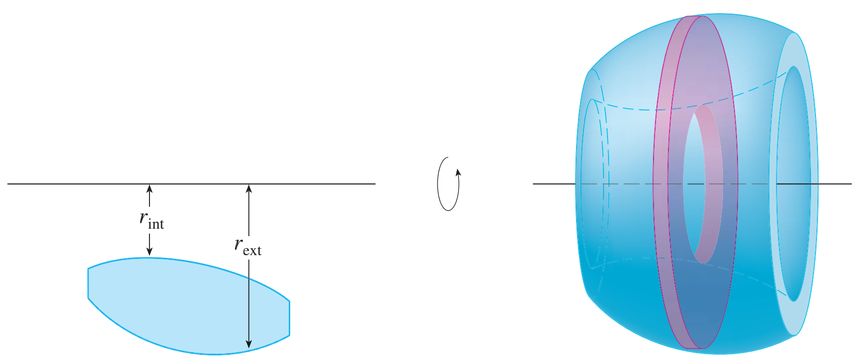


FIGURA 10

El siguiente ejemplo da una ilustración adicional del procedimiento.

EJEMPLO 6 **Giro alrededor de una recta vertical** Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región del Ejemplo 4 alrededor de la recta $x = -1$.

SOLUCIÓN La Figura 11 muestra una sección transversal horizontal. Es una rondana con radio interior $1 + y$ y radio exterior $1 + \sqrt{y}$, de modo que el área de sección transversal es

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2 \\ &= \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - \pi(1 + y)^2 \end{aligned}$$

El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - (1 + y)^2\right] dy \\ &= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi \left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

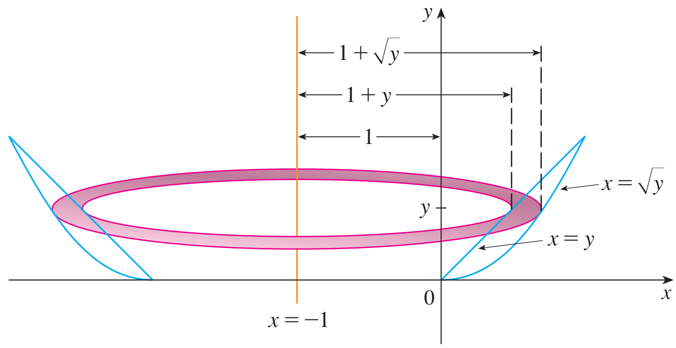


FIGURA 11

A continuación encontramos los volúmenes de dos sólidos que *no* son sólidos de revolución.

EJEMPLO 7 **Secciones transversales triangulares** La Figura 12 muestra un sólido con una base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas, perpendiculares a la base, son triángulos equiláteros. Encuentre el volumen del sólido.

TEC Visual 6.2C muestra cómo se genera el sólido de la Figura 12.

SOLUCIÓN Tomemos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. El sólido, su base y una sección transversal típica a una distancia x del origen se ven en la Figura 13.

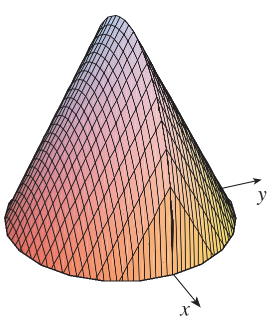
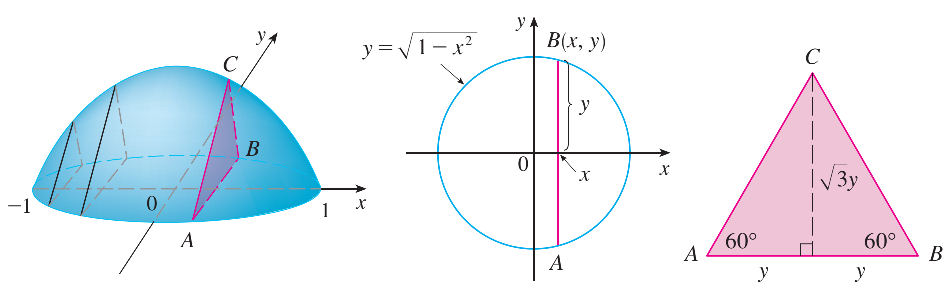


FIGURA 12

Imagen generada por computadora del sólido del Ejemplo 7



(a) El sólido (b) Su base (c) Sección transversal

FIGURA 13

Como B está en la circunferencia, tenemos $y = \sqrt{1 - x^2}$ y entonces la base del triángulo ABC es $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Como el triángulo es equilátero, vemos de la Figura 13(c) que su altura es $\sqrt{3}\, y = \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$. El área de sección transversal es, por tanto,

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2)$$

y el volumen del sólido es

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\, dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

V EJEMPLO 8 Encuentre el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado con lado L y cuya altura es h.

SOLUCIÓN Colocamos el origen O en el vértice de la pirámide y el eje x a lo largo de su eje central como en la Figura 14. Cualquier plano P_x que pase por x y sea perpendicular al eje x cruzará la pirámide en un cuadrado con lado de longitud s, por ejemplo. Podemos expresar s en términos de x si observamos de los triángulos semejantes de la Figura 15 que

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

y entonces $s = Lx/h$. [Otro método es observar que la recta OP tiene pendiente $L/(2h)$ y por tanto su ecuación es $y = Lx/(2h)$.] En consecuencia, el área de sección transversal es

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

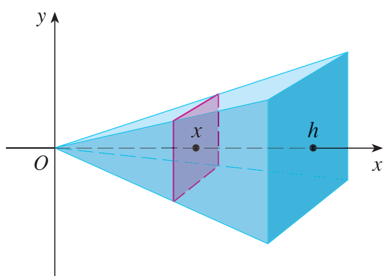


FIGURA 14

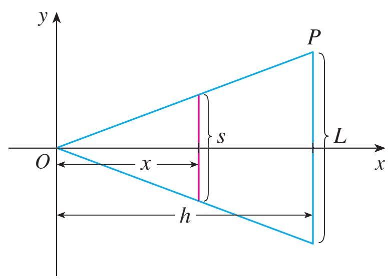


FIGURA 15

La pirámide se encuentra entre $x = 0$ y $x = h$, de modo que su volumen es

$$V = \int_0^h A(x)\, dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\, dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Bigg]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$

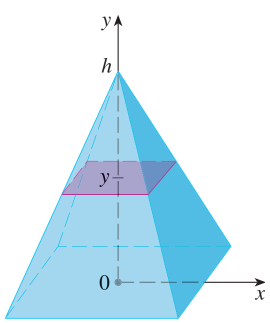


FIGURA 16

Nota: No hubo necesidad de que colocáramos el vértice de la pirámide en el origen en el Ejemplo 8. Lo hicimos así simplemente para hacer más sencillas las ecuaciones. En cambio, si hubiéramos colocado el centro de la base en el origen y el vértice en el eje y positivo, como en la Figura 16, se puede verificar que hubiéramos obtenido la integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\, dy = \frac{L^2h}{3}$$

6.2 Ejercicios

1–12 Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Trace la región, el sólido y un disco típico o rondana.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$ alrededor del eje x

2. $y = 1 - x^2,\ y = 0;$ alrededor del eje x

3. $x = 2\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 9;$ alrededor del eje y

4. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0;$ alrededor del eje y

5. $y = x^3,\ y = x,\ x \geqslant 0;$ alrededor del eje x

6. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 5 - x^2;$ alrededor del eje x

7. $y^2 = x,\ x = 2y;$ alrededor del eje y

8. $y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 2,\ y = 0;$ alrededor del eje y

9. $y = x,\ y = \sqrt{x};$ alrededor de $y = 1$

10. $y = e^{-x},\ y = 1,\ x = 2;$ alrededor de $y = 2$

11. $y = 1 + \sec x,\ y = 3;$ alrededor de $y = 1$

12. $y = x,\ y = \sqrt{x};$ alrededor de $x = 2$

13–18 La región encerrada por las curvas dadas se gira alrededor de la recta especificada. Encuentre el volumen del sólido resultante.

13. $y = 1/x,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0;$ alrededor del eje x

14. $x = 2y - y^2,\ x = 0;$ alrededor del eje y

15. $x - y = 1,\ y = x^2 - 4x + 3;$ alrededor de $y = 3$

16. $x = y^2,\ x = 1;$ alrededor de $x = 1$

17. $y = x^3,\ y = \sqrt{x};$ alrededor de $x = 1$

18. $y = x^3,\ y = \sqrt{x};$ alrededor de $y = 1$

19–20 Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

19. $x^2 - y^2 = 1,\ x = 3;$ alrededor de $x = -2$

20. $y = \cos x,\ y = 2 - \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi;$
alrededor de $y = 4$

21–22 Use una gráfica para hallar coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. A continuación use su calculadora para hallar (aproximadamente) el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje x la región acotada por estas curvas.

21. $y = 2 + x^2 \cos x, \quad y = x^4 + x + 1$

22. $y = 3\,\mathrm{sen}(x^2), \quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

CAS **23–24** Use un sistema computarizado de álgebra para hallar el volumen exacto del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

23. $y = \mathrm{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $y = -1$

24. $y = x,\ y = xe^{1-x/2};$ alrededor de $y = 3$

25–26 Cada una de las integrales siguientes representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

25. (a) $\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ (b) $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8)\, dy$

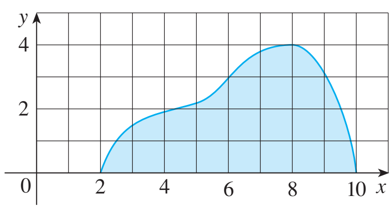
26. (a) $\pi \int_2^5 y\, dy$ (b) $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2]\, dx$

27. Un escaneo hecho en un sistema computarizado de álgebra (CAT) produce imágenes de un órgano humano, en sección transversal y espaciadas igualmente, que dan información acerca del órgano que de otro modo sólo se obtendría por medio de cirugía. Suponga que un escaneo en CAT de un hígado humano muestra secciones transversales separadas 1.5 centímetros. El hígado mide 15 cm de largo y las áreas de sección transversal, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Use la Regla del Punto Medio para calcular el volumen del hígado.

28. Un tronco de 10 m de largo es cortado a intervalos de 1 metro y sus áreas de sección transversal A (a una distancia x del extremo del tronco) se indican en la tabla siguiente. Use la Regla del punto medio con $n = 5$ para calcular el volumen del tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

29. (a) Si la región que se indica en la figura se hace girar alrededor del eje x para formar un sólido, use la Regla de Simpson con $n = 8$ para calcular el volumen del sólido.



(b) Calcule el volumen si la región se hace girar alrededor del eje y. Use la Regla de Simpson con $n = 4$.

CAS **30.** (a) Un modelo para la forma de un huevo de pájaro se obtiene al girar alrededor del eje x la región bajo la gráfica de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

Use un CAS para hallar el volumen de ese huevo.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

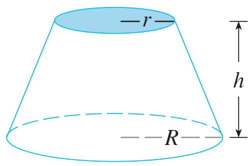
1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

(b) Para un somorgujo de garganta roja, $a = -0.06$, $b = 0.04$, $c = 0.1$ y $d = 0.54$. Grafique f y encuentre el volumen de un huevo de esta especie.

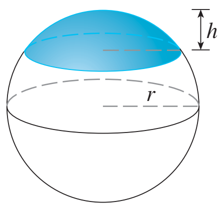
31–43 Encuentre el volumen del sólido descrito S.

31. Un cono circular recto con altura h y radio de base r.

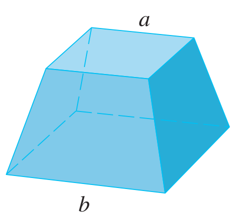
32. Un tronco de un cono circular recto con altura h, radio R de base inferior y radio superior r



33. Un casquete de esfera con radio r y altura h



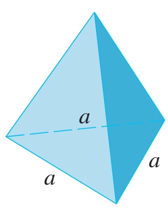
34. Un tronco de una pirámide con base cuadrada de lado b, cuadrado superior de lado a, y altura h



¿Qué pasa si $a = b$? ¿Qué pasa si $a = 0$?

35. Una pirámide con altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$

36. Una pirámide con altura h y base de un triángulo equilátero con lado a (un tetraedro)



37. Un tetraedro con tres caras mutuamente perpendiculares y tres aristas mutuamente perpendiculares con longitudes de 3 cm, 4 cm y 5 cm.

38. La base de S es un disco circular con radio r. Las secciones transversales perpendiculares a la base son cuadrados.

39. La base de S es una región elíptica con curva frontera $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos rectos isósceles con hipotenusa en la base.

40. La base de S es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

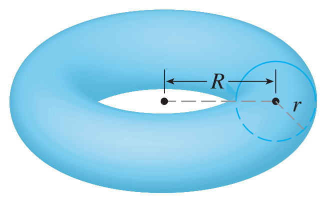
41. La base de S es la misma base que en el Ejercicio 40, pero las secciones transversales perpendiculares el eje x son cuadrados.

42. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados.

43. La base de S es la misma base que en el Ejercicio 42, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos isósceles con altura igual a la base.

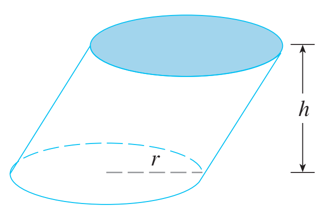
44. La base de S es un disco circular con radio r. Las secciones transversales paralelas, perpendiculares a la base, son triángulos isósceles con altura h y lado desigual en la base.
(a) Establezca una integral para el volumen de S.
(b) Al interpretar la integral como un área, encuentre el volumen de S.

45. (a) Establezca una integral para el volumen de un *toro* sólido (sólido en forma de rosca que se ve en la figura) con radios r y R.
(b) Al interpretar la integral como área, encuentre el volumen del toro.

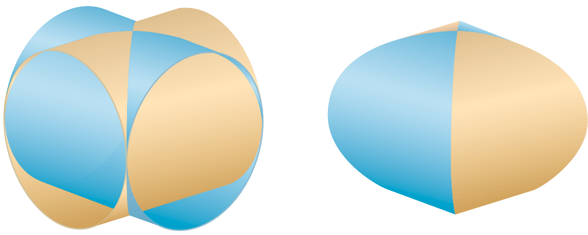


46. Una cuña es cortada de un cilindro circular de radio 4 por dos planos. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro cruza al primero a un ángulo de 30° a lo largo de un diámetro del cilindro. Encuentre el volumen de la cuña.

47. (a) El Principio de Cavalieri expresa que si una familia de planos paralelos da áreas de sección transversal iguales para dos sólidos S_1 y S_2, entonces los volúmenes de S_1 y S_2 son iguales. Demuestre este principio.
(b) Use el Principio de Cavalieri para hallar el volumen del cilindro oblicuo que se ilustra en la figura.



48. Encuentre el volumen común a dos cilindros circulares, cada uno con radio r, si los ejes de los cilindros se cruzan a ángulos rectos.



49. Encuentre el volumen común a dos esferas, cada una con radio r, si el centro de cada esfera está en la superficie de la otra esfera.

50. Un tazón tiene forma como de media esfera con diámetro de 30 cm. Una pesada pelota con diámetro de 10 cm se coloca en el tazón y se vierte agua en el tazón a una profundidad de h centímetros. Encuentre el volumen de agua del tazón.

51. Un agujero de radio r se perfora pasando por el centro de un cilindro de radio $R > r$ a ángulos rectos con el eje del cilindro. Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen cortado.

52. Un agujero de radio r se perfora pasando por el centro de una esfera de radio $R > r$. Encuentre el volumen de la porción restante de la esfera.

53. Algunos de los pioneros del cálculo, por ejemplo Kepler y Newton, fueron inspirados por el problema de hallar los volúmenes de barricas de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Stereometria doliorum* en 1715 dedicado a métodos para hallar los volúmenes de barricas.) Con frecuencia aproximaron la forma de los costados por medio de parábolas.

(a) Una barrica con altura h y radio máximo R se construye al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leqslant x \leqslant h/2$, donde c es una constante positiva. Demuestre que el radio de cada extremo de la barrica es $r = R - d$, donde $d = ch^2/4$.

(b) Demuestre que el volumen encerrado por la barrica es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

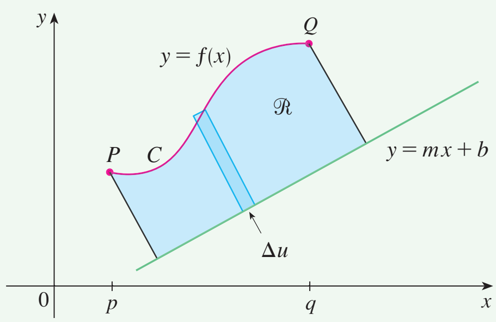
54. Suponga que una región $\mathcal{R}$ tiene área A y está arriba del eje x. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x, barre un sólido con volumen V_1. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $y = -k$ (donde k es un número positivo), barre un sólido con volumen V_2. Exprese V_2 en términos de V_1, k y A.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Giro en un plano inclinado

Sabemos cómo hallar el volumen de un sólido de revolución obtenido al girar una región alrededor de una recta horizontal o vertical (vea la Sección 6.2). Pero, ¿qué pasa si giramos alrededor de una recta inclinada, es decir, una recta que no es ni horizontal ni vertical? En este proyecto se pide al estudiante descubrir una fórmula para el volumen de un sólido de revolución cuando el eje de rotación es una recta inclinada.

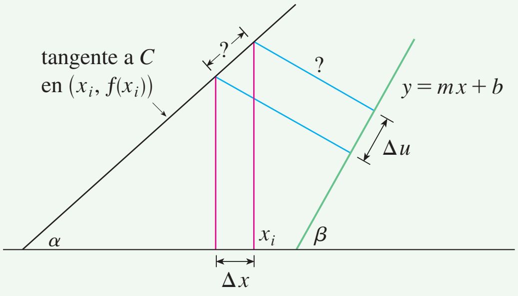
Sea C el arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $P(p, f(p))$ y $Q(q, f(q))$ y sea $\mathcal{R}$ la región acotada por C, por la recta $y = mx + b$ (que está por entero debajo de C), y por las perpendiculares a la recta de P a Q.



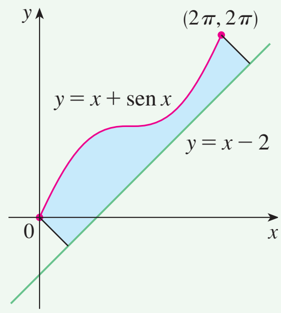
1. Demuestre que el área de $\mathcal{R}$ es

$$\frac{1}{1 + m^2}\int_p^q [f(x) - mx - b][1 + mf'(x)]\,dx$$

[*Sugerencia*: Esta fórmula se puede verificar al restar áreas, pero será útil en todo el proyecto para derivarla si primero se aproxima el área usando rectángulos perpendiculares a la recta, como se ve en la figura siguiente. Use el inciso (a) de la figura para ayudar a expresar Δu en términos de Δx.]



(a)



(b)

2. Encuentre el área de la región mostrada en el inciso (b) de la figura.

3. Encuentre una fórmula (semejante a la del Problema 1) para el volumen del sólido obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y = mx + b$.

4. Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región del Problema 2 alrededor de la recta $y = x - 2$.

6.3 Volúmenes por capas cilíndricas

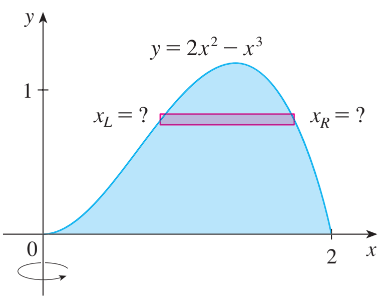


FIGURA 1

Algunos problemas de volúmenes son muy difíciles de manejar con los métodos de la sección precedente. Por ejemplo, consideremos el problema de hallar el volumen del sólido obtenido al girar, alrededor del eje y, la región acotada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$. (Vea la figura 1.) Si hacemos un corte perpendicular al eje y obtenemos una rondana pero, para calcular el radio interior y el radio exterior de la rondana, tendríamos que despejar x de la ecuación cúbica $y = 2x^2 - x^3$ en términos de y; esto no es fácil.

Por fortuna, hay un método, llamado **método de capas cilíndricas,** que es más fácil de usar en tal caso. La Figura 2 muestra una capa cilíndrica con radio interior r_1, radio exterior r_2 y altura h. Su volumen V se calcula al restar el volumen V_1 del cilindro interior

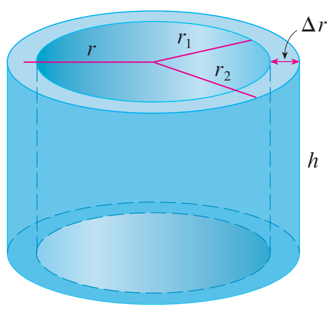


FIGURA 2

del volumen V_2 del cilindro exterior:

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Si hacemos $\Delta r = r_2 - r_1$ (el grueso de la capa) y $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (el radio promedio de la capa), entonces esta fórmula para el volumen de una capa cilíndrica se convierte en

1 $$\boxed{V = 2\pi rh\,\Delta r}$$

y se puede recordar como

$$V = [\text{circunferencia}][\text{altura}][\text{grosor}]$$

Ahora sea S el sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región acotada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geqslant 0$], $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, donde $b > a \geqslant 0$. (Vea la Figura 3.)

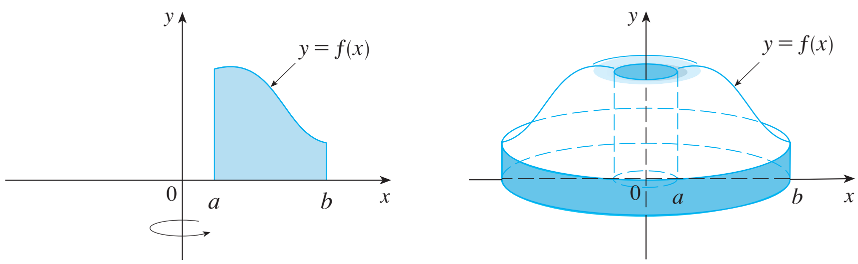


FIGURA 3

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho Δx y sea $\bar{x}_i$ el punto medio del i-ésimo subintervalo. Si el rectángulo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\bar{x}_i)$ se gira alrededor del eje y, entonces el resultado es una capa cilíndrica con radio promedio $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$ y grosor Δx (vea la Figura 4), de modo que, por la Fórmula 1, su volumen es

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

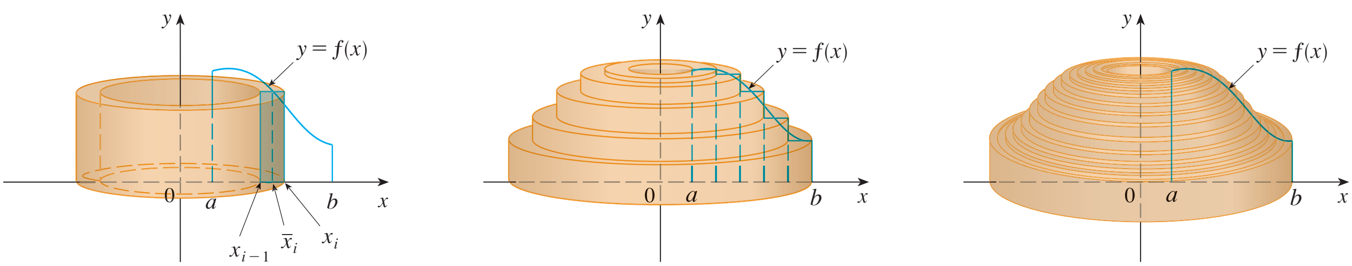


FIGURA 4

Por tanto, una aproximación al volumen V de S está dada por la suma de los volúmenes de estas capas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Esta aproximación parece mejorar cuando $n \to \infty$ pero, de la definición de una integral, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\, \Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

Entonces lo siguiente es plausible:

$\boxed{2}$ El volumen del sólido de la Figura 3, obtenido al girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ de a a b, es

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx \qquad \text{donde } 0 \leqslant a < b$$

La mejor forma de recordar la Fórmula 2 es pensar en una capa típica, cortada y aplanada como en la Figura 5, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y grosor Δx o dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferencia}} \; \underbrace{[f(x)]}_{\text{alto}} \; \underbrace{dx}_{\text{grueso}}$$

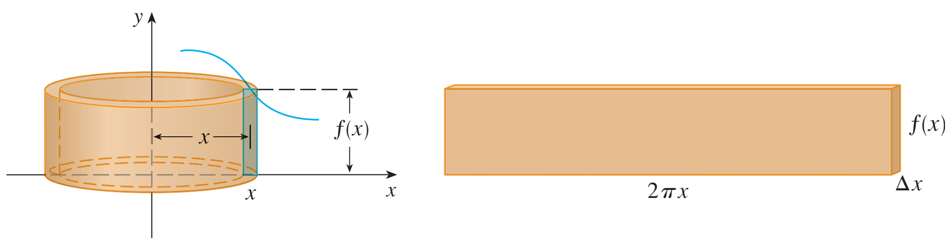


FIGURA 5

Este tipo de razonamiento será útil en otras situaciones, por ejemplo cuando giramos alrededor de rectas que no sean el eje y.

EJEMPLO 1 **Uso del método de capas** Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región acotada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$.

SOLUCIÓN Del dibujo de la Figura 6 vemos que una capa típica tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. Entonces, por el método de capas, el volumen es

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\, dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Se puede verificar que el método de capas da la misma respuesta que el de rebanadas.

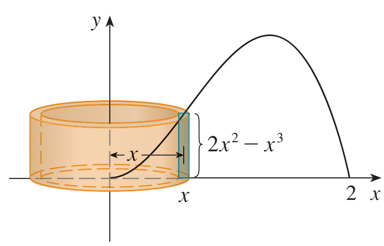


FIGURA 6

La Figura 7 muestra una imagen generada por computadora del sólido cuyo volumen calculamos en el Ejemplo 1.

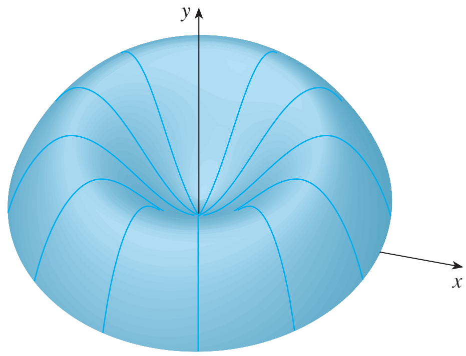


FIGURA 7

Nota: Comparando la solución del Ejemplo 1 con las observaciones que aparecen al principio de esta sección, vemos que el método de capas cilíndricas es mucho más fácil que el método de la rondana para este problema. No tuvimos que hallar las coordenadas del máximo local y no tuvimos que despejar x de la ecuación de la curva en términos de y. No obstante, en otros ejemplos los métodos de la sección precedente pueden ser más fáciles.

V EJEMPLO 2 Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región entre $y = x$ y $y = x^2$.

SOLUCIÓN La región y una capa típica se muestran en la Figura 8. Vemos que la capa tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $x - x^2$. Entonces el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

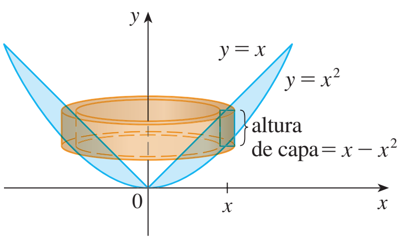


FIGURA 8

Como se demuestra en el siguiente ejemplo, el método de capas funciona igualmente bien si giramos alrededor del eje x. Sólo tenemos que trazar un diagrama para identificar el radio y altura de una capa.

V EJEMPLO 3 Uso de capas para rotación alrededor del eje x Use capas cilíndricas para hallar el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1.

SOLUCIÓN Este problema se resolvió usando discos en el Ejemplo 2 en la Sección 6.2. Para usar capas remarcamos la curva $y = \sqrt{x}$ (en la figura en ese ejemplo) como $x = y^2$ en la Figura 9. Para rotación alrededor del eje x vemos que una capa típica tiene radio y, circunferencia $2\pi y$, y altura $1 - y^2$. Así, el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

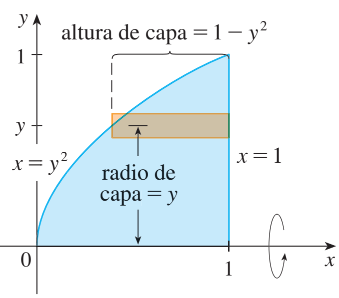


FIGURA 9

En este problema, el método de disco fue más sencillo.

V EJEMPLO 4 Rotación alrededor de un eje vertical Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por $y = x - x^2$ y $y = 0$ alrededor de la recta $x = 2$.

SOLUCIÓN La Figura 10 muestra la región y una capa cilíndrica formada por rotación alrededor de la recta $x = 2$. Tiene radio $2 - x$, circunferencia $2\pi(2 - x)$ y altura $x - x^2$.

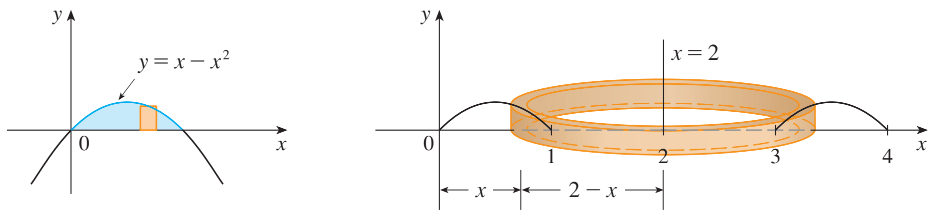


FIGURA 10

El volumen del sólido dado es

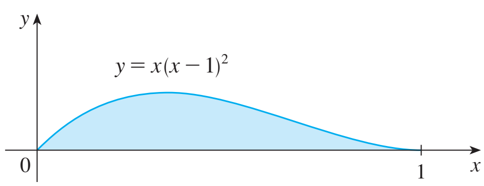
$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

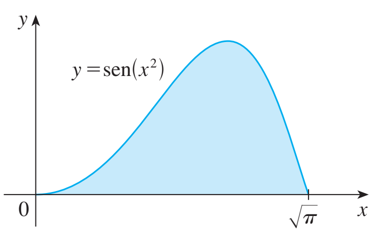
$$= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.3 Ejercicios

1. Sea S el sólido obtenido al girar la región mostrada en la figura alrededor del eje y. Explique por qué es difícil usar el método de rebanadas para hallar el volumen V de S. Trace una capa de aproximación típica. ¿Cuáles son su circunferencia y altura? Use capas para hallar V.



2. Sea S el sólido obtenido al girar la región mostrada en la figura alrededor del eje y. Trace una capa cilíndrica típica y encuentre su circunferencia y altura. Use capas para hallar el volumen de S. ¿Piensa el lector que este método es preferible al de rebanadas? Explique.



3–7 Use el método de capas cilíndricas para hallar el volumen generado al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje y. Trace la región y una capa típica.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 3 + 2x - x^2, \quad x + y = 3$

7. $y = 4(x - 2)^2, \quad y = x^2 - 4x + 7$

8. Sea V el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$. Encuentre V por el método de rebanadas y por el de capas cilíndricas. En ambos casos dibuje un diagrama para explicar su método.

9–12 Use el método de capas cilíndricas para hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje x.

9. $x = 1 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$

10. $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

11. $x = 1 + (y - 2)^2, \quad x = 2$

12. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

13–18 Use el método de capas cilíndricas para hallar el volumen generado al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje especificado. Trace la región y una capa típica.

13. $y = x^4,\ y = 0, x = 1;$ alrededor de $x = 2$

14. $y = \sqrt{x},\ y = 0, x = 1;$ alrededor de $x = -1$

15. $y = 4x - x^2,\ y = 3;$ alrededor de $x = 1$

16. $y = x^2,\ y = 2 - x^2;$ alrededor de $x = 1$

17. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1;$ alrededor de $y = 1$

18. $y = x^2,\ x = y^2;$ alrededor de $y = -1$

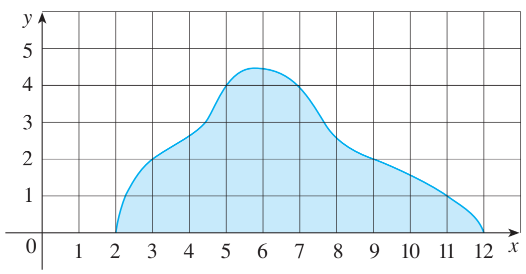
19–20 Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

19. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y},\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ x = 0;$ alrededor de $y = 4$

20. $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4;$ alrededor de $x = 5$

21. Use la Regla de Simpson con $n = 10$ para calcular el volumen obtenido al girar, alrededor del eje y, la región bajo la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

22. Si la región que se muestra en la figura se gira alrededor del eje y para formar un sólido, use la Regla de Simpson con $n = 10$ para calcular el volumen del sólido.



23–24 Cada una de las siguientes integrales representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

23. (a) $\displaystyle\int_0^3 2\pi x^5\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2)\,dy$

24. (a) $\displaystyle 2\pi\int_0^2 \frac{y}{1 + y^2}\,dy$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$

25–26 Use una gráfica para calcular las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas dadas. A continuación use esta información y su calculadora para estimar el volumen del sólido obtenido al girar la región encerrada por estas curvas alrededor del eje y.

25. $y = e^x, \quad y = \sqrt{x} + 1$

26. $y = x^3 - x + 1, \quad y = -x^4 + 4x - 1$

CAS **27–28** Use un sistema computarizado de álgebra para hallar el volumen exacto del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

27. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = \operatorname{sen}^4 x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $x = \pi/2$

28. $y = x^3 \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $x = -1$

29–33 La región acotada por las curvas dadas se gira alrededor del eje especificado. Encuentre el volumen del sólido resultante por medio de cualquier método.

29. $y = -x^2 + 6x - 8,\ y = 0;$ alrededor del eje y

30. $y = -x^2 + 6x - 8,\ y = 0;$ alrededor del eje x

31. $x^2 + (y - 1)^2 = 1;$ alrededor del eje y

32. $x = (y - 3)^2,\ x = 4;$ alrededor de $y = 1$

33. $y = 5,\ y = x + (4/x);$ alrededor de $x = -1$

34. Sea T la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 2) y sea V el volumen del sólido generado cuando T gira alrededor de la recta $x = a$, donde $a > 1$. Exprese a en términos de V.

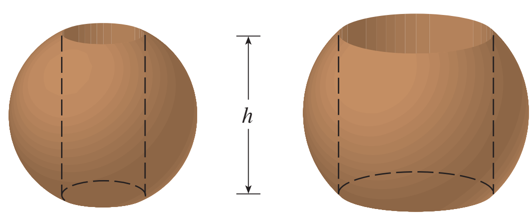
35–37 Use capas cilíndricas para hallar el volumen del sólido.

35. Una esfera de radio r

36. El toro sólido del Ejercicio 45 de la Sección 6.2

37. Un cono circular recto con altura h y radio de base r

38. Supongamos que el lector hace anillos para servilleta al hacer agujeros de diámetros diferentes que pasan por esferas de madera (que también tienen diámetros diferentes). Descubrirá que ambos anillos para servilleta tienen la misma altura h, como se ve en la figura.
(a) Intuya cuál anillo tiene más madera.
(b) Compruebe su intuición: use capas cilíndricas para calcular el volumen de un anillo para servilleta, creado al hacer un agujero con radio r que pasa por el centro de una esfera de radio R, y exprese la respuesta en términos de h.



6.4 Longitud de arco

FIGURA 1

¿Qué queremos decir con longitud de una curva? Podríamos pensar en ajustar un trozo de cuerda a la curva de la Figura 1 y luego medir la cuerda contra una regla, pero eso podría ser difícil de hacer con mucha precisión si tenemos una curva complicada. Necesitamos una definición precisa para la longitud de un arco de curva, en el mismo sentido que las definiciones que desarrollamos para los conceptos de área y volumen.

Si la curva es un polígono, podemos fácilmente hallar su longitud; sólo sumamos las longitudes de los segmentos de recta que forman el polígono. (Podemos usar la fórmula de la distancia para hallar la distancia entre los puntos extremos de cada segmento.) Vamos a definir la longitud de una curva general al aproximarla primero por medio de un polígono y a continuación tomamos un límite a medida que aumenta el número de segmentos del polígono. Este proceso ya es conocido para el caso de un círculo, donde la circunferencia es el límite de longitudes de polígonos inscritos (vea Figura 29).

TEC Visual 6.4 muestra una animación de la Figura 2.

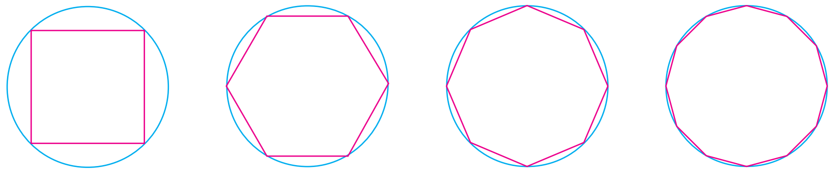


FIGURA 2

Suponga que una curva C está descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

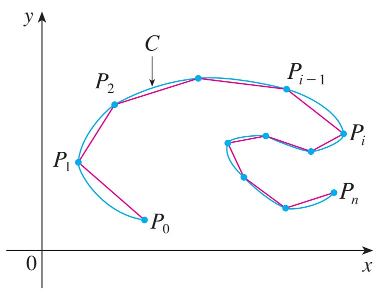


FIGURA 3

Supongamos que C es **suave** en el sentido de que las derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$ son continuas y no simultáneamente cero para $a < t < b$. (Esto asegura que C no tenga cambios repentinos en dirección.) Dividimos el intervalo del parámetro $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho Δt. Si $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ son los puntos extremos de estos subintervalos, entonces $x_i = f(t_i)$ y $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de los puntos $P_i(x_i, y_i)$ que están en C y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ aproxima C. (Vea la Figura 3.) La longitud L de C es aproximadamente la longitud de este polígono y la aproximación mejora a medida que aumentamos n. (Vea la Figura 4, donde el arco de la curva entre P_{i-1} y P_i se ha amplificado y se muestran las aproximaciones con valores sucesivamente más pequeños de Δt.) Por lo tanto, definimos la **longitud** de C como el límite de las longitudes de estos polígonos inscritos:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

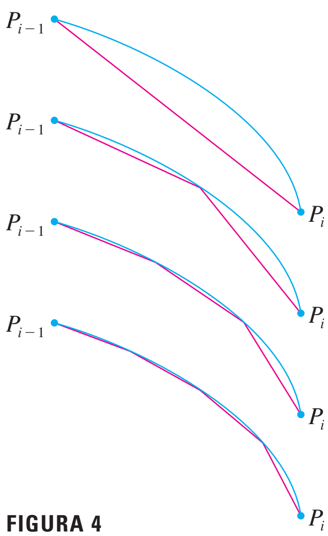


FIGURA 4

Nótese que el procedimiento para definir longitud de arco es muy semejante al procedimiento que empleamos para definir área y volumen: dividimos la curva en un número grande de partes pequeñas. A continuación encontramos las longitudes aproximadas de las partes pequeñas y las sumamos. Por último, tomamos el límite cuando $n \to \infty$.

Para fines de cálculo necesitamos una expresión más conveniente para L. Si hacemos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, entonces la longitud del i-ésimo segmento de recta del polígono es

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Pero por la definición de una derivada sabemos que

$$f'(t_i) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$$

si Δt es pequeña. (Podríamos haber usado cualquier punto muestral t_i^* en lugar de t_i.) Por tanto,

$$\Delta x_i \approx f'(t_i)\,\Delta t \qquad\qquad \Delta y_i \approx g'(t_i)\,\Delta t$$

y entonces

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &\approx \sqrt{[f'(t_i)\,\Delta t]^2 + [g'(t_i)\,\Delta t]^2} \\ &= \sqrt{[f'(t_i)]^2 + [g'(t_i)]^2}\,\Delta t \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i)]^2 + [g'(t_i)]^2}\,\Delta t$$

Ésta es una suma de Riemann para la función $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$ con lo cual nuestro argumento sugiere que

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

De hecho, nuestro razonamiento puede ser preciso; esta fórmula es correcta, siempre que excluyamos situaciones donde una parte de la curva se trace más de una vez.

1 **Fórmula para la longitud de un arco** Si una curva lisa con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es atravesada exactamente una vez cuando t aumenta de a a b, entonces su longitud es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

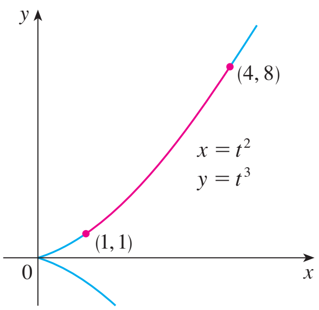


FIGURA 5

Como comprobación de nuestra respuesta al Ejemplo 1, observe de la Figura 5 que debería ser ligeramente más grande que la distancia de (1, 1) a (4, 8), que es

$$\sqrt{58} \approx 7.615773$$

De acuerdo con nuestro cálculo del Ejemplo 1, tenemos

$$L = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \approx 7.633705$$

Efectivamente, esto es más grande que la longitud del segmento de recta.

EJEMPLO 1 **Longitud de una curva paramétrica** Encuentre la longitud del arco de la curva $x = t^2$, $y = t^3$ que se encuentra entre los puntos (1, 1) y (4, 8). (Vea la Figura 5.)

SOLUCIÓN Primero observamos de las ecuaciones $x = t^2$ y $y = t^3$ que la parte de la curva entre (1, 1) y (4, 8) corresponde al intervalo de parámetro $1 \leqslant t \leqslant 2$. Entonces, la fórmula de la longitud de un arco (1) da

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_1^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\,dt \\ &= \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\,dt = \int_1^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt \end{aligned}$$

Si sustituimos $u = 4 + 9t^2$, entonces $du = 18t\,dt$. Cuando $t = 1$, $u = 13$; cuando $t = 2$, $u = 40$. Por tanto,

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{18}\int_{13}^{40} \sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{18}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13}^{40} \\ &= \tfrac{1}{27}\left[40^{3/2} - 13^{3/2}\right] = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \end{aligned}$$

Si nos dan una curva con ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, entonces podemos considerar x como un parámetro. Así, las ecuaciones paramétricas son $x = x$, $y = f(x)$ y la Fórmula 1 se convierte en

2
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Análogamente, si una curva tiene la ecuación $x = f(y)$, $a \leqslant y \leqslant b$, consideramos y como el parámetro y la longitud es

3
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

Debido a la presencia del signo de raíz en las Fórmulas 1, 2 y 3, el cálculo de la longitud de un arco a veces lleva a una integral que es muy difícil o hasta imposible de evaluar de manera explícita. Por tanto, con frecuencia tenemos que conformarnos con hallar una aproximación de la longitud de una curva como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 2 **Aproximar una longitud con la Regla de Simpson** Calcule la longitud de la parte de la hipérbola $xy = 1$ del punto $(1, 1)$ al punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

y entonces, de la Fórmula 2, la longitud es

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

Es imposible evaluar esta integral exactamente, de manera que usamos la Regla de Simpson (vea la Sección 5.9) con $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0.1$, y $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$. Entonces

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \\ &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)] \\ &\approx 1.1321 \end{aligned}$$

Si comprobamos el valor de la integral definida con una aproximación más precisa producida por un sistema computarizado de álgebra, vemos que la aproximación con la Regla de Simpson es precisa a cuatro lugares decimales.

V EJEMPLO 3 Encuentre la longitud del arco de la parábola $y^2 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

SOLUCIÓN Como $x = y^2$, tenemos $dx/dy = 2y$, y la Fórmula 3 da

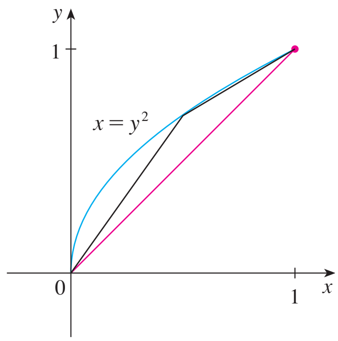
$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy = \int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1}\, dy$$

Usando ya sea un sistema computarizado de álgebra o la Tabla de Integrales (use la Fórmula 21 después de sustituir $u = 2y$), encontramos que

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}$$

La Figura 6 muestra el arco de la parábola cuya longitud se calculó en el Ejemplo 3, junto con aproximaciones poligonales que tienen segmentos de recta $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente. Para $n = 1$ la longitud aproximada es $L_1 = \sqrt{2}$, la diagonal de un cuadrado. La tabla presenta las aproximaciones L_n que obtenemos al dividir $[0, 1]$ en n subintervalos iguales. Nótese que cada vez que duplicamos el número de lados del polígono, nos acercamos más a la longitud exacta que es

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4} \approx 1.478943$$



n	L_n
1	1.414
2	1.445
4	1.464
8	1.472
16	1.476
32	1.478
64	1.479

FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Encuentre la longitud de un arco del cicloide

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta)$$

SOLUCIÓN Del Ejemplo 7 en la Sección 1.7 vemos que un arco está descrito por el intervalo de parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Como

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r\operatorname{sen}\theta$$

tenemos

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

El resultado del Ejemplo 4 dice que la longitud de un arco de un cicloide es ocho veces el radio del círculo generador (vea Figura 7). Esto fue demostrado primero en 1658 por Sir Christopher Wren, que después fue el arquitecto de la catedral de St. Paul en Londres.

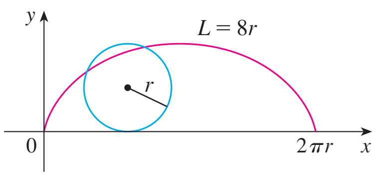


FIGURA 7

Esta integral podría evaluarse después de usar más identidades trigonométricas. En lugar de usar un sistema computarizado de álgebra:

$$L = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta = 8r$$

6.4 Ejercicios

1. Use la fórmula de longitud de un arco (2) para hallar la longitud de la curva $y = 2x - 5$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Compruebe su respuesta al observar que la curva es un segmento de recta y calcular su longitud con la fórmula de la distancia.

2. (a) En el Ejemplo 2 de la Sección 1.7 demostramos que las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, representan el círculo unitario. Use estas ecuaciones para demostrar que la longitud del círculo unitario tiene el valor esperado.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

(b) En el Ejemplo 3 de la Sección 1.7 demostramos que las ecuaciones $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, también representan el círculo unitario. ¿Qué valor da la integral en la Fórmula 1? ¿Cómo se explica la discrepancia?

3–6 Establezca una integral que representa la longitud de la curva. A continuación use su calculadora para hallar la longitud correcta a cuatro lugares decimales.

3. $y = \text{sen } x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

4. $x = y^2 - 2y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$

5. $x = t + \cos t, \quad y = t - \text{sen } t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

6. $x = t\cos t, \quad y = t \text{ sen } t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

7–12 Encuentre la longitud exacta de la curva.

7. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

8. $y^2 = 4(x + 4)^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad y > 0$

9. $x = y^{3/2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

10. $y = \sqrt{x - x^2} + \text{sen}^{-1}(\sqrt{x})$

11. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

12. $x = a(\cos\theta + \theta \text{ sen }\theta), \quad y = a(\text{sen }\theta - \theta\cos\theta),$
$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

13–16 Grafique la curva y encuentre su longitud exacta.

13. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad -8 \leqslant t \leqslant 3$

14. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

15. $x = e^t\cos t, \quad y = e^t \text{ sen } t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

16. $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

17–19 Use la Regla de Simpson con $n = 10$ para calcular la longitud de arco de la curva. Compare su respuesta con el valor de la integral producida por su calculadora.

17. $y = xe^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5$

18. $x = y + \sqrt{y}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

19. $x = \text{sen } t, \quad y = t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

20. Encuentre la longitud del lazo de la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

21. (a) Grafique la curva $y = x\sqrt[3]{4 - x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Calcule las longitudes de polígonos inscritos con $n = 1$, 2 y 4 lados. (Divida el intervalo en subintervalos iguales.) Ilustre al trazar estos polígonos (como en la Figura 6).
(c) Establezca una integral para la longitud de la curva.
(d) Use su calculadora para hallar la longitud de la curva a cuatro lugares decimales. Compare con las aproximaciones del inciso (b).

22. Repita el Ejercicio 21 para la curva

$$y = x + \text{sen } x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

CAS **23–26** Use ya sea un sistema computarizado de álgebra (CAS) o una tabla de integrales para hallar la longitud exacta de la curva.

23. $x = t^3, \quad y = t^4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

24. $y^2 = 4x, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$

25. $y = \ln(\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

26. $y = \ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$

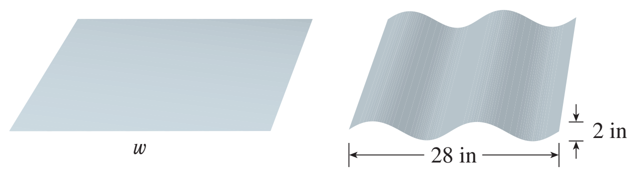
27. Un halcón que vuela a 15 m/s a una altitud de 180 m accidentalmente deja caer su presa. La trayectoria parabólica de la presa en su caída está descrita por la ecuación

$$y = 180 - \frac{x^2}{45}$$

hasta que cae al suelo, donde y es la altura sobre el suelo y x es la distancia horizontal recorrida en metros. Calcule la distancia recorrida por la presa desde el momento en que es soltada hasta que cae al suelo. Exprese su respuesta correcta al décimo de metro más cercano.

28. Un viento continuo arrastra una cometa hacia el oeste. La altura de la cometa sobre el suelo desde la posición horizontal $x = 0$ a $x = 80$ ft está dada por $y = 150 - \frac{1}{40}(x - 50)^2$. Encuentre la distancia recorrida por la cometa.

29. Un fabricante de láminas acanaladas para techo desea producir paneles que miden 28 in de ancho y 2 in de grueso, al procesar láminas metálicas planas como se ve en la figura. El perfil del techo toma la forma de una onda senoidal. Verifique que la curva senoidal tiene ecuación $y = \text{sen}(\pi x/7)$ y encuentre el ancho w de una lámina metálica plana que es necesaria para hacer un panel de 28 in. (Use su calculadora para evaluar la integral, correcta a cuatro lugares decimales.)



30. Encuentre la longitud total del astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a \text{ sen}^3\theta$, donde $a > 0$.

31. Demuestre que la longitud total de la elipse $x = a \text{ sen }\theta$, $y = b\cos\theta$, $a > b > 0$, es

$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\text{sen}^2\theta}\;d\theta$$

donde e es la excentricidad de la elipse $\left(e = c/a, \text{ donde } c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$.

32. Las curvas con ecuaciones $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$, se denominan **círculos gruesos**. Grafique las curvas con $n = 2$, 4, 6, 8 y 10 para ver por qué. Establezca una integral para la longitud L_{2k} del círculo grueso con $n = 2k$. Sin tratar de evaluar esta integral, exprese el valor de $\lim_{k\to\infty} L_{2k}$.

CAS **33.** (a) Grafique el **epitrocoide** con ecuaciones

$$x = 11 \cos t - 4 \cos(11t/2)$$

$$y = 11 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}(11t/2)$$

¿Qué intervalo de parámetro da la curva completa?

(b) Use su CAS para hallar la longitud aproximada de esta curva.

CAS **34.** Una curva llamada **espiral de Cornu** está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\, du$$

$$y = S(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\pi u^2/2)\, du$$

donde C y S son las funciones de Fresnel que se introdujeron en la Sección 5.4.

(a) Grafique esta curva. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$?

(b) Encuentre la longitud de la espiral de Cornu desde el origen al punto con valor de parámetro t.

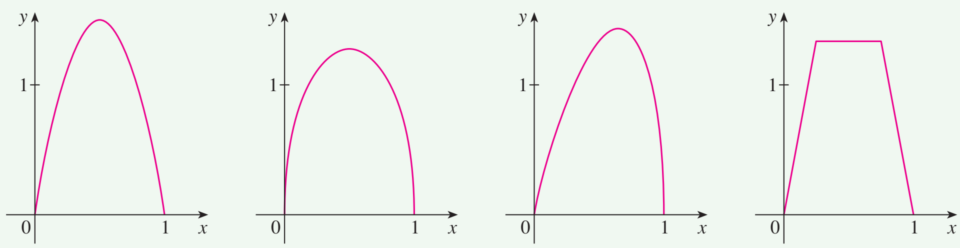
PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Concurso de longitud de arco

Las curvas mostradas son todas ellas ejemplos de gráficas de funciones continuas f que tienen las siguientes propiedades:

1. $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$
2. $f(x) \geqslant 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$
3. El área bajo la gráfica de f de 0 a 1 es igual a 1.

Las longitudes L de estas curvas, no obstante, son diferentes.



$L \approx 3.249$ $\quad$ $L \approx 2.919$ $\quad$ $L \approx 3.152$ $\quad$ $L \approx 3.213$

Trate de descubrir fórmulas para dos funciones que satisfagan las condiciones dadas 1, 2 y 3. (Sus gráficas podrían ser semejantes a las que se muestran o podrían ser muy diferentes.) A continuación calcule la longitud de arco de cada gráfica. La entrada ganadora será aquella con la longitud de arco más corta.

6.5 Valor promedio de una función

Es fácil calcular el valor promedio de un número finito de números $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{\text{prom}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Pero, ¿cómo calculamos la temperatura promedio durante un día si son posibles un número

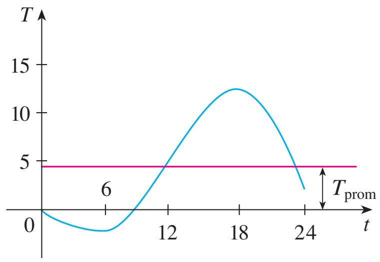


FIGURA 1

infinito de lecturas? La Figura 1 muestra la gráfica de una función $T(t)$ de temperatura, donde t se mide en horas y T en °C, y un cálculo de la temperatura promedio, T_{prom}.

En general, tratemos de calcular el valor promedio de una función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Empezamos por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno con longitud $\Delta x = (b - a)/n$. A continuación escogemos puntos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en subintervalos sucesivos y calculamos el promedio de los números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por ejemplo, si f representa una función de temperatura y $n = 24$, esto significa que tomamos lecturas de temperatura cada hora y luego las promediamos.) Como $\Delta x = (b - a)/n$, podemos escribir $n = (b - a)/\Delta x$ y el valor promedio se convierte en

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Si hacemos que n aumente, estaríamos calculando el valor promedio de un número grande de valores estrechamente espaciados. (Por ejemplo, estaríamos promediando lecturas de temperatura tomadas cada minuto o incluso cada segundo.) El valor límite es

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

por la definición de una integral definida.

Por tanto, definimos el **valor promedio de *f*** en el intervalo $[a, b]$ como

Para una función positiva, podemos considerar esta definición como

$$\frac{\text{área}}{\text{ancho}} = \text{altura promedio}$$

$$\boxed{f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

V EJEMPLO 1 Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN Con $a = -1$ y $b = 2$ tenemos

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1 + x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2$$

Si $T(t)$ es la temperatura en el tiempo t, podríamos preguntarnos si hay un tiempo específico cuando la temperatura sea la misma que el promedio de temperatura. Para la función de temperatura graficada en la Figura 1, vemos que hay dos de estos tiempos, justo antes de mediodía y justo antes de medianoche. En general, ¿hay un número c al cual el valor de una función f es exactamente igual al valor promedio de la función, es decir, $f(c) = f_{\text{prom}}$? El siguiente teorema dice que éste es en realidad el caso para funciones continuas.

El Teorema del Valor Medio para Integrales Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

esto es,
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

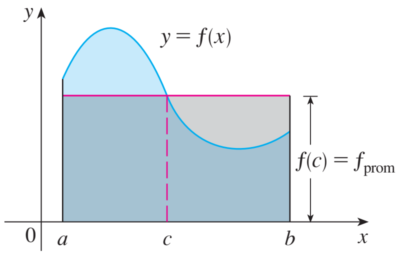


FIGURA 2

Siempre se puede recortar la cima de una montaña (de dos dimensiones) a cierta altura y usarla para llenar los valles para que la montaña resulte completamente plana.

El Teorema del Valor Medio para Integrales es una consecuencia del Teorema del Valor Medio para derivadas y el Teorema Fundamental del Cálculo. La prueba está compendiada en el Ejercicio 21.

La interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio para Integrales es que, para funciones f *positivas*, hay un número c tal que el rectángulo con base $[a, b]$ y altura $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f de a a b. (Vea la Figura 2 y la interpretación más típica en la nota marginal.)

V EJEMPLO 2 Hallar el valor de c en el Teorema del Valor Medio para Integrales
Como $f(x) = 1 + x^2$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$, el Teorema del Valor Medio para Integrales dice que hay un número c en $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = f(c)[2 - (-1)]$$

En este caso particular podemos hallar c de manera explícita. Del Ejemplo 1 sabemos que $f_{\text{prom}} = 2$, de modo que el valor de c satisface

$$f(c) = f_{\text{prom}} = 2$$

Por tanto, $\quad 1 + c^2 = 2 \quad$ y entonces $\quad c^2 = 1$

En consecuencia, en este caso hay dos números $c = \pm 1$ en el intervalo $[-1, 2]$ que funcionan en el Teorema del Valor Medio para Integrales.

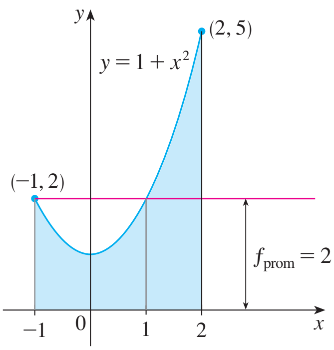


FIGURA 3

Los Ejemplos 1 y 2 están ilustrados por la Figura 3.

V EJEMPLO 3 Demuestre que el promedio de velocidad de un auto en un intervalo $[t_1, t_2]$ es igual que el promedio de sus velocidades durante el recorrido.

SOLUCIÓN Si $s(t)$ es el desplazamiento del auto en el tiempo t, entonces, por definición, el promedio de velocidad del auto en el intervalo es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por otra parte, el valor promedio de la función de velocidad en el intervalo es

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1}[s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{(por el Teorema de Cambio Neto)} \\ &= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{velocidad promedio} \end{aligned}$$

6.5 Ejercicios

1–6 Encuentre el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = 4x - x^2, \quad [0, 4]$

2. $f(x) = \operatorname{sen} 4x, \quad [-\pi, \pi]$

3. $g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad [1, 8]$

4. $f(\theta) = \sec^2(\theta/2), \quad [0, \pi/2]$

5. $h(x) = \cos^4 x \operatorname{sen} x, \quad [0, \pi]$

6. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}, \quad [-1, 1]$

7–10
(a) Encuentre el valor promedio de f en el intervalo dado.
(b) Encuentre c tal que $f_{\text{prom}} = f(c)$.
(c) Trace la gráfica de f y un rectángulo cuya área es la misma que el área bajo la gráfica de f.

7. $f(x) = (x - 3)^2, \quad [2, 5]$

8. $f(x) = \ln x, \quad [1, 3]$

9. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$

10. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2, \quad [0, 2]$

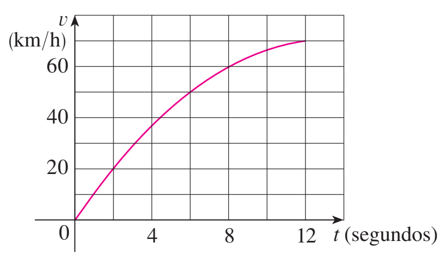
11. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, demuestre que t toma el valor 4 al menos una vez en el intervalo [1, 3].

12. Encuentre los números b tales que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ es igual a 3.

13. La tabla da valores de una función continua. Use la Regla de Simpson para calcular el valor promedio de f en [20, 50].

x	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	42	38	31	29	35	48	60

14. Vea a continuación la gráfica de velocidad de un auto que acelera.



(a) Calcule el promedio de velocidad del auto durante los primeros 12 segundos.

(b) ¿En qué tiempo la velocidad instantánea fue igual al promedio de velocidad?

15. En cierta ciudad, la temperatura (en °F) t horas después de las 9 a.m. fue modelada por la función

$$T(t) = 50 + 14 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12}$$

Encuentre el promedio de temperatura durante el periodo de 9 a.m. a 9 p.m.

16. Si una taza de café tiene temperatura de 95°C en un cuarto donde la temperatura es de 20°C, entonces, de acuerdo con la Ley de Newton de Enfriamiento, la temperatura del café después de t minutos es $T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$. ¿Cuál es la temperatura promedio del café durante la primera media hora?

17. La densidad lineal de una varilla de 8 m de largo es $12/\sqrt{x + 1}$ kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre el promedio de densidad de la varilla.

18. Si un cuerpo en caída libre arranca desde el reposo, entonces su desplazamiento está dado por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Sea v_T la velocidad después de un tiempo T. Demuestre que si calculamos el promedio de las velocidades con respecto a t obtenemos $v_{\text{prom}} = \frac{1}{2}v_T$, pero si calculamos el promedio de las velocidades con respecto a s obtenemos $v_{\text{prom}} = \frac{2}{3}v_T$.

19. Use el resultado del Ejercicio 65 en la Sección 5.5 para calcular el promedio de volumen de aire inhalado en los pulmones en un ciclo respiratorio.

20. La velocidad v de sangre que circula en un vaso sanguíneo con radio R y longitud l a una distancia r del eje central es

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre (vea el Ejemplo 7 de la Sección 3.8). Encuentre el promedio de velocidad (con respecto a r) en el intervalo $0 \leqslant r \leqslant R$. Compare el promedio de velocidad con la velocidad máxima.

21. Demuestre el Teorema del Valor Medio para Integrales al aplicar el Teorema del Valor Medio para derivadas (vea la Sección 4.3) a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

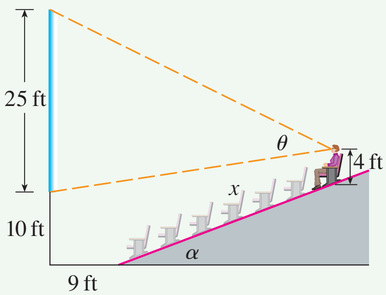
22. Si $f_{\text{prom}}[a, b]$ denota el valor promedio de f en el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, demuestre que

$$f_{\text{prom}}[a, b] = \frac{c - a}{b - a} f_{\text{prom}}[a, c] + \frac{b - c}{b - a} f_{\text{prom}}[c, b]$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

PROYECTO DE APLICACIÓN CAS Dónde sentarse en el cine



Un cine tiene una pantalla que está colocada a 10 ft del piso y mide 25 ft de altura. La primera fila de asientos está colocada a 9 ft de la pantalla y las filas están separadas por 3 pies. El piso de la zona de asientos está inclinado a un ángulo $a = 20°$ sobre la horizontal y la distancia en el plano donde una persona se sienta es x. El teatro tiene 21 filas de asientos, de modo que $0 \leqslant x \leqslant 60$. Supongamos que el lector decide que el mejor lugar para tomar asiento es en la fila donde el ángulo θ subtendido por la pantalla en sus ojos es el máximo. Supongamos también que sus ojos están 4 ft sobre el piso, como se ve en la figura. (En el Ejercicio 58 de la Sección 4.6 vimos una versión más sencilla de este problema, donde el piso es horizontal, pero este proyecto comprende una situación más complicada y requiere tecnología.)

1. Demuestre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$$

donde $$a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x \operatorname{sen}\alpha)^2$$

y $$b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x \operatorname{sen}\alpha - 6)^2$$

2. Use una gráfica de θ como función de x para calcular el valor de x que maximice θ. ¿En qué fila se sentaría? ¿Cuál es el ángulo de observación θ en esta fila?
3. Use su sistema computarizado de álgebra para derivar θ y hallar un valor numérico para la raíz de la ecuación $d\theta/dx = 0$. ¿Este valor confirma su resultado en el Problema 2?
4. Use la gráfica de θ para calcular el valor promedio de θ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 60$. A continuación use su CAS para calcular el valor promedio. Compare con los valores máximo y mínimo de θ.

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

6.6 Aplicaciones a la física e ingeniería

Como consecuencia de un cálculo de trabajo, el lector podrá calcular la velocidad necesaria para que un cohete escape del campo gravitacional terrestre. (Vea Ejercicio 28.)

Entre las numerosas aplicaciones del cálculo integral a la física y la ingeniería, consideramos tres: trabajo, fuerza debida a la presión de agua, y centros de masa. Al igual que con nuestras aplicaciones previas de geometría (áreas, volúmenes y longitudes), nuestra estrategia es descomponer la cantidad física en un número grande de partes pequeñas, aproximar cada pequeña parte, sumar los resultados, tomar el límite y evaluar la integral resultante.

Trabajo

El término *trabajo* se usa en nuestro lenguaje diario para denotar la cantidad total de esfuerzo requerido para realizar una tarea. En física tiene un significado técnico que depende de la idea de una *fuerza*. Intuitivamente, se puede considerar una fuerza como aquello que describe un empuje o tracción sobre un objeto, por ejemplo un empuje horizontal de un libro en una mesa o la tracción hacia debajo de la gravedad terrestre sobre una pelota. En general, si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición $s(t)$, entonces la **fuerza** F sobre un objeto (en la misma dirección) está definida por la Segunda Ley de Newton del Movimiento como el producto de su masa m y su aceleración:

1 $$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

En el sistema métrico SI, la masa se mide en kilogramos (kg), el desplazamiento en metros (m), el tiempo en segundos (s), y la fuerza en newtons ($N = kg \cdot m/s^2$). Entonces una fuerza de 1 N que actúa sobre una masa de 1 kg produce una aceleración de 1 m/s^2. En el sistema de medidas convencional en Estados Unidos, la unidad fundamental se escoge como la unidad de fuerza que es la libra.

En el caso de una aceleración constante, la fuerza F es también constante y el trabajo realizado se define como el producto de la fuerza F y la distancia d que el objeto se mueve:

$$\boxed{2} \qquad W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Si F se mide en newtons y d en metros, entonces la unidad para W es un newton-metro, que se denomina joule (J). Si F se mide en libras y d en pies, entonces la unidad para W es un pie-libra (ft-lb), que es alrededor de 1.36 J.

Por ejemplo, suponga que del piso levantamos un libro de 1.2 kg para ponerlo en un escritorio de 0.7 m de alto. La fuerza ejercida es igual y opuesta a la ejercida por la gravedad, de modo que la Ecuación 1 da

$$F = mg = (1.2)(9.8) = 11.76 \text{ N}$$

y entonces la Ecuación 2 da el trabajo realizado como

$$W = Fd = (11.76)(0.7) \approx 8.2 \text{ J}$$

Pero si un peso de 20 lb es levantado 6 ft del suelo, entonces la fuerza está dada como $F = 20$ lb, de modo que el trabajo realizado es

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120 \text{ ft-lb}$$

Aquí no multiplicamos por g porque nos dieron el *peso* (una fuerza) y no la masa.

La Ecuación 2 define el trabajo mientras la fuerza sea constante, pero, ¿qué pasa si la fuerza es variable? Supongamos que el objeto se mueve a lo largo del eje x en la dirección positiva, de $x = a$ a $x = b$, y en cada punto x entre a y b una fuerza $f(x)$ actúa sobre el objeto, donde f es una función continua. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx. Elegimos un punto muestral x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces, la fuerza en este punto es $f(x_i^*)$. Si n es muy grande, entonces Δx es pequeño y, puesto que f es continua, los valores de f no cambian mucho sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En otras palabras, f es casi constante en el intervalo y por tanto el trabajo W_i que se realiza al mover la partícula de x_{i-1} a x_i está dado aproximadamente por la Ecuación 2:

$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

De este modo podemos aproximar el trabajo total con

$$\boxed{3} \qquad W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Parece que esta aproximación mejora cuando n se hace más grande. Por tanto, definimos el **trabajo realizado al mover el objeto de *a* a *b*** como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$. Como el lado derecho de (3) es una suma de Riemann, reconocemos su límite como una integral definida y entonces

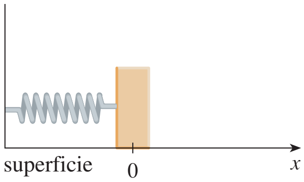
$$\boxed{4} \qquad \boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx}$$

EJEMPLO 1 Trabajo realizado por una fuerza variable Cuando una partícula está situada a una distancia x pies del origen, una fuerza de $x^2 + 2x$ libras actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se realiza al moverla de $x = 1$ a $x = 3$?

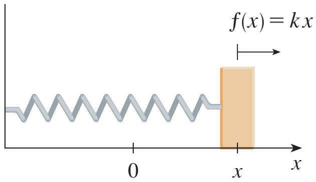
SOLUCIÓN

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \bigg]_1^3 = \frac{50}{3}$$

El trabajo realizado es $16\frac{2}{3}$ ft-lb.



(a) Posición natural de resorte



(b) Posición estirada de resorte

FIGURA 1
Ley de Hooke

En el siguiente ejemplo usamos una ley de física: la **Ley de Hooke** expresa que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades más de su longitud natural es proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

donde k es una constante positiva (llamada **constante de resorte**). La Ley de Hooke se cumple siempre que x no sea demasiado grande (vea Figura 1).

V EJEMPLO 2 Trabajo necesario para estirar un resorte Una fuerza de 40 N se hace necesaria para sostener un resorte que ha sido estirado desde su longitud natural de 10 cm a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo es realizado para estirar el resorte de 15 cm a 18 cm?

SOLUCIÓN De acuerdo con la Ley de Hooke, la fuerza necesaria para sostener el resorte estirado x metros más que su longitud natural es $f(x) = kx$. Cuando el resorte se estira de 10 cm a 15 cm, la cantidad estirada es 5 cm $= 0.05$ m. Esto significa que $f(0.05) = 40$ y entonces

$$0.05k = 40 \qquad k = \tfrac{40}{0.05} = 800$$

Por tanto, $f(x) = 800x$ y el trabajo realizado para estirar el resorte de 15 cm a 18 cm es

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\,dx = 800\,\frac{x^2}{2}\bigg]_{0.05}^{0.08}$$

$$= 400[(0.08)^2 - (0.05)^2] = 1.56 \text{ J}$$

V EJEMPLO 3 Trabajo necesario para levantar un cable Un cable de 200 lb mide 100 ft de largo y cuelga verticalmente de lo alto de un edificio. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar el cable a lo alto del edificio?

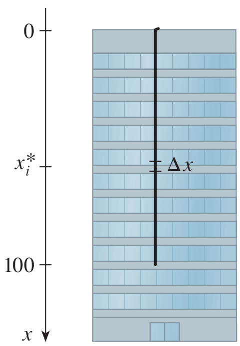


FIGURA 2

SOLUCIÓN Aquí no tenemos una fórmula para la función de fuerza, pero podemos usar un argumento similar al que llevó a la Definición 4.

Coloquemos el origen en lo alto del edificio y el eje x apuntando hacia abajo como se ve en la Figura 2. Dividimos el cable en partes pequeñas con longitud Δx. Si x_i^* es un punto de i-ésimo intervalo, entonces todos los puntos del intervalo son levantados aproximadamente la misma cantidad, es decir x_i^*. El cable pesa 2 libras por pie, de manera que el peso de la i-ésima parte es $2\Delta x$. Así, el trabajo realizado en la i-ésima parte, en pies-libras, es

$$\underbrace{(2\Delta x)}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{x_i^*}_{\text{distancia}} = 2x_i^*\,\Delta x$$

Obtenemos el total de trabajo realizado al sumar todas estas aproximaciones y haciendo que el número de partes sea grande (y entonces $\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i^*\,\Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx$$

$$= x^2\Big]_0^{100} = 10{,}000 \text{ ft-lb}$$

Si hubiéramos puesto el origen en la parte inferior del cable y el eje x hacia arriba, hubiéramos obtenido

$$W = \int_0^{100} 2(100 - x)\,dx$$

que da la misma respuesta.

EJEMPLO 4 **Trabajo necesario para vaciar un tanque** Un tanque tiene forma de un cono circular invertido con altura de 10 m y radio de base de 4 m. Está lleno de agua a una altura de 8 m. Encuentre el trabajo necesario para vaciar el tanque al bombear toda el agua a la parte superior del tanque. (La densidad del agua es 1000 kg/m^3.)

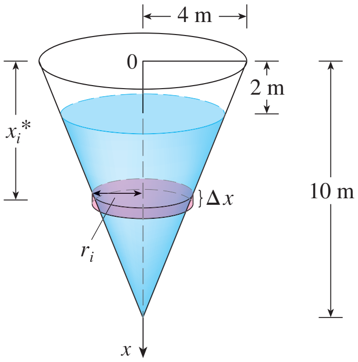


FIGURA 3

SOLUCIÓN Midamos profundidades desde lo alto del tanque introduciendo una recta vertical coordenada como en la Figura 3. El agua se extiende de una profundidad de 2 m a una profundidad de 10 m y entonces dividimos el intervalo [2, 10] en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y escogemos x_i^* del i-ésimo subintervalo. Esto divide el agua en n capas. La i-ésima capa es aproximada por un cilindro circular con radio r_i y altura Δx. Podemos calcular r_i de triángulos semejantes, usando la Figura 4, como sigue:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

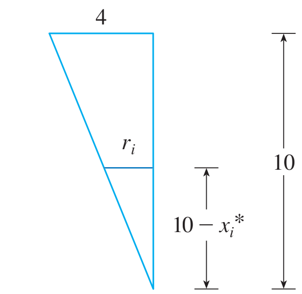


FIGURA 4

Así, una aproximación al volumen de la i-ésima capa de agua es

$$V_i \approx \pi r_i^2 \,\Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

y por tanto su masa es

$$m_i = \text{densidad} \times \text{volumen}$$

$$\approx 1000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

La fuerza necesaria para levantar esta capa debe vencer la fuerza de gravedad y entonces

$$F_i = m_i g \approx (9.8)160\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

$$\approx 1568\pi(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

Cada partícula de la capa debe moverse una distancia de aproximadamente x_i^*. El trabajo W_i realizado para levantar esta capa a lo alto es aproximadamente el producto de la fuerza F_i y la distancia x_i^*:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x$$

Para hallar el trabajo total realizado para vaciar todo el tanque, sumamos las aportaciones de cada una de las n capas y luego tomamos el límite cuando $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x = \int_2^{10} 1568\pi x(10 - x)^2 \,dx$$

$$= 1568\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\,dx = 1568\pi\left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_2^{10}$$

$$= 1568\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3.4 \times 10^6 \text{ J}$$

Presión y fuerza hidrostáticas

Los buzos de aguas profundas saben que la presión del agua aumenta a medida que su inmersión sea más profunda. Esto es porque el peso del agua sobre ellos aumenta.

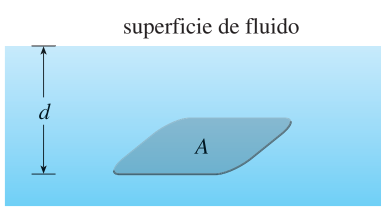


FIGURA 5

En general, suponga que una delgada placa horizontal con área de A metros cuadrados se sumerge en un fluido de densidad ρ kilogramos por metro cúbico, a una profundidad de d metros bajo la superficie del fluido como se ve en la Figura 5. El fluido que está directamente sobre la placa tiene volumen $V = Ad$, de modo que su masa es $m = \rho V = \rho Ad$. La fuerza ejercida por el fluido sobre la placa es, por tanto,

$$F = mg = \rho g A d$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. La presión P sobre la placa está definida como la fuerza por área unitaria:

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d$$

Cuando se usen unidades del sistema de medidas convencional en Estados Unidos, escribimos $P = \rho g d = \delta d$ donde $\delta = \rho g$ es la densidad de *peso* (contrario a ρ, que es la densidad de *masa*). Por ejemplo, la densidad de peso del agua es $\delta = 62.5 \text{ lb/ft}^3$.

La unidad del SI para medir presión es newtons por metro cuadrado, que se denomina pascal (abreviatura: $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$). Como ésta es una unidad pequeña, el kilopascal (kPa) se usa con frecuencia. Por ejemplo, debido a que la densidad del agua es $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, la presión en el fondo de una piscina de 2 m de profundidad es

$$P = \rho g d = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m}$$
$$= 19{,}600 \text{ Pa} = 19.6 \text{ kPa}$$

Un principio importante de la presión de un fluido es el hecho experimentalmente verificado que *en cualquier punto de un líquido la presión es la misma en todas direcciones.* (Un buzo siente la misma presión en la nariz y ambos oídos.) Entonces la presión en *cualquier* dirección a una profundidad d en un fluido con densidad de masa ρ está dada por

$$\boxed{5} \qquad P = \rho g d = \delta d$$

Esto nos ayuda a determinar la fuerza hidrostática contra una placa o pared o represa *verticales* en un fluido. Éste no es un problema sencillo porque la presión no es constante sino que aumenta a medida que aumenta la profundidad.

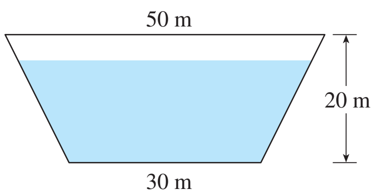


FIGURA 6

V EJEMPLO 5 Fuerza hidrostática en una represa Una represa tiene la forma del trapecio mostrado en la Figura 6. La altura es 20 m y el ancho es 50 m en lo alto y 30 m en el fondo. Encuentre la fuerza sobre la represa debida a la presión hidrostática si el nivel del agua es 4 m desde lo alto de la represa.

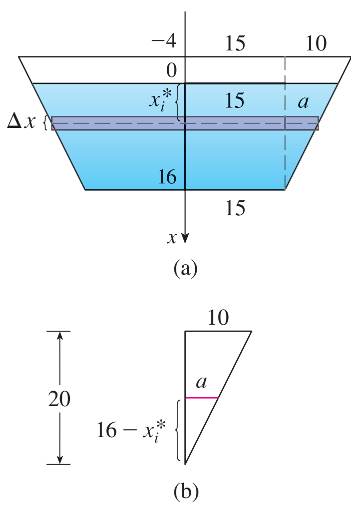


FIGURA 7

SOLUCIÓN Escogemos un eje x vertical con origen en la superficie del agua como en la Figura 7(a). La profundidad del agua es 16 m, de modo que dividimos el intervalo $[0, 16]$ en subintervalos de igual longitud y puntos extremos x_i y escogemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La i-ésima franja horizontal de la represa es aproximada por un rectángulo con altura Δx y ancho w_i, donde, de triángulos semejantes de la Figura 7(b),

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad \text{o} \qquad a = \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2}$$

y por tanto
$$w_i = 2(15 + a) = 2\left(15 + 8 - \tfrac{1}{2}x_i^*\right) = 46 - x_i^*$$

Si A_i es el área de la i-ésima franja, entonces

$$A_i \approx w_i \, \Delta x = (46 - x_i^*) \, \Delta x$$

Si Δx es pequeña, entonces la presión P_i en la i-ésima franja es casi constante y podemos usar la Ecuación 5 para escribir

$$P_i \approx 1000 g x_i^*$$

La fuerza hidrostática F_i que actúa sobre la i-ésima franja es el producto de la presión y el área:

$$F_i = P_i A_i \approx 1000gx_i^*(46 - x_i^*)\,\Delta x$$

Si sumamos estas fuerzas y tomamos el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos el total de fuerza hidrostática sobre la represa:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1000gx_i^*(46 - x_i^*)\,\Delta x = \int_0^{16} 1000gx(46 - x)\,dx$$

$$= 1000(9.8)\int_0^{16} (46x - x^2)\,dx = 9800\left[23x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{16}$$

$$\approx 4.43 \times 10^7 \text{ N}$$

Momentos y centros de masa

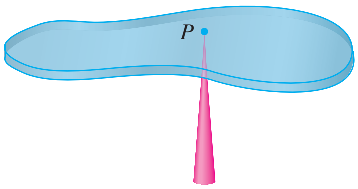


FIGURA 8

Nuestra meta principal aquí es hallar el punto P sobre el que una delgada placa de cualquier forma dada se equilibre horizontalmente como en la Figura 8. Este punto se denomina **centro de masa** (o centro de gravedad) de la placa.

Primero consideremos la situación más sencilla ilustrada en la Figura 9, donde dos masas m_1 y m_2 están unidas a una varilla de masa despreciable en lados opuestos de un fulcro y a distancias d_1 y d_2 del fulcro. La varilla se equilibra si

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \tag{6}$$

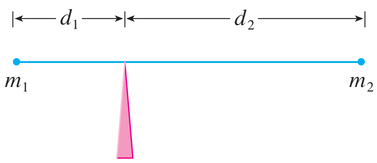


FIGURA 9

Éste es un dato experimental descubierto por Arquímedes y recibe el nombre de Ley de la Palanca. (Considere una persona más ligera balanceando a una más pesada en un "sube y baja" sentándose a mayor distancia del centro.)

Ahora suponga que la varilla se encuentra a lo largo del eje x con m_1 en x_1 y m_2 en x_2 y el centro de masa en $\bar{x}$. Si comparamos las Figuras 9 y 10, vemos que $d_1 = \bar{x} - x_1$ y $d_2 = x_2 - \bar{x}$ por tanto la Ecuación 6 da

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

Los números m_1x_1 y m_2x_2 se llaman **momentos** de las masas m_1 y m_2 (con respecto al origen), y la Ecuación 7 dice que el centro de masa $\bar{x}$ se obtiene sumando los momentos de las masas y dividiendo entre la masa total $m = m_1 + m_2$.

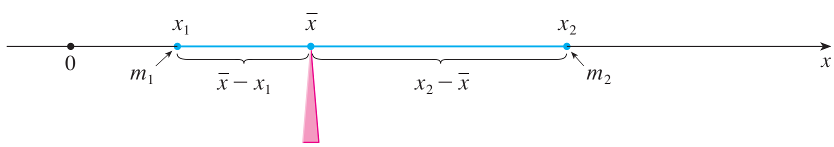


FIGURA 10

En general, si tenemos un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ colocadas en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre el eje x, se puede demostrar de modo similar que el centro de masa del sistema está colocado en

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \tag{8}$$

donde $m = \Sigma\, m_i$ es la masa total del sistema, y la suma de los momentos individuales

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

se denomina **momento del sistema alrededor del origen**. Entonces la Ecuación 8 se puede reescribir como $m\bar{x} = M$, que dice que si la masa total fuera considerada como concentrada en el centro de masa $\bar{x}$, entonces su momento sería el mismo que el momento del sistema.

Ahora considere un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ colocadas en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano xy como se ve en la Figura 11. Por analogía con el caso de una dimensión, definimos el **momento del sistema alrededor del eje *y*** como

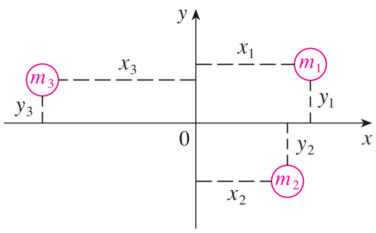


FIGURA 11

$$\boxed{9} \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

y el **momento del sistema alrededor del eje *x*** como

$$\boxed{10} \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Entonces M_y mide la tendencia del sistema para girar alrededor del eje y y M_x mide la tendencia para girar alrededor del eje x.

Al igual que en el caso de una dimensión, las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa están dadas en términos de los momentos por las fórmulas

$$\boxed{11} \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = \Sigma\, m_i$ es la masa total. Como $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$, el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es el punto donde una sola partícula de masa m tendría los mismos momentos que el sistema.

V EJEMPLO 6 Encuentre los momentos y centro de masa del sistema de objetos que tienen masas 3, 4 y 8 en los puntos $(-1, 1)$, $(2, -1)$ y $(3, 2)$.

SOLUCIÓN Usamos las Ecuaciones 9 y 10 para calcular los momentos:

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$

$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

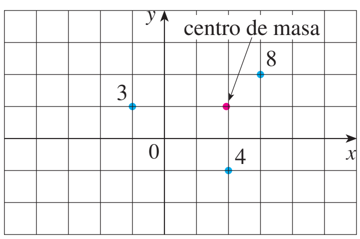


FIGURA 12

Como $m = 3 + 4 + 8 = 15$, usamos las Ecuaciones 11 para obtener

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Entonces el centro de masa es $\left(1\frac{14}{15}, 1\right)$. (Vea Figura 12.)

A continuación considere una placa plana (llamada *lámina*) con densidad uniforme ρ que ocupa una región $\mathcal{R}$ del plano. Deseamos localizar el centro de masa de la placa, que se denomina **centroide** de $\mathcal{R}$. Al hacerlo, usamos los siguientes principios físicos: El **principio de simetría** dice que si $\mathcal{R}$ es simétrica alrededor de la recta l, entonces el centroide de $\mathcal{R}$ está sobre l. (Si $\mathcal{R}$ está reflejada alrededor de l, entonces $\mathcal{R}$ sigue siendo igual y su centroide permanece fijo. Pero los únicos puntos fijos están en l.) Así, el centroide de un rectángulo es su centro. Los momentos deben ser definidos para que si toda la masa de una región está concentrada en el centro de masa, entonces sus momentos permanezcan sin cambio. También, el momento de la unión de dos regiones que no se traslapan debe ser la suma de los momentos de las regiones individuales.

Suponga que la región $\mathcal{R}$ es del tipo que se ve en la Figura 13(a); esto es, $\mathcal{R}$ está entre las rectas $x = a$ y $x = b$, arriba del eje x, y abajo la gráfica de f, donde f es una función continua. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx. Escogemos el punto muestral x_i^* como el punto medio $\bar{x}_i$ del i-ésimo subintervalo, que es $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Esto determina la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$ que se muestra en la Figura 13(b). El centroide del i-ésimo rectángulo de aproximación R_i es su centro $C_i\left(\bar{x}_i, \frac{1}{2} f(\bar{x}_i)\right)$. Su área es $f(\bar{x}_i)\,\Delta x$, de modo que su masa es

$$\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

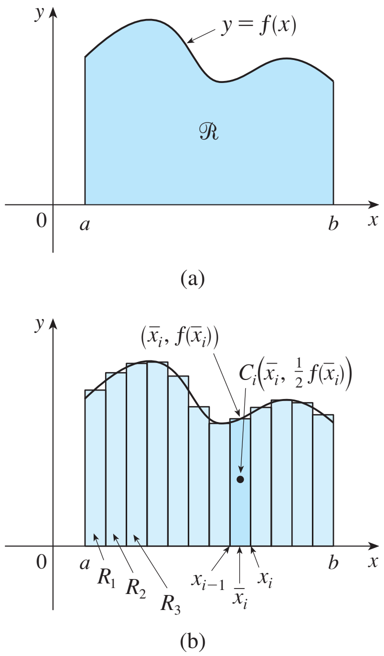


FIGURA 13

El momento de R_i alrededor del eje y es el producto de su masa y la distancia de C_i al eje y, que es $\bar{x}_i$. Así,

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Sumando estos momentos, obtenemos el momento de la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$, y entonces al tomar el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos el momento de $\mathcal{R}$ misma alrededor del eje y:

$$\boxed{M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx}$$

De un modo semejante calculamos el momento de R_i alrededor del eje x como el producto de su masa y la distancia de C_i al eje x:

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\tfrac{1}{2} f(\bar{x}_i) = \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

De nuevo sumamos estos momentos y tomamos el límite para obtener el momento de $\mathcal{R}$ alrededor del eje x:

$$\boxed{M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x = \rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}$$

Así como para sistemas de partículas, el centro de masa de la placa está definido de modo que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. Pero la masa de la placa es el producto de su densidad y su área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\,dx$$

y entonces

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x)\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Nótese la cancelación de las letras ρ. El lugar del centro de masa es independiente de la densidad.

En resumen, el centro de masa de la placa (o el centroide de $\mathcal{R}$) está colocado en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

12
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

EJEMPLO 7 Encuentre el centro de masa de una placa semicircular de radio r.

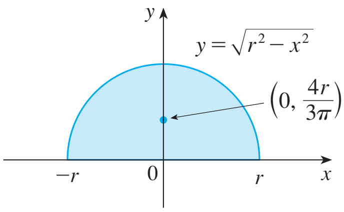


FIGURA 14

SOLUCIÓN Para usar (12) colocamos el semicírculo como en la Figura 14 para que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $a = -r$, $b = r$. Aquí no hay necesidad de usar la fórmula para calcular $\bar{x}$ porque, por el principio de simetría, el centro de masa debe estar sobre el eje y, de modo que $\bar{x} = 0$. El área del semicírculo es $A = \frac{1}{2}\pi r^2$ y

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi r^2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \\ &= \frac{2}{\pi r^2}\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}\end{aligned}$$

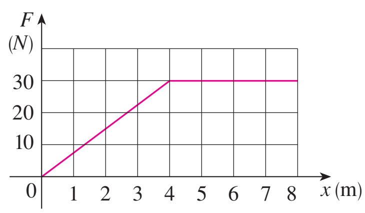
El centro de masa está colocado en el punto $(0, 4r/(3\pi))$.

6.6 Ejercicios

1. Una partícula es movida a lo largo del eje x por una fuerza que mide $10/(1 + x)^2$ libras en un punto a x pies del origen. Encuentre el trabajo realizado al mover la partícula del origen a una distancia de 9 pies.

2. Cuando una partícula está colocada a una distancia de x metros del origen, una fuerza de $\cos(\pi x/3)$ newtons actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo es realizado al mover la partícula de $x = 1$ a $x = 2$? Interprete su respuesta al considerar el trabajo realizado de $x = 1$ a $x = 1.5$ y de $x = 1.5$ a $x = 2$.

3. A continuación se ilustra la gráfica de una función de fuerza (en newtons) que aumenta a su valor máximo y entonces permanece constante. ¿Cuánto trabajo es realizado por la fuerza al mover un objeto una distancia de 8 m?



4. La tabla siguiente muestra valores de una función de fuerza $f(x)$, donde x se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Use la Regla de Simpson para calcular el trabajo realizado por la fuerza al mover un objeto una distancia de 18 metros.

x	0	3	6	9	12	15	18
$f(x)$	9.8	9.1	8.5	8.0	7.7	7.5	7.4

5. Una fuerza de 10 lb es necesaria para sostener un resorte estirado 4 in más que su longitud natural. ¿Cuánto trabajo es realizado al estirarlo de su longitud natural a 6 in más que su longitud natural?

6. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Si una fuerza de 25 N se requiere para mantenerlo estirado a una longitud de 30 cm, ¿cuánto trabajo se requiere para estirarlo de 20 cm a 25 cm?

7. Suponga que 2 J de trabajo se requieren para estirar un resorte de su longitud natural de 30 cm a una longitud de 42 centímetros.
   (a) ¿Cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte de 35 a 40 cm?
   (b) ¿Cuánto más que su longitud natural una fuerza de 30 N mantendrá estirado el resorte?

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

8. Si el trabajo requerido para estirar un resorte 1 ft más que su longitud natural es 12 ft-lb, ¿cuándo trabajo es necesario para estirarlo 9 in más que su longitud natural?

9. Un resorte tiene longitud natural de 20 cm. Compare el trabajo W_1 realizado al estirar el resorte de 20 cm a 30 cm con el trabajo W_2 realizado al estirarlo de 30 cm a 40 cm. ¿Cómo están relacionados W_2 y W_1?

10. Si 6 J de trabajo se requieren para estirar un resorte de 10 cm a 12 cm y otros 10 J son necesarios para estirarlo de 12 cm a 14 cm, ¿cuál es la longitud natural del resorte?

11–18 Demuestre cómo aproximar el trabajo requerido por una suma de Riemann. A continuación exprese el trabajo como una integral y evalúela.

11. Una cuerda gruesa, de 50 ft de largo, pesa 0.5 lb/ft y cuelga sobre el borde de un edificio de 120 ft de altura.
(a) ¿Cuánto trabajo es realizado al tirar de la cuerda hasta lo alto del edificio?
(b) ¿Cuánto trabajo es realizado al tirar de la mitad de la cuerda a lo alto del edificio?

12. Una cadena que se encuentra sobre el piso mide 10 m de largo y su masa es de 80 kg. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar un extremo de la cadena a una altura de 6 m?

13. Un cable que pesa 2 lb/ft se usa para levantar 800 lb de carbón por un tiro de mina de 500 ft de profundidad. Encuentre el trabajo realizado.

14. Una cubeta que pesa 4 lb y una cuerda de peso insignificante se usan para sacar agua de un pozo que tiene 80 ft de profundidad. La cubeta se llena con 40 lb de agua y es subida a razón de 2 ft/s, pero se fuga agua por un agujero en la cubeta a razón de 0.2 lb/s. Encuentre el trabajo realizado para tirar de la cubeta a lo alto del pozo.

15. Una cubeta de 10 kg que tiene fuga es levantada del suelo a una altura de 12 m a un rapidez constante con una cuerda que pesa 0.8 kg/m. Inicialmente la cubeta contiene 36 kg de agua, pero ésta se fuga de modo constante y termina sin agua justo cuando la cubeta llega al nivel de 12 metros. ¿Cuánto trabajo es realizado?

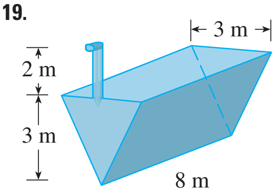
16. Una cadena de 10 ft pesa 25 lb y cuelga de un cielo raso. Encuentre el trabajo realizado al levantar el extremo inferior de la cadena al cielo raso, de modo que esté a nivel con el extremo superior.

17. Un acuario de 2 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de profundidad está lleno de agua. Encuentre el trabajo necesario para bombear la mitad del agua fuera del acuario. (Use el dato de que la densidad del agua es 1000 kg/m^3.)

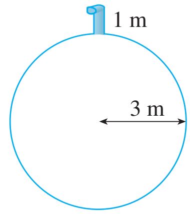
18. Una piscina circular tiene un diámetro de 24 ft, los costados miden 5 ft de alto y la profundidad del agua es de 4 ft. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear toda el agua fuera de la piscina desde un lado? (Use el dato de que el agua pesa 62.5 lb/ft^3.)

19–22 Un tanque está lleno de agua. Encuentre el trabajo requerido para bombear el agua fuera del pico. En los Ejercicios 21 y 22 use el dato de que el agua pesa 62.5 lb/ft^3.

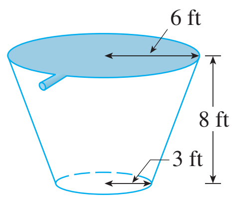
19.



20.

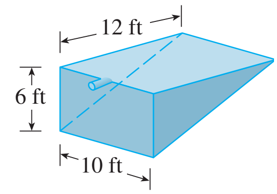


21.



tronco de un cono

22.

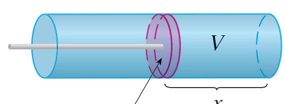


23. Suponga que para el tanque del Ejercicio 19 la bomba se descompone después que se ha realizado un trabajo de 4.7×10^5 J. ¿Cuál es la profundidad del agua restante en el tanque?

24. Resuelva el Ejercicio 20 si el tanque está medio lleno de petróleo que tiene una densidad de 900 kg/m^3.

25. Cuando un gas se expande en un cilindro con radio r, la presión en cualquier momento dado es una función del volumen: $P = P(V)$. La fuerza ejercida por el gas sobre el pistón (vea la figura) es el producto de la presión y el área: $F = \pi r^2 P$. Demuestre que el trabajo realizado por el gas cuando el volumen se expande del volumen V_1 al volumen V_2 es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$



cabeza de pistón

26. En un motor de vapor la presión P y volumen V de vapor satisfacen la ecuación $PV^{1.4} = k$, donde k es una constante. (Esto es verdadero para expansión adiabática, es decir, una expansión en la que no hay transferencia de calor entre el cilindro y su entorno.) Use el Ejercicio 25 para calcular el trabajo realizado por la máquina durante un ciclo cuando el vapor empieza a una presión de 160 lb/in^2 y un volumen de 100 in^3 y se expande a un volumen de 800 in^3.

27. (a) La Ley de Newton de Gravitación expresa que dos cuerpos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos y G es la constante gravitacional. Si uno de los cuerpos está fijo, encuentre el trabajo necesario para mover el otro de $r = a$ a $r = b$.

(b) Calcule el trabajo requerido para lanzar un satélite de 1000 kg verticalmente a una órbita a 1000 km de altura. Se puede suponer que la masa de la Tierra es 5.98×10^{24} kg y está concentrada en su centro. Tome el radio terrestre como 6.37×10^6 m y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².

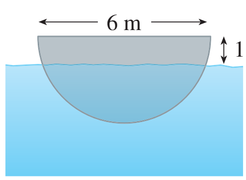
28. (a) Use una integral impropia e información del ejercicio 27 para hallar el trabajo necesario para impulsar un satélite de 1000 kg fuera del campo gravitacional de la Tierra.
(b) Encuentre la *velocidad de escape* v_0 que es necesaria para impulsar un cohete de masa m fuera del campo gravitacional de un planeta con masa M y radio R. (Use el dato de que la energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ suministra el trabajo necesario.)

29. Un acuario de 5 ft de largo, 2 ft de ancho y 3 ft de profundidad está lleno de agua. Encuentre (a) la presión hidrostática sobre el fondo del acuario, (b) la fuerza hidrostática sobre el fondo y (c) la fuerza hidrostática sobre un extremo del acuario.

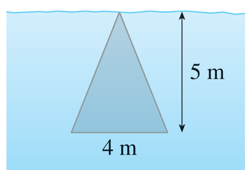
30. Un tanque mide 8 m de largo, 4 m de ancho, 2 m de alto y contiene keroseno con densidad de 820 kg/m³ a una profundidad de 1.5 m. Encuentre (a) la presión hidrostática sobre el fondo del tanque, (b) la fuerza hidrostática sobre el fondo, y (c) la fuerza hidrostática sobre un extremo del tanque.

31–36 Una placa vertical está sumergida (o parcialmente sumergida) en agua y tiene la forma indicada. Explique cómo aproximar la fuerza hidrostática contra un lado de la placa por medio de una suma de Riemann. A continuación exprese la fuerza como una integral y evalúela.

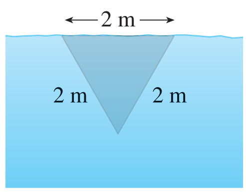
31.



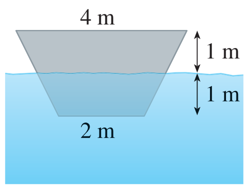
32.



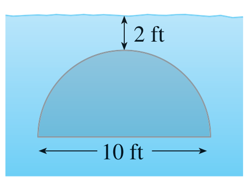
33.



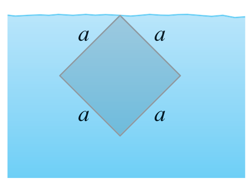
34.



35.



36.

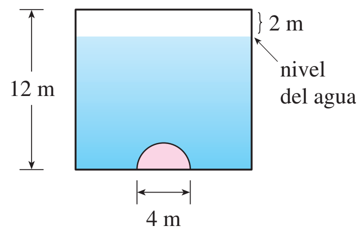


37. Un canal está lleno con un líquido de densidad 840 kg/m³. Los extremos del canal son triángulos equiláteros con lados de 8 m de longitud y vértice en el fondo. Encuentre la fuerza hidrostática en un extremo del canal.

38. Un tanque grande está diseñado con extremos en forma de la región entre las curvas $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 12$, medidas en pies. Encuentre la fuerza hidrostática sobre un extremo del tanque si está lleno a una profundidad de 8 ft con gasolina. (Suponga que la densidad de la gasolina es 42.0 lb/ft³.)

39. Una piscina mide 20 ft de ancho y 40 ft de largo y su fondo es un plano inclinado, con el extremo de poco fondo a una profundidad de 3 ft y el extremo profundo a 9 ft. Si la piscina se llena de agua, calcule la fuerza hidrostática sobre (a) el extremo de poco fondo, (b) el extremo profundo, (c) uno de los costados, y (d) el fondo de la piscina.

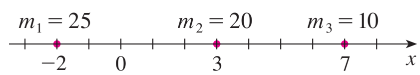
40. Una represa vertical tiene una compuerta semicircular como se ve en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática contra la compuerta.



41. Una placa vertical y de forma irregular está sumergida en agua. La tabla siguiente muestra mediciones de su ancho, tomadas en las profundidades indicadas. Use la Regla de Simpson para calcular la fuerza del agua contra la placa.

Profundidad (m)	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Ancho de placa (m)	0	0.8	1.7	2.4	2.9	3.3	3.6

42. Unas masas puntuales m_i están colocadas sobre el eje x como se muestra. Encuentre el momento M del sistema alrededor del origen y el centro de masa $\bar{x}$.



43–44 Las masas m_i están colocadas en los puntos P_i. Encuentre los momentos M_x y M_y y el centro de masa del sistema.

43. $m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 10;$
$P_1(1, 5),\ P_2(3, -2),\ P_3(-2, -1)$

44. $m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 1,\ m_4 = 4;$
$P_1(1, -2),\ P_2(3, 4),\ P_3(-3, -7),\ P_4(6, -1)$

45–48 Trace la región acotada por las curvas, y visualmente calcule la ubicación del centroide. A continuación encuentre las coordenadas exactas del centroide.

45. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

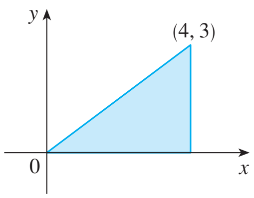
46. $3x + 2y = 6, \quad y = 0, \quad x = 0$

47. $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

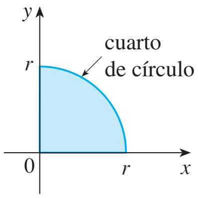
48. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

49–50 Calcule los momentos M_x y M_y y el centro de masa de una lámina con la densidad y forma dadas.

49. $\rho = 10$



50. $\rho = 2$



51. (a) Sea $\mathcal{R}$ la región que está entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$ y $a \leqslant x \leqslant b$. Con el uso de la misma clase de razonamiento que llevó a las fórmulas en (12), demuestre que el centroide de $\mathcal{R}$ es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

(b) Encuentre el centroide de la región acotada por la recta $y = x^2$.

52. Sea $\mathcal{R}$ la región que está entre las curvas $y = x^m$ y $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, donde m y n son enteros con $0 \leqslant n < m$.

(a) Trace la región $\mathcal{R}$.

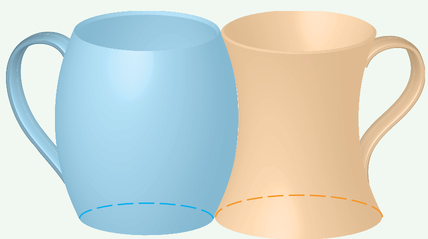
(b) Encuentre las coordenadas del centroide de $\mathcal{R}$.

(c) Trate de hallar los valores de m y n tales que el centroide esté *fuera de* $\mathcal{R}$.

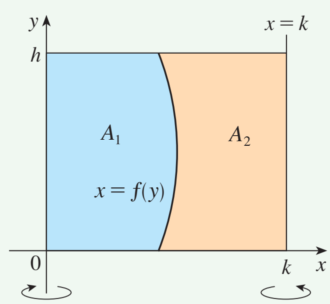
PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Tazas de café complementarias

Supongamos que el lector tiene opción de escoger dos tazas de café del tipo mostrado, una que se dobla hacia fuera y una hacia dentro, y observa que tienen la misma altura y sus formas se ajustan perfectamente. Se pregunta cuál taza contiene más café. Por supuesto que podría llenar una taza con agua y verterla en la otra pero, siendo estudiante de cálculo, se decide por un método más matemático. Sin contar las asas, observa que ambas tazas son superficies de revolución, de modo que se puede considerar el café como un volumen de revolución.



Taza A Taza B



1. Suponga que las tazas tienen altura h, la taza A está formada al girar la curva $x = f(y)$ alrededor del eje y, y la taza B se forma al girar la misma curva alrededor de la recta $x = k$. Encuentre el valor de k tal que las dos tazas contengan la misma cantidad de café.

2. ¿Qué dice su resultado del Problema 1 acerca de las áreas A_1 y A_2 que se ven en la figura?

3. Con base en sus propias mediciones y observaciones, sugiera un valor para h y una ecuación para $x = f(y)$ y calcule la cantidad de café que contiene cada una de las tazas.

6.7 Aplicaciones a la economía y la biología

En esta sección consideramos algunas aplicaciones de integración a economía (excedente de consumidor) y biología (circulación sanguínea, capacidad cardiaca). Otras más se describen en ejercicios.

Excedente de consumidor

Recuerde de la Sección 4.6 que la función de demanda $p(x)$ es el precio que una compañía tiene que cobrar para vender x unidades de una mercancía. Por lo general, vender grandes cantidades requiere bajar precios, de manera que la función de demanda es una función decreciente. La gráfica de una función de demanda típica, llamada **curva de demanda**, se muestra en la Figura 1. Si X es la cantidad de la mercancía que actualmente está disponible, entonces $P = p(X)$ es el precio de venta actual.

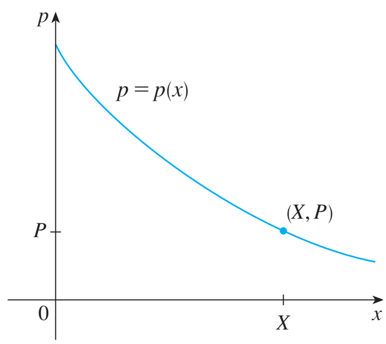


FIGURA 1
Curva de demanda típica

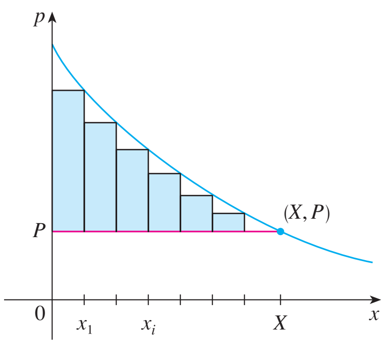


FIGURA 2

Dividimos el intervalo $[0, X]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = X/n$, y hacemos que $x_i^* = x_i$ sea el punto extremo derecho del i-ésimo subintervalo, como en la Figura 2. Si, después que las x_{i-1} unidades se vendieron, había un total de sólo x_i unidades y el precio por unidad se había establecido en $p(x_i)$ dólares, entonces las Δx unidades adicionales podrían haberse vendido (pero no más). Los consumidores que hubieran pagado $p(x_i)$ dólares pusieron un alto valor al producto; hubieran pagado lo que para ellos valía. Entonces, al pagar sólo P dólares han ahorrado la cantidad de

$$(\text{ahorro por unidad})(\text{número de unidades}) = [p(x_i) - P]\Delta x$$

Considerando grupos similares de consumidores dispuestos para cada uno de los subintervalos y sumando los ahorros, obtenemos el ahorro total:

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

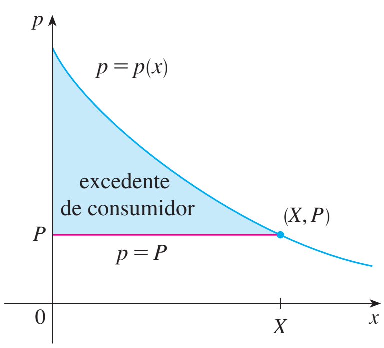


FIGURA 3

(Esta suma corresponde al área encerrada por los rectángulos de la Figura 2.) Si hacemos que $n \to \infty$, esta suma de Riemann aproxima la integral

$$\boxed{1} \qquad \int_0^X [p(x) - P]\,dx$$

que los economistas llaman **excedente de consumidor** por la mercancía.

El excedente de consumidor representa la cantidad de dinero ahorrado por consumidores en la compra de la mercancía al precio P, correspondiente a una cantidad demandada de X. La Figura 3 muestra la interpretación del excedente de consumidor como el área bajo la curva de demanda y arriba de la recta $p = P$.

V EJEMPLO 1 Excedente de consumidor La demanda para un producto, en dólares, es

$$p = 1200 - 0.2x - 0.0001x^2$$

Encuentre el excedente de consumidor cuando el nivel de ventas es 500.

SOLUCIÓN Como el número de productos vendidos es $X = 500$, el precio correspondiente es

$$P = 1200 - (0.2)(500) - (0.0001)(500)^2 = 1075$$

Por tanto, de la Definición 1, el excedente de consumidor es

$$\begin{aligned}
\int_0^{500} [p(x) - P]\, dx &= \int_0^{500} (1200 - 0.2x - 0.0001x^2 - 1075)\, dx \\
&= \int_0^{500} (125 - 0.2x - 0.0001x^2)\, dx \\
&= 125x - 0.1x^2 - (0.0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{500} \\
&= (125)(500) - (0.1)(500)^2 - \frac{(0.0001)(500)^3}{3} \\
&= \$33{,}333.33
\end{aligned}$$

Circulación sanguínea

En el Ejemplo 7 de la Sección 3.8 estudiamos la ley de flujo o circulación laminar:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

que da la velocidad v de la sangre que circula a lo largo de un vaso sanguíneo con radio R y longitud l a una distancia r del eje central, donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre. Ahora, para calcular la rapidez de circulación sanguínea, o *flujo* (volumen por unidad de tiempo), consideremos radios $r_1, r_2, \ldots$ más pequeños y separados igualmente. El área aproximada del anillo (o rondana) con radio interior r_{i-1} y radio exterior r_i es

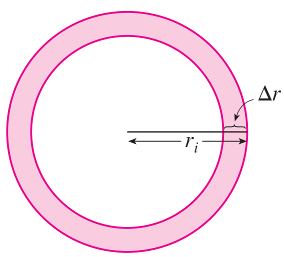


FIGURA 4

$$2\pi r_i \,\Delta r \qquad \text{donde} \quad \Delta r = r_i - r_{i-1}$$

(Vea la Figura 4.) Si Δr es pequeño, entonces la velocidad es casi constante en todo este anillo y puede ser aproximada por $v(r_i)$. Así, el volumen de sangre por unidad de tiempo que circula por el anillo es aproximadamente

$$(2\pi r_i \,\Delta r)\, v(r_i) = 2\pi r_i\, v(r_i)\, \Delta r$$

y el volumen total de sangre que circula por una sección transversal por unidad de tiempo es alrededor de

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i\, v(r_i)\, \Delta r$$

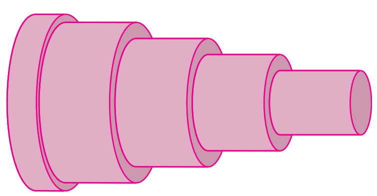


FIGURA 5

Esta aproximación está ilustrada en la Figura 5. Nótese que la velocidad (y por tanto el volumen por unidad de tiempo) aumenta hacia el centro del vaso sanguíneo. La aproximación mejora cuando n aumenta. Cuanto tomamos el límite obtenemos el valor exacto del **flujo** (o *descarga*), que es el volumen de sangre que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i\, v(r_i)\, \Delta r = \int_0^R 2\pi r\, v(r)\, dr$$

$$= \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)\, dr$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l} \int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R}$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

La ecuación resultante

$$\boxed{2} \qquad F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

se denomina **Ley de Poiseuille**; demuestra que el flujo es proporcional a la cuarta potencia del radio del vaso sanguíneo.

Capacidad cardiaca

La Figura 6 muestra el sistema cardiovascular humano. La sangre regresa del cuerpo a través de venas, entra a la aurícula derecha del corazón y es bombeada a los pulmones a través de las arterias pulmonares para su oxigenación. A continuación regresa a la aurícula izquierda por las venas pulmonares y sale al resto del cuerpo por la aorta. La **capacidad cardiaca** del corazón es el volumen de sangre bombeada por el corazón por unidad de tiempo, es decir, la rapidez de circulación que entra a la aorta.

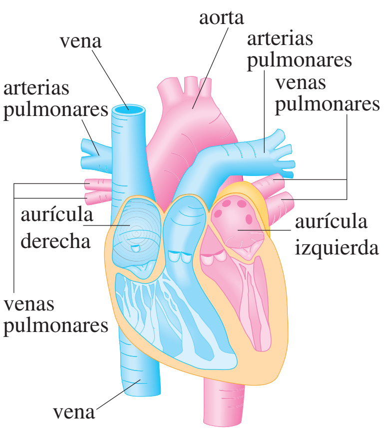


FIGURA 6

El *método de dilución de colorante* se usa para medir la capacidad cardiaca. Se inyecta un colorante en la aurícula derecha, que luego pasa por el corazón y entra a la aorta. Una sonda insertada en la aorta mide la concentración del colorante que sale del corazón en tiempos igualmente espaciados en un intervalo $[0, T]$ hasta que el colorante se haya diluido. Sea $c(t)$ la concentración del colorante en el tiempo t. Si dividimos $[0, T]$ en subintervalos de igual duración Δt, entonces la cantidad de colorante que pasa por el punto de medición durante el subintervalo de $t = t_{i-1}$ a $t = t_i$ es aproximadamente

$$(\text{concentración})(\text{volumen}) = c(t_i)(F\,\Delta t)$$

donde F es la rapidez de flujo que estamos tratando de determinar. Así, la cantidad total de colorante es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i) F\, \Delta t = F \sum_{i=1}^{n} c(t_i)\, \Delta t$$

y, haciendo $n \to \infty$, encontramos que la cantidad de colorante es

$$A = F \int_0^T c(t)\, dt$$

Entonces la capacidad pulmonar está dada por

$$\boxed{3} \qquad F = \frac{A}{\displaystyle\int_0^T c(t)\, dt}$$

donde la cantidad de colorante A se conoce y la integral puede aproximarse por las lecturas de concentración.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6.1
1	0.4	7	4.0
2	2.8	8	2.3
3	6.5	9	1.1
4	9.8	10	0
5	8.9		

V EJEMPLO 2 Capacidad cardiaca Un bolo de 5 mg de colorante se inyecta en una aurícula derecha. La concentración del colorante (en miligramos por litro) se mide en la aorta a intervalos de un segundo como se ve en la gráfica. Calcule la capacidad cardiaca.

SOLUCIÓN Aquí $A = 5$, $\Delta t = 1$, y $T = 10$. Usamos la Regla de Simpson para aproximar la integral de la concentración:

$$\int_0^{10} c(t)\,dt \approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0.4) + 2(2.8) + 4(6.5) + 2(9.8) + 4(8.9) + 2(6.1) + 4(4.0) + 2(2.3) + 4(1.1) + 0]$$

$$\approx 41.87$$

Entonces la Fórmula 3 da la capacidad cardiaca como

$$F = \frac{A}{\displaystyle\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41.87} \approx 0.12 \text{ L/s} = 7.2 \text{ L/min}$$

6.7 Ejercicios

1. La función de costo marginal $C'(x)$ se definió como la derivada de la función de costo. (Vea Secciones 3.8 y 4.6.) Si el costo marginal de manufacturar x metros de una tela es $C'(x) = 5 - 0.008x + 0.000009x^2$ (medido en dólares por metro) y el costo fijo inicial es $C(0) = \$20{,}000$, use el Teorema de Cambio Neto para hallar el costo de producir las primeras 2000 unidades.

2. El ingreso marginal por la venta de x unidades de un producto es $12 - 0.0004x$. Si el ingreso por la venta de las primeras 1000 unidades es \$12,400, encuentre el ingreso por la venta de las primeras 5000 unidades.

3. El costo marginal de producir x unidades de cierto producto es $74 + 1.1x - 0.002x^2 + 0.00004x^3$ (en dólares por unidad). Encuentre el aumento en costo si el nivel de producción se eleva de 1200 unidades a 1600 unidades.

4. La función de demanda para cierta mercancía es $p = 20 - 0.05x$. Encuentre el excedente de consumidor cuando el nivel de ventas sea 300. Ilustre al trazar la curva de demanda e identificar el excedente de consumidor como un área.

5. Una curva de demanda está dada por $p = 450/(x + 8)$. Encuentre el excedente de consumidor cuando el precio de venta sea \$10.

6. La **función de oferta** $p_S(x)$ para una mercancía da la relación entre el precio de venta y el número de unidades que los fabricantes producirán a ese precio. Por un precio más alto, los fabricantes producirán más unidades, de modo que p_S es una función creciente de x. Sea X la cantidad de mercancía actualmente producida y sea $P = p_S(X)$ el precio actual. Algunos productores estarían dispuestos a hacer y vender la mercancía por un menor precio de venta y por tanto estarían recibiendo más que su precio mínimo. El excedente se denomina **excedente de productor.** Un argumento similar al del excedente de consumidor muestra que el excedente está dado por la integral

$$\int_0^X [P - p_S(x)]\,dx$$

Calcule el excedente de productor para la función de oferta $p_S(x) = 3 + 0.01x^2$ al nivel de ventas $X = 10$. Ilustre dibujando la curva de oferta e identificando el excedente de productor como un área.

7. Si una curva de oferta está modelada por la ecuación $p = 200 + 0.2x^{3/2}$, encuentre el excedente de productor cuando el precio de venta es \$400.

8. Para una mercancía determinada y competencia pura, el número de unidades producidas y el precio por unidad están determinados como las coordenadas del punto de intersección de las curvas de oferta y demanda. Dada la curva de demanda $p = 50 - \frac{1}{20}x$ y la curva de oferta $p = 20 + \frac{1}{10}x$, encuentre el excedente de consumidor y el excedente de productor. Ilustre trazando las curvas de oferta y demanda e identificando los excedentes como áreas.

9. Una compañía modeló la curva de demanda para su producto (en dólares) por medio de la ecuación

$$p = \frac{800{,}000e^{-x/5000}}{x + 20{,}000}$$

Use una gráfica para calcular el nivel de ventas cuando el precio de venta sea \$16. A continuación encuentre (aproximadamente) el excedente de consumidor para este nivel de ventas.

10. Un cine ha estado cobrando \$7.50 por persona y vendiendo alrededor de 400 boletos en una noche típica de día laborable.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

Después de encuestar a sus clientes, la administración del cine calcula que por cada 50 centavos que bajen el precio, el número de espectadores aumentará en 35 por noche. Encuentre la función de demanda y calcule el excedente de consumidor cuando los boletos tengan un precio de \$6.00.

11. Si la cantidad de capital que una empresa tiene en un tiempo t es $f(t)$, entonces la derivada, $f'(t)$, se denomina *flujo de inversión neta*. Suponga que el flujo de inversión neta es $\sqrt{t}$ millones de dólares por año (donde t se mide en años). Encuentre el aumento en capital (la *función de capital*) del cuarto año al octavo año.

12. Si fluyen ingresos a una compañía a razón de $f(t) = 9000\sqrt{1 + 2t}$, donde t se mide en años y $f(t)$ se mide en dólares por año, encuentre el ingreso total obtenido en los primeros cuatro años.

13. La *Ley de Ingresos de Pareto* expresa que el número de personas con ingresos entre $x = a$ y $x = b$ es $N = \int_a^b Ax^{-k}\,dx$, donde A y k son constantes con $A > 0$ y $k > 1$. El promedio de ingreso de estas personas es

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b Ax^{1-k}\,dx$$

Calcule $\bar{x}$.

14. Un verano húmedo y caluroso está causando una explosión en la población de mosquitos en cierta zona turística lacustre. El número de mosquitos está aumentando con una rapidez que se estima en $2200 + 10e^{0.8t}$ por semana (donde t se mide en semanas). ¿Cuánto aumenta la población de mosquitos entre la quinta y la novena semanas de verano?

15. Use la Ley de Poiseuille para calcular la rapidez de flujo en una pequeña arteria humana donde podemos tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm y $P = 4000$ dinas/cm^2.

16. La hipertensión es el resultado de la reducción del diámetro de arterias. Para mantener una rapidez normal (flujo), el corazón tiene que bombear más y con ello aumenta la presión. Use la Ley de Poiseuille para demostrar que si R_0 y P_0 son valores normales del radio y presión en una arteria y los valores reducidos son R y P, entonces, para que el flujo permanezca constante, P y R están relacionados por la ecuación

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

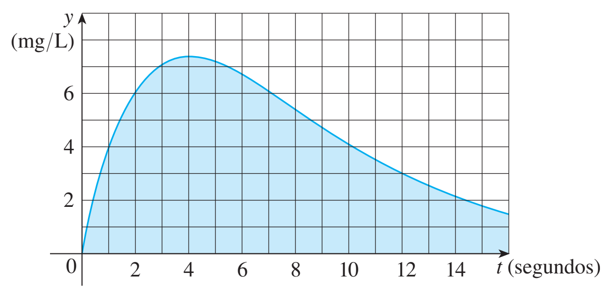
Deduzca que si el radio de una arteria se reduce a tres cuartos de su valor anterior, entonces la presión más que se triplica.

17. El método de dilución de colorante se usa para medir la capacidad cardiaca con 6 mg de colorante. Las concentraciones de colorante, en mg/L, están modeladas por $c(t) = 20te^{-0.6t}$, $0 \leq t \leq 10$, donde t se mide en segundos. Encuentre la capacidad cardiaca.

18. Después de una inyección de 8 mg de colorante, las lecturas de concentración de colorante, en mg/L y a intervalos de dos segundos, son como se muestra en la tabla siguiente. Use la Regla de Simpson para calcular la capacidad cardiaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	12	3.9
2	2.4	14	2.3
4	5.1	16	1.6
6	7.8	18	0.7
8	7.6	20	0
10	5.4		

19. La gráfica de la función de concentración $c(t)$ se muestra después de una inyección de 7 mg de colorante en un corazón. Use la Regla de Simpson para calcular la capacidad cardiaca.



6.8 Probabilidad

El cálculo desempeña un papel en el análisis de comportamiento aleatorio. Suponga que consideramos el nivel de colesterol de una persona escogida al azar de cierto grupo de edades, o la estatura de una mujer adulta escogida al azar, o la vida útil de una batería de cierto tipo también escogida al azar. Estas cantidades se denominan **variables aleatorias continuas** porque sus valores en realidad varían en rango sobre un intervalo de números reales, aun cuando podrían medirse o registrarse sólo al entero más cercano. Podríamos conocer la probabilidad de que un nivel de colesterol en sangre sea mayor a 250, o la probabilidad de que la estatura de una mujer adulta esté entre 60 y 70 in, o la probabilidad de que la batería que estamos comprando dure entre 100 y 200 horas. Si X representa la vida útil de ese tipo de batería, denotamos esta última probabilidad como sigue:

$$P(100 \leq X \leq 200)$$

De acuerdo con la interpretación de frecuencia de probabilidad, este número es la proporción a largo plazo de todas las baterías del tipo especificado cuyas duraciones de vida útil sean entre 100 y 200 horas. Como esto representa una proporción, la probabilidad cae de manera natural entre 0 y 1.

Toda variable aleatoria continua X tiene una **función de densidad de probabilidad** f. Esto significa que la probabilidad que X se encuentre entre a y b se encuentra al integrar f de a a b:

$$\boxed{1} \qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Por ejemplo, la Figura 1 muestra la gráfica de un modelo para la función de densidad de probabilidad f para una variable aleatoria X definida como la estatura en pulgadas de una mujer adulta en Estados Unidos (de acuerdo a datos del National Health Survey). La probabilidad de que la estatura de una mujer escogida al azar de esta población sea entre 60 y 70 in es igual al área bajo la gráfica de f de 60 a 70.

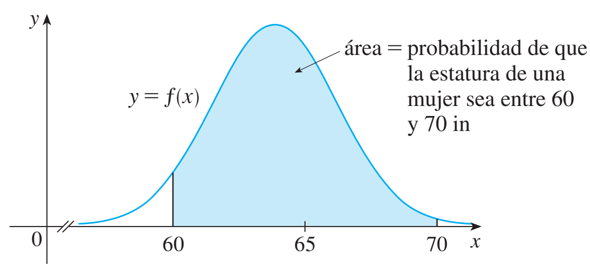


FIGURA 1
Función de densidad de probabilidad para la estatura de una mujer adulta

En general, la función de densidad de probabilidad f de una variable aleatoria X satisface la condición $f(x) \geqslant 0$ para toda x. Como las probabilidades se miden en una escala de 0 a 1, se deduce que

$$\boxed{2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 0.006x(10 - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ y $f(x) = 0$ para todos los otros valores de x.
(a) Verifique que f sea una función de densidad de probabilidad.
(b) Encuentre $P(4 \leqslant X \leqslant 8)$.

SOLUCIÓN
(a) Para $0 \leqslant x \leqslant 10$ tenemos $0.006x(10 - x) \geqslant 0$, de modo que $f(x) \geqslant 0$ para toda x. También necesitamos comprobar que la Ecuación 2 se satisfaga:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{10} 0.006x(10 - x)\,dx = 0.006\int_0^{10}(10x - x^2)\,dx$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{10} = 0.006\left(500 - \tfrac{1000}{3}\right) = 1$$

Por tanto, f es una función de densidad de probabilidad.
(b) La probabilidad de que X se encuentre entre 4 y 8 es

$$P(4 \leqslant X \leqslant 8) = \int_4^8 f(x)\,dx = 0.006\int_4^8 (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^8 = 0.544$$

V EJEMPLO 2 **Función de densidad de probabilidad para tiempos de espera** Fenómenos como son los tiempos de espera y tiempos para falla de equipos se modelan por lo general por medio de funciones de densidad de probabilidad exponencialmente decrecientes. Encuentre la forma exacta de tal función.

SOLUCIÓN Considere que la variable aleatoria es el tiempo que una persona está en espera (en el teléfono) antes que un agente de una compañía conteste la llamada. Entonces, en lugar de x usemos t para representar el tiempo, en minutos. Si f es la función de densidad de probabilidad y una persona llama en el tiempo $t = 0$, entonces, por la Definición 1, $\int_0^2 f(t)\,dt$ representa la probabilidad que un agente conteste antes de transcurrir los primeros dos minutos, y $\int_4^5 f(t)\,dt$ es la probabilidad de que la llamada sea contestada durante el quinto minuto.

Es evidente que $f(t) = 0$ para $t < 0$ (el agente no puede contestar antes que uno llame). Para $t > 0$ nos indican que usemos una función exponencialmente decreciente, es decir, una función de la forma $f(t) = Ae^{-ct}$, donde A y c son constantes positivas. Entonces

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Usamos la Ecuación 2 para determinar el valor de A:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{\infty} f(t)\,dt \\ &= \int_0^{\infty} Ae^{-ct}\,dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x Ae^{-ct}\,dt \\ &= \lim_{x \to \infty} \left[-\frac{A}{c} e^{-ct} \right]_0^x = \lim_{x \to \infty} \frac{A}{c}(1 - e^{-cx}) \\ &= \frac{A}{c} \end{aligned}$$

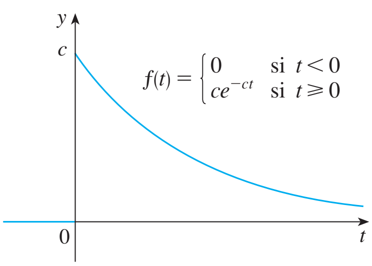


FIGURA 2
Una función de densidad exponencial

Por tanto $A/c = 1$ y $A = c$. Así, toda función de densidad exponencial tiene la forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Una gráfica típica se ilustra en la Figura 2.

Valores promedio

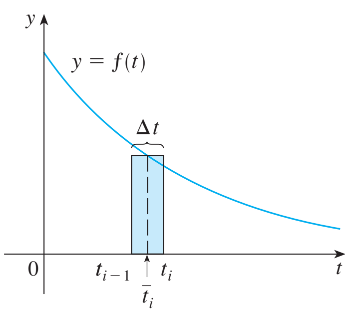


FIGURA 3

Supongamos que el lector está esperando que una compañía conteste su llamada telefónica y se pregunta cuánto tiempo, en promedio, puede estar a la espera. Sea $f(t)$ la función de densidad correspondiente, donde t se mide en minutos, y considere una muestra de N personas que han llamado a esta compañía. Es muy probable que ninguna de ellas haya esperado más de una hora, de modo que restrinjamos nuestra atención al intervalo $0 \leqslant t \leqslant 60$. Dividamos ese intervalo en n intervalos de duración Δt y puntos extremos $0, t_1, t_2, \ldots, t_{60}$. (Considere a Δt como que dura un minuto, o medio minuto, o 10 segundos, o incluso un segundo.) La probabilidad de que la llamada de alguien sea contestada durante el periodo de t_{i-1} a t_i es el área bajo la curva $y = f(t)$ de t_{i-1} a t_i, que es aproximadamente igual a $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$. (Ésta es el área del rectángulo de aproximación en la Figura 3, donde $\bar{t}_i$ es el punto medio del intervalo.)

Como la proporción a largo plazo de llamadas que son contestadas en el periodo de t_{i-1} a t_i es $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$, esperamos que, fuera de nuestro ejemplo de N personas que hacen llamadas, el número cuya llamada fue contestada en ese periodo es aproximadamente $Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t$ y el tiempo que cada una esperó es alrededor de $\bar{t}_i$. Por tanto, el tiempo total que esperaron es el producto de estos números: aproximadamente $\bar{t}_i[Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t]$. Sumando todos estos intervalos, obtenemos el total aproximado de tiempos de espera de todos:

$$\sum_{i=1}^{n} N\bar{t}_i\, f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Si ahora dividimos entre el número N de personas que llaman, obtenemos el *promedio* aproximado de tiempo de espera:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i\, f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Reconocemos esto como una suma de Riemann para la función $t\,f(t)$. Cuando el intervalo se contrae (es decir, $\Delta t \to 0$ y $n \to \infty$), esta suma de Riemann aproxima la integral

$$\int_0^{60} t\,f(t)\,dt$$

Esta integral recibe el nombre de *tiempo medio de espera*.

En general, la **media** de cualquier función de densidad de probabilidad f está definida como

Es tradicional denotar la media por la letra griega μ (mu).

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

La media se puede interpretar como el valor promedio a largo plazo de la variable aleatoria X. También se puede interpretar como una medida de centralidad de la función de densidad de probabilidad.

La expresión para la media se asemeja a una integral que ya hemos visto. Si $\mathcal{R}$ es la región que está bajo la gráfica de f, sabemos de la Fórmula 6.6.12 que la coordenada x del centroide de $\mathcal{R}$ es

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \mu$$

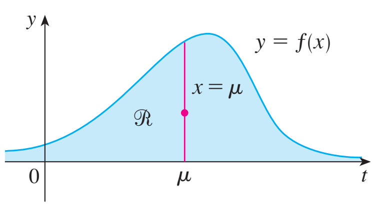


FIGURA 4
$\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la recta $x = \mu$

por la Ecuación 2. Entonces, una delgada placa con la forma de $\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la recta vertical $x = \mu$. (Vea Figura 4.)

EJEMPLO 3 Encuentre la media de la distribución exponencial del Ejemplo 2:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de una media, tenemos

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)\,dt = \int_0^{\infty} tce^{-ct}\,dt$$

Para evaluar esta integral usamos integración por partes, con $u = t$ y $dv = ce^{-ct}\,dt$:

$$\int_0^{\infty} tce^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x tce^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(-te^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\,dt\right)$$

El límite del primer término es 0 por la Regla de l'Hospital.

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c}\right) = \frac{1}{c}$$

La media es $\mu = 1/c$, de modo que podemos reescribir la función de densidad de probabilidad como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

V EJEMPLO 4 Suponga que el tiempo promedio de espera, para que la llamada de un cliente sea contestada por el representante de una compañía, es de cinco minutos.
(a) Encuentre la probabilidad de que una llamada sea contestada durante el primer minuto.
(b) Encuentre la probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos para que le contesten.

SOLUCIÓN
(a) Nos indican que la media de la distribución exponencial es $\mu = 5$ minutos y entonces, por el resultado del Ejemplo 3, sabemos que la función de densidad de probabilidad es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.2e^{-t/5} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Entonces la probabilidad de que una llamada sea contestada durante el primer minuto es

$$\begin{aligned} P(0 \leqslant T \leqslant 1) &= \int_0^1 f(t)\,dt \\ &= \int_0^1 0.2e^{-t/5}\,dt \\ &= 0.2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1 \\ &= 1 - e^{-1/5} \approx 0.1813 \end{aligned}$$

Por tanto, alrededor de 18% de las llamadas de clientes son contestadas durante el primer minuto.

(b) La probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos es

$$\begin{aligned} P(T > 5) &= \int_5^\infty f(t)\,dt = \int_5^\infty 0.2e^{-t/5}\,dt \\ &= \lim_{x\to\infty} \int_5^x 0.2e^{-t/5}\,dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x/5}) \\ &= \frac{1}{e} \approx 0.368 \end{aligned}$$

Alrededor del 37% de clientes espera más de cinco minutos antes que sus llamadas sean contestadas.

Nótese el resultado del Ejemplo 4(b): Aun cuando el tiempo medio de espera es de 5 minutos, sólo 37% de las personas que llaman esperan más de 5 minutos. La razón es que algunas llamadas tienen que esperar mucho más (quizá 10 o 15 minutos), y esto sube el promedio.

Otra medida de centralidad de una función de densidad de probabilidad es la *mediana.* Ése es un número m tal que la mitad de quienes llaman tienen un tiempo de espera menor a m y los otros que llaman tienen un tiempo de espera mayor a m. En general, la **mediana** de una función de densidad de probabilidad es el número m tal que

$$\int_m^\infty f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}$$

Esto significa que la mitad del área bajo la gráfica de f está a la derecha de m. En el Ejercicio 9 se pide al lector que demuestre que el tiempo mediano de espera para la compañía descrita en el Ejemplo 4 es aproximadamente 3.5 minutos.

Distribuciones normales

Numerosos fenómenos aleatorios importantes, por ejemplo las calificaciones en exámenes de aptitud, estaturas y pesos de individuos de una población homogénea, la lluvia anual en cierto lugar y otros, se modelan con una **distribución normal**. Esto significa que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X es un miembro de la familia de funciones

$$\boxed{3} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

La desviación estándar está denotada por la letra minúscula griega σ (sigma).

Se puede verificar que la media para esta función es μ. La constante positiva σ se llama **desviación estándar**; mide qué tan dispersos están los valores de X. De las gráficas en forma de campana de miembros de la familia en la Figura 5, vemos que para pequeños valores de σ los valores de X están agrupados alrededor de la media, en tanto que para valores más grandes de σ los valores de X están más dispersos. Los expertos en estadística tienen métodos para usar conjuntos de datos para estimar μ y σ.

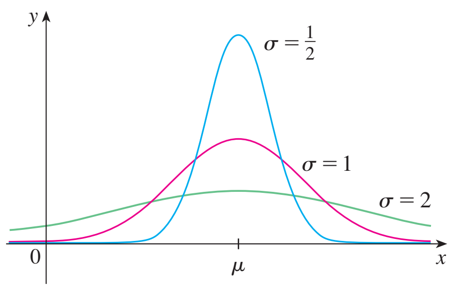


FIGURA 5
Distribuciones normales

El factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ es necesario para hacer que f sea una función de densidad de probabilidad. De hecho, se puede verificar usando los métodos de cálculo multivariable que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx = 1$$

V EJEMPLO 5 Las calificaciones del cociente de inteligencia (CI) están normalmente distribuidas con media de 100 y desviación estándar de 15. (La Figura 6 muestra la correspondiente función de densidad de probabilidad.)

(a) ¿Qué porcentaje de la población tiene una calificación de CI entre 85 y 115?
(b) ¿Qué porcentaje de la población tiene un CI arriba de 140?

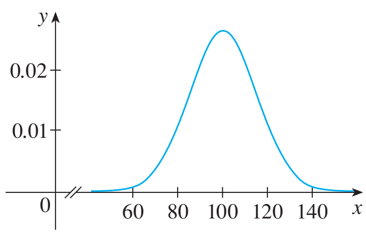


FIGURA 6
Distribución de calificaciones de CI

SOLUCIÓN

(a) Como las calificaciones de CI están normalmente distribuidas, usamos la función de densidad de probabilidad dada por la Ecuación 3 con $\mu = 100$ y $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)}\, dx$$

Recuerde de la Sección 5.8 que la función $y = e^{-x^2}$ no tiene una antiderivada elemental, de modo que no podemos evaluar la integral exactamente. Pero podemos usar la capacidad de integración numérica de una calculadora o computadora (o la Regla del Punto Medio o Regla de Simpson para estimar la integral. Al hacerlo así, encontramos que

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0.68$$

Por tanto, alrededor del 68% de la población tiene un CI entre 85 y 115, es decir, dentro de una desviación estándar de la media.

(b) La probabilidad de que la calificación de CI de una persona escogida al azar sea más de 140 es

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450}\, dx$$

Para evitar la integral impropia podríamos aproximarla por la integral de 140 a 200. (Es bastante seguro decir que personas con un CI de más de 200 sean extremadamente raras.) Entonces

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450}\, dx \approx 0.0038$$

Por tanto, alrededor de 0.4% de la población tiene un CI de más de 140.

6.8 Ejercicios

1. Sea $f(x)$ la función de densidad de probabilidad para la vida útil de un neumático de la más alta calidad de un fabricante, donde x se mide en millas. Explique el significado de cada integral.

(a) $\displaystyle\int_{30,000}^{40,000} f(x)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{25,000}^{\infty} f(x)\, dx$

2. Sea $f(t)$ la función de densidad de probabilidad para el tiempo que una persona tarda en llegar en auto a la escuela por la mañana, donde t se mide en minutos. Exprese las siguientes probabilidades como integrales.
(a) La probabilidad de que llegue en auto a la escuela en menos de 15 minutos.
(b) La probabilidad de que tarde más de media hora en llegar a la escuela.

3. Sea $f(x) = \frac{3}{64}x\sqrt{16 - x^2}$ para $0 \leqslant x \leqslant 4$ y $f(x) = 0$ para todos los otros valores de x.
(a) Verifique que f sea una función de densidad de probabilidad.
(b) Encuentre $P(X < 2)$.

4. Sea $f(x) = xe^{-x}$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.
(a) Verifique que f sea una función de densidad de probabilidad.
(b) Encuentre $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

5. Sea $f(x) = c/(1 + x^2)$.
(a) ¿Para qué valor de c es f una función de densidad de probabilidad?
(b) Para ese valor de c, encuentre $P(-1 < X < 1)$.

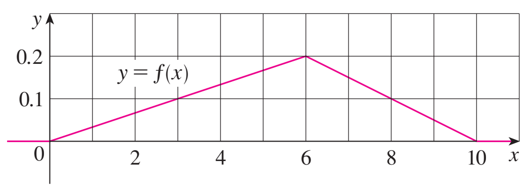
6. Sea $f(x) = kx^2(1 - x)$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$ o $x > 1$.
(a) ¿Para qué valor de k es f una función de densidad de probabilidad?
(b) Para ese valor de k, encuentre $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}\right)$.
(c) Encuentre la media.

7. La aguja giratoria de un juego de mesa indica al azar un número real entre 0 y 10. La aguja no está "arreglada" en el sentido de que indica un número en un intervalo determinado, con la misma probabilidad que indica un número en cualquier otro intervalo de la misma duración.
(a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 10 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad para los valores de la aguja giratoria.
(b) ¿Qué le dice su intuición al lector acerca del valor de la media? Compruebe su cálculo al evaluar una integral.

8. (a) Explique por qué la función cuya gráfica se muestra es una función de densidad de probabilidad.
(b) Use la gráfica para hallar las siguientes probabilidades:
(i) $P(X < 3)$ (ii) $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$
(c) Calcule la media.



9. Demuestre que el tiempo medio de espera para una llamada telefónica a la compañía descrita en el Ejemplo 4 es de alrededor de 3.5 minutos.

10. (a) Un tipo de bombilla está marcada para tener una duración promedio útil de 1000 horas. Es razonable modelar la probabilidad de falla de estas bombillas por medio de una función

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

de densidad exponencial con media $\mu = 1000$. Use este modelo para hallar la probabilidad de que una bombilla
(i) falle dentro de las primeras 200 horas,
(ii) funcione más de 800 horas
(b) ¿Cuál es la vida útil media de estas bombillas?

11. La gerente de un restaurante de comida rápida determina que el tiempo promedio de espera para que sus clientes sean atendidos es de 2.5 minutos.
(a) Encuentre la probabilidad de que un cliente no tenga que esperar más de 4 minutos.
(b) Encuentre la probabilidad de que un cliente sea atendido antes que transcurran 2 minutos.
(c) La gerente desea anunciar que cualquier persona que no sea atendida antes que transcurra cierto número de minutos recibirá una hamburguesa gratis. Pero ella no desea repartir hamburguesas gratuitamente a más del 2% de sus clientes. ¿Qué debe decir su anuncio?

12. De acuerdo con el National Health Survey, las estaturas de hombres adultos en Estados Unidos están distribuidas normalmente con media de 69.0 in y desviación estándar de 2.8 in.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre adulto escogido al azar mida entre 65 in y 73 in de estatura?
(b) ¿Qué porcentaje de la población de hombres adultos mide más de 6 pies (72 in)?

13. El "Proyecto Basura" de la Universidad de Arizona reporta que la cantidad de papel desechado por familia por semana está distribuida normalmente con media de 9.4 lb y desviación estándar de 4.2 libras. ¿Qué porcentaje de familias desecha al menos 10 lb de papel por semana?

14. Unas cajas están marcadas como que contienen 500 g de cereal. La máquina que llena las cajas produce pesos que están normalmente distribuidos con desviación estándar de 12 gramos.
(a) Si el peso objetivo es 500 g, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina produzca una caja con menos de 480 g de cereal?
(b) Suponga que una ley indica que no más de 5% de cajas del cereal de un fabricante puede contener menos del peso indicado de 500 gramos. ¿En qué peso objetivo debe el fabricante ajustar su máquina llenadora?

15. Las velocidades de vehículos en una carretera con límite de velocidad de 100 km/h están normalmente distribuidas con media de 112 km/h y desviación estándar de 8 km/h.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo escogido al azar se desplace a una velocidad legal?
(b) Si la policía de tránsito recibe instrucciones de aplicar multas a automovilistas que circulen a 125 km/h o más, ¿qué porcentaje de automovilistas es multado?

16. Demuestre que la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria normalmente distribuida tiene puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.

17. Para cualquier distribución normal, encuentre la probabilidad de que la variable aleatoria se encuentre dentro de dos desviaciones estándar de la media.

18. La desviación estándar para una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f y media de μ está definida por

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx \right]^{1/2}$$

Encuentre la desviación estándar para una función de densidad exponencial con media de μ.

6 Repaso

Revisión de conceptos

1. (a) Trace dos curvas típicas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Demuestre cómo aproximar el área entre estas curvas por medio de una suma de Riemann y trace los correspondientes rectángulos de aproximación. A continuación escriba una expresión para hallar el área exacta.
(b) Explique cómo cambia la situación si las curvas tienen ecuaciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$, donde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.

2. Suponga que Sue corre más rápido que Kathy en toda una carrera de 1500 metros. ¿Cuál es el significado físico del área entre las curvas de velocidad de estas corredoras para el primer minuto de la carrera?

3. (a) Suponga que S es un sólido con áreas de sección transversal conocidas. Explique cómo aproximar el volumen de S por medio de una suma de Riemann. A continuación escriba una expresión para hallar el volumen exacto.
(b) Si S es un sólido de revolución, ¿cómo se encuentran las áreas de sección transversal?

4. (a) ¿Cuál es el volumen de una capa cilíndrica?
(b) Explique cómo usar capas cilíndricas para hallar el volumen de un sólido de revolución.
(c) ¿Por qué desearíamos usar el método de capas en lugar de rebanadas?

5. (a) ¿Cómo se define la longitud de una curva?
(b) Escriba una expresión para la longitud de una curva lisa con ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.
(c) ¿Cómo se simplifica la expresión del inciso (b) si la curva está descrita si se da y en términos de x, es decir, $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$? ¿Qué pasa si x se da como una función de y?

6. (a) ¿Cuál es el valor promedio de una función f en un intervalo $[a, b]$?
(b) ¿Qué dice el Teorema del Valor Medio para Integrales? ¿Cuál es su interpretación geométrica?

7. Supongamos que el lector empuja un libro sobre una mesa de 6 m de largo al ejercer una fuerza $f(x)$ en cada punto de $x = 0$ a $x = 6$. ¿Qué representa $\int_0^6 f(x)\,dx$? Si $f(x)$ se mide en newtons, ¿cuáles son las unidades para la integral?

8. Describa cómo hallar la fuerza hidrostática contra una pared vertical sumergida en un fluido.

9. (a) ¿Cuál es la importancia física del centro de masa de una placa delgada?
(b) Si la placa se encuentra entre $y = f(x)$ y $y = 0$, donde $a \leqslant x \leqslant b$, escriba expresiones para las coordenadas del centro de masa.

10. Dada una función de demanda $p(x)$, explique lo que significa el excedente de consumidor cuando la cantidad de una mercancía actualmente disponible es X y el precio de venta actual es P. Ilustre con un dibujo.

11. (a) ¿Cuál es la capacidad cardiaca del corazón?
(b) Explique cómo se puede medir la capacidad cardiaca con el método de dilución de colorante.

12. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad? ¿Qué propiedades tiene esa función?

13. Suponga que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad para el peso de una estudiante universitaria, donde x se mide en libras.
(a) ¿Cuál es el significado de la integral $\int_0^{130} f(x)\,dx$?
(b) Escriba una expresión para la media de esta función de densidad.
(c) ¿Cómo podemos hallar la mediana de esta función de densidad?

14. ¿Qué es una distribución normal? ¿Cuál es la importancia de la desviación estándar?

Ejercicios

1–4 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas.

1. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

2. $y = 1/x, \quad y = x^2, \quad y = 0, \quad x = e$

3. $y = 1 - 2x^2, \quad y = |x|$

4. $x + y = 0, \quad x = y^2 + 3y$

5. La curva trazada por un punto a una distancia de 1 m del centro de un círculo de 2 m de radio, cuando el círculo rueda a lo largo del eje x, se denomina *trocoide* y tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 2\theta - \operatorname{sen}\theta \qquad y = 2 - \cos\theta$$

Un arco del trocoide está dado por el intervalo de parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Encuentre el área bajo un arco de este trocoide.

6. Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje x la región acotada por las curvas $y = e^{-2x}$, $y = 1 + x$, y $x = 1$.

7. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por las curvas $y = \tan(x^2)$, $x = 1$, y $y = 0$. Use la Regla del punto medio con $n = 4$ para calcular las siguientes cantidades.
(a) El área de $\mathcal{R}$
(b) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x

8. Sea $\mathcal{R}$ la región en el primer cuadrante acotada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Calcule las siguientes cantidades.
(a) El área de $\mathcal{R}$
(b) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x
(c) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y

9. Encuentre los volúmenes de los sólidos obtenidos al girar la región acotada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de las rectas siguientes.
(a) El eje x (b) El eje y (c) $y = 2$

10–13 Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

10. $x = 1 + y^2, \; y = x - 3;$ alrededor del eje y

11. $x = 0, \; x = 9 - y^2;$ alrededor de $x = -1$

12. $y = x^2 + 1, \; y = 9 - x^2;$ alrededor de $y = -1$

13. $x^2 - y^2 = a^2, \; x = a + h$ (donde $a > 0, h > 0$); alrededor del eje y

14–15 Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

14. $y = \sqrt{x}, \; y = x^2;$ alrededor de $y = 2$

15. $y = \cos^2 x, \; |x| \leqslant \pi/2, \; y = \frac{1}{4};$ alrededor de $x = \pi/2$

16. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = x^6 - x + 1$. Calcule las siguientes cantidades.
(a) Las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas
(b) El área de $\mathcal{R}$
(c) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ se gira alrededor del eje x
(d) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ se gira alrededor del eje y

17. Describa el sólido cuyo volumen está dado por la integral.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x\,dx$

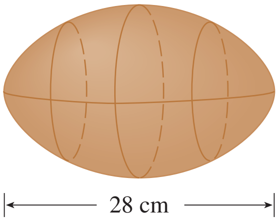
(b) $\displaystyle\int_0^1 \pi\left[(2 - x^2)^2 - \left(2 - \sqrt{x}\right)^2\right] dx$

18. Supongamos que al lector se le pide calcular el volumen de un balón de futbol. Lo mide y encuentra que un balón mide 28 cm de largo; usa una cuerda y mide la circunferencia en su punto

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

más ancho y ve que es 53 cm. La circunferencia a 7 cm de cada extremo es de 45 cm. Use la Regla de Simpson para hacer su cálculo.



19. La base de un sólido es un disco circular con radio 3. Encuentre el volumen del sólido si secciones transversales paralelas, perpendiculares a la base, son triángulos rectos isósceles con hipotenusa que está a lo largo de la base.

20. La base de un sólido es la región acotada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2 - x^2$. Encuentre el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados con un lado a lo largo de la base.

21. La altura de un monumento es 20 m. Una sección transversal horizontal a una distancia de x metros de la cima es un triángulo equilátero con lado de $\frac{1}{4}x$ metros. Encuentre el volumen del monumento.

22. (a) La base de un sólido es un cuadrado con vértices ubicados en $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un semicírculo. Encuentre el volumen del sólido.
(b) Demuestre que al cortar el sólido del inciso (a), podemos reacomodarlo para formar un cono. Así calcule su volumen en forma más sencilla.

23. Encuentre la longitud de la curva con ecuaciones paramétricas $x = 3t^2$, $y = 2t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

24. Use la Regla de Simpson con $n = 10$ para calcular la longitud del arco de la curva $y = 1/x^2$ de $(1, 1)$ a $\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

25. Encuentre la longitud de la curva $y = \frac{1}{6}(x^2 + 4)^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

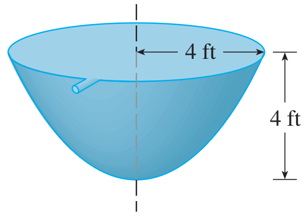
26. Encuentre la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\, dt \qquad 1 \leqslant x \leqslant 16$$

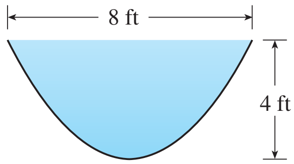
27. Una fuerza de 30 N se requiere para mantener un resorte estirado desde su longitud natural de 12 cm a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se ejecuta al estirar el resorte de 12 cm a 20 cm?

28. Un elevador de 1600 lb está suspendido por un cable de 200 ft que pesa 10 lb/ft. ¿Cuánto trabajo se requiere para subir el elevador desde el sótano al tercer piso, una distancia de 30 ft?

29. Un tanque lleno de agua tiene la forma de un paraboloide de revolución como se ve en la figura; esto es, su forma se obtiene al girar una parábola alrededor del eje vertical.
(a) Si su altura es 4 ft y el radio en la parte más alta es 4 ft, encuentre el trabajo requerido para bombear el agua fuera del tanque.
(b) Después de realizar 4000 ft-lb de trabajo, ¿cuál es la profundidad del agua restante en el tanque?

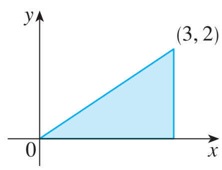


30. Un canal está lleno de agua y sus extremos tienen la forma de la región parabólica de la figura. Encuentre la fuerza hidrostática sobre un extremo del canal.



31. Una compuerta de un canal de irrigación está construida en forma de un trapecio de 3 ft de ancho en el fondo, 5 ft de ancho en la parte superior y 2 ft de alto. Está colocado verticalmente en el canal, de modo que el agua cubre apenas la compuerta. Encuentre la fuerza hidrostática sobre un lado de la compuerta.

32. Encuentre el centroide de la región mostrada.



33. La función de demanda para una mercancía está dada por

$$p = 2000 - 0.1x - 0.01x^2$$

Encuentre el excedente de consumidor cuando el nivel de ventas sea 100.

34. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}$ en el intervalo $[0, 2]$.

35. Si f es una función continua, ¿cuál es el límite cuando $h \to 0$ del valor promedio de f en el intervalo $[x, x + h]$?

36. Después de una inyección de 6 mg de colorante en un corazón, las lecturas de concentración de colorante a intervalos de dos segundos son como se ve en la tabla siguiente. Use la Regla de Simpson para calcular la capacidad cardiaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	14	4.7
2	1.9	16	3.3
4	3.3	18	2.1
6	5.1	20	1.1
8	7.6	22	0.5
10	7.1	24	0
12	5.8		

37. (a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{20} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 10 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad.

(b) Encuentre $P(X < 4)$.

(c) Calcule la media. ¿El valor es lo que se esperaba?

38. Las duraciones de embarazos humanos están distribuidas normalmente con una media de 268 días y desviación estándar de 15 días. ¿Qué porcentaje de embarazos dura entre 250 días y 280 días?

39. El tiempo que se pierde en una fila de espera en cierto banco está modelado por una función de densidad exponencial con media de 8 minutos.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido en los primeros 3 minutos?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tenga que esperar más de 10 minutos?

(c) ¿Cuál es el tiempo medio de espera?

Principios de resolución de problemas

1. Un sólido es generado al girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = f(x)$, donde f es una función positiva y $x \geqslant 0$. El volumen generado por la parte de la curva de $x = 0$ a $x = b$ es b^2 para toda $b > 0$. Encuentre la función f.

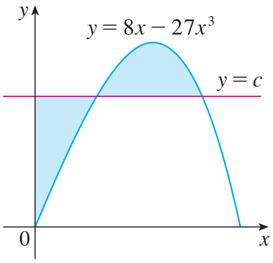


FIGURA PARA EL PROBLEMA 2

2. La figura muestra una recta horizontal $y = c$ que cruza la curva $y = 8x - 27x^3$. Encuentre el número c tal que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales.

3. (a) Demuestre que el volumen de un segmento de altura h de una esfera de radio r es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

(Vea la figura.)

(b) Demuestre que si una esfera de radio 1 es rebanada por un plano a una distancia x del centro, en forma tal que el volumen de un segmento es el doble del volumen del otro, entonces x es una solución de la ecuación $3x^3 - 9x + 2 = 0$, donde $0 < x < 1$. Use el método de Newton para hallar una x precisa a cuatro lugares decimales.

(c) Usando la fórmula para el volumen de un segmento de esfera, se puede demostrar que la profundidad x a la que una esfera flotante de radio r se hunde en agua es una raíz de la ecuación $x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$, donde s es la gravedad específica de la esfera. Suponga que una esfera de madera de 0.5 m de radio tiene gravedad específica 0.75. Calcule, a una precisión de cuatro lugares decimales, la profundidad a la que la esfera se hundirá.

(d) Un tazón semiesférico tiene 5 in de radio y está entrando agua al tazón a razón de 0.2 in^3/s.

(i) ¿Con qué rapidez está subiendo el nivel de agua en el tazón en el instante en que el agua tiene 3 in de profundidad?

(ii) En cierto instante, el agua tiene 4 in de profundidad. ¿Cuánto tardará en llenarse el tazón?

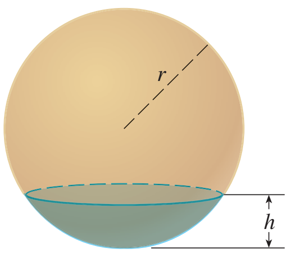


FIGURA PARA EL PROBLEMA 3

4. El Principio de Arquímedes dice que el empuje hidrostático sobre un cuerpo parcial o completamente sumergido en un fluido es igual al peso del fluido que el cuerpo desplaza. Entonces, para un cuerpo de densidad ρ_0 que flota parcialmente sumergido en un fluido de densidad ρ_f, el empuje hidrostático está dado por $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\,dy$, donde g es la aceleración debida a la gravedad y $A(y)$ es el área de una sección transversal típica del cuerpo (vea la figura). El peso del cuerpo está dado por

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy$$

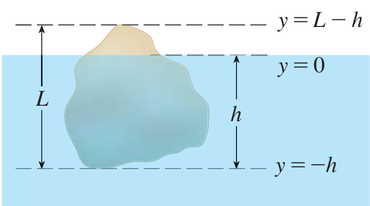


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

(a) Demuestre que el porcentaje del volumen del cuerpo sobre la superficie del líquido es

$$100\,\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

(b) La densidad del hielo es 917 kg/m^3 y la densidad del agua de mar es 1030 kg/m^3. ¿Qué porcentaje del volumen de un iceberg está sobre el agua?

(c) Un cubo de hielo flota en un vaso lleno de agua hasta el borde. ¿El agua se derrama cuando el hielo se derrite?

(d) Una esfera de 0.4 m de radio y que tiene un peso insignificante está flotando en un lago de gran tamaño y de agua dulce. ¿Cuánto trabajo se requiere para sumergir por completo la esfera? La densidad del agua es 1000 kg/m^3.

5. El agua de un tazón abierto se evapora a un ritmo proporcional al área de la superficie del agua. (Esto significa que la rapidez de reducción del volumen es proporcional al área de la superficie.) Demuestre que la profundidad del agua disminuye con rapidez constante, cualquiera que sea la forma del tazón.

6. Una esfera de radio 1 se traslapa sobre una esfera más pequeña de radio r en forma tal que la intersección de ambas es un círculo de radio r. (En otras palabras, se cruzan en un gran círculo de la esfera pequeña.) Encuentre r para que el volumen dentro de la esfera pequeña y fuera de la esfera grande sea tan grande como sea posible.

7. Sea P una pirámide con base cuadrada de lado $2b$ y suponga que S es una esfera con su centro sobre la base de P y S es tangente a las ocho aristas de P. Encuentre la altura de P. A continuación encuentre el volumen de la intersección de S y P.

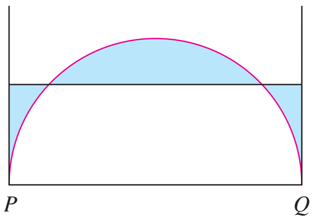


FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

8. La figura muestra un semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ y rectas tangentes en P y Q. ¿A qué altura sobre el diámetro debe colocarse la recta horizontal para reducir al mínimo el área sombreada?

9. Una curva está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u}\,du \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

Encuentre la longitud del arco de la curva del origen al punto más cercano en donde hay una recta tangente vertical.

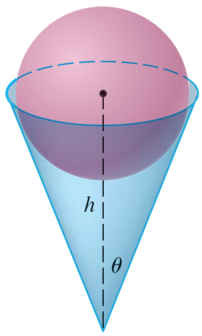
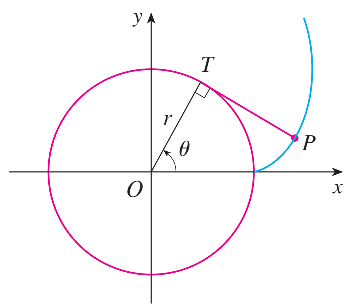


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

10. Un vaso de papel lleno de agua tiene la forma de un cono con altura h y ángulo semivertical θ (vea la figura.) Una pelota se coloca con cuidado en el vaso, con lo que se desplaza parte del agua y hace que ésta se derrame. ¿Cuál es el radio de la pelota que ocasiona que del vaso se derrame el máximo volumen de agua?

11. Una cuerda se enrolla alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras la cuerda está tensa. La curva trazada por el punto P y el extremo de la cuerda se llama **involuta** del círculo. Si el círculo tiene radio r y centro O y la posición inicial de P es $(r, 0)$, y si el parámetro θ se escoge como en la figura, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la involuta son

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



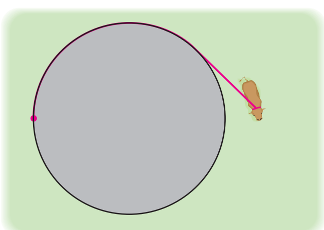
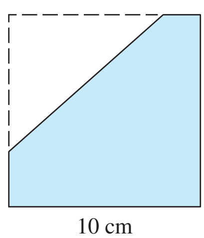


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

12. Una vaca está amarrada a un silo de radio r con una cuerda apenas suficientemente larga para llegar al lado opuesto del silo, como se ve en la figura. Encuentre el área disponible para que la vaca pueda pastar.

13. Un disco uniforme de 1 m de radio se ha de cortar con una recta para que el centro de masa de la parte más pequeña se encuentre a la mitad de un radio. ¿Qué tan cercano al centro del disco debe hacerse el corte? (Exprese su respuesta correcta a dos lugares decimales.)

14. Un triángulo con área de 30 cm^2 se corta de una esquina de un cuadrado de 10 cm por lado, como se ve en la figura. Si el centroide de la región restante está a 4 cm del lado derecho del cuadrado, ¿a qué distancia está de la parte inferior del cuadrado?



15. Suponga que la gráfica de un polinomio cúbico cruza la parábola $y = x^2$ cuando $x = 0$, $x = a$ y $x = b$, donde $0 < a < b$. Si las dos regiones entre las curvas tienen la misma área, ¿cómo está b relacionada con a?

Courtesy of Frank O. Gehry

7 Ecuaciones diferenciales

Quizá la más importante de todas las aplicaciones del cálculo está en las ecuaciones diferenciales. Cuando científicos que se ocupan de la física o de ciencias sociales usan el cálculo, con frecuencia lo hacen para analizar una ecuación diferencial que ha aparecido en el proceso de modelar algún fenómeno que estén estudiando. Aun cuando a veces es imposible hallar una fórmula explícita para la solución de una ecuación diferencial, veremos que hay métodos gráficos y numéricos dan la información necesaria.

7.1 Modelado con ecuaciones diferenciales

Es buen momento de leer (o releer) la exposición sobre modelado matemático de la página 25.

Al describir el proceso de modelar de la Sección 1.2, hablamos de formular un modelo matemático de un problema real ya sea por medio de razonamiento intuitivo acerca del fenómeno o de una ley física basada en evidencia de experimentos. El modelo matemático a veces toma la forma de una *ecuación diferencial*, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas. Esto no es de sorprender porque en un problema real a veces observamos que ocurren cambios y deseamos predecir un comportamiento futuro con base en la forma en que cambien los valores actuales. Empecemos por examinar varios ejemplos de cómo aparecen ecuaciones diferenciales cuando modelemos fenómenos físicos.

Modelos de crecimiento poblacional

Un modelo para el crecimiento de una población está basado en la suposición de que la población crece a un ritmo proporcional al tamaño de la población. Ésta es una suposición razonable para una población de bacterias o animales bajo condiciones ideales (ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, inmunidad a enfermedades).

Identifiquemos y demos nombre a las variables en este modelo:

$$t = \text{tiempo} \quad (\text{variable independiente})$$

$$P = \text{número de individuos de la población} \quad (\text{variable dependiente})$$

La rapidez de crecimiento de la población es la derivada dP/dt. Entonces, nuestra suposición de que la rapidez de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población se escribe como la siguiente ecuación

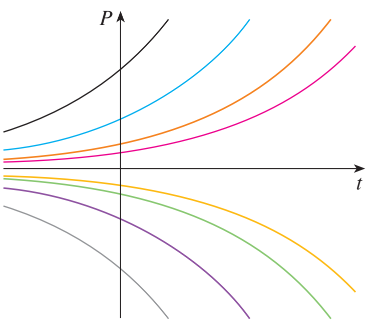


FIGURA 1
Familia de soluciones de $dP/dt = kP$

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad. La Ecuación 1 es nuestro primer modelo para crecimiento poblacional; es una ecuación diferencial porque contiene una función desconocida P y su derivada dP/dt.

Habiendo formulado un modelo, veamos sus consecuencias. Si excluimos una población de 0, entonces $P(t) > 0$ para toda t. De este modo, si $k > 0$, entonces la Ecuación 1 muestra que $P'(t) > 0$ para toda t. Esto significa que la población es siempre creciente. De hecho, cuando $P(t)$ aumenta, la Ecuación 1 muestra que dP/dt se hace más grande. En otras palabras, la rapidez de crecimiento aumenta a medida que aumenta la población.

Tratemos de pensar en una solución de la Ecuación 1. Esta ecuación nos pide hallar una función cuya derivada sea un múltiplo constante de sí misma. Sabemos que las funciones exponenciales tienen esa propiedad. De hecho, si hacemos $P(t) = Ce^{kt}$, entonces

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

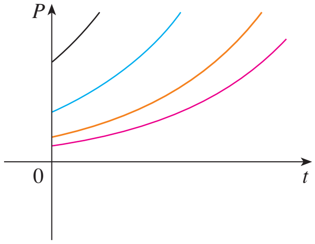


FIGURA 2
Familia de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ con $C > 0$ y $t \geq 0$

Así, cualquier función exponencial de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ es una solución de la Ecuación 1. Cuando estudiemos esta ecuación en detalle en la Sección 7.4, veremos que no hay otra solución.

Si dejamos que C varíe en todos los números reales, obtenemos la *familia* de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ cuyas gráficas se ven en la Figura 1. Pero las poblaciones tienen sólo valores positivos y por tanto estamos interesados sólo en las soluciones con $C > 0$. Y es probable que estemos interesados sólo con valores de t mayores que el tiempo inicial $t = 0$. La Figura 2 muestra las soluciones físicamente significativas. Poniendo $t = 0$, obtenemos $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que la constante C resulta ser la población inicial, $P(0)$.

La Ecuación 1 es apropiada para modelar el crecimiento poblacional bajo condiciones ideales, pero tenemos que reconocer que un modelo más realista debe reflejar el hecho de que un ambiente determinado tiene recursos limitados. Numerosas poblaciones empiezan por aumentar de modo exponencial, pero la población se nivela cuando se aproxima a su *capacidad de carga* M (o disminuye hacia M si alguna vez excede de M). Para que un modelo tome en cuenta ambas tendencias, hacemos dos suposiciones

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ si P es pequeña (inicialmente, la rapidez de crecimiento es proporcional a P.)

- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ si $P > M$ (P disminuye si alguna vez excede de M.)

Una expresión sencilla que incorpora ambas suposiciones está dada por la ecuación

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Nótese que si P es pequeña en comparación con M, entonces P/M es cercana a 0 y por tanto $dP/dt \approx kP$. Si $P > M$, entonces $1 - P/M$ es negativa y por tanto $dP/dt < 0$.

La Ecuación 2 recibe el nombre de *ecuación diferencial logística* y fue propuesta por el biólogo matemático holandés Pierre-François Verhulst, en la década de 1840, como modelo para crecimiento de la población mundial. Desarrollaremos técnicas que hacen posible hallar soluciones explícitas de la ecuación logística en la Sección 7.5, pero por ahora podemos deducir características cualitativas de las soluciones directamente de la Ecuación 2. Primero observamos que las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = M$ son soluciones porque, en cualquier caso, uno de los dos factores del lado derecho de la Ecuación 2 es cero. (Esto tiene sentido físico: si la población alguna vez es 0 o está a su capacidad de carga, así seguirá.) Estas dos soluciones constantes se denominan *soluciones de equilibrio*.

Si la población inicial $P(0)$ se encuentra entre 0 y M, entonces el lado derecho de la Ecuación 2 es positivo, de modo que $dP/dt > 0$ y la población aumenta. Pero, si la población es mayor que la capacidad de carga ($P > M$), entonces $1 - P/M$ es negativa y $dP/dt < 0$ con lo cual la población disminuye. Nótese que, en cualquiera de estos dos casos, si la población se aproxima a la capacidad de carga ($P \to M$), entonces $dP/dt \to 0$, lo cual significa que la población se nivela. Por tanto, esperamos que las soluciones de la ecuación diferencial logística tengan gráficas que se vean semejantes a las de la Figura 3. Observe que las gráficas se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = M$.

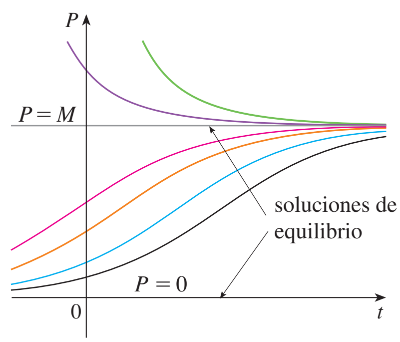


FIGURA 3
Soluciones de la ecuación logística

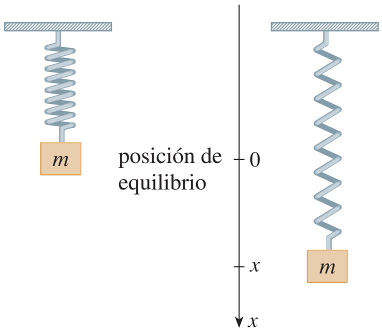


FIGURA 4

Un modelo para el movimiento de un resorte

Veamos ahora un ejemplo de un modelo de ciencias físicas. Consideremos el movimiento de un cuerpo de masa m al final del resorte vertical (como en la Figura 4). En la Sección 6.6 estudiamos la Ley de Hooke, que dice que si el resorte es estirado (o comprimido) x unidades desde su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x:

$$\text{fuerza restauradora} = -kx$$

donde k es una constante positiva (llamada *constante de resorte*). Si hacemos caso omiso de cualesquiera fuerzas resistivas externas (debidas a resistencia del aire o fricción), entonces, por la Segunda Ley de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración), tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3}$$

Éste es un ejemplo de lo que se llama *ecuación diferencial de segundo orden* porque contiene segundas derivadas. Veamos qué podemos ver acerca de la forma de la solución directamente de la ecuación. Podemos reescribir la Ecuación 3 en la forma siguiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que dice que la segunda derivada de x es proporcional a x pero tiene signo contrario. Conocemos dos funciones con esta propiedad, las funciones seno y coseno. De hecho, resulta que todas las soluciones de la Ecuación 3 se pueden escribir como combinaciones de ciertas funciones seno y coseno (vea Ejercicio 4). Esto no es sorpresa; esperamos que el resorte oscile alrededor de su posición de equilibrio y por tanto es natural pensar que están involucradas unas funciones trigonométricas.

Ecuaciones diferenciales generales

En general, una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas. El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de orden superior que se presente en la ecuación. Entonces, las Ecuaciones 1 y 2 son ecuaciones de primer orden y la Ecuación 3 es una ecuación de segundo orden. En estas tres ecuaciones la variable independiente se denomina t y representa tiempo, pero en general la variable independiente no tiene que representar tiempo. Por ejemplo, cuando consideramos la ecuación diferencial

$$y' = xy \tag{4}$$

se entiende que y es una función desconocida de x.

Una función f se llama **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando $y = f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en la ecuación. Entonces f es una solución de la Ecuación 4 si

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos los valores de x en algún intervalo.

Cuando nos piden *resolver* una ecuación diferencial, se espera que encontremos todas las posibles soluciones de la ecuación. Ya hemos resuelto algunas ecuaciones diferenciales particularmente sencillas, es decir, las de la forma

$$y' = f(x)$$

Por ejemplo, sabemos que la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = x^3$$

está dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Pero, en general, resolver una ecuación diferencial no es cosa fácil. No hay una técnica sistemática que haga posible que resolvamos todas las ecuaciones diferenciales. En la Sección 7.2, sin embargo, veremos cómo trazar gráficas aproximadas de soluciones aun cuando no tenemos una fórmula explícita. También veremos cómo hallar aproximaciones numéricas a soluciones.

V EJEMPLO 1 Verificar soluciones de una ecuación diferencial Demuestre que todo miembro de la familia de soluciones

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

es una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

La figura 5 muestra gráficas de siete miembros de la familia del Ejemplo 1. La ecuación diferencial muestra que si $y \approx \pm 1$, entonces $y' \approx 0$. Esto es confirmado por lo plano de las gráficas cerca de $y = 1$ y $y = -1$.

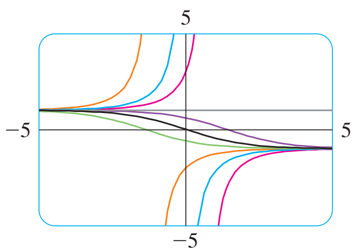


FIGURA 5

SOLUCIÓN Usamos la Regla del Cociente para derivar la expresión de y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

El lado derecho de la ecuación diferencial se convierte en

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Por tanto, para todo valor de c, la función dada es una solución de la ecuación diferencial.

Cuando aplicamos ecuaciones diferenciales, por lo general no estamos tan interesados en hallar una familia de soluciones (la *solución general*) como estamos para hallar una solución que satisfaga algunos requisitos adicionales. En numerosos problemas físicos necesitamos hallar la solución particular que satisfaga una condición de la forma $y(t_0) = y_0$. Esto recibe el nombre de **condición inicial**, y el problema de hallar una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial se denomina **problema del valor inicial**.

Geométricamente, cuando imponemos una condición inicial, vemos la familia de curvas de solución y seleccionamos una que pase por el punto (t_0, y_0). Físicamente, esto corresponde a medir el estado de un sistema en el tiempo t_0 y usar la solución del problema del valor inicial para predecir el comportamiento futuro del sistema.

V EJEMPLO 2 Encuentre una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaga la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN Sustituyendo los valores $t = 0$ y $y = 2$ en la fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

del Ejemplo 1, obtenemos

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Al despejar c de esta ecuación obtenemos $2 - 2c = 1 + c$, que da $c = \frac{1}{3}$. Por tanto, la solución del problema del valor inicial es

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

7.1 Ejercicios

1. Demuestre que $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 2e^x$.

2. Verifique que $y = -t\cos t - t$ es una solución del problema del valor inicial

$$t\frac{dy}{dt} = y + t^2 \operatorname{sen} t \qquad y(\pi) = 0$$

3. (a) ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?
   (b) Si r_1 y r_2 son valores de r que el estudiante encontró en el inciso (a), demuestre que todo miembro de la familia de funciones $y = ae^{r_1x} + be^{r_2x}$ es también una solución.

4. (a) ¿Para qué valores de k la función $y = \cos kt$ satisface la ecuación diferencial $4y'' = -25y$?
   (b) Para esos valores de k, verifique que todo miembro de la familia de funciones $y = A \operatorname{sen} kt + B\cos kt$ también es una solución.

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{sen} x$?
   (a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \cos x$
   (c) $y = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$ (d) $y = -\frac{1}{2}x\cos x$

6. (a) Demuestre que todo miembro de la familia de funciones $y = (\ln x + C)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.
   (b) Ilustre el inciso (a) al graficar varios miembros de la familia de soluciones en una pantalla común.
   (c) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial $y(1) = 2$.
   (d) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial $y(2) = 1$.

7. (a) ¿Qué se puede decir acerca de una solución de la ecuación $y' = -y^2$ con sólo ver la ecuación diferencial?
   (b) Verifique que todos los miembros de la familia $y = 1/(x + C)$ son soluciones de la ecuación del inciso (a).
   (c) ¿Puede el lector considerar una solución de la ecuación diferencial $y' = -y^2$ que no sea miembro de la familia del inciso (b)?
   (d) Encuentre una solución del problema del valor inicial

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0.5$$

8. (a) ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una solución de la ecuación $y' = xy^3$ cuando x es cercana a 0? ¿Qué pasa si x es grande?
   (b) Vea que todos los miembros de la familia $y = (c - x^2)^{-1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = xy^3$.
   (c) Grafique varios miembros de la familia de soluciones en una pantalla común. ¿Las gráficas confirman lo predicho en el inciso (a)?
   (d) Encuentre una solución del problema del valor inicial

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Una población está modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

   (a) ¿Para qué valores de P es creciente la población?
   (b) ¿Para qué valores de P es decreciente la población?
   (c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

10. Una función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

   (a) ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación?

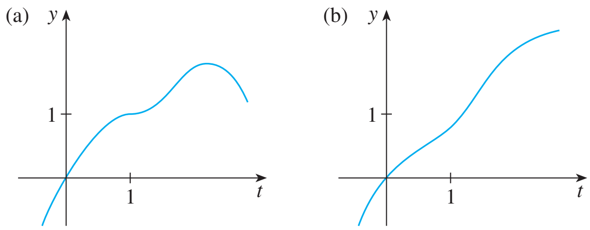
Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

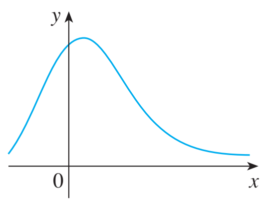
(b) ¿Para qué valores de y es y creciente?
(c) ¿Para qué valores de y es y decreciente?

11. Explique por qué las funciones con las gráficas dadas *no pueden* ser soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y - 1)^2$$



12. La función con la gráfica dada es una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Determine cuál es la ecuación correcta y justifique su respuesta.

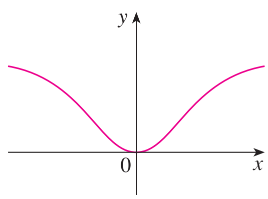


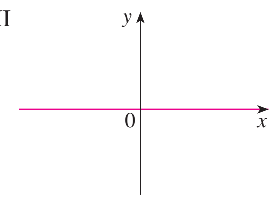
A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

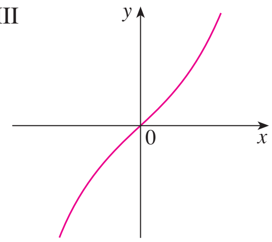
13. Relacione las ecuaciones diferenciales con las gráficas de solución marcadas I–IV. Dé razones para sus elecciones.

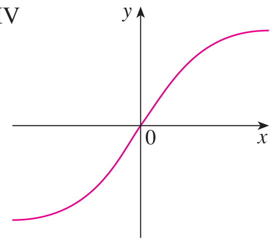
(a) $y' = 1 + x^2 + y^2$ (b) $y' = xe^{-x^2-y^2}$

(c) $y' = \dfrac{1}{1 + e^{x^2+y^2}}$ (d) $y' = \operatorname{sen}(xy)\cos(xy)$

I


II


III


IV


14. Supongamos que el lector acaba de servirse una taza de café recién preparado, a una temperatura de 95°C, en un cuarto donde la temperatura es 20°C.
(a) ¿Cuándo piensa que el café se enfría con más rapidez? ¿Qué pasa con la rapidez de enfriamiento conforme pase el tiempo? Explique.
(b) La **Ley de Newton del Enfriamiento** dice que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno, siempre que esta diferencia no sea demasiado grande. Escriba una ecuación diferencial que exprese la Ley de Newton del Enfriamiento para esta situación particular. ¿Cuál es la condición inicial? En vista de su respuesta al inciso (a), ¿piensa usted que esta ecuación diferencial es un modelo apropiado para el enfriamiento?
(c) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la solución del problema del valor inicial del inciso (b).

15. Psicólogos interesados en teoría de aprendizaje estudian **curvas de aprendizaje**. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el rendimiento de alguien que aprende una actividad como función del tiempo de capacitación t. La derivada dP/dt representa la rapidez a la que mejora el rendimiento.
(a) ¿Cuándo piensa usted que P aumenta con más rapidez? ¿Qué ocurre a dP/dt cuando t aumenta? Explique.
(b) Si M es el nivel máximo de rendimiento del que es capaz quien aprende, explique por qué la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ una constante positiva}$$

es un modelo razonable de aprendizaje.
(c) Haga un dibujo aproximado de una posible solución de esta ecuación diferencial.

7.2 Campos direccionales y el método de Euler

Desafortunadamente, es imposible resolver casi todas las ecuaciones diferenciales en el sentido de obtener una fórmula explícita para la solución. En esta sección demostramos que, a pesar de la ausencia de una solución explícita, todavía podemos aprender mucho de la solución por medio de un método gráfico (campos direccionales) o un método numérico (método de Euler).

Campos de direccionales

Suponga que nos piden trazar la gráfica de la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

No conocemos una fórmula para la solución, de modo que ¿cómo podemos trazar su gráfica? Pensemos en lo que significa la ecuación diferencial. La ecuación $y' = x + y$ nos dice que la pendiente en cualquier punto (x, y) en la gráfica (llamada la *curva solución*) es igual a la suma de las coordenadas x y y del punto (vea la Figura 1). En particular, como la curva pasa por el punto $(0, 1)$, su pendiente ahí debe ser $0 + 1 = 1$. Entonces, una pequeña parte de la curva solución cerca del punto $(0, 1)$ se ve como un corto segmento de recta que pasa por $(0, 1)$ con pendiente 1. (Vea Figura 2.)

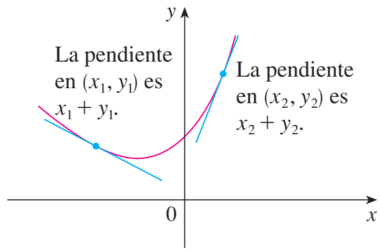


FIGURA 1
Una solución de $y' = x + y$

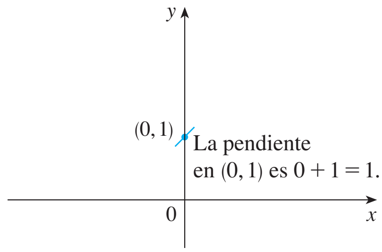


FIGURA 2
Principio de la curva solución que pasa por (0,1)

Como guía para dibujar el resto de la curva, tracemos segmentos cortos de recta en varios puntos (x, y) con pendiente $x + y$. El resultado se denomina *campo direccional* y se muestra en la Figura 3. Por ejemplo, el segmento de recta que está en el punto $(1, 2)$ tiene pendiente $1 + 2 = 3$. El campo direccional nos permite visualizar la forma general de las curvas solución al indicar la dirección en la que las curvas avanzan en cada punto.

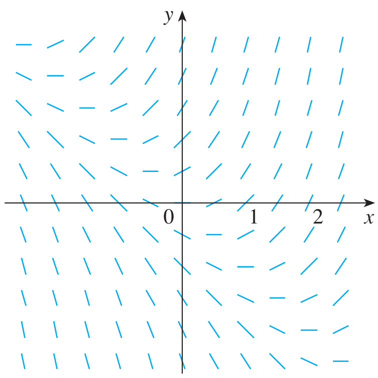


FIGURA 3
Campo direccional para $y' = x + y$

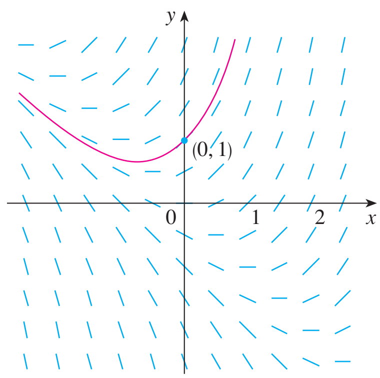


FIGURA 4
La curva solución pasa por (0, 1)

Ahora podemos trazar la curva solución que pase por el punto $(0, 1)$ al seguir el campo direccional como en la Figura 4. Nótese que hemos trazado la curva de modo que es paralela a segmentos de recta cercanos.

En general, suponga que tenemos una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y' = F(x, y)$$

donde $F(x, y)$ es alguna expresión en x y y. La ecuación diferencial dice que la pendiente de una curva solución en un punto (x, y) sobre la curva es $F(x, y)$. Si trazamos segmentos cortos de recta con pendiente $F(x, y)$ en varios puntos (x, y), el resultado recibe el nombre de **campo direccional** (o **campo de pendientes).** Estos segmentos de recta indican la dirección en la que una curva solución se dirige, de modo que el campo direccional nos ayuda a visualizar la forma general de estas curvas.

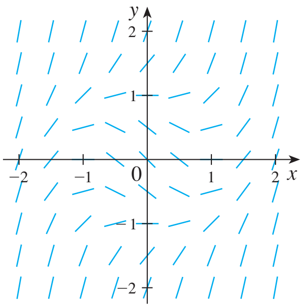


FIGURA 5

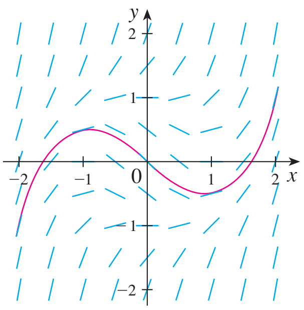


FIGURA 6

V EJEMPLO 1 Uso de un campo direccional para trazar una curva solución

(a) Trace el campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.
(b) Use el inciso (a) para trazar la curva solución que pase por el origen.

SOLUCIÓN

(a) Empezamos por calcular la pendiente en varios puntos de la tabla siguiente:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

Ahora trazamos segmentos cortos de recta con estas pendientes en estos puntos. El resultado es el campo direccional que se ve en la Figura 5.

(b) Empezamos en el origen y nos movemos a la derecha en la dirección del segmento de recta (que tiene pendiente -1). Continuamos trazando la curva solución de modo que se mueva paralela a los segmentos de recta cercanos. La curva solución resultante se ve en la Figura 6. Regresando al origen, trazamos la curva de solución también a la izquierda.

Cuanto más segmentos de recta tracemos en un campo direccional, la imagen se hace más clara. Desde luego, es tedioso calcular pendientes y trazar manualmente segmentos de recta para un enorme número de puntos, pero hay computadoras bien adaptadas para este trabajo. La Figura 7 muestra una dirección más detallada trazada por computadora para la ecuación diferencial del Ejemplo 1. Esto hace posible que tracemos, con precisión razonable, las curvas solución que se ilustran en la Figura 8 con cruces con el eje y en -2, -1, 0, 1 y 2.

TEC El Module 7.2A muestra campos direccionales y curvas de solución para varias ecuaciones diferenciales.

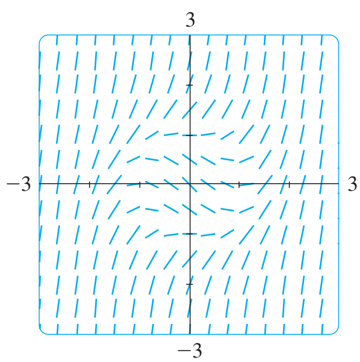


FIGURA 7

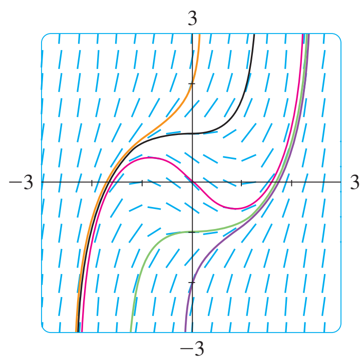


FIGURA 8

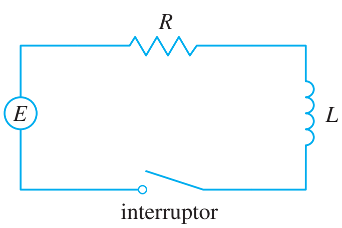


FIGURA 9

Ahora veamos la forma en que los campos direccionales dan idea en situaciones físicas. El circuito eléctrico sencillo que se ve en la Figura 9 contiene una fuerza electromotriz (por lo general una batería o generador) que produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henries (H).

La Ley de Ohm da la caída en voltaje debido al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Entonces, tenemos

$$\boxed{1} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden que modela la corriente I en el tiempo t.

V **EJEMPLO 2** Suponga que en el sencillo circuito de la Figura 9 la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H y una batería da un voltaje constante de 60 V.

(a) Trace un campo direccional para la Ecuación 1 con estos valores.
(b) ¿Qué se puede decir del valor límite de la corriente?
(c) Identifique cualesquiera soluciones de equilibrio.
(d) Si el interruptor se cierra cuando $t = 0$ de modo que la corriente se inicia con $I(0) = 0$, use el campo direccional para trazar la curva solución.

SOLUCIÓN

(a) Si ponemos $L = 4$, $R = 12$, y $E(t) = 60$ en la Ecuación 1, tendremos

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

El campo direccional para esta ecuación diferencial se muestra en la Figura 10.

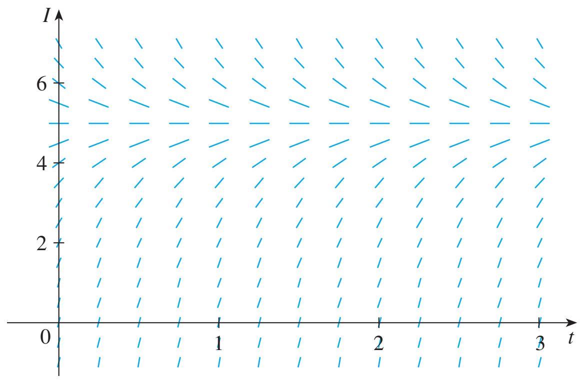


FIGURA 10

(b) Se ve del campo direccional que todas las soluciones se aproximan al valor 5 A, es decir,

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 5$$

(c) Se ve que la función constante $I(t) = 5$ es una solución de equilibrio. De hecho, podemos verificar esto directamente de la ecuación diferencial $dI/dt = 15 - 3I$. Si $I(t) = 5$, entonces el lado izquierdo es $dI/dt = 0$ y el lado derecho es $15 - 3(5) = 0$.

(d) Usamos el campo direccional para trazar la curva solución que pasa por (0, 0), como se ve en rojo en la Figura 11.

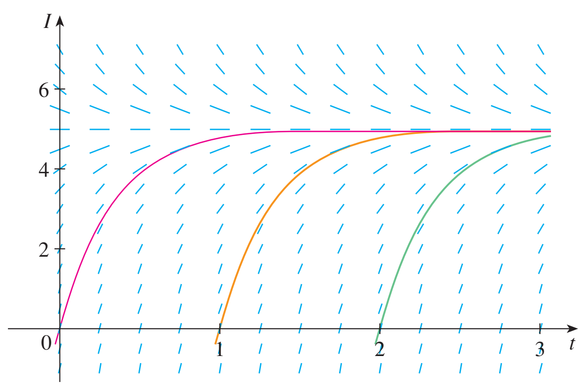


FIGURA 11

Nótese de la Figura 10 que los segmentos de recta a lo largo de cualquier recta horizontal son paralelos. Esto es porque la variable independiente t no está presente en el lado derecho de la ecuación $I' = 15 - 3I$. En general, la ecuación diferencial de la forma

$$y' = f(y)$$

en la que la variable independiente está ausente del lado derecho, se denomina **autónoma**. Para esa ecuación, las pendientes correspondientes a dos puntos diferentes con la misma coordenada y deben ser iguales. Esto significa que si conocemos una solución a una ecuación diferencial autónoma, entonces podemos obtener un número infinito de otras con sólo desplazar la gráfica de la solución conocida a la derecha o a la izquierda. En la Figura 11 hemos mostrado las soluciones que resultan de desplazar la curva solución del Ejemplo 2 una o dos unidades de tiempo (es decir, segundos) a la derecha. Corresponden a cerrar el interruptor cuando $t = 1$ o $t = 2$.

Método de Euler

La idea básica que hay detrás de los campos direccionales se puede usar para hallar aproximaciones numéricas a soluciones de ecuaciones diferenciales. Ilustramos el método en el problema con valor inicial que empleamos para introducir campos direccionales:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

La ecuación diferencial nos dice que $y'(0) = 0 + 1 = 1$, de modo que la curva solución tiene pendiente 1 en el punto (0, 1). Como primera aproximación a la solución podríamos usar la aproximación lineal $L(x) = x + 1$. En otras palabras, podríamos usar la recta tangente en (0, 1) como aproximación burda a la curva de solución (vea Figura 12).

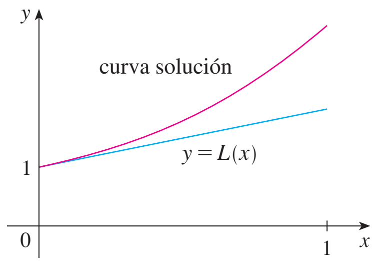


FIGURA 12
Primera aproximación de Euler

La idea de Euler era mejorar en su aproximación al avanzar sólo una corta distancia a lo largo de esta recta tangente, y luego hacer una corrección a medio camino al cambiar dirección como está indicado por el campo direccional. La Figura 13 muestra lo que pasa si empezamos a lo largo de la recta tangente pero nos detenemos cuando $x = 0.5$. (Esta distancia horizontal recorrida se denomina *tamaño de escalón*.) Como $L(0.5) = 1.5$, tenemos $y(0.5) \approx 1.5$ y tomamos (0.5, 1.5) como el punto de partida para un nuevo segmento de recta. La ecuación diferencial nos dice que $y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2$, de modo que usamos la función lineal

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

como aproximación a la solución para $x > 0.5$ (el segmento verde de la Figura 13). Si reducimos el tamaño de escalón de 0.5 a 0.25, obtenemos la mejor aproximación de Euler que se ve en la Figura 14.

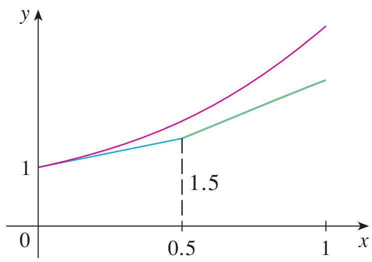


FIGURA 13
Aproximación de Euler con tamaño de escalón 0.5

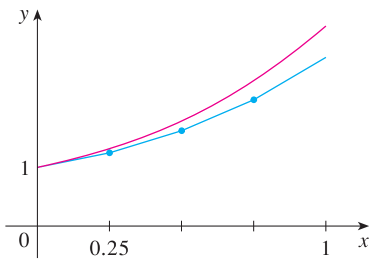


FIGURA 14
Aproximación de Euler con tamaño de escalón 0.25

En general, el método de Euler dice que se debe empezar en el punto dado por el valor inicial y avanzar en la dirección indicada por el campo direccional. Detenerse después de un corto tiempo, ver la pendiente en el nuevo lugar y avanzar en esa dirección. Continuar deteniéndose y cambiando de dirección de acuerdo con el campo direccional. El método de Euler no produce la solución exacta a un problema con valor inicial, da aproximaciones. Pero, al reducir el tamaño de escalón (y por tanto aumentar el número de correcciones de medio curso), obtenemos sucesivamente mejores aproximaciones hasta la solución exacta. (Compare Figuras 12, 13 y 14.)

Euler

Leonhard Euler (1707-1783) fue el principal matemático de mediados del siglo XVIII y el matemático más prolífico de todos los tiempos. Nació en Suiza pero pasó casi toda su carrera en las academias de ciencia apoyadas por Catalina la Grande en San Petersburgo y Federico el Grande en Berlín. Las obras de colección de Euler (se pronuncia *Oiler*) llenan unos 100 volúmenes grandes. Como dijo el físico francés Arago, "Euler calculaba sin aparente esfuerzo como los hombres respiran o como las águilas se sostienen en el aire." Los cálculos y escritos de Euler no disminuyeron por criar 13 hijos ni estar totalmente ciego los últimos 17 años de su vida. De hecho, ya ciego, dictaba sus descubrimientos a sus ayudantes con su prodigiosa memoria e imaginación. Sus tratados de cálculo y de casi todos los otros temas de matemáticas fueron el estándar para instrucción de matemáticas y la ecuación $e^{i\pi} + 1 = 0$ que él descubrió reúne los cinco números más famosos de todas las matemáticas.

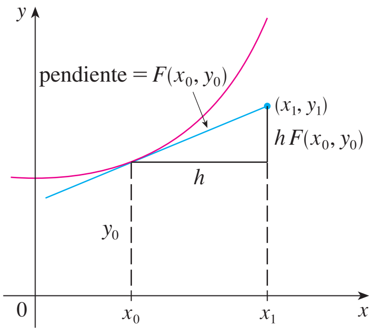


FIGURA 15

Para el problema general con valor inicial y primer orden $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, nuestro objetivo es hallar valores aproximados para la solución en números igualmente espaciados $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \ldots$, donde h es el tamaño de escalón. La ecuación diferencial nos dice que la pendiente en (x_0, y_0) es $y' = F(x_0, y_0)$, de modo que la figura 15 muestra que el valor aproximado de la solución cuando $x = x_1$ es

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

Análogamente, $$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

En general, $$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Método de Euler Los valores aproximados para la solución del problema con valor inicial $y = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con tamaño de escalón h, en $x_n = x_{n-1} + h$, son

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

EJEMPLO 3 Use el método de Euler con tamaño de escalón 0.1 para construir una tabla de valores aproximados para la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

SOLUCIÓN Nos dicen que $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, y $F(x, y) = x + y$. Entonces tenemos

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$$

Esto significa que si $y(x)$ es la solución exacta, entonces $y(0.3) \approx 1.362$.

Continuando con cálculos similares, obtenemos los valores de la tabla:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0.1	1.100000	6	0.6	1.943122
2	0.2	1.220000	7	0.7	2.197434
3	0.3	1.362000	8	0.8	2.487178
4	0.4	1.528200	9	0.9	2.815895
5	0.5	1.721020	10	1.0	3.187485

TEC El Module 7.2B muestra la forma en que funciona el método de Euler numérica y visualmente para varias ecuaciones diferenciales y tamaños de escalón.

Para una tabla más precisa de valores en el Ejemplo 3 podríamos reducir el tamaño de escalón. Pero para un número grande de escalones pequeños la cantidad de cálculo es considerable y, por tanto, necesitamos programar una calculadora o computadora para que realice estos cálculos. La tabla siguiente muestra los resultados al aplicar el método de Euler con decreciente tamaño de escalón al problema con valor inicial del Ejemplo 3.

Tamaño de escalón	Estimación de Euler de $y(0.5)$	Estimación de Euler de $y(1)$
0.500	1.500000	2.500000
0.250	1.625000	2.882813
0.100	1.721020	3.187485
0.050	1.757789	3.306595
0.020	1.781212	3.383176
0.010	1.789264	3.409628
0.005	1.793337	3.423034
0.001	1.796619	3.433848

Los paquetes de software que producen aproximaciones numéricas a soluciones de ecuaciones diferenciales usan métodos que son refinamientos del método de Euler. Aun cuando el método de Euler es sencillo y no tan preciso, es la idea básica en la que están basados métodos más precisos.

Nótese que las estimaciones de Euler de la tabla parecen ser límites de aproximación, es decir, los verdaderos valores de $y(0.5)$ y $y(1)$. La Figura 16 muestra gráficas de las aproximaciones de Euler con tamaños de escalón de 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01 y 0.005. Están aproximando la curva solución exacta a medida que el tamaño de escalón h se aproxima a 0.

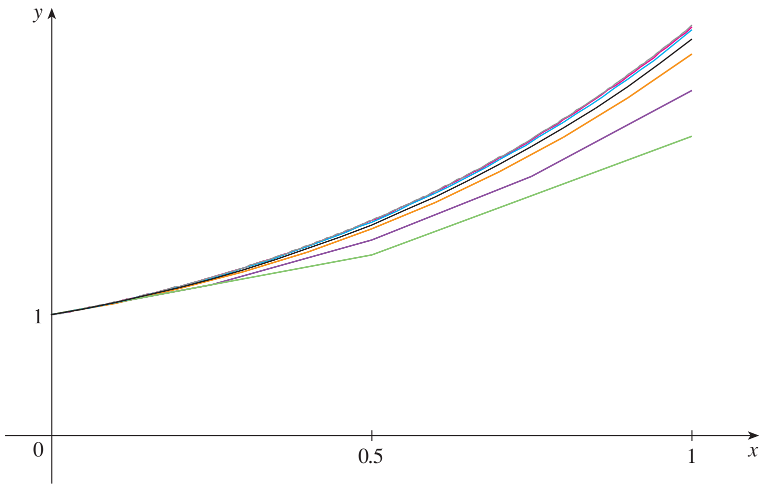


FIGURA 16
Aproximaciones de Euler que aproximan la solución exacta

V EJEMPLO 4 En el Ejemplo 2 estudiamos un circuito eléctrico sencillo con resistencia de 12 Ω, inductancia de 4 H y una batería con voltaje de 60 V. Si el interruptor se cierra cuando $t = 0$, modelamos la corriente I en el tiempo t por medio del problema con valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime la corriente del circuito medio segundo después de cerrar el interruptor.

SOLUCIÓN Usamos el método de Euler con $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$, y tamaño de escalón $h = 0.1$ segundo:

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3 \cdot 0) = 1.5$$

$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3 \cdot 1.5) = 2.55$$

$$I_3 = 2.55 + 0.1(15 - 3 \cdot 2.55) = 3.285$$

$$I_4 = 3.285 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.285) = 3.7995$$

$$I_5 = 3.7995 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.7995) = 4.15965$$

Por tanto, la corriente después de 0.5 s es

$$I(0.5) \approx 4.16 \text{ A}$$

7.2 Ejercicios

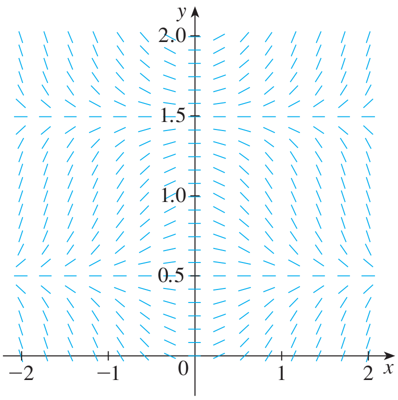
1. A continuación se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x \cos \pi y$.

(a) Trace las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(i) $y(0) = 0$ (ii) $y(0) = 0.5$

(iii) $y(0) = 1$ (iv) $y(0) = 1.6$

(b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio.



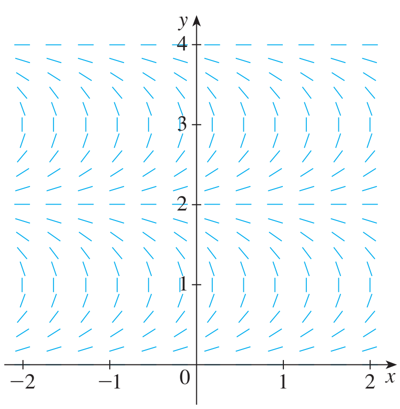
2. A continuación se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = \tan\left(\frac{1}{2}\pi y\right)$.

(a) Trace las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = 0.2$

(iii) $y(0) = 2$ (iv) $y(1) = 3$

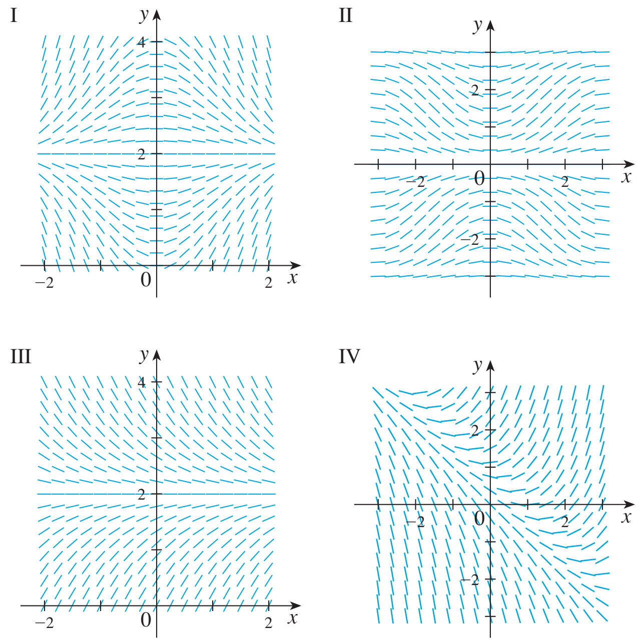
(b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio.



3–6 Relacione la ecuación diferencial con su campo direccional (marcados I-IV). Dé razones para su respuesta.

3. $y' = 2 - y$ **4.** $y' = x(2 - y)$

5. $y' = x + y - 1$ **6.** $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$



7. Use el campo direccional marcado II (arriba) para trazar las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2$ (c) $y(0) = -1$

8. Use el campo direccional marcado IV (arriba) para trazar las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(a) $y(0) = -1$ (b) $y(0) = 0$ (c) $y(0) = 1$

9–10 Trace el campo direccional para la ecuación diferencial. A continuación úselo para trazar tres curvas de solución.

9. $y' = \frac{1}{2}y$ **10.** $y' = x - y + 1$

11–14 Trace el campo de dirección de la ecuación diferencial. A continuación úselo para trazar una curva solución que pase por el punto dado.

11. $y' = y - 2x$, $(1, 0)$ **12.** $y' = xy - x^2$, $(0, 1)$

13. $y' = y + xy$, $(0, 1)$ **14.** $y' = x + y^2$, $(0, 0)$

CAS **15–16** Use un sistema computarizado de álgebra para dibujar un campo direccional para la ecuación diferencial dada. Imprímalo y dibuje sobre él la curva de solución que pasa por (0, 1). A continuación use el lector un CAS para dibujar la curva de solución y compárela con su dibujo.

15. $y' = x^2 \operatorname{sen} y$ **16.** $y' = x(y^2 - 4)$

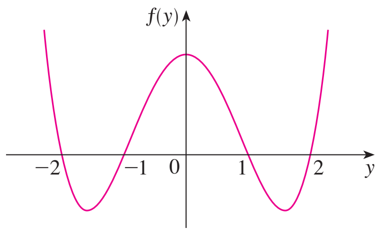
Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

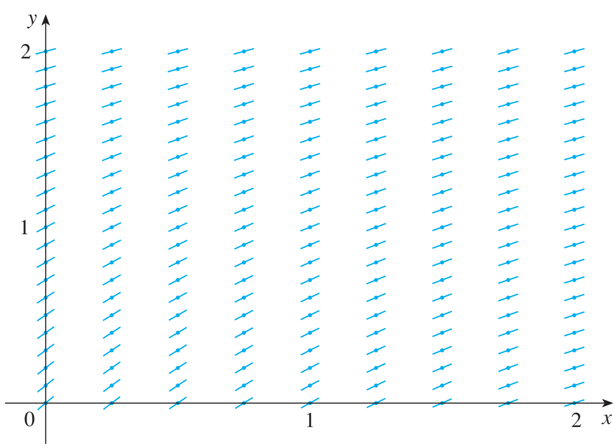
CAS **17.** Use un sistema computarizado de álgebra para dibujar un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y^3 - 4y$. Imprímalo y dibuje sobre él las soluciones que satisfagan la condición inicial $y(0) = c$ para diversos valores de c. ¿Para qué valores de c existe $\lim_{t \to \infty} y(t)$? ¿Cuáles son los posibles valores para este límite?

18. Haga un dibujo aproximado de un campo direccional para la ecuación diferencial autónoma $y' = f(y)$, donde la gráfica de f es como se muestra. ¿Cómo depende del valor de $y(0)$ el comportamiento límite de las soluciones?



19. (a) Use el método de Euler con cada uno de los siguientes tamaños de escalón para estimar el valor de $y(0.4)$, donde y es la solución del problema del valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$.
(i) $h = 0.4$ (ii) $h = 0.2$ (iii) $h = 0.1$
(b) Sabemos que la solución exacta del problema del valor inicial en el inciso (a) es $y = e^x$. Trace, en la forma más precisa que le sea posible, la gráfica de $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 0.4$, junto con las aproximaciones de Euler usando los tamaños de escalón del inciso (a). (El trazo hecho por el estudiante debe ser semejante a las Figuras 12, 13 y 14.) Use sus trazos para determinar sus estimaciones en el inciso (a) son subestimaciones o exceso de estimación.
(c) El error en el método de Euler es la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado. Encuentre los errores cometidos en el inciso (a) usando el método de Euler para calcular el verdadero valor de $y(0.4)$, es decir $e^{0.4}$. ¿Qué le ocurre al error cada vez que se reduzca a la mitad el tamaño de escalón?

20. A continuación se muestra un campo direccional para una ecuación diferencial. Dibuje, con una regla, las gráficas de las aproximaciones de Euler a la curva de solución que pasa por el origen. Use tamaños de escalón $h = 1$ y $h = 0.5$. ¿Las estimaciones de Euler serán subestimaciones o exceso de estimaciones? Explique.



21. Use el método de Euler con tamaño de escalón 0.5 para calcular los valores y aproximados y_1, y_2, y_3 y y_4 de la solución del problema con valor inicial $y' = y - 2x$, $y(1) = 0$.

22. Use el método de Euler con tamaño de escalón 0.2 para estimar $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial $y' = xy - x^2$, $y(0) = 1$.

23. Use el método de Euler con tamaño de escalón 0.1 para estimar $y(0.5)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial $y' = y + xy$, $y(0) = 1$.

24. (a) Use el método de Euler con tamaño de escalón 0.2 para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.
(b) Repita el inciso (a) con tamaño de escalón 0.1.

25. (a) Programe una calculadora o computadora para usar el método de Euler para calcular $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

(i) $h = 1$ (ii) $h = 0.1$
(iii) $h = 0.01$ (iv) $h = 0.001$
(b) Verifique que $y = 2 + e^{-x^3}$ es la solución exacta de la ecuación diferencial.
(c) Encuentre los errores al usar el método de Euler para calcular $y(1)$ con los tamaños de escalón del inciso (a). ¿Qué ocurre al error cuando el tamaño de escalón se divide entre 10?

CAS **26.** (a) Programe el estudiante su sistema computarizado de álgebra (CAS), usando el método de Euler con tamaño de escalón 0.01, para calcular $y(2)$, donde y es la solución del problema con valor inicial

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

(b) Compruebe su trabajo usando el CAS para trazar la curva solución.

27. La figura siguiente muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un condensador con una capacitancia de C farads (F), y un resistor con resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en las terminales del condensador es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs, C), de modo que en este caso la Ley de Kirchhoff da

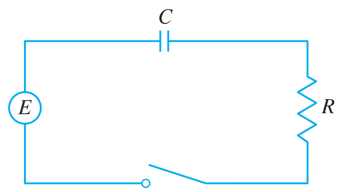
$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$, de modo que tenemos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F y una batería da un voltaje constante de 60 V.
(a) Trace un campo direccional para esta ecuación diferencial.
(b) ¿Cuál es el valor límite de la carga?
(c) ¿Hay una solución de equilibrio?
(d) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el campo direccional para trazar la curva solución.

(e) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el método de Euler con tamaño de escalón de 0.1 para calcular la carga después de medio segundo.



28. En el Ejercicio 14 de la Sección 7.1 consideramos una taza de café a 95°C en un cuarto a 20°C. Supongamos que se sabe que el café se enfría a razón de 1°C por minuto cuando su temperatura es de 70°C.

(a) ¿En qué se convierte la ecuación diferencial en este caso?

(b) Trace un campo direccional y úselo para trazar la curva solución para el problema con valor inicial. ¿Cuál es el valor límite de la temperatura?

(c) Use el método de Euler con tamaño de escalón $h = 2$ minutos para estimar la temperatura del café después de 10 minutos.

7.3 Ecuaciones separables

Hemos observado ecuaciones diferenciales de primer orden desde un punto de vista geométrico (campos direccionales) y desde un punto de vista numérico (método de Euler). ¿Qué pasa con el punto de vista simbólico? Sería bueno tener una fórmula explícita para una solución de una ecuación diferencial. Desafortunadamente, eso no es posible pero en esta sección examinamos cierto tipo de ecuación diferencial que *puede* resolverse de manera explícita.

Una **ecuación separable** es una ecuación diferencial de primer orden en la que la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x veces una función de y. En otras palabras, se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

El nombre de *separable* proviene del hecho de que la expresión del lado derecho se puede "separar" en una función de x y una función de y. De manera equivalente, si $f(y) \neq 0$, podríamos escribir

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver esta ecuación la reescribimos en la forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

La técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables fue utilizada primero por James Bernoulli (en 1690) al resolver un problema acerca de péndulos y por Leibniz (en una carta a Huygens en 1691). John Bernoulli explicó el método general en un artículo científico publicado en 1694.

de modo que todas las y estén en un lado de la ecuación y todas las x en el otro lado. A continuación integramos ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

La Ecuación 2 define y implícitamente como una función de x. En algunos casos podríamos despejar y en términos de x.

Usamos la Regla de la Cadena para justificar este procedimiento: Si h y g satisfacen (2), entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

de modo que $$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

y entonces $$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Así, está satisfecha la Ecuación 1.

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación separable

(a) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Encuentre la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN

(a) Escribimos la ecuación en términos de diferenciales e integramos ambos lados:

$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

La Figura 1 muestra gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del Ejemplo 1. La solución del problema del valor inicial del inciso (a) se ve en rojo.

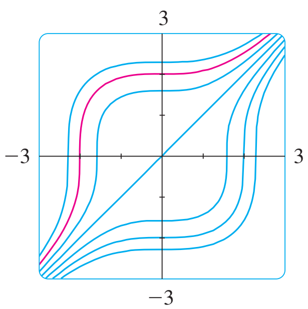


FIGURA 1

donde C es una constante arbitraria. (Podríamos haber usado una constante C_1 en el lado izquierdo y otra constante C_2 en el derecho. Pero entonces podríamos combinar estas constantes al escribir $C = C_2 - C_1$.)

Despejando y, tendremos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Podríamos dejar la solución como ésta o podríamos escribirla en la forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

donde $K = 3C$. (Como C es una constante arbitraria, así es K.)

(b) Si ponemos $x = 0$ en la solución general del inciso (a), obtenemos $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 2$, debemos tener $\sqrt[3]{K} = 2$ y entonces $K = 8$. Así, la solución del problema con valor inicial es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

V **EJEMPLO 2 Una ecuación separable con una solución implícita**

Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

Algunos sistemas computarizados de álgebra pueden trazar curvas definidas por ecuaciones implícitas. La Figura 2 muestra las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del Ejemplo 2. Cuando vemos las curvas de izquierda a derecha, los valores de C son 3, 2, 1, 0, -1, -2 y -3.

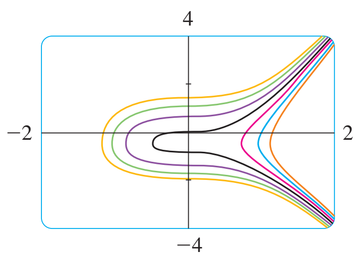


FIGURA 2

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en forma diferencial e integrar ambos lados, tenemos

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

3 $$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C$$

donde C es una constante. La Ecuación 3 da la solución general implícitamente. En este caso es imposible resolver la ecuación para expresar y de manera explícita como función de x.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $y' = x^2 y$.

SOLUCIÓN Primero reescribimos la ecuación usando notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Si una solución y es una función que satisface $y(x) \neq 0$ para alguna x, se deduce de un teorema de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales que $y(x) \neq 0$ para toda x.

Si $y \neq 0$, podemos reescribirla en notación diferencial e integrar:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta ecuación define y implícitamente como una función de x. Pero en este caso podemos despejar y explícitamente como sigue:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

de modo que $$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Con facilidad podemos verificar que la función $y = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial dada. Por tanto, podemos escribir la solución general en la forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

donde A es una constante arbitraria ($A = e^C$, o $A = -e^C$, o $A = 0$).

La Figura 3 muestra un campo de dirección para la ecuación diferencial del Ejemplo 3. Compárela con la Figura 4, en la que usamos la ecuación $y = Ae^{x^3/3}$ para graficar soluciones para diversos valores de A. Si se usa el campo direccional para trazar curvas solución con puntos de cruce con el eje y en 5, 2, 1, -1 y -2, las curvas se asemejarán a las de la Figura 4.

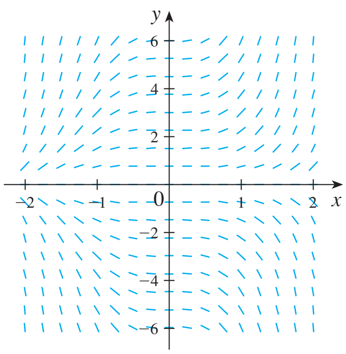


FIGURA 3

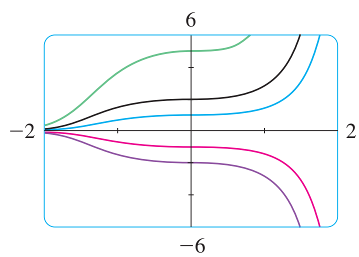


FIGURA 4

V **EJEMPLO 4** **Hallar la corriente en un circuito al resolver una ecuación separable**
En la Sección 7.2 modelamos la corriente $I(t)$ del circuito eléctrico que se ve en la Figura 5 por medio de la ecuación diferencial

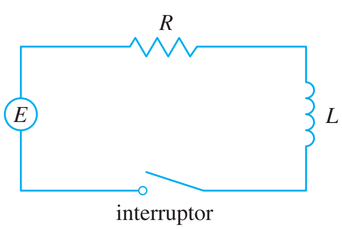


FIGURA 5

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encuentre una expresión para la corriente en un circuito donde la resistencia es de 12 Ω, la inductancia es 4 H, una batería da un voltaje constante de 60 V, y el interruptor se cierra cuando $t = 0$. ¿Cuál es el valor límite de la corriente?

SOLUCIÓN Con $L = 4$, $R = 12$, y $E(t) = 60$, la ecuación se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

y el problema con valores iniciales es

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Reconocemos esta ecuación como separable y la resolvemos como sigue:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3} \ln |15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C} e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3} Ae^{-3t}$$

La Figura 6 muestra la forma en que la solución del Ejemplo 4 (la corriente) se aproxima a su valor límite. Una comparación con la Figura 11 en la Sección 7.2 muestra que pudimos trazar una curva de solución razonablemente precisa a partir del campo de direccional.

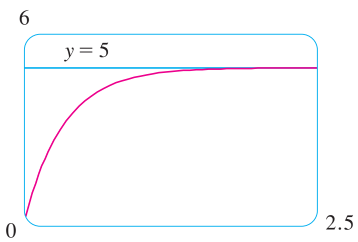


FIGURA 6

Como $I(0) = 0$, tenemos $5 - \frac{1}{3}A = 0$, así que $A = 15$ y la solución es

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

La corriente límite, en amperes, es

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} (5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que cruza de manera ortogonal cada curva de la familia, es decir, a ángulos rectos (vea Figura 7). Por ejemplo, cada uno de los miembros de la familia $y = mx$ de rectas que pasan por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia $x^2 + y^2 = r^2$ de circunferencias concéntricas con centro en el origen (vea Figura 8). Decimos que las dos familias son trayectorias ortogonales entre sí.

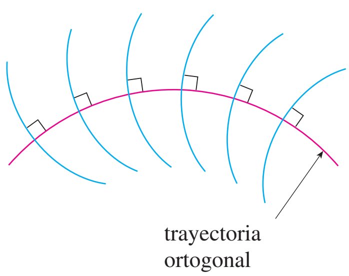


FIGURA 7

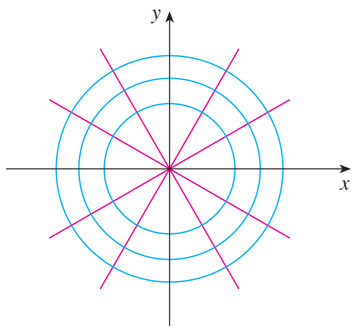


FIGURA 8

V EJEMPLO 5 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = ky^2$, donde k es una constante arbitraria.

SOLUCIÓN Las curvas $x = ky^2$ forman una familia de parábolas cuyo eje de simetría es el eje x. El primer paso es hallar una sola ecuación diferencial que sea satisfecha por todos los miembros de la familia. Si derivamos $x = ky^2$, obtendremos

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Esta ecuación diferencial depende de k, pero necesitamos una ecuación que sea válida para todos los valores de k de manera simultánea. Para eliminar k observamos que, de la ecuación de la parábola general dada $x = ky^2$, tenemos $k = x/y^2$ y por tanto la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}y}$$

o bien
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Esto significa que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) en una de las parábolas es $y' = y/(2x)$. En una trayectoria ortogonal la pendiente de la recta tangente debe ser el recíproco negativo de esta pendiente. Por tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

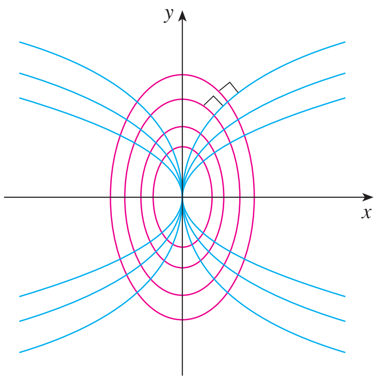


FIGURA 9

Esta ecuación diferencial es separable y la resolvemos como sigue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

4 $$x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

donde C es una constante positiva arbitraria. Así, las trayectorias ortogonales son la familia de elipses dada por la Ecuación 4 y trazadas en la Figura 9.

Las trayectorias ortogonales se presentan en varios campos de física. Por ejemplo, en un campo electrostático las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. También, las líneas de flujo en aerodinámica son trayectorias ortogonales de las curvas de equipotencial de velocidad.

Problemas de mezclas

Un problema típico de mezclas involucra un tanque de capacidad fija lleno con una solución perfectamente mezclada de alguna sustancia, por ejemplo de sal. Una solución de una concentración determinada entra al tanque a un rapidez fija y la mezcla, una vez mezclada perfectamente, sale a una rapidez fija que puede diferir de la de la entrada. Si $y(t)$ denota la cantidad de sustancia del tanque en el tiempo t, entonces $y'(t)$ es la rapidez a la cual la sustancia se está agregando menos la rapidez a la que sale del tanque. La descripción matemática de esta situación a veces lleva a una ecuación diferencial separable de primer orden. Podemos usar el mismo tipo de razonamiento para modelar una variedad de fenómenos: reacciones químicas, descarga de contaminantes en un lago, inyección de un medicamento en el torrente sanguíneo.

EJEMPLO 6 Un tanque contiene 20 kg de sal disuelta en 5000 L de agua. La salmuera que contiene 0.03 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 25 L/min. La solución se conserva mezclada perfectamente y sale del tanque a la misma rapidez. ¿Cuánta sal habrá en el tanque después de media hora?

SOLUCIÓN Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos. Nos dicen que $y(0) = 20$ y deseamos hallar $y(30)$. Hacemos esto al hallar una ecuación diferencial satisfecha por $y(t)$. Nótese que dy/dt es la rapidez de cambio de la cantidad de sal, y entonces

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = (\text{rapidez de entrada}) - (\text{rapidez de salida})$$

donde la rapidez de entrada es la rapidez con la que entra sal al tanque y la rapidez de salida es la rapidez a la que sale del tanque. Tenemos

$$\text{rapidez de entrada} = \left(0.03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0.75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

El tanque siempre contiene 5000 L de líquido, de modo que la concentración en el tiempo t es $y(t)/5000$ (medida en kilogramos por litro). Como la salmuera sale a una rapidez de 25 L/min, tenemos

$$\text{rapidez de salida} = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Entonces, de la Ecuación 5, tenemos

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Al resolver esta ecuación diferencial separable tendremos

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

La Figura 10 muestra la gráfica de la función $y(t)$ del Ejemplo 6. Nótese que, con el transcurso del tiempo, la cantidad de sal se aproxima a 150 kg.

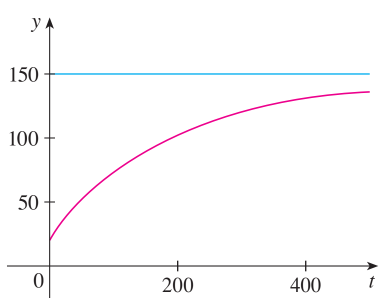


FIGURA 10

Como $y(0) = 20$, tenemos $-\ln 130 = C$, y entonces

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Por tanto, $$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Como $y(t)$ es continua y $y(0) = 20$ y el lado derecho nunca es 0, deducimos que $150 - y(t)$ es siempre positiva. En consecuencia, $|150 - y| = 150 - y$ o sea

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

La cantidad de sal después de 30 minutos es

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$

7.3 Ejercicios

1–10 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-y}$

3. $(x^2 + 1)y' = xy$

4. $(y^2 + xy^2)y' = 1$

5. $(y + \operatorname{sen} y)y' = x + x^3$

6. $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{1 + \sqrt{r}}{1 + \sqrt{u}}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1 + y^2}}$

8. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y \sec \theta}$

9. $\dfrac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

10. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11–18 Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial dada.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}, \quad y(0) = -3$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$

13. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

14. $y' = \dfrac{xy \operatorname{sen} x}{y + 1}, \quad y(0) = 1$

15. $x \ln x = y\left(1 + \sqrt{3 + y^2}\right)y', \quad y(1) = 1$

16. $\dfrac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, \quad P(1) = 2$

17. $y' \tan x = a + y, \; y(\pi/3) = a, \quad 0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dL}{dt} = kL^2 \ln t, \; L(1) = -1$

19. Encuentre una ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 1) y cuya pendiente en (x, y) es xy.

20. Encuentre la función f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. Resuelva la ecuación diferencial $y' = x + y$ haciendo el cambio de variable $u = x + y$.

22. Resuelva la ecuación diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$ haciendo el cambio de variable $v = y/x$.

23. (a) Resuelva la ecuación diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.
(b) Resuelva el problema del valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$, y grafique la solución.
(c) ¿Tiene solución el problema del valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$? Explique.

24. Resuelva la ecuación $e^{-y}y' + \cos x = 0$ y grafique varios miembros de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva de solución cuando varía la constante C?

CAS **25.** Resuelva el problema del valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, y grafique la solución (si su CAS hace gráficas implícitas).

CAS **26.** Resuelva la ecuación $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ y grafique varios miembros de la familia de soluciones (si su CAS hace gráficas implícitas). ¿Cómo cambia la curva de solución cuando varía la constante C?

CAS **27–28**
(a) Use un sistema computarizado de álgebra para dibujar un campo de dirección para la ecuación diferencial. Imprímalo y úselo para trazar algunas curvas de solución sin resolver la ecuación diferencial.
(b) Resuelva la ecuación diferencial.
(c) Use el CAS para trazar varios miembros de la familia de soluciones obtenidas en el inciso (b). Compare con las curvas del inciso (a).

27. $y' = y^2$

28. $y' = xy$

29–32 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Use una calculadora de gráficas para trazar varios miembros de cada familia en una pantalla común.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$

30. $y^2 = kx^3$

31. $y = \dfrac{k}{x}$

32. $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

33–35 Una **ecuación integral** es aquella que contiene una función desconocida $y(x)$ y una integral que contiene $y(x)$. Resuelva la ecuación integral dada. [*Sugerencia*: Use una condición inicial obtenida de la ecuación integral.]

33. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_2^x [t - ty(t)]\, dt$

34. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{ty(t)}, \quad x > 0$

35. $y(x) = 4 + \displaystyle\int_0^x 2t\sqrt{y(t)}\, dt$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

36. Encuentre una función f tal que $f(3) = 2$ y

$$(t^2 + 1)f'(t) + [f(t)]^2 + 1 = 0 \qquad t \neq 1$$

[*Sugerencia*: Use la fórmula de la adición para $\tan(x + y)$ de la Página de Referencia 2.]

37. Resuelva el problema con valor inicial del Ejercicio 27 de la Sección 7.2 para hallar una expresión para la carga en el tiempo t. Encuentre el valor límite de la carga.

38. En el Ejercicio 28 de la Sección 7.2 explicamos una ecuación diferencial que modela la temperatura de una taza de café a 95°C en un cuarto de 20°C. Resuelva la ecuación diferencial para hallar una expresión para la temperatura del café en el tiempo t.

39. En el Ejercicio 15 de la Sección 7.1 formulamos un modelo para aprender en la forma de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

donde $P(t)$ mide el rendimiento de alguien que aprende un oficio después de un tiempo de capacitación t, M es el nivel máximo de rendimiento y k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial para hallar una expresión para $P(t)$. ¿Cuál es el límite de esta expresión?

40. En una reacción química elemental, las moléculas individuales de dos reactivos A y B forman una molécula del producto C: A + B $\rightarrow$ C. La ley de acción de masas dice que la rapidez de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B:

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

(Vea el Ejemplo 4 de la Sección 3.8.) Así, si las concentraciones iniciales son $[\mathrm{A}] = a$ moles/L y $[\mathrm{B}] = b$ moles/L y escribimos $x = [\mathrm{C}]$, entonces tenemos

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

CAS (a) Suponiendo que $a \neq b$, encuentre x como función de t. Use el hecho de que la concentración inicial de C es 0.

(b) Encuentre $x(t)$ suponiendo que $a = b$. ¿Cómo se simplifica esta expresión para $x(t)$ si se sabe que $[\mathrm{C}] = \frac{1}{2}a$ después de 20 segundos?

41. En contraste con la situación del Ejercicio 40, experimentos demuestran que la reacción $H_2 + Br_2 \rightarrow 2HBr$ satisface la ley de proporción

$$\frac{d[\mathrm{HBr}]}{dt} = k[\mathrm{H_2}][\mathrm{Br_2}]^{1/2}$$

y entonces para esta reacción la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

donde $x = [\mathrm{HBr}]$ y a y b son las concentraciones iniciales de hidrógeno y bromo.

(a) Encuentre x como una función de t en el caso donde $a = b$. Use el hecho de que $x(0) = 0$.

(b) Si $a > b$, encuentre t como función de x. [*Sugerencia*: Al realizar la integración, haga la sustitución $u = \sqrt{b - x}$.]

42. Una esfera de 1 m de radio tiene temperatura de 15°C. Se encuentra dentro de una esfera concéntrica con radio 2 m y temperatura de 25°C. La temperatura $T(r)$ a una distancia r del centro común de las esferas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Si hacemos $S = dT/dr$, entonces S satisface una ecuación diferencial de primer orden. Resuélvala para hallar una expresión para la temperatura $T(r)$ entre las esferas.

43. Una solución de glucosa se administra por vía intravenosa en el torrente sanguíneo a una rapidez r constante. A medida que se agrega la glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina del torrente sanguíneo a una rapidez que es proporcional a la concentración en ese tiempo. Entonces, un modelo para la concentración $C = C(t)$ de la solución de glucosa en la sangre es

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

donde k es una constante positiva.

(a) Suponga que la concentración en el tiempo $t = 0$ es C_0. Determine la concentración en cualquier tiempo t al resolver la ecuación diferencial.

(b) Suponiendo que $C_0 < r/k$, encuentre $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete su respuesta.

44. Cierto pequeño país tiene \$10,000 millones en papel moneda en circulación y todos los días entran \$50 millones en los bancos del país. El gobierno decide introducir una nueva moneda haciendo que los bancos cambien los billetes antiguos por nuevos cada vez que los antiguos entren en los bancos. Denote con $x = x(t)$ la cantidad de la nueva moneda en circulación en el tiempo t, con $x(0) = 0$.

(a) Formule un modelo matemático en la forma de un problema del valor inicial que represente el "flujo" de la nueva moneda en circulación.

(b) Resuelva el problema con valor inicial hallado en el inciso (a).

(c) ¿Cuánto tiempo tardarán los nuevos billetes en constituir 90% de la moneda en circulación?

45. Un tanque contiene 1000 L de salmuera con 15 kg de sal disuelta. Entra agua pura al tanque a razón de 10 L/min. La solución se conserva perfectamente mezclada y sale del tanque con la misma rapidez. ¿Cuánta sal hay en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de 20 minutos?

46. El aire en un cuarto con volumen de 180 m^3 contiene inicialmente 0.15% de dióxido de carbono. Un aire más fresco con sólo 0.05% de dióxido de carbono entra al cuarto a razón de 2 m^3/min y el aire mezclado sale con esa misma rapidez. Encuentre el porcentaje de dióxido de carbono en el cuarto como función del tiempo. ¿Qué ocurre a la larga?

47. Una cuba con 500 galones de cerveza contiene 4% de alcohol (por volumen). Se bombea cerveza con 6% de alcohol hacia la cuba con una rapidez de 5 gal/min y la mezcla se bombea fuera de la cuba con esa misma rapidez. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol después de una hora?

48. Un tanque contiene 1000 L de agua pura. Salmuera que contiene 0.05 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 5 L/min. Salmuera que contiene 0.04 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 10 L/min. La solución se conserva perfectamente mezclada y sale del tanque a razón de 15 L/min. ¿Cuánta sal hay en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de una hora?

49. Cuando cae una gota de lluvia, aumenta en tamaño y su masa en el tiempo t como función de t, es decir $m(t)$. La rapidez de crecimiento de la masa es $km(t)$ para alguna constante positiva k. Cuando aplicamos la Ley de Newton del Movimiento a la gota de lluvia obtenemos $(mv)' = gm$, donde v es la velocidad de la gota de lluvia (dirigida hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad. La *velocidad terminal* de la gota de lluvia es $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encuentre una expresión para la velocidad terminal en términos de g y k.

50. Un objeto de masa m se mueve horizontalmente por un medio que resiste el movimiento con una fuerza que es función de la velocidad; esto es,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

donde $v = v(t)s = s(t)$ representan la velocidad y posición del objeto en el tiempo t, respectivamente. Por ejemplo, considere un bote que se mueve en el agua.

(a) Suponga que la fuerza resistiva es proporcional a la velocidad, es decir, $f(v) = -kv$, k es una constante positiva. (Este modelo es apropiado para valores pequeños de v.) Sean $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$ los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que el objeto se desplaza desde el tiempo $t = 0$?

(b) Para valores más grandes de v se obtiene un mejor modelo si se supone que la fuerza resistiva es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Este modelo fue propuesto primero por Newton.) Sean v_0 y s_0 los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que el objeto se desplaza en este caso?

51. El *crecimiento alómero* en biología se refiere a relaciones entre tamaños de partes de un organismo (longitud del cráneo y longitud del cuerpo, por ejemplo). Si $L_1(t)$ y $L_2(t)$ son los tamaños de dos órganos en un organismo de edad t, entonces L_1 y L_2 satisfacen la ley alómera si sus tasas de crecimiento específicas son proporcionales:

$$\frac{1}{L_1}\frac{dL_1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt}$$

donde k es una constante.

(a) Use la ley alómera para escribir una ecuación diferencial que relacione L_1 y L_2 y resuélvala para expresar L_1 como función de L_2.

(b) En un estudio de varias especies de algas unicelulares, la constante de proporcionalidad de la ley alómera que relaciona B (biomasa celular) y V (volumen celular) se encontró que es $k = 0.0794$. Escriba B como función de V.

52. La *homeostasis* se refiere a un estado en el que el contenido de nutrientes de un consumidor es independiente del contenido de nutrientes de su alimento. En ausencia de homeostasis, un modelo propuesto por Sterner y Elser está dado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}\frac{y}{x}$$

donde x y y representan el contenido de nutrientes del alimento y el consumidor, respectivamente, y θ es una constante con $\theta \geqslant 1$.

(a) Resuelva la ecuación diferencial.

(b) ¿Qué ocurre cuando $\theta = 1$? ¿Y qué ocurre cuando $\theta \to \infty$?

53. Sea $A(t)$ el área de un cultivo de tejido en el tiempo t y sea M el área final del tejido cuando el crecimiento está completo. Casi todas las divisiones celulares ocurren en la periferia del tejido y el número de células de la periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Entonces, un modelo razonable para el crecimiento de tejido se obtiene al suponer que la rapidez de crecimiento del área es conjuntamente proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$.

(a) Formule una ecuación diferencial y úsela para demostrar que el tejido crece más rápidamente cuando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

CAS (b) Resuelva la ecuación diferencial para hallar una expresión para $A(t)$. Use un sistema computarizado de álgebra para realizar la integración.

54. De acuerdo a la Ley de Newton de Gravitación Universal, la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m que ha sido proyectado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre es

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

donde $x = x(t)$ es la distancia del objeto sobre la superficie en el tiempo t, R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad. Del mismo modo, por la Segunda Ley de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$ y entonces

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

(a) Suponga que un cohete es disparado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Sea h la máxima altitud sobre la superficie alcanzada por el objeto. Demuestre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Sugerencia*: Por la Regla de la cadena, $m\,(dv/dt) = mv\,(dv/dx)$.]

(b) Calcule $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Este límite se denomina *velocidad de escape* desde la Tierra.

(c) Use $R = 3960$ mi y $g = 32$ ft/s^2 para calcular v_e en pies por segundo y en millas por segundo.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿Qué tan rápido se descarga un tanque?

Si agua (u otro líquido) se descarga de un tanque, esperamos que el flujo sea máximo al principio (cuando la profundidad del agua es máxima) y gradualmente desminuirá a medida que baje el nivel del agua. Pero necesitamos una descripción matemática más precisa de cómo disminuye el flujo para contestar la clase de preguntas que hacen ingenieros: ¿Cuánto tarda un tanque en drenarse por completo? ¿Cuánta agua debe contener un tanque para garantizar cierta presión mínima de agua para un sistema de riego?

Sean $h(t)$ y $V(t)$ la altura y volumen de agua en un tanque en el tiempo t. Si se drena agua por un agujero con área a situado en el fondo del tanque, entonces la Ley de Torricelli dice que

$$\boxed{1} \qquad \frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Entonces la rapidez con la que sale agua del tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del agua.

1. (a) Suponga que el tanque es cilíndrico con altura de 6 ft y radio de 2 ft y el agujero es circular con radio de 1 in. Si tomamos $g = 32\ \text{ft/s}^2$, demuestre que h satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{h}$$

(b) Resuelva esta ecuación para hallar la altura del agua en el tiempo t, suponiendo que el tanque está lleno en el tiempo $t = 0$.

(c) ¿Cuánto tardará el agua en drenarse por completo?

2. Debido a la rotación y viscosidad del líquido, el modelo teórico dado por la ecuación 1 no es del todo preciso. En cambio, el modelo

$$\boxed{2} \qquad \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

se usa con frecuencia y la constante k (que depende de las propiedades físicas del líquido) se determina a partir de datos relacionados con el drenaje del tanque.

(a) Suponga que se perfora un agujero en el costado de una botella cilíndrica y la altura h del agua (sobre el agujero) disminuye de 10 cm a 3 cm en 68 segundos. Use la Ecuación 2 para hallar una expresión para $h(t)$. Evalúe $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$.

(b) Perfore un agujero de 4 mm cerca del fondo de la parte cilíndrica de una botella de plástico de 2 litros para bebida gaseosa. Pegue una tira de cinta adhesiva marcada en centímetros de 0 a 10, con 0 correspondiente a la parte superior del agujero. Con un dedo sobre el agujero, llene la botella con agua hasta la marca de 10 cm y, a continuación, quite el dedo del agujero y registre los valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Es probable que encuentre que tarda 68 segundos para que el nivel disminuya a $h = 3$ cm.) Compare sus datos con los valores de $h(t)$ del inciso (a). ¿Qué tan bien predijo el modelo los valores reales?

Esta parte del proyecto se realiza mejor como demostración en salón de clases o como proyecto de grupo con tres estudiantes en cada grupo: un tomador de tiempo para indicar los segundos, uno que observe la botella para calcular la altura a cada 10 segundos, y uno que haga anotaciones para registrar estos valores.

3. En muchas partes del mundo, el agua para sistemas de riego en grandes hoteles y hospitales se suministra por gravedad desde tanques cilíndricos colocados en techos de edificios o cerca de aquéllos. Suponga que un tanque tiene un radio de 10 ft y el diámetro de la salida es 2.5 in. Un ingeniero tiene que garantizar que la presión del agua sea al menos de 2160 lb/ft^2 durante un periodo de 10 minutos. (Cuando ocurre un incendio, el sistema eléctrico podría fallar y podría tardar hasta 10 minutos que un generador de emergencia y bomba de incendio sean activados.) ¿Qué altura debe especificar el ingeniero para el tanque, para hacer esa garantía? (Use el hecho de que la presión de agua a una profundidad de d pies es $P = 62.5d$. Vea la Sección 6.6.)

4. No todos los tanques de agua tienen forma cilíndrica. Suponga que un tanque tiene sección transversal $A(h)$ a una altura h. Entonces el volumen de agua hasta la altura h es $V = \int_0^h A(u)\,du$ y por tanto el Teorema Fundamental de Cálculo da $dV/dh = A(h)$. Se deduce que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\,\frac{dh}{dt} = A(h)\,\frac{dh}{dt}$$

y por tanto la Ley de Torricelli se convierte en

$$A(h)\,\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) Suponga que el tanque tiene la forma de una esfera con radio de 2 m y está inicialmente lleno de agua a la mitad. Si el radio del agujero circular es 1 cm y tomamos $g = 10\ \text{m/s}^2$, demuestre que h satisface la ecuación diferencial

$$(4h - h^2)\,\frac{dh}{dt} = -0.0001\sqrt{20h}$$

(b) ¿Cuánto tardará el agua en drenarse por completo?

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿Qué es más rápido, subir o bajar?

Supongamos que el lector lanza una pelota al aire. ¿Piensa que tarda más en alcanzar su altura máxima o en regresar al suelo desde su altura máxima? Resolveremos el problema en este proyecto pero, antes de empezar, piense en esa situación y haga un cálculo basado en su intuición física.

1. Una pelota con masa m es proyectada verticalmente hacia arriba desde la superficie del suelo con una velocidad inicial positiva v_0. Suponemos que las fuerzas que actúan sobre la pelota son la fuerza de gravedad y una fuerza retardatriz de la resistencia del aire con dirección contraria a la dirección de movimiento y con magnitud $p|v(t)|$, donde p es una constante positiva y $v(t)$ es la velocidad de la pelota en el tiempo t. En el ascenso y descenso, la fuerza total que actúa sobre la pelota es $-pv - mg$. [Durante el ascenso, $v(t)$ es positiva y la resistencia actúa hacia abajo; durante el descenso, $v(t)$ es negativa y la resistencia actúa hacia arriba.] Por tanto, por la Segunda Ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$mv' = -pv - mg$$

Resuelva esta ecuación diferencial para demostrar que la velocidad es

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

Al modelar una fuerza debida a la resistencia del aire se han empleado varias funciones, dependiendo de las características físicas y rapidez de la pelota. Aquí usamos un modelo lineal, $-pv$, pero un modelo cuadrático ($-pv^2$ en el ascenso y pv^2 en el descenso) es otra posibilidad para magnitudes de rapidez más elevadas (vea Ejercicio 50 en la Sección 7.3). Para una pelota de golf, experimentos realizados han demostrado que un buen modelo es $-pv^{1.3}$ en el ascenso $p|v|^{1.3}$ en el descenso. Pero sin importar cuál función de fuerza $-f(v)$ se use [donde $f(v) > 0$ para $v > 0$ y $f(v) < 0$ para $v < 0$], la respuesta a la pregunta sigue siendo igual. Vea la obra de F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually", *Amer. Math. Monthly* 108 (2001), pp. 437–440.

2. Demuestre que la altura de la pelota, hasta caer en el suelo, es

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}\left(1 - e^{-pt/m}\right) - \frac{mgt}{p}$$

3. Sea t_1 el tiempo que la pelota tarda en alcanzar su altura máxima. Demuestre que

$$t_1 = \frac{m}{p}\ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Encuentre este tiempo para una pelota con masa de 1 kg y rapidez inicial de 20 m/s. Suponga que la resistencia del aire es $\frac{1}{10}$ de la rapidez.

4. Sea t_2 el tiempo en el que la pelota regresa al suelo. Para la pelota particular del Problema 3, calcule t_2 con el uso de una gráfica de la función de altura $y(t)$. ¿Qué es más rápido, subir o bajar?

5. En general, no es fácil hallar t_2 porque es imposible resolver la ecuación $y(t) = 0$ de manera explícita pero podemos usar un método indirecto para determinar si el ascenso o el descenso es más rápido; determinamos si $y(2t_1)$ es positivo o negativo. Demuestre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

donde $x = e^{pt_1/m}$. A continuación demuestre que $x > 1$ y la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

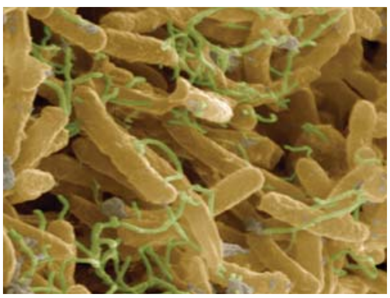
es creciente para $x > 1$. Use el resultado para decidir si $y(2t_1)$ es positivo o negativo. ¿Qué se puede concluir? ¿El ascenso o el descenso es más rápido?

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

7.4 Crecimiento y desintegración exponenciales

Uno de los modelos para crecimiento poblacional que consideramos en la Sección 7.1 estuvo basado en la suposición de que la población crece a una tasa proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$



Eye of Science / Photo Researchers, Inc.

Las bacterias E. coli tienen aproximadamente 2 micrometros (μm) de largo y 0.75 μm de grosor. La imagen se obtuvo con un microscopio electrónico.

¿Esa suposición es razonable? Supóngase que tenemos una población (de bacterias, por ejemplo) con tamaño $P = 1000$ y en cierto tiempo está creciendo a una tasa de $P' = 300$ bacterias por hora. Tomemos ahora otras 1000 bacterias del mismo tipo y pongámoslas con la primera población. Cada mitad de la nueva población estaba creciendo a una tasa de 300 bacterias por hora. Esperaríamos que la población total de 2000 aumentara a una tasa de 600 bacterias por hora inicialmente (siempre que hubiera suficiente espacio y alimento). Entonces, si duplicamos el tamaño, duplicamos la tasa de crecimiento. En general, parece razonable que la tasa de crecimiento debiera ser proporcional al tamaño.

La misma suposición aplica también en otras situaciones. En física nuclear, la masa de una sustancia radiactiva se desintegra a una tasa proporcional a la masa. En química, la tasa de reacción unimolecular de primer orden es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta de ahorros con interés capitalizado continuamente aumenta a una tasa proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la tasa de cambio de y con respecto a t es proporcional a su tamaño $y(t)$ en cualquier tiempo, entonces

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es una constante. La Ecuación 1 a veces se denomina **ley de crecimiento natural** (si $k > 0$) o la **ley de desintegración natural** (si $k < 0$). Debido a que es una ecuación diferencial separable, podemos resolverla por los métodos de la Sección 7.3:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

donde A ($= \pm e^C$ o 0) es una constante arbitraria. Para ver la importancia de la constante A, observamos que

$$y(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Por tanto, A es el valor inicial de la función.

Como la Ecuación 1 se presenta con tanta frecuencia en la naturaleza, resumimos lo que acabamos de demostrar para uso futuro.

2 La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = y_0$$

es

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Crecimiento poblacional

¿Cuál es la importancia de la constante de proporcionalidad k? En el contexto del crecimiento poblacional, podemos escribir

3 $$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

La cantidad

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

es la tasa de crecimiento dividida entre el tamaño poblacional; recibe el nombre de **tasa de crecimiento relativo**. De acuerdo con (3), en lugar de decir "la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño poblacional" podríamos decir "la tasa de crecimiento relativo es constante." Entonces (2) dice que una población con tasa de crecimiento relativo constante debe crecer exponencialmente. Nótese que la tasa k de crecimiento relativo aparece como el coeficiente de t en la función exponencial $y_0 e^{kt}$. Por ejemplo, si

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

y t se mide en años, entonces la tasa de crecimiento relativo es $k = 0.02$ y la población crece a una tasa relativa de 2% por año. Si la población en el tiempo 0 es P_0, entonces la expresión para la población es

$$P(t) = P_0 e^{0.02t}$$

TABLA 1

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

EJEMPLO 1 Modelar la población mundial con la ley de crecimiento natural Suponiendo que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño poblacional, use los datos de la Tabla 1 para modelar la población mundial del siglo XX. ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo? ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

SOLUCIÓN Medimos el tiempo t en años y sea $t = 0$ en el año 1900. Medimos la población $P(t)$ en millones de personas. Entonces la condición inicial es $P(0) = 1650$. Estamos suponiendo que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño poblacional, de modo que el problema con valor inicial es

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = 1650$$

De (2) sabemos que la solución es

$$P(t) = 1650e^{kt}$$

Una forma de calcular la tasa k de crecimiento relativo es usar el hecho de que la población en 1950 era de 2560 millones. Por tanto,

$$P(50) = 1650e^{k(50)} = 2560$$

De esta ecuación despejamos k:

$$e^{50k} = \frac{2560}{1650}$$

$$k = \frac{1}{50}\ln\frac{2560}{1650} \approx 0.0087846$$

Entonces la tasa de crecimiento relativo es alrededor de 0.88% por año y el modelo se convierte en

$$P(t) = 1650e^{0.0087846t}$$

La Tabla 2 y la Figura 1 nos permiten comparar las predicciones de este modelo con los datos reales. Se puede ver que las predicciones se hacen bastante imprecisas después de unos 60 años.

TABLA 2

Año	Modelo	Población
1900	1650	1650
1910	1802	1750
1920	1967	1860
1930	2148	2070
1940	2345	2300
1950	2560	2560
1960	2795	3040
1970	3052	3710
1980	3332	4450
1990	3638	5280
2000	3972	6080

En la Sección 1.5 modelamos los mismos datos con una función exponencial, pero ahí usamos el método de mínimos cuadrados.

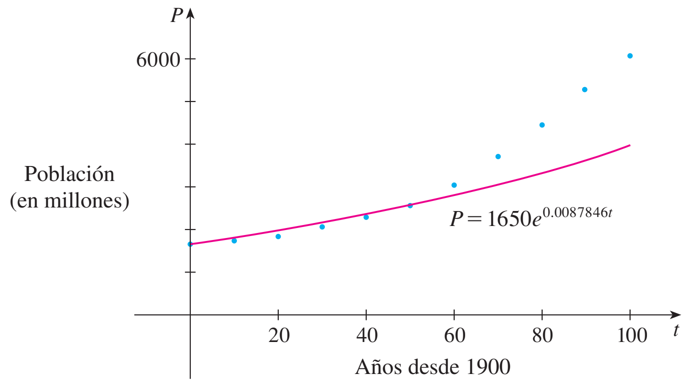


FIGURA 1 Un posible modelo para el crecimiento de la población mundial

Al ver la Figura 1, podríamos pensar que obtendríamos un mejor modelo con el uso de la población dada para 1970, en lugar de 1950, para calcular k. Entonces

$$P(70) = 1650e^{70k} = 3710$$

$$k = \frac{1}{70} \ln \frac{3710}{1650} \approx 0.0115751$$

La estimación para la tasa de crecimiento relativo es ahora 1.16% por año y el modelo es

$$P(t) = 1650e^{0.0115751t}$$

La Figura 2 ilustra el segundo modelo. Este modelo exponencial es más preciso después de 1970 pero menos preciso antes de 1950.

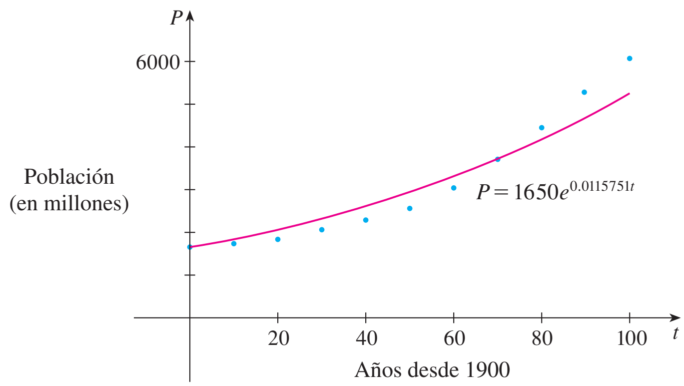


FIGURA 2
Otro modelo para el crecimiento de la población mundial

EJEMPLO 2 **Estimación y predicción a partir de un modelo de crecimiento exponencial** Use los datos de la Tabla 1 para modelar la población mundial de la segunda mitad del siglo XX. Use el modelo para estimar la población en 1993 y predecir la población del año 2015.

SOLUCIÓN Aquí hacemos $t = 0$ en el año 1950. Entonces el problema con valor inicial es

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = 2560$$

y la solución es

$$P(t) = 2560e^{kt}$$

Estimemos k con el uso de la población en 1960:

$$P(10) = 2560e^{10k} = 3040$$

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{3040}{2560} \approx 0.017185$$

La tasa de crecimiento relativo es alrededor de 1.7% por año y el modelo es

$$P(t) = 2560e^{0.017185t}$$

Estimamos que la población mundial en 1993 fue

$$P(43) = 2560e^{0.017185(43)} \approx 5360 \text{ millones}$$

El modelo predice que la población en 2015 será

$$P(60) = 2560e^{0.017185(65)} \approx 7822 \text{ millones}$$

La gráfica de la Figura 3 muestra que el modelo es bastante preciso al iniciar el siglo, de modo que la estimación para 1993 es confiable lo suficiente. Pero la predicción para 2015 es más riesgosa.

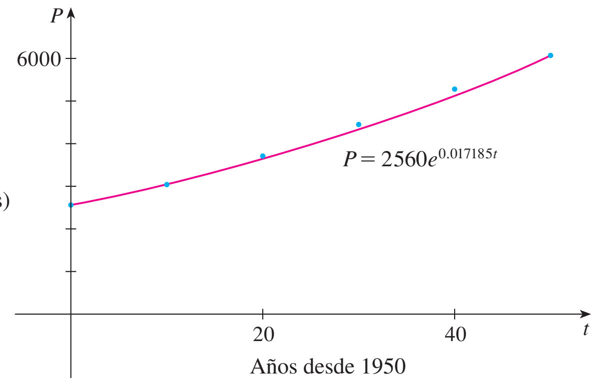


FIGURA 3
Modelo para el crecimiento de la población mundial de la segunda mitad del siglo XX

Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación de manera espontánea. Si $m(t)$ es la masa restante de una masa inicial m_0 de la sustancia después del tiempo t, entonces la tasa de desintegración relativa

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

se ha encontrado experimentalmente que es constante. (Como dm/dt es negativa, la tasa de desintegración relativa es positiva.) Se deduce que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde k es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas se desintegran con rapidez proporcional a la masa restante. Esto significa que podemos usar (2) para demostrar que la masa se desintegra exponencialmente:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de **vida media**, el tiempo necesario para que la mitad de cualquier sustancia dada se desintegre.

V EJEMPLO 3 La vida media del radio 226 es 1590 años.
(a) Una muestra de radio 226 tiene una masa de 100 mg. Encuentre una fórmula para la masa del ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ que resta después de t años.
(b) Encuentre la masa después de 1000 años correcta al miligramo más cercano.
(c) ¿Cuándo se reducirá a 30 mg la masa?

SOLUCIÓN

(a) Sea $m(t)$ la masa de radio 226 (en miligramos) que resta después de t años. Entonces $dm/dt = km$ y $y(0) = 100$, de modo que (2) da

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

Para determinar el valor de k, usamos el hecho de que $y(1590) = \frac{1}{2}(100)$. Entonces

$$100e^{1590k} = 50 \qquad \text{por tanto} \qquad e^{1590k} = \tfrac{1}{2}$$

por tanto, $$1590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

En consecuencia, $$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

Podríamos usar el hecho de que $e^{\ln 2} = 2$ para escribir la expresión para $m(t)$ en la forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

(b) La masa después de 1000 años es

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) Deseamos hallar el valor de t tal que $m(t) = 30$, es decir,

$$100e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \qquad \text{o} \qquad e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

De esta ecuación despejamos t al tomar el logaritmo natural de ambos lados

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

Por tanto, $$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762 \text{ años}$$

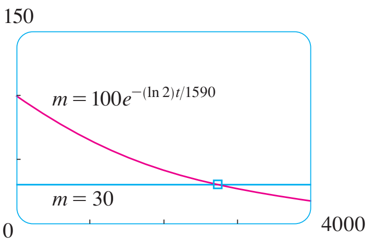


FIGURA 4

Como prueba de nuestro trabajo en el Ejemplo 3, usamos una calculadora de gráficas para trazar la gráfica de $m(t)$ en la Figura 4 junto con la recta horizontal $m = 30$. Estas curvas se cruzan cuando $t \approx 2800$, y esto está acorde con la respuesta al inciso (c).

Ley de Newton de Enfriamiento

La Ley de Newton de Enfriamiento dice que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno, siempre que esta diferencia no sea demasiado grande. (Esta ley también se aplica al calentamiento.) Si hacemos que $T(t)$ sea la temperatura del objeto en el tiempo t y T_s es la temperatura del entorno, entonces podemos formular la Ley de Newton de Enfriamiento como una ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

donde k es una constante. Podríamos resolver esta ecuación como una ecuación diferencial separable por el método de la Sección 7.3, pero un método más fácil es hacer el cambio de variable $y(t) = T(t) - T_s$. Como T_s es constante, tenemos $y'(t) = T'(t)$ y entonces la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Podemos entonces usar (2) para hallar una expresión para y, de la cual podemos hallar T.

EJEMPLO 4 **Usar la Ley de Newton de Enfriamiento para predecir temperaturas** Una botella de agua mineral gaseosa a temperatura de cuarto (72°F) se coloca en un refrigerador donde la temperatura es 44°F. Después de media hora el agua mineral se ha enfriado a 61°F.
(a) ¿Cuál es la temperatura del agua mineral después de otra media hora?
(b) ¿Cuánto tarda el agua mineral en enfriarse a 50°F?

SOLUCIÓN
(a) Sea $T(t)$ la temperatura del agua mineral después de t minutos. La temperatura del entorno es $T_s = 44$°F, por lo que la Ley de Newton de Enfriamiento dice que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

Si hacemos $y = T - 44$, entonces $y(0) = T(0) - 44 = 72 - 44 = 28$, por lo que y es una solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

y por (2) tendremos

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

Nos indican que $T(30) = 61$, y entonces $y(30) = 61 - 44 = 17$ y

$$28e^{30k} = 17 \qquad e^{30k} = \tfrac{17}{28}$$

Tomando logaritmos, tendremos

$$k = \frac{\ln\left(\frac{17}{28}\right)}{30} \approx -0.01663$$

Por lo cual

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)} \approx 54.3$$

Entonces, después de otra media hora la gaseosa se ha enfriado a unos 54°F.
(b) Tenemos $T(t) = 50$ cuando

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50$$

$$e^{-0.01663t} = \tfrac{6}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{-0.01663} \approx 92.6$$

La gaseosa se enfría a 50°F después de 1 hora 33 minutos.

Nótese que en el Ejemplo 4 tenemos

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28 \cdot 0 = 44$$

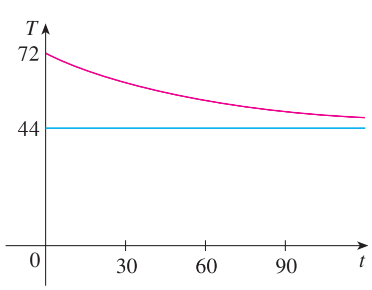


FIGURA 5

que es de esperarse. La gráfica de la función de temperatura se ve en la Figura 5.

Interés capitalizado continuamente

EJEMPLO 5 Si \$1000 se invierten al 6% de interés, capitalizado anualmente, entonces después de 1 año la inversión vale \$1000(1.06) = \$1060, después de 2 años su valor es \$[1000(1.06)]1.06 = \$1123.60, y después de t años vale $\$1000(1.06)^t$. En general, si una cantidad A_0 se invierte a una tasa de interés r ($r = 0.06$ en este ejemplo), entonces después de t años vale $A_0(1 + r)^t$. Por lo general, sin embargo, el interés se capitaliza con más frecuencia, por ejemplo n veces al año. Entonces en cada periodo de capitalización la tasa de interés es r/n y hay nt periodos de capitalización en t años, de modo que el valor de la inversión es

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por ejemplo, después de 3 años al 6% de interés una inversión de \$1000 valdrá

$$\begin{aligned}
\$1000(1.06)^3 &= \$1191.02 \quad \text{con capitalización anual}\\
\$1000(1.03)^6 &= \$1194.05 \quad \text{con capitalización semestral}\\
\$1000(1.015)^{12} &= \$1195.62 \quad \text{con capitalización trimestral}\\
\$1000(1.005)^{36} &= \$1196.68 \quad \text{con capitalización mensual}\\
\$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365\cdot 3} &= \$1197.20 \quad \text{con capitalización diaria}
\end{aligned}$$

Se puede ver que el interés pagado aumenta cuando aumenta el número (n) de periodos de capitalización. Si hacemos $n \to \infty$, entonces estaremos capitalizando el interés **continuamente** y el valor de la inversión será

$$\begin{aligned}
A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}\\
&= \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}\\
&= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}\\
&= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad \text{(donde } m = n/r\text{)}
\end{aligned}$$

Pero el límite de esta expresión es igual al número e (vea la Ecuación 3.7.6). Entonces, con capitalización continua de interés a una tasa de interés r, la cantidad después de t años será

$$A(t) = A_0e^{rt}$$

Si derivamos esta ecuación, obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = rA_0e^{rt} = rA(t)$$

la cual nos dice que, con capitalización continua de interés, la tasa de interés de una inversión es proporcional a su monto.

Regresando al ejemplo de \$1000 invertidos durante 3 años al 6% de interés, vemos que con capitalización continua de interés el valor de la inversión será

$$A(3) = \$1000e^{(0.06)3}$$
$$= \$1000e^{0.18} = \$1197.22$$

Nótese lo cercano de esto a la cantidad calculada para capitalización diaria, \$1197.20. Pero, la cantidad es más fácil de calcular si usamos capitalización continua.

7.4 Ejercicios

1. Una población de protozoarios se desarrolla con una tasa de crecimiento relativo constante de 0.7944 por miembro por día. En el día cero la población está formada de dos miembros. Encuentre el tamaño de la población después de seis días.

2. Un habitante común del intestino humano es la bacteria *Escherichia coli*. Una célula de esta bacteria en un medio nutriente se divide en dos células cada 20 minutos. La población inicial de un cultivo es de 60 células.
(a) Encuentre la tasa de crecimiento relativo.
(b) Encuentre una expresión para el número de células después de t horas.
(c) Encuentre el número de células después de 8 horas.
(d) Encuentre la tasa de crecimiento después de 8 horas.
(e) ¿Cuándo llegará a 20,000 células la población?

3. Un cultivo de bacterias contiene inicialmente 100 células y crece a una rapidez proporcional a su tamaño. Después de una hora la población ha aumentado a 420.
(a) Encuentre una expresión para el número de bacterias después de t horas.
(b) Encuentre el número de bacterias después de 3 horas.
(c) Encuentre la rapidez de crecimiento después de 3 horas.
(d) ¿Cuándo llegará a 10,000 la población?

4. Un cultivo de bacterias crece con rapidez de crecimiento relativo constante. La cantidad de bacterias fue de 400 después de 2 horas y 25,600 después de 6 horas.
(a) ¿Cuál es la rapidez de crecimiento relativo? Exprese su respuesta como porcentaje.
(b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?
(c) Encuentre una expresión para el número de bacterias después de t horas.
(d) Encuentre el número de células después de 4.5 horas.
(e) Encuentre la rapidez de crecimiento después de 4.5 horas.
(f) ¿Cuándo llegará a 50,000 la población?

5. La tabla da estimaciones de la población mundial, en millones, de 1750 a 2000.
(a) Use el modelo exponencial y las cifras de población para 1750 y 1800 para predecir la población mundial en 1900 y 1950. Compare con las cifras reales.
(b) Use el modelo exponencial y las cifras de población para 1850 y 1900 para predecir la población mundial en 1950. Compare con la población real.
(c) Use el modelo exponencial y las cifras de población para 1900 y 1950 para predecir la población mundial en 2000. Compare con la población real y trate de explicar la discrepancia.

Año	Población	Año	Población
1750	790	1900	1650
1800	980	1950	2560
1850	1260	2000	6080

6. La tabla da la población de la India, en millones, para la segunda mitad del siglo XX.

Año	Población
1951	361
1961	439
1971	548
1981	683
1991	846
2001	1029

(a) Use el modelo exponencial y las cifras del censo para 1951 y 1961 para predecir la población en 2001. Compare con la cifra real.
(b) Use el modelo exponencial y las cifras del censo para 1961 y 1981 para predecir la población en 2001. Compare con la población real. A continuación use este modelo para predecir la población en los años 2010 y 2020.
(c) Grafique las dos funciones exponenciales de los incisos (a) y (b) junto con una gráfica de la población real. ¿Estos modelos son razonables?

7. Experimentos realizados demuestran que si la reacción química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

tiene lugar a 45°C, la rapidez de reacción del pentóxido de dinitrógeno es proporcional a su concentración como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(Vea el Ejemplo 4 en la Sección 3.8.)

(a) Encuentre una expresión para la concentración $[N_2O_5]$ después de t segundos si la concentración inicial es C.

(b) ¿Cuánto tardará la reacción en reducir la concentración de N_2O_5 al 90% de su valor original?

8. El estroncio 90 tiene una vida media de 28 días.

(a) Una muestra tiene una masa de 50 mg inicialmente. Encuentre una fórmula para la masa restante después de t días.

(b) Encuentre la masa restante después de 40 días.

(c) ¿Cuánto tarda la muestra en desintegrarse a una masa de 2 mg?

(d) Trace la gráfica de la función de masa.

9. La vida media del cesio 137 es 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 100 mg.

(a) Encuentre la masa que queda después de t años.

(b) ¿Cuánto de la muestra restará después de 100 años?

(c) ¿Después de cuánto tiempo sólo quedará 1 mg?

10. Una muestra de tritio 3 se desintegró a 94.5% de su cantidad original después de un año.

(a) ¿Cuál es la vida media del tritio 3?

(b) ¿Cuánto tarda la muestra en desintegrarse al 20% de su cantidad original?

11. Los científicos pueden determinar la edad de objetos antiguos valiéndose del método de *determinación de edad por radiocarbono*. El bombardeo de la atmósfera superior por rayos cósmicos convierte el nitrógeno a un isótopo radiactivo de carbono, ^{14}C, con una vida media de unos 5730 años. La vegetación absorbe dióxido de carbono a través de la atmósfera y la fauna asimila el ^{14}C a través de cadenas alimenticias. Cuando muere una planta o un animal, deja de sustituir su carbono y la cantidad de ^{14}C empieza a desintegrarse por desintegración radiactiva. Por tanto, el nivel de radiactividad debe también decaer exponencialmente.

Un fragmento de pergamino fue descubierto cuando tenía alrededor del 74% de radiactividad de ^{14}C del material plantado en la tierra. Estime la edad del pergamino.

12. Una curva pasa por el punto (0, 5) y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en todo punto P es el doble de la coordenada y de P. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

13. Un pavo asado se saca de un horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y es colocado en una mesa en un cuarto donde la temperatura es 75°F.

(a) Si la temperatura del pavo es 150°F después de media hora, ¿cuál es la temperatura después de 45 minutos?

(b) ¿Cuándo se habrá enfriado el pavo a 100°F?

14. En la investigación de un asesinato, la temperatura del cuerpo era de 32.5°C a la 1:30 p.m. y 30.3°C una hora después. La temperatura normal del cuerpo es 37.0°C y la temperatura del entorno era de 20.0°C. ¿Cuándo tuvo lugar el crimen?

15. Cuando una bebida fría se saca de un refrigerador, su temperatura es de 5°C. Después de 25 minutos en un cuarto a 20°C su temperatura ha aumentado a 10°C.

(a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida después de 50 minutos?

(b) ¿Cuándo será de 15°C su temperatura?

16. Una taza de café recién preparado tiene temperatura de 95°C en un cuarto a 20°C. Cuando su temperatura es de 70°C, se está enfriando a razón de 1°C por minuto. ¿Cuándo ocurre esto?

17. La rapidez de cambio de la presión atmosférica P con respecto a la altitud h es proporcional a P, siempre que la temperatura sea constante. A 15°C la presión es 101.3 kPa al nivel del mar y 87.14 kPa a $h = 1000$ metros.

(a) ¿Cuál es la presión a una altitud de 3000 metros?

(b) ¿Cuál es la presión en la cima del Monte McKinley, a una altitud de 6187 metros?

18. (a) Si \$1000 se prestan al 8% de interés, encuentre las cantidades adeudadas al final de 3 años si el interés se capitaliza a plazo (i) anual, (ii) trimestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) diario, (vi) por hora y (vii) continuamente.

(b) Suponga que \$1000 se prestan y el interés se capitaliza continuamente. Si $A(t)$ es la cantidad adeudada después de t años, donde $0 \leqslant t \leqslant 3$, grafique $A(t)$ para las tasas de interés de 6%, 8% y 10% en una pantalla común.

19. (a) Si \$3000 se invierten al 5% de interés, encuentre el valor de la inversión al término de 5 años si el interés se capitaliza a plazo (i) anual, (ii) semestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) diario y (vi) continuamente.

(b) Si $A(t)$ es la cantidad de la inversión en el tiempo t para el caso de capitalización continua, escriba una ecuación diferencial y una condición inicial satisfecha por $A(t)$.

20. (a) ¿Cuánto tiempo tomará una inversión en duplicarse en valor si la tasa de interés es 6% capitalizado continuamente?

(b) ¿Cuál es la tasa de interés anual equivalente?

21. Considere una población $P = P(t)$ con tasas relativas y constantes α y β, de natalidad y mortalidad, respectivamente, y una tasa m de emigración constante donde α, β, y m son constantes positivas. Suponga que $\alpha > \beta$. Entonces la rapidez de cambio de la población en el tiempo t está modelada por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{donde } k = \alpha - \beta$$

(a) Encuentre la solución de esta ecuación que satisfaga la condición inicial $P(0) = P_0$.

(b) ¿Qué condición en m llevará a una expansión exponencial de la población?

(c) ¿Qué condición en m resultará en una población constante? ¿Un descenso de población?

(d) En 1847, la población de Irlanda era alrededor de 8 millones y la diferencia entre las tasas relativas de natalidad y mortalidad era de 1.6% de la población. Por la hambruna debida a malas cosechas de papas entre las décadas de 1840 y 1850, unos 210,000 habitantes por año emigraron de Irlanda. ¿La población estaba aumentando o disminuyendo en ese tiempo?

22. Sea c un número positivo. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

donde k es una constante positiva, se denomina *ecuación del día del juicio* porque el exponente de la expresión ky^{1+c} es mayor que el exponente 1 para crecimiento natural.

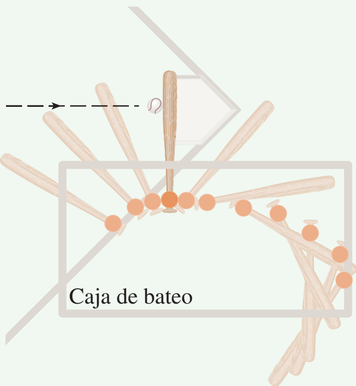
(a) Determine la solución que satisfaga la condición inicial $y(0) = y_0$.

(b) Demuestre que hay un tiempo finito $t = T$ (día del juicio) tal que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.

(c) Una raza de conejos especialmente prolífica tiene el término de crecimiento de $ky^{1.01}$. Si 2 de estos conejos se reproducen inicialmente y la conejera tiene 16 conejos a los tres meses, entonces ¿cuándo es el día del juicio?

PROYECTO DE APLICACIÓN — Cálculo y beisbol

En este proyecto exploramos tres de las muchas aplicaciones del cálculo al beisbol. Las interacciones físicas del juego, en especial el choque entre la pelota y el bate, son muy complejas y sus modelos se estudian en detalle en un libro de Robert Adair, *The Physics of Baseball*, 3d ed. (Nueva York, 2002).



Vista superior de la posición de un bate de beisbol, mostrada cada quinto de segundo durante un swing típico. (Adaptado de *The Physics of Baseball*)

1. Puede sorprender enterarse que el choque entre la pelota y el bate dure sólo una milésima de segundo. Aquí calculamos la fuerza promedio sobre el bate durante este choque al calcular primero el cambio en la cantidad de movimiento de la pelota.

La *cantidad de movimiento* p de un objeto es el producto de su masa m y su velocidad v, es decir, $p = mv$. Suponga que un objeto, que se mueve a lo largo de una recta, es sometido a una fuerza $F = F(t)$ que es una función continua del tiempo.

(a) Demuestre que el cambio en la cantidad de movimiento en un intervalo $[t_0, t_1]$ es igual a la integral de F de t_0 a t_1, esto es, demuestre que

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\, dt$$

Esta integral se denomina *impulso* de la fuerza en el intervalo.

(b) Un lanzador tira una bola rápida de 90 millas/h a un bateador, que conecta una línea directamente hacia el *pitcher*. La pelota está en contacto con el bate durante 0.001 s y pierde contacto con el bate a una velocidad de 110 millas/h. Una pelota de beisbol pesa 5 onzas y, en unidades convencionales en Estados Unidos, su masa se mide en slugs: $m = w/g$ donde $g = 32 \text{ ft/s}^2$.

(i) Encuentre el cambio en la cantidad de movimiento de la pelota.

(ii) Encuentre la fuerza promedio sobre el bate.

2. En este problema calculamos el trabajo necesario para que un *pitcher* lance una bola rápida a 90 millas/h considerando primero la energía cinética.

La *energía cinética* K de un objeto de masa m y velocidad v está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$. Suponga que un objeto de masa m, que se mueve en línea recta, es sometido a una fuerza $F = F(s)$ que depende de su posición s. De acuerdo con la Segunda Ley de Newton

$$F(s) = ma = m\frac{dv}{dt}$$

donde a y v denotan la aceleración y velocidad del objeto.

(a) Demuestre que el trabajo realizado al mover el objeto de una posición s_0 a una posición s_1 es igual al cambio en la energía cinética del objeto; esto es, demuestre que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\, ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

donde $v_0 = v(s_0)$ y $v_1 = v(s_1)$ son las velocidades del objeto en las posiciones s_0 y s_1.
Sugerencia: Por la Regla de la Cadena,

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

(b) ¿Cuántas libras-pie de trabajo son necesarias para lanzar una pelota de beisbol a una rapidez de 90 millas/h?

3. (a) Un "jardinero" atrapa una pelota a 280 ft de la placa del *home* y la tira directamente al receptor con una rapidez inicial de 100 ft/s. Suponga que la velocidad $v(t)$ de la pelota después de t segundos satisface la ecuación diferencial $dv/dt = -\frac{1}{10}v$ debido a la resistencia del aire. ¿Cuánto tarda la pelota en llegar a la placa del *home*? (Haga caso omiso de cualquier movimiento vertical de la pelota.)

(b) El *manager* del equipo se pregunta si la pelota llegará a la placa más pronto si un jugador del cuadro hace un tiro de relevo. El parador en corto puede colocarse directamente entre el jardinero y la placa del *home*, atrapar la pelota lanzada por el jardinero, girar y lanzar la pelota al receptor con una velocidad inicial de 105 ft/s. El *manager* mide el tiempo de relevo del parador en corto (atrapar, girar, lanzar) y encuentra que es de medio segundo. ¿A qué distancia del *home* debe colocarse el parador en corto para reducir al mínimo el tiempo total para que la pelota llegue al *home*? ¿El *manager* debe preferir un tiro directo o uno de relevo? ¿Qué pasa si el parador en corto puede tirar la pelota a 115 ft/s?

(c) ¿Para qué velocidad de tiro del parador en corto tardará el tiro de relevo el mismo tiempo que un tiro directo?

7.5 La ecuación logística

En esta sección estudiamos en detalle un modelo para crecimiento poblacional, el modelo logístico, que es más refinado que el crecimiento exponencial. Al hacerlo así usamos todas las herramientas a nuestra disposición: campos de dirección y el método de Euler de la Sección 7.2 y la solución explícita de ecuaciones diferenciales separables de la Sección 7.3. En los ejercicios investigamos otros posibles modelos para crecimiento poblacional, algunos de los cuales toman en cuenta cosechas y crecimiento estacional.

El modelo logístico

Como ya vimos en la Sección 7.1, la población a veces aumenta en forma exponencial en sus etapas tempranas pero se nivela finalmente y se aproxima a su capacidad de carga debido a recursos limitados. Si $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, suponemos que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{si } P \text{ es pequeña}$$

Esto dice que la rapidez de crecimiento es inicialmente cercana a ser proporcional al tamaño. En otras palabras, la rapidez de crecimiento relativo es casi constante cuando la población es pequeña. Pero también deseamos reflejar el dato de que la rapidez de crecimiento relativo disminuye cuando la población P aumenta y se hace negativa si P excede de su **capacidad de carga** M, la máxima población que el entorno es capaz de sostener a largo plazo. La expresión más sencilla para la rapidez de crecimiento relativo que incorpora estas suposiciones es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Si multiplicamos por P, obtenemos el modelo para crecimiento poblacional conocido como la **ecuación diferencial logística**:

1 $$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)}$$

Nótese de la Ecuación 1 que si P es pequeña en comparación con M, entonces P/M es cercana a 0 y por tanto $dP/dt \approx kP$. Sin embargo, si $P \to M$ (la población se aproxima a su capacidad de carga), entonces $P/M \to 1$, así que $dP/dt \to 0$. Podemos deducir información acerca de si las soluciones aumentan o disminuyen directamente de la Ecuación 1. Si la población P está entre 0 y M, entonces el lado derecho de la ecuación es positivo, de modo que $dP/dt > 0$ y la población aumenta. Pero si la población excede de la capacidad de carga ($P > M$), entonces $1 - P/M$ es negativa, de modo que $dP/dt < 0$ y la población disminuye.

Campos direccionales

Empecemos nuestro análisis más detallado de la ecuación diferencial logística estudiando un campo direccionales.

V EJEMPLO 1 Lo que nos dice un campo direccional acerca de soluciones de la ecuación logística Dibuje un campo direccional para la ecuación logística con $k = 0.08$ y capacidad de carga $M = 1000$. ¿Qué se puede deducir acerca de las soluciones?

SOLUCIÓN En este caso la ecuación diferencial logística es

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

Un campo de dirección para esta ecuación se muestra en la Figura 1. Mostramos sólo el primer cuadrante porque las poblaciones negativas no tienen significado y estamos interesados sólo en lo que ocurre después de $t = 0$.

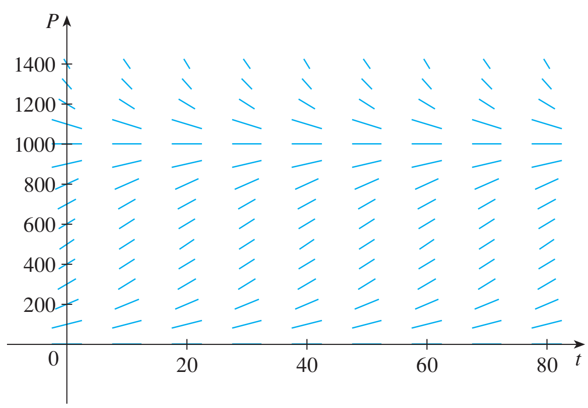


FIGURA 1
Campo direccional para la ecuación logística del Ejemplo 1

La ecuación logística es autónoma (dP/dt depende sólo de P, no de t), de modo que las pendientes son las mismas a lo largo de cualquier recta horizontal. Como es de esperarse, las pendientes son positivas para $0 < P < 1000$ y negativas para $P > 1000$.

Las pendientes son pequeñas cuando P es cercana a 0 o 1000 (la capacidad de carga). Nótese que las soluciones se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = 1000$.

En la Figura 2 usamos el campo direccional para trazar curvas solución con poblaciones iniciales $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ y $P(0) = 1300$. Nótese que las curvas solución que se inician debajo de $P = 1000$ son crecientes y las que se inician arriba de $P = 1000$ son decrecientes. Las pendientes son máximas cuando $P \approx 500$ y por tanto las curvas solución que se inician debajo de $P = 1000$ tienen puntos de inflexión cuando $P \approx 500$. De hecho podemos demostrar que todas las curvas solución que se inician debajo de $P = 500$ tienen un punto de inflexión cuando P es exactamente 500. (Vea el Ejercicio 11.)

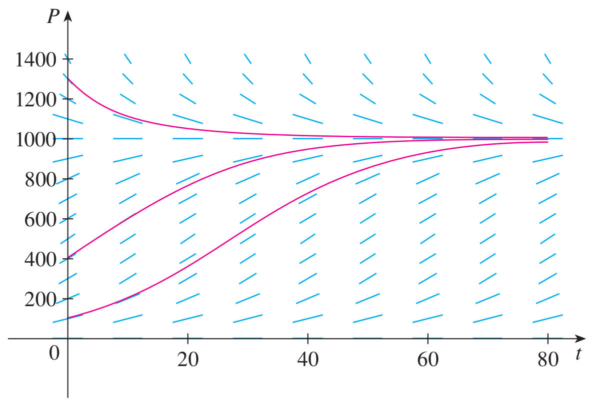


FIGURA 2
Curvas solución para la ecuación logística del Ejemplo 1

Método de Euler

A continuación usemos el método de Euler para obtener estimaciones numéricas para soluciones de la ecuación diferencial logística en tiempos específicos.

V EJEMPLO 2 Use el método de Euler con tamaños de escalón 20, 10, 5, 1 y 0.1 para estimar los tamaños poblacionales $P(40)$ y $P(80)$, donde P es la solución del problema del valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100$$

SOLUCIÓN Con tamaño de escalón $h = 20$, $t_0 = 0$, $P_0 = 100$ y

$$F(t, P) = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

obtenemos, usando la notación de la Sección 7.2,

$$t = 20: \qquad P_1 = 100 + 20F(0, 100) = 244$$

$$t = 40: \qquad P_2 = 244 + 20F(20, 244) \approx 539.14$$

$$t = 60: \qquad P_3 = 539.14 + 20F(40, 539.14) \approx 936.69$$

$$t = 80: \qquad P_4 = 936.69 + 20F(60, 936.69) \approx 1031.57$$

Entonces nuestras estimaciones para los tamaños poblacionales en los tiempos $t = 40$ y $t = 80$ son

$$P(40) \approx 539 \qquad P(80) \approx 1032$$

Para tamaños de escalón más pequeños necesitamos programar una calculadora o computadora. La tabla siguiente da los resultados.

Tamaño de escalón	Estimación de Euler de $P(40)$	Estima de Euler de $P(80)$
20	539	1032
10	647	997
5	695	991
1	725	986
0.1	731	985

La Figura 3 muestra una gráfica de las aproximaciones de Euler con tamaños de escalón $h = 10$ y $h = 1$. Vemos que la aproximación de Euler con $h = 1$ se asemeja mucho a la curva solución baja que trazamos usando un campo direccional en la Figura 2.

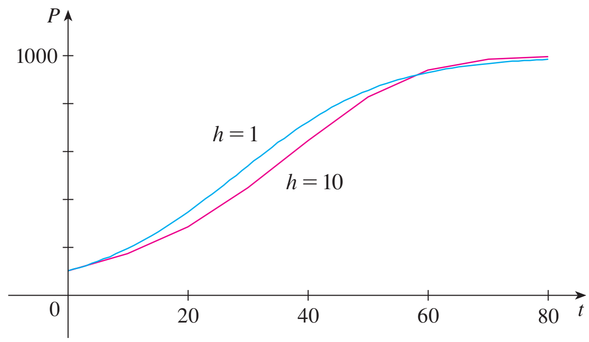


FIGURA 3
Aproximaciones de Euler de la curva de solución del Ejemplo 2

La solución analítica

La ecuación logística (1) es separable y por tanto podemos resolverla explícitamente usando el método de la Sección 7.3. Como

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

tenemos

2 $$\int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k\,dt$$

Para evaluar la integral del lado izquierdo, escribimos

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

Usando fracciones parciales (vea la Sección 5.7), obtenemos

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$

Esto hace posible que reescribamos la Ecuación 2:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P} \right) dP = \int k\, dt$$

$$\ln |P| - \ln |M - P| = kt + C$$

$$\ln \left| \frac{M - P}{P} \right| = -kt - C$$

$$\left| \frac{M - P}{P} \right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

3 $$\frac{M - P}{P} = Ae^{-kt}$$

donde $A = \pm e^{-C}$. Al despejar P de la Ecuación 3 tendremos

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

de modo que
$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos el valor de A al hacer $t = 0$ en la Ecuación 3. Si $t = 0$, entonces $P = P_0$ (la población inicial), de manera que

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Entonces la solución de la ecuación logística es

4 $$\boxed{P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \qquad \text{donde } A = \frac{M - P_0}{P_0}}$$

Usando la expresión para $P(t)$ en la Ecuación 4, vemos que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = M$$

que es de esperarse.

EJEMPLO 3 **Una solución explícita de la ecuación logística** Escriba la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y úsela para hallar los tamaños poblacionales $P(40)$ y $P(80)$. ¿En qué tiempo la población llega a 900?

SOLUCIÓN La ecuación diferencial es una ecuación logística con $k = 0.08$, capacidad de carga $M = 1000$ y población inicial $P_0 = 100$. Por tanto, la Ecuación 4 da la población en el tiempo t como

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-0.08t}} \qquad \text{donde } A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$$

Entonces
$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

Por tanto, los tamaños poblacionales cuando $t = 40$ y 80 son

Compare estos valores con las estimaciones de Euler del Ejemplo 2:
$P(40) \approx 731 \qquad P(80) \approx 985$

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-3.2}} \approx 731.6 \qquad P(80) = \frac{1000}{1 + 9e^{-6.4}} \approx 985.3$$

La población llega a 900 cuando

$$\frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900$$

Al despejar t de esta ecuación tendremos

$$1 + 9e^{-0.08t} = \tfrac{10}{9}$$

$$e^{-0.08t} = \tfrac{1}{81}$$

$$-0.08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0.08} \approx 54.9$$

Compare la curva solución de la Figura 4 con la curva solución más baja que trazamos del campo direccional en la Figura 2.

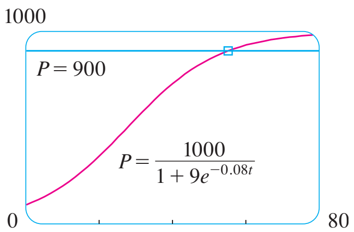


FIGURA 4

Por tanto, la población llega a 900 cuando t es aproximadamente 55. Como comprobación de nuestro trabajo, graficamos la curva de población en la Figura 4 y observamos en dónde cruza la recta $P = 900$. El cursor indica que $t \approx 55$.

Comparación de los modelos de crecimiento natural y logístico

En la década de 1930 el biólogo G. F. Gause realizó un experimento con el protozoario *Paramecium* y utilizó una ecuación logística para modelar sus datos. La tabla siguiente da la cuenta diaria que él obtuvo de la población de protozoarios. Calculó la tasa de crecimiento relativo inicial como 0.7944 y la capacidad de carga como 64.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

V EJEMPLO 4 Encuentre los modelos exponencial y logístico para los datos de Gause. Compare los valores pronosticados contra los valores observados y comente sobre el ajuste.

SOLUCIÓN Dada la tasa de crecimiento relativo $k = 0.7944$ y la población inicial $P_0 = 2$, el modelo exponencial es

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0.7944t}$$

Gause empleó el mismo valor de k para su modelo logístico. [Esto es razonable porque $P_0 = 2$ es pequeña en comparación con la capacidad de carga ($M = 64$). La ecuación

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

muestra que el valor de k para el modelo logístico es muy cercano al valor del modelo exponencial.]

Entonces la solución de la ecuación logística de la Ecuación 4 da

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0.7944t}}$$

donde $$A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Entonces $$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

Usamos estas ecuaciones para calcular los valores pronosticados (redondeados al entero más cercano) y compararlos en la tabla siguiente.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	. . .										

Observamos de la tabla y de la gráfica de la Figura 5 que para los primeros tres o cuatro días el modelo exponencial da resultados comparables con los del más refinado modelo logístico. Para $t \geqslant 5$, no obstante, el modelo exponencial es sumamente impreciso, pero el modelo logístico se ajusta a las observaciones razonablemente bien.

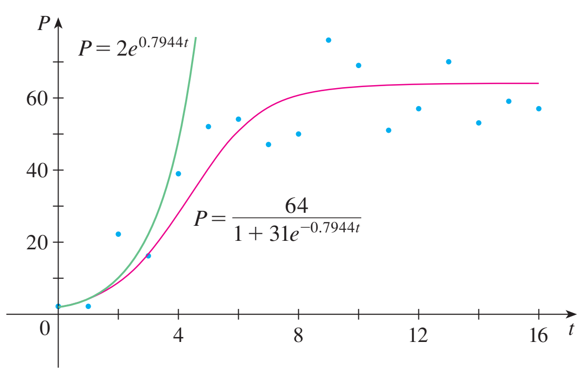


FIGURA 5
Modelos exponencial y logístico para los datos del *Paramecium*

Muchos países que en otras épocas experimentaban crecimiento exponencial están encontrando ahora que sus tasas de crecimiento poblacional están bajando y el modelo logístico da un mejor modelo.

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9847	1992	10,036
1982	9856	1994	10,109
1984	9855	1996	10,152
1986	9862	1998	10,175
1988	9884	2000	10,186
1990	9962		

La tabla del margen muestra valores de $B(t)$ a mitad de año, la población de Bélgica, en miles, en el tiempo t, de 1980 a 2000. La Figura 6 muestra estos puntos de datos, junto con una función logística desplazada obtenida de una calculadora con capacidad para ajustar una función logística a estos puntos por regresión. Vemos que el modelo logístico da un muy buen ajuste.

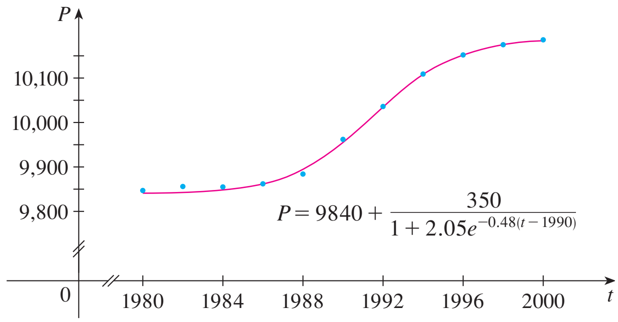


FIGURA 6
Modelo logístico para la población de Bélgica

Otros modelos para crecimiento poblacional

La Ley de Crecimiento Natural y la ecuación diferencial logística no son las únicas ecuaciones que han sido propuestas para modelar el crecimiento poblacional. En el Ejercicio 18 vemos la función de crecimiento de Gompertz y en los Ejercicios 19 y 20 investigamos modelos de crecimiento estacional.

Dos de los otros modelos son modificaciones del modelo logístico. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

se ha empleado para modelar poblaciones que están sujetas a "cosecha" de un tipo u otro. (Considere una población de peces capturados a un ritmo constante.) Esta ecuación se explora en los Ejercicios 15 y 16.

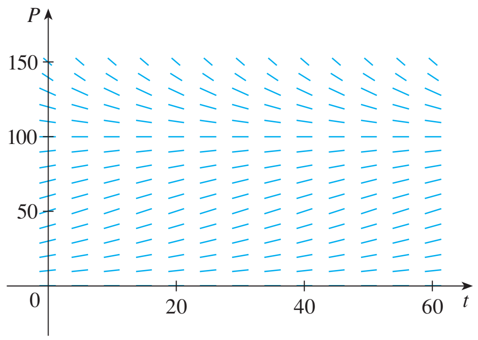
Para algunas especies hay un nivel mínimo poblacional m abajo del cual la especie tiende a extinguirse. (Los adultos pueden no ser capaces de hallar parejas apropiadas.) Estas poblaciones han sido modeladas por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

donde el factor extra, $1 - m/P$, toma en cuenta las consecuencias de una población escasa (vea el Ejercicio 17).

7.5 Ejercicios

1. Suponga que una población se desarrolla de acuerdo con la ecuación logística
$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 0.0005P^2$$
donde t se mide en semanas.
(a) ¿Cuál es la capacidad de carga? ¿Cuál es el valor de k?
(b) Se ilustra un campo de dirección para esta ecuación. ¿Dónde están cerca de 0 las pendientes? ¿Dónde son máximas? ¿Cuáles soluciones son crecientes? ¿Cuáles soluciones son decrecientes?



(c) Use el campo direccinal para dibujar soluciones para poblaciones iniciales de 20, 40, 60, 80, 120 y 140. ¿Qué tienen en común estas soluciones? ¿Cómo difieren? ¿Cuáles soluciones tienen puntos de inflexión? ¿En qué niveles de población se presentan?
(d) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? ¿Cómo están relacionadas las otras soluciones a estas soluciones?

2. Suponga que una población crece de acuerdo a un modelo logístico con capacidad de carga 6000 y $k = 0.0015$ por año.
(a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos.
(b) Dibuje un campo de dirección (ya sea manualmente o con un sistema computarizado de álgebra). ¿Qué le dice acerca de las curvas de solución?
(c) Use el campo direccional para dibujar las curvas solución para poblaciones iniciales de 1000, 2000, 4000 y 8000. ¿Qué se puede decir acerca de la concavidad de estas curvas? ¿Cuál es la importancia de los puntos de inflexión?
(d) Programe una calculadora o computadora para usar el método de Euler con tamaño de escalón $h = 1$ para estimar la población después de 50 años si la población inicial es 1000.
(e) Si la población inicial es 1000, escriba una fórmula para la población después de t años. Úsela para hallar la población después de 50 años y compare con su estimación del inciso (d).
(f) Grafique la solución del inciso (e) y compare con la curva de solución trazada en el inciso (c).

3. La granja piscícola Pacific ha sido modelada por la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$
donde $y(t)$ es la biomasa (la masa total de los miembros de la población) en kilogramos en el tiempo t (medido en años), la capacidad de carga se estima en $M = 8 \times 10^7$ kg y $k = 0.71$ por año.
(a) Si $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, encuentre la biomasa un año después.
(b) ¿Cuánto tardará la biomasa en llegar a 4×10^7 kg?

4. Suponga que una población $P(t)$ satisface
$$\frac{dP}{dt} = 0.4P - 0.001P^2 \qquad P(0) = 50$$
donde t se mide en años.
(a) ¿Cuál es la capacidad de carga?
(b) ¿Cuál es $P'(0)$?
(c) ¿Cuándo llegará la población a 50% de la capacidad de carga?

5. Suponga que una población crece de acuerdo a un modelo logístico con población inicial de 1000 y capacidad de carga de 10,000. Si la población crece a 2500 después de un año, ¿cuál será la población después de otros tres años?

6. La tabla siguiente da el número de células de levadura en un nuevo cultivo de laboratorio.

Tiempo (horas)	Células levadura	Tiempo (horas)	Células levadura
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

(a) Grafique los datos y use la gráfica para estimar la capacidad de carga para la población de levadura.
(b) Use los datos para estimar la rapidez de crecimiento relativo inicial.
(c) Encuentre un modelo exponencial y un modelo logístico para estos datos.
(d) Compare los valores pronosticados contra los valores observados, tanto en una tabla como con gráficas. Comente sobre lo bien que ajusten estos modelos a los datos.
(e) Use su modelo logístico para estimar el número de células de levadura después de 7 horas.

7. La población mundial era de unos 5300 millones de habitantes en 1990. Las tasas de natalidad en la década de 1990 eran de 35 a 40 millones por año y las de mortalidad eran de 15 a 20 millones por año. Supongamos que la capacidad de carga para la población mundial es de 100 mil millones.
(a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos. (Como la población inicial es pequeña en comparación con la capacidad de carga, se puede

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

tomar k como una estimación de la tasa de crecimiento relativo inicial.)

(b) Use el modelo logístico para estimar la población mundial del año 2000 y compare con la población real de 6100 millones.

(c) Use el modelo logístico para predecir la población mundial en los años 2100 y 2500.

(d) ¿Cuáles son sus predicciones si la capacidad de carga es de 50 mil millones?

8. (a) Haga un cálculo sobre la capacidad de carga para la población de Estados Unidos. Úsela junto con el hecho de que la población era de 250 millones en 1990, para formular un modelo logístico para la población de Estados Unidos.

(b) Determine el valor de k en su modelo usando el hecho de que la población en 2000 era de 275 millones.

(c) Use su modelo para predecir la población de Estados Unidos en los años 2100 y 2200.

(d) Use su modelo para predecir el año en que la población de Estados Unidos rebasará los 350 millones.

9. Un modelo para la dispersión de un rumor es que la rapidez de dispersión es proporcional al producto de la fracción y, de la población que ha escuchado el rumor, y la fracción que no lo ha escuchado.

(a) Escriba una ecuación diferencial que sea satisfecha por y.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) Una pequeña población tiene 1000 habitantes. A las 8:00 a.m., 80 personas han escuchado un rumor. Hacia el mediodía, la mitad de la población lo ha escuchado. ¿A qué hora lo habrá escuchado el 90% de la población?

10. Unos biólogos poblaron un lago con 400 peces y estimaron que la capacidad de carga (la población máxima para los peces de esa especie en ese lago) era de 10,000. El número de peces se triplicó en el primer año.

(a) Suponiendo que el tamaño de la población de peces satisface la ecuación logística, encuentre una expresión para el tamaño de la población después de t años.

(b) ¿Cuánto tardará la población en aumentar a 5000?

11. (a) Demuestre que si P satisface la ecuación logística (1), entonces

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{2P}{M}\right)$$

(b) Deduzca que una población crece con máxima rapidez cuando llega a la mitad de su capacidad de carga.

12. Para un valor fijo de M (por ejemplo $M = 10$), la familia de funciones logísticas dada por la Ecuación 4 depende del valor inicial P_0 y de la constante de proporcionalidad k. Grafique varios miembros de esta familia. ¿Cómo cambia la gráfica cuando P_0 varía? ¿Cómo cambia cuando k varía?

13. La tabla da la población de Japón a mitad de año, en miles, de 1960 a 2005.

Año	Población	Año	Población
1960	94,092	1985	120,754
1965	98,883	1990	123,537
1970	104,345	1995	125,341
1975	111,573	2000	126,700
1980	116,807	2005	127,417

Use una calculadora de gráficas para ajustar tanto una función exponencial como una función logística para estos datos. Grafique los puntos de datos y ambas funciones, y comente sobre la precisión de los modelos. [*Sugerencia:* Reste 94,000 de cada una de las cifras de población. A continuación, después de obtener un modelo de su calculadora, sume 94,000 para obtener su modelo final. Podría ser útil escoger $t = 0$ para corresponder a 1960 o 1980.]

14. La tabla da la población de España a mitad de año, en miles, de 1955 a 2000.

Año	Población	Año	Población
1955	29,319	1980	37,488
1960	30,641	1985	38,535
1965	32,085	1990	39,351
1970	33,876	1995	39,750
1975	35,564	2000	40,016

Use una calculadora de gráficas para ajustar tanto una función exponencial como una función logística para estos datos. Grafique los puntos de datos y ambas funciones, y comente sobre la precisión de los modelos. [*Sugerencia*: Reste 29,000 de cada una de las cantidades de población. A continuación, después de obtener un modelo en su calculadora, sume 29,000 para obtener su modelo final. Podría ser útil escoger $t = 0$ para corresponder a 1955 o 1975.]

15. Modifiquemos la ecuación diferencial logística del Ejemplo 1 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - 15$$

(a) Suponga que $P(t)$ representa una población de peces en el tiempo t, donde t se mide en semanas. Explique el significado del término final de la ecuación (-15).

(b) Dibuje un campo de dirección para esta ecuación diferencial.

(c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

(d) Use el campo direccional para dibujar varias curvas de solución. Describa lo que ocurre a la población de peces para varias poblaciones iniciales.

CAS (e) Resuelva explícitamente esta ecuación diferencial, ya sea usando fracciones parciales o con un sistema computarizado de álgebra. Use las poblaciones iniciales 200 y 300. Grafique las soluciones y compare con sus trazos del inciso (d).

CAS **16.** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$

como modelo para una población de peces, donde t se mide en semanas y c es una constante.

(a) Use un CAS para dibujar campos de dirección para va-rios valores de c.

(b) De sus campos de dirección del inciso (a), determine el lector los valores de c para los cuales hay al menos una solución de equilibrio. ¿Para qué valores de c esta población de peces siempre desaparece?

(c) Use la ecuación diferencial para demostrar lo que descubrió gráficamente en el inciso (b).

(d) ¿Qué recomendaría para un límite a la captura semanal de esta población de peces?

17. Hay considerable evidencia para apoyar la teoría de que para algunas especies hay una población mínima m tal que la especie se extinguirá si el tamaño de la población cae por debajo de m. Esta condición se puede incorporar en la ecuación logística si se introduce el factor $(1 - m/P)$. Así, el modelo logístico modificado está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

(a) Use la ecuación diferencial para demostrar que cualquier solución es creciente si $m < P < M$ y decreciente si $0 < P < m$.

(b) Para el caso donde $k = 0.08$, $M = 1000$ y $m = 200$, dibuje un campo de dirección y úselo para trazar varias curvas de solución. Describa lo que ocurre a la población para varias poblaciones iniciales. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

(c) Resuelva explícitamente la ecuación diferencial, ya sea usando fracciones parciales o con un sistema computarizado de álgebra. Use la población inicial P_0.

(d) Use la solución del inciso (c) para demostrar que si $P_0 < m$, entonces la especie se extinguirá. [*Sugerencia*: Demuestre que el numerador de su expresión para $P(t)$ es 0 para algún valor de t.]

18. Otro modelo para una función de crecimiento para una población limitada está dado por la **función de Gompertz**, que es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c\ln\left(\frac{M}{P}\right)P$$

donde c es una constante y M es la capacidad de carga.

(a) Resuelva esta ecuación diferencial.

(b) Calcule $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

(c) Grafique la función de crecimiento de Gompertz para $M = 1000$, $P_0 = 100$ y $c = 0.05$, y compárela con la función logística del Ejemplo 3. ¿Cuáles son las similitudes? ¿Cuáles son las diferencias?

(d) Sabemos por el Ejercicio 11 que la función logística crece más rápido cuando $P = M/2$. Use la ecuación diferencial de Gompertz para demostrar que la función de Gompertz crece más rápido cuando $P = M/e$.

19. En un **modelo de crecimiento estacional**, una función periódica del tiempo se introduce para considerar variaciones estacionales en la rapidez de crecimiento. Estas variaciones podrían, por ejemplo, ser causadas por cambios estacionales en la disponibilidad de alimento.

(a) Encuentre la solución del modelo de crecimiento estacional

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

donde k, r y ϕ son constantes positivas.

(b) Al graficar la solución para diversos valores de k, r y ϕ, explique la forma en que los valores de k, r y ϕ afectan la solución. ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

20. Suponga que alteramos la ecuación diferencial del Ejercicio 19 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

(a) Resuelva esta ecuación diferencial con ayuda de una tabla de integrales o un sistema computarizado de álgebra (CAS).

(b) Grafique la solución para varios valores de k, r y ϕ. ¿Cómo afectan la solución los valores de k, r y ϕ? ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{t\to\infty} P(t)$ en este caso?

7.6 Sistemas depredador-presa

Hemos visto una variedad de modelos para el crecimiento de una especie individual que vive sola en un entorno. En esta sección consideramos modelos más realistas que toman en cuenta la interacción de dos especies en el mismo hábitat. Veremos que estos modelos toman la forma de un par de ecuaciones diferenciales enlazadas.

Primero consideramos la situación en la que una especie, llamada *presa*, tiene alimento en abundancia y la segunda especie, llamada *depredadores*, se alimenta de la presa. Ejemplos de presa y depredadores incluyen conejos y lobos en un bosque aislado, peces y tiburones, pulgones y mariquitas, así como bacterias y amibas. Nuestro modelo tendrá dos variables dependientes y ambas son funciones del tiempo. Hacemos que $R(t)$ sea el número de presas y $W(t)$ el número de depredadores en el tiempo t.

En ausencia de depredadores, el alimento en abundancia sostendría el crecimiento exponencial de la presa, es decir,

$$\frac{dR}{dt} = kR \qquad \text{donde } k \text{ es una constante positiva}$$

En ausencia de presa, suponemos que la población de depredadores disminuirá con rapidez proporcional a sí misma, es decir,

$$\frac{dW}{dt} = -rW \qquad \text{donde } r \text{ es una constante positiva}$$

Con ambas especies presentes, sin embargo, suponemos que la causa principal de muerte entre la presa es que es devorada por un depredador, y las tasas de nacimiento y supervivencia de los depredadores depende de su abasto de alimento, es decir, la presa. También suponemos que las dos especies se encuentran con una frecuencia que es proporcional a ambas poblaciones y es, por tanto, proporcional al producto RW. (Cuanto más haya de cualquiera de las especies, es probable que haya más encuentros.) Un sistema de dos ecuaciones diferenciales que incorpora estas suposiciones es como sigue:

W representa el depredador.
R representa la presa.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad\qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

donde k, r, a y b son constantes positivas. Nótese que el término $-aRW$ reduce la tasa de crecimiento natural de la presa y el término bRW aumenta la tasa de crecimiento natural de los depredadores.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra fueron propuestas como modelo, para explicar las variaciones en las poblaciones de tiburones y peces en el mar Adriático, por el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940).

Las ecuaciones (1) se conocen como **ecuaciones depredador-presa** o **ecuaciones de Lotka-Volterra**. Una **solución** de este sistema de ecuaciones es un par de funciones $R(t)$ y $W(t)$ que describe las poblaciones de presa y depredador como funciones del tiempo. Debido a que el sistema es acoplado (R y W se presentan en ambas ecuaciones), no podemos resolver una ecuación y luego la otra; tenemos que resolverlas de manera simultánea. Desafortunadamente, por lo general es imposible hallar fórmulas explícitas para R y W como funciones de t, pero podemos usar métodos gráficos para analizar las ecuaciones.`

V EJEMPLO 1 Suponga que las poblaciones de conejos y lobos están descritas por las ecuaciones de Lotka-Volterra (1) con $k = 0.08$, $a = 0.001$, $r = 0.02$ y $b = 0.00002$. El tiempo t se mide en meses.

(a) Encuentre las soluciones constantes (llamadas **soluciones de equilibrio**) e interprete la respuesta.
(b) Use el sistema de ecuaciones diferenciales para hallar una expresión para dW/dR.
(c) Dibuje un campo de dirección para la ecuación diferencial resultante en el plano RW. A continuación use ese campo de dirección para dibujar algunas curvas de solución.
(d) Suponga que, en algún punto en el tiempo, hay 1000 conejos y 40 lobos. Dibuje la curva de solución correspondiente y úsela para describir los cambios en ambos niveles de población.
(e) Use el inciso (d) para hacer dibujos de R y W como funciones de t.

SOLUCIÓN

(a) Con los valores dados de k, a, r y b, las ecuaciones de Lotka-Volterra se convierten en

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

R y W serán constantes si ambas derivadas son 0, es decir,

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$
$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

Una solución está dada por $R = 0$ y $W = 0$. (Esto tiene sentido: si no hay conejos ni lobos, las poblaciones ciertamente no van a aumentar.) La otra solución constante es

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80 \qquad R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$$

Por tanto, las poblaciones de equilibrio están formadas por 80 lobos y 1000 conejos. Esto significa que 1000 conejos son apenas suficientes para sostener una población constante de lobos de 80. No hay ni demasiados lobos (que resultaría en menos conejos) ni demasiado pocos lobos (que resultaría en más conejos).

(b) Usaríamos la Regla de la Cadena para eliminar t:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR}\frac{dR}{dt}$$

por tanto

$$\frac{dW}{dR} = \frac{\dfrac{dW}{dt}}{\dfrac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

(c) Si consideramos W como una función de R, tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Dibujamos el campo direccional para esta ecuación diferencial en la Figura 1 y lo usamos para dibujar varias curvas solución en la Figura 2. Si nos movemos a lo largo de una curva solución, observamos la forma en que cambia la relación entre R y W a medida que pasa el tiempo. Nótese que las curvas parecen estar cerradas en el sentido de que, si nos movemos a lo largo de la curva, siempre regresaremos al mismo punto. Nótese también que el punto (1000, 80) está dentro de todas las curvas solución. Ese punto se denomina *punto de equilibrio* porque corresponde a la solución de equilibrio $R = 1000$, $W = 80$.

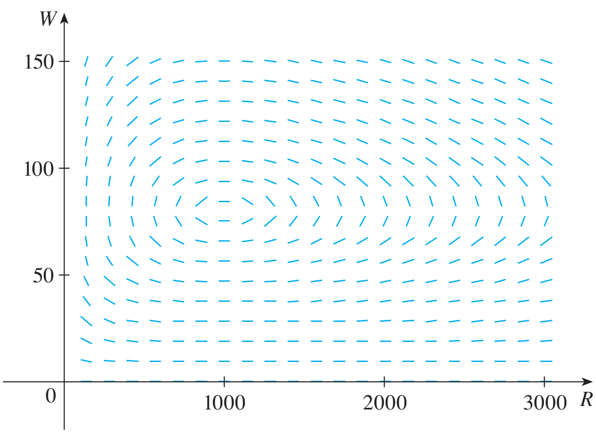


FIGURA 1 Campo direccional para el sistema depredador-presa

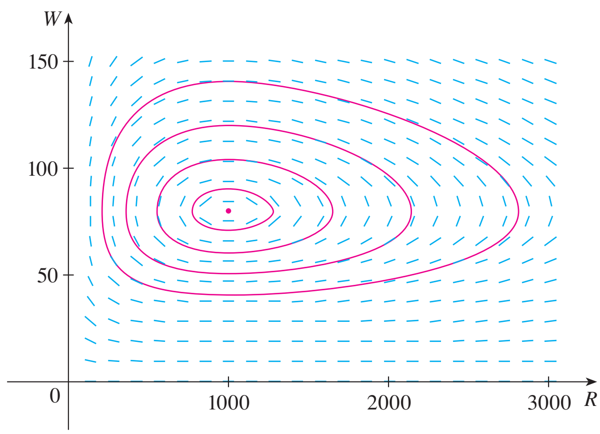


FIGURA 2 Imagen de fase del sistema

Cuando representamos soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales como en la Figura 2, nos referimos al plano RW como el **plano de fase**, y a las curvas solución se les da el nombre de **trayectorias de fase**. Entonces, una trayectoria de fase es una trayectoria trazada por soluciones (R, W) al transcurso del tiempo.

Una **imagen de fase** está formada por puntos de equilibrio y trayectorias de fase típicas, como se ve en la Figura 2.

(d) Empezar con 1000 conejos y 40 lobos corresponde a dibujar la curva solución que pase por el punto $P_0(1000, 40)$. La Figura 3 muestra esta trayectoria de fase sin el campo direccional. Empezando en el punto P_0 en el tiempo $t = 0$ y haciendo que t aumente, ¿nos movemos en contra o a favor del giro de las manecillas de un reloj alrededor de la trayectoria de fase? Si ponemos $R = 1000$ y $W = 40$ en la primera ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Como $dR/dt > 0$, concluimos que R es creciente en P_0 y por tanto nos movemos en contra del giro de las manecillas de un reloj alrededor de la trayectoria de fase.

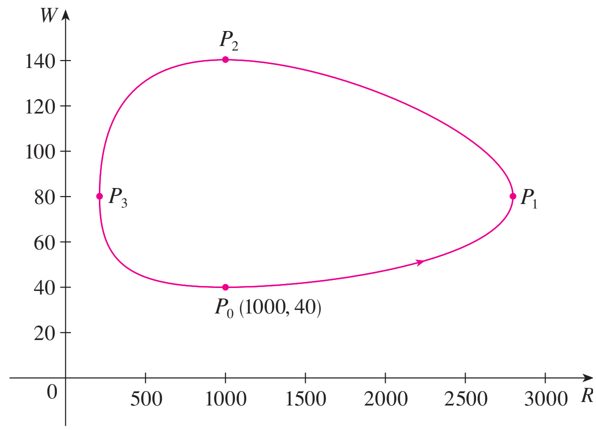


FIGURA 3
Trayectoria de fase que pasa por (1000, 40)

Vemos que en P_0 no hay suficientes lobos para mantener un equilibrio entre las poblaciones, por lo cual la población de conejos aumenta. Eso resulta en más lobos y finalmente hay tantos lobos que los conejos tienen un tiempo difícil para evitarlos. Entonces el número de conejos empieza a disminuir (en P_1, donde estimamos que R llega a su máxima población de unos 2800). Esto significa que en algún tiempo posterior la población de lobos empieza a bajar (en P_2, donde $R = 1000$ y $W \approx 140$). Pero esto beneficia a los conejos porque después su población empieza a aumentar (en P_3, donde $W = 80$ y $R \approx 210$). Como consecuencia, la población de lobos finalmente empieza a aumentar también. Esto ocurre cuando las poblaciones regresan a sus valores iniciales de $R = 1000$ y $W = 40$, y todo el ciclo se inicia de nuevo.

(e) De la descripción en el inciso (d) de cómo suben y bajan las poblaciones de conejos y lobos, podemos trazar las gráficas de $R(t)$ y $W(t)$. Suponga que los puntos P_1, P_2 y P_3 en la Figura 3 se alcanzan en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Entonces podemos trazar gráficas de R y W como en la Figura 4.

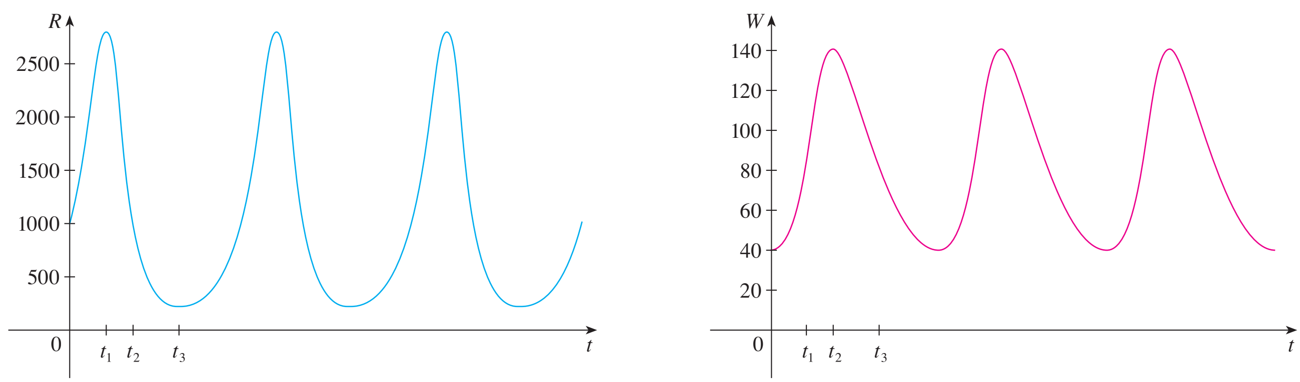


FIGURA 4 Gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo

TEC En el Module 7.6 se pueden cambiar los coeficientes de las ecuaciones de Lotka-Volterra, y observar los cambios resultantes en la trayectoria de fase y gráficas de las poblaciones de conejos y lobos.

Para facilitar la comparación de las gráficas, dibujamos éstas en los mismos ejes pero con diferentes escalas para R y W, como en la Figura 5. Nótese que los conejos alcanzan sus poblaciones máximas más o menos un cuarto de ciclo antes que los lobos.

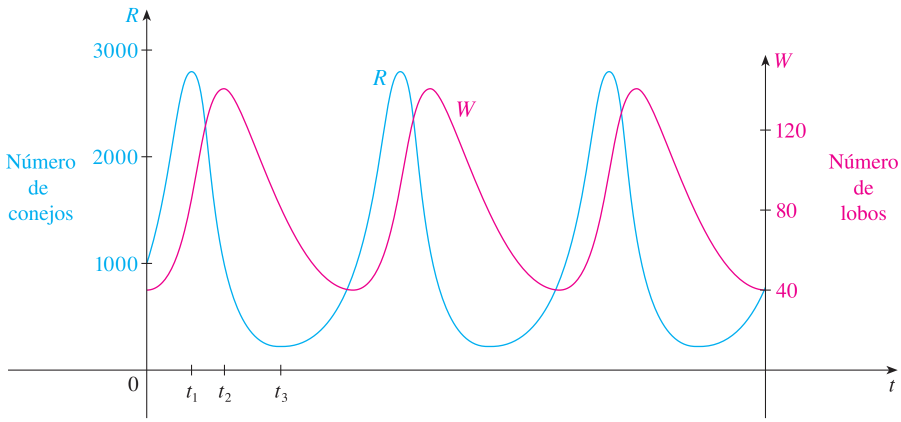


FIGURA 5
Comparación de poblaciones de conejos y lobos

Una parte importante del proceso de modelado, como se explica en la Sección 1.2, es interpretar nuestras conclusiones matemáticas como predicciones de la realidad y para probar las predicciones contra datos reales. La Hudson's Bay Company, que empezó a comerciar con pieles de animales en Canadá en 1670, ha conservado registros que datan desde la década de 1840. La figura 6 muestra gráficas del número de pieles de la liebre pata de raqueta y de su depredador, el lince de Canadá, comercializadas por la compañía durante un periodo de 90 años. Se puede ver que las oscilaciones acopladas de las poblaciones de liebres y linces pronosticadas por el modelo de Lotka-Volterra se presentan en la realidad y el periodo de estos ciclos es aproximadamente de 10 años.

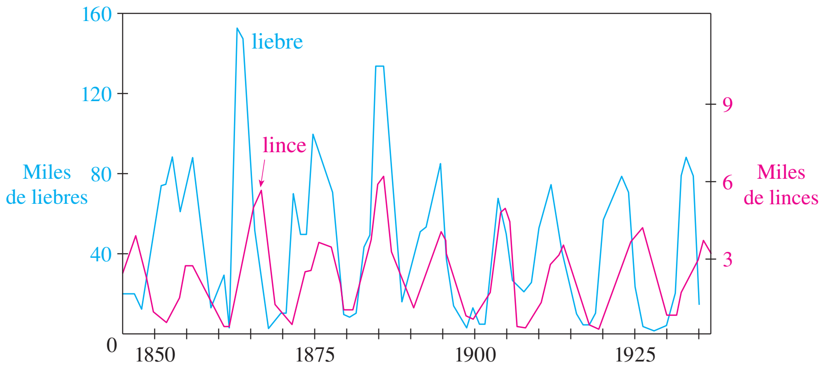


FIGURA 6
Abundancia relativa de liebres y linces, por registros de la Hudson's Bay Company

Aun cuando el modelo relativamente sencillo de Lotka-Volterra había tenido algún éxito para explicar y predecir poblaciones acopladas, se han propuesto modelos más refinados. Una forma de modificar las ecuaciones de Lotka-Volterra es suponer que, en ausencia de depredadores, la presa crece de acuerdo a un modelo logístico con capacidad de carga M. Entonces las ecuaciones de Lotka-Volterra (1) son sustituidas por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dR}{dt} = kR\left(1 - \frac{R}{M}\right) - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

Este modelo se investiga en los Ejercicios 11 y 12.

También se han propuesto modelos para describir y predecir niveles de población de dos o más especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para mutuo beneficio. Estos modelos se exploran en los Ejercicios 2-4.

7.6 Ejercicios

1. Para cada sistema depredador-presa, determine cuál de las variables, x o y, representa la población de presas y cuál representa la población de depredadores. ¿El crecimiento de la presa está restringido sólo por los depredadores o también por otros factores? ¿Los depredadores se alimentan sólo de la presa o tienen recursos alimenticios adicionales? Explique.

(a) $$\frac{dx}{dt} = -0.05x + 0.0001xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.1y - 0.005xy$$

(b) $$\frac{dx}{dt} = 0.2x - 0.0002x^2 - 0.006xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.015y + 0.00008xy$$

2. Cada sistema de ecuaciones diferenciales es un modelo para dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para mutuo beneficio (plantas en flor e insectos polinizadores, por ejemplo). Determine si cada sistema describe competencia o cooperación y explique por qué es un modelo razonable. (Pregúntese qué efecto tiene un aumento en una especie en el crecimiento de la otra.)

(a) $$\frac{dx}{dt} = 0.12x - 0.0006x^2 + 0.00001xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.08x + 0.00004xy$$

(b) $$\frac{dx}{dt} = 0.15x - 0.0002x^2 - 0.0006xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.00008y^2 - 0.0002xy$$

3. El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x - 0.004x^2 - 0.001xy$$

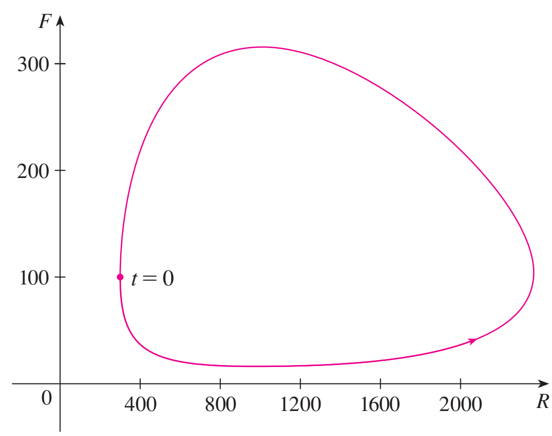
$$\frac{dy}{dt} = 0.4y - 0.001y^2 - 0.002xy$$

es un modelo para las poblaciones de dos especies.
(a) ¿El modelo describe cooperación, o competencia, o relación depredador-presa?
(b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.

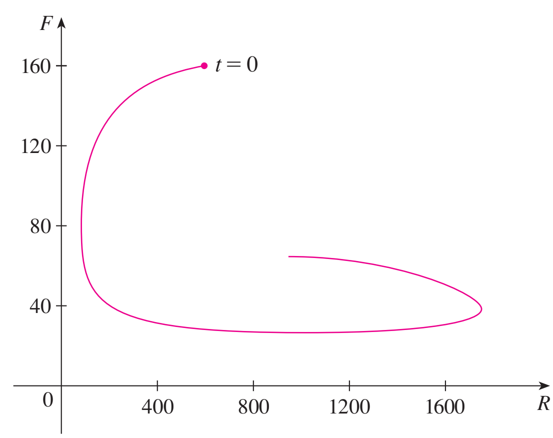
4. Moscas, ranas y cocodrilos coexisten en un entorno. Para sobrevivir, las ranas necesitan comer moscas y los cocodrilos necesitan comer ranas. En ausencia de ranas, la población de moscas crecerá exponencialmente y la población de cocodrilos caerá exponencialmente. En ausencia de cocodrilos y moscas, la población de ranas decaerá exponencialmente. Si $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$ representan las poblaciones de estas tres especies en el tiempo t, escriba un sistema de ecuaciones diferenciales como modelo para la evolución de ellas. Si las constantes en su ecuación son todas positivas, explique el lector por qué ha usado signos más o menos.

5–6 A continuación se muestra una trayectoria de fase para poblaciones de conejos (R) y de zorros (F).
(a) Describa cómo cambia cada población con el transcurso del tiempo.
(b) Use su descripción para hacer un dibujo aproximado de las gráficas de R y F como funciones del tiempo.

5.

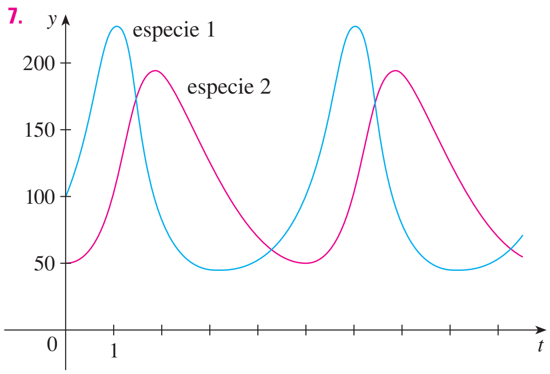


6.

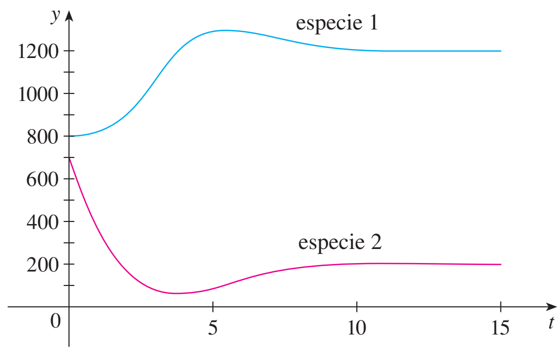


7–8 A continuación se muestran gráficas de poblaciones de dos especies. Úselas para dibujar la correspondiente trayectoria de fase.

7.



8.



9. En el Ejemplo 1(b) mostramos que las poblaciones de conejos y lobos satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Al resolver esta ecuación diferencial separable, demuestre que

$$\frac{R^{0.02}W^{0.08}}{e^{0.00002R}e^{0.001W}} = C$$

donde C es una constante.

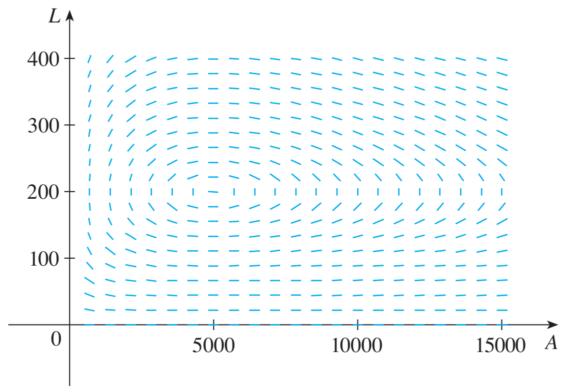
Es imposible despejar W de esta ecuación como función explícita de R (o viceversa). Si el estudiante tiene un sistema computarizado de álgebra que grafique curvas definidas de una manera implícita, use esta ecuación y su CAS para dibujar la curva de solución que pasa por el punto (1000, 40) y compare con la Figura 3.

10. Las poblaciones de pulgones y mariquitas están modeladas por las ecuaciones

$$\frac{dA}{dt} = 2A - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

(a) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.
(b) Encuentre una expresión para dL/dA.
(c) A continuación se ilustra el campo direccional para la ecuación diferencial del inciso (b). Úselo para trazar una imagen de fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fase?



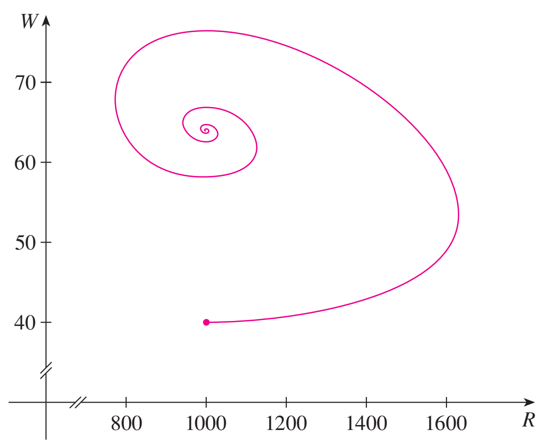
(d) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la correspondiente trayectoria de fase y úsela para describir la forma en que cambian ambas poblaciones.
(e) Use el inciso (d) para hacer dibujos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo están relacionadas las gráficas entre sí?

11. En el Ejemplo 1 usamos ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de conejos y lobos. Modifiquemos estas ecuaciones como sigue:

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

(a) De acuerdo con estas ecuaciones, ¿qué ocurre a la población de conejos en ausencia de lobos?
(b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio y explique su significado.
(c) La figura muestra la trayectoria de fase que empieza en el punto (1000, 40). Describa lo que finalmente ocurre a las poblaciones de conejos y lobos.



(d) Dibuje gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo.

CAS **12.** En el Ejercicio 10 modelamos poblaciones de pulgones y mariquitas con un sistema de Lotka-Volterra. Suponga que modificamos estas ecuaciones como sigue:

$$\frac{dA}{dt} = 2A(1 - 0.0001A) - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

(a) En ausencia de mariquitas, ¿qué predice el modelo acerca de los pulgones?
(b) Encuentre las soluciones de equilibrio.
(c) Encuentre una expresión para dL/dA.
(d) Use un sistema computarizado de álgebra para dibujar un campo de dirección para la ecuación diferencial del inciso (c). A continuación use el campo de dirección para dibujar una imagen de fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fase?
(e) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la correspondiente trayectoria de fase y úsela para describir la forma en que cambian ambas poblaciones.
(f) Use el inciso (e) para hacer dibujos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo están relacionadas las gráficas entre sí?

7 Repaso

Revisión de conceptos

1. (a) ¿Qué es una ecuación diferencial?
(b) ¿Qué es el orden de una ecuación diferencial?
(c) ¿Qué es una condición inicial?

2. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ con sólo mirar la ecuación diferencial?

3. ¿Qué es un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$?

4. Explique cómo funciona el método de Euler.

5. ¿Qué es una ecuación diferencial separable? ¿Cómo se resuelve?

6. (a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de crecimiento natural. ¿Qué dice en términos de rapidez de crecimiento relativo?
(b) ¿Bajo qué circunstancias es éste un modelo para crecimiento poblacional?
(c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

7. (a) Escriba la ecuación logística.
(b) ¿Bajo qué circunstancias es éste un modelo apropiado para crecimiento poblacional?

8. (a) Escriba ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de peces (F) y tiburones (S).
(b) ¿Qué dicen estas ecuaciones acerca de cada población en ausencia de la otra?

Preguntas de verdadero-falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué; si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = -1 - y^4$ son funciones decrecientes.

2. La función $f(x) = (\ln x)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.

3. La ecuación $y' = x + y$ es separable.

4. La ecuación $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ es separable.

5. Si y es la solución del problema del valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

entonces $\lim_{t \to \infty} y = 5$.

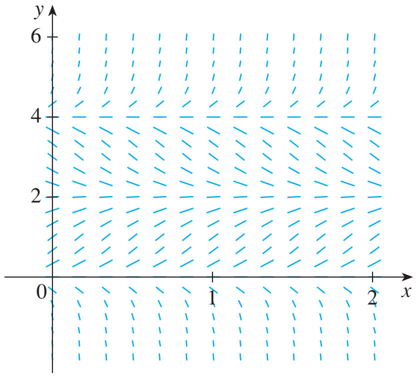
Ejercicios

1. (a) A continuación se ilustra un campo direccional para la ecuación $y' = y(y-2)(y-4)$. Trace las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(i) $y(0) = -0.3$ (ii) $y(0) = 1$

(iii) $y(0) = 3$ (iv) $y(0) = 4.3$

(b) Si la condición inicial es $y(0) = c$, ¿para qué valores de c es finito $\lim_{t\to\infty} y(t)$? ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?



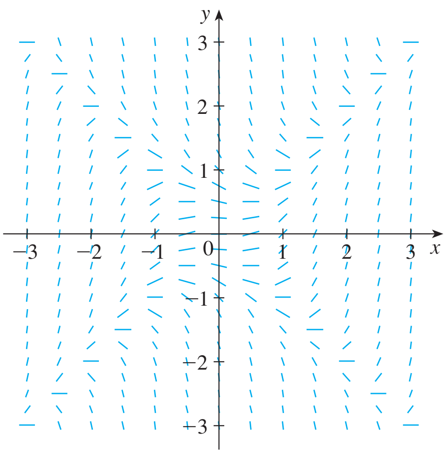
2. (a) Trace un campo de dirección para la ecuación diferencial $y' = x/y$. A continuación úselo para trazar las cuatro soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$ y $y(-2) = 1$.

(b) Compruebe su trabajo del inciso (a) al resolver la ecuación diferencial explícitamente. ¿Qué tipo de curva es cada una de las curvas solución?

3. (a) A continuación se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 - y^2$. Trace la solución del problema con valor inicial

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1$$

Use su gráfica para estimar el valor de $y(0.3)$.



(b) Use el método de Euler con tamaño de escalón 0.1 para estimar $y(0.3)$, donde $y(x)$ es la solución del problema del valor inicial del inciso (a). Compare con su estimación del inciso (a).

(c) ¿En qué líneas están ubicados los centros de los segmentos de recta horizontal del campo direccional del inciso (a)? ¿Qué ocurre cuando una curva solución cruza estas líneas?

4. (a) Use el método de Euler con tamaño de escalón 0.2 para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema del valor inicial

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

(b) Repita el inciso (a) con tamaño de escalón 0.1.

(c) Encuentre la solución exacta de la ecuación diferencial y compare el valor en 0.4 con las aproximaciones en los incisos (a) y (b).

5–6 Resuelva la ecuación diferencial.

5. $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$

7–8 Resuelva el problema con valor inicial.

7. $\dfrac{dr}{dt} + 2tr = r, \quad r(0) = 5$

8. $(1 + \cos x)y' = (1 + e^{-y})\operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0$

9–10 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas.

9. $y = ke^x$

10. $y = e^{kx}$

11. Un cultivo de bacterias contiene inicialmente 200 células y crece a una rapidez proporcional a su tamaño. Después de media hora la población ha aumentado a 360 células.

(a) Encuentre el número de bacterias después de t horas.

(b) Encuentre el número de bacterias después de 4 horas.

(c) Encuentre la rapidez de crecimiento después de 4 horas.

(d) ¿Cuándo llegará a 10,000 la población?

12. El cobalto 60 tiene una vida media de 5.24 años.

(a) Encuentre la masa que quede de una muestra de 100 mg después de 20 años.

(b) ¿Cuánto tardará la masa en desintegrarse a 1 mg?

13. Sea $C(t)$ la concentración de una medicina en el torrente sanguíneo. Conforme el cuerpo elimine la medicina, $C(t)$ disminuye a una rapidez que es proporcional a la cantidad de la medicina que esté presente en ese tiempo. Entonces $C'(t) = -kC(t)$, donde k es un número positivo llamado *constante de eliminación* de la medicina.

(a) Si C_0 es la concentración en el tiempo $t = 0$, encuentre la concentración en el tiempo t.

(b) Si el cuerpo elimina la mitad de la medicina en 30 horas, ¿cuánto tardará en eliminar 90% de la medicina?

14. Una taza de chocolate caliente tiene temperatura de 80°C en un cuarto que se conserva a 20°C. Después de media hora el chocolate caliente se enfría a 60°C.

(a) ¿Cuál es la temperatura del chocolate después de otra media hora?

(b) ¿Cuándo se habrá enfriado a 40°C el chocolate?

15. (a) Escriba la solución del problema del valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.1P\left(1 - \frac{P}{2000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y úsela para hallar la población cuando $t = 20$.

(b) ¿Cuándo llega a 1200 la población?

16. (a) La población mundial era de 5280 millones en 1990 y 6070 millones en 2000. Encuentre un modelo exponencial para estos datos y use el modelo para predecir la población mundial en el año 2020.

(b) De acuerdo con el modelo del inciso (a), ¿cuándo pasará de 10,000 millones la población mundial?

(c) Use los datos del inciso (a) para hallar un modelo logístico para la población. Suponga una capacidad de carga de 100,000 millones. Entonces use el modelo logístico para predecir la población en 2020. Compare con su predicción del modelo exponencial.

(d) De acuerdo con el modelo logístico, ¿cuándo pasará de 10,000 millones la población mundial? Compare con su predicción del inciso (b).

17. El modelo de von Bertalanffy de crecimiento se usa para predecir la longitud $L(t)$ de un pez en un periodo. Si L_∞ es la mayor longitud para una especie, entonces la hipótesis es que la rapidez de crecimiento en longitud es proporcional a $L_\infty - L$, la longitud todavía por alcanzar.

(a) Formule y resuelva la ecuación diferencial para hallar una expresión para $L(t)$.

(b) Para el abadejo (un pez) del mar del Norte se ha determinado que $L_\infty = 53$ cm, $L(0) = 10$ cm, y la constante de proporcionalidad es 0.2. ¿En qué se convierte la expresión para $L(t)$ con estos datos?

18. La Ley de Brentano-Stevens en psicología modela la forma en que un individuo reacciona a un estímulo. Dice que si R representa la reacción a una cantidad S de estímulo, entonces los porcentajes relativos de aumento son proporcionales:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt}$$

donde k es una constante positiva. Encuentre R como función de S.

19. Un modelo para la propagación de una epidemia es que la rapidez de propagación es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de personas no infectadas. En una población aislada de 5000 habitantes, 160 personas tienen una enfermedad al principio de la semana y 1200 la tienen al final de la semana. ¿Cuánto tiempo pasa para que el 80% de la población se infecte?

20. Un tanque contiene 100 L de agua pura. Salmuera que contiene 0.1 kg de sal por litro entra al tanque a razón de 10 L/min. La solución se conserva perfectamente mezclada y se drena del tanque con la misma rapidez. ¿Cuánta sal está en el tanque después de 6 minutos?

21. El transporte de una sustancia por una pared capilar en fisiología pulmonar ha sido modelado por la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V}\left(\frac{h}{k+h}\right)$$

donde h es la concentración de hormonas en el torrente sanguíneo, t es el tiempo, R es la máxima rapidez de transporte, V es el volumen del capilar y k es una constante positiva que mide la afinidad entre las hormonas y las enzimas que toman parte en el proceso. Resuelva esta ecuación diferencial para hallar una relación entre h y t.

22. Poblaciones de aves e insectos son modeladas por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x - 0.002xy$$

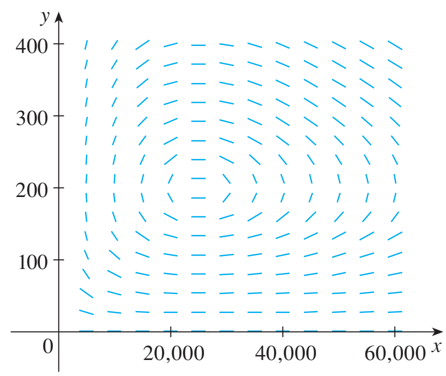
$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

(a) ¿Cuál de las variables, x o y, representa la población de aves y cuál representa la población de insectos? Explique.

(b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.

(c) Encuentre una expresión para dy/dx.

(d) A continuación se muestra el campo direccional para la ecuación diferencial el inciso (c). Úselo para trazar la trayectoria de fase correspondiente a poblaciones iniciales de 100 aves y 40,000 insectos. Entonces use la trayectoria de fase para describir la forma en que cambian ambas poblaciones.



(e) Use el inciso (d) para hacer dibujos aproximados de las poblaciones de aves e insectos como funciones del tiempo. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas entre sí?

23. Suponga que el modelo del Ejercicio 22 se sustituye con las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x(1 - 0.000005x) - 0.002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

(a) Según estas ecuaciones, ¿qué ocurre a la población de insectos en ausencia de aves?

(b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.

(c) La figura de la derecha muestra la trayectoria de fase que se inicia con 100 aves y 40,000 insectos. Describa lo que ocurre finalmente a las poblaciones de aves e insectos.

(d) Trace gráficas de las poblaciones de aves e insectos como funciones del tiempo.

24. Bárbara pesa 60 kg y está a una dieta de 1600 calorías por día, de las cuales 850 son usadas automáticamente por el metabolismo basal. Ella gasta unas 15 cal/kg/día veces su peso haciendo ejercicio. Si 1 kg de grasa contiene 10,000 cal y suponemos que el almacenamiento de calorías en forma de grasa es 100% eficiente, formule una ecuación diferencial y resuélvala para hallar el peso de ella como función del tiempo. ¿Su peso se aproxima finalmente a un peso en equilibrio?

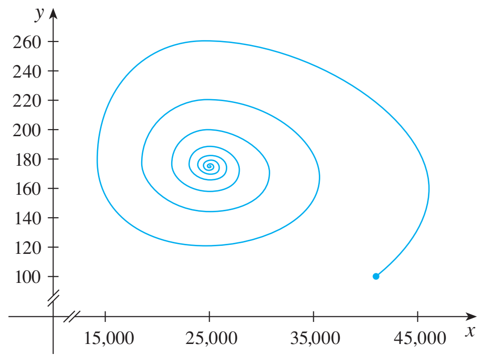


FIGURA PARA EL EJERCICIO 23

Principios de resolución de problemas

1. Encuentre todas las funciones f tales que f' es continua y

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}\,dt \qquad \text{para toda } x \text{ real}$$

2. Un estudiante olvidó la Regla del Producto para derivación y cometió el error de pensar que $(fg)' = f'g'$, pero tuvo suerte y halló la respuesta correcta. La función f que utilizó fue $f(x) = e^{x^2}$ y el dominio de este problema fue el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. ¿Cuál fue la función g?

3. Sea f una función con la propiedad de que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ y $f(a + b) = f(a)\,f(b)$ para todos los números reales a y b. Demuestre que $f'(x) = f(x)$ para toda x y deduzca que $f(x) = e^x$.

4. Encuentre todas las funciones f que satisfagan la ecuación

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}\,dx\right) = -1$$

5. Encuentre la curva $y = f(x)$ tal que $f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, y el área bajo la gráfica de f de 0 a x es proporcional a la $(n + 1)$ ésima potencia de $f(x)$.

6. Una *subtangente* es una parte del eje x que está directamente bajo el segmento de una recta tangente desde el punto de contacto con el eje x. Encuentre las curvas que pasan por el punto $(c, 1)$ y cuyas subtangentes todas tienen longitud c.

7. Un pastel de durazno es sacado del horno a las 5:00 p.m. En este momento está hirviendo, 100°C. A las 5:10 p.m. su temperatura es de 80°C; a las 5:20 p.m está a 65°C. ¿Cuál es la temperatura del cuarto?

8. Empieza a caer nieve durante la mañana del 2 de febrero y continúa en forma constante en la tarde. Al mediodía una máquina quitanieves empieza a quitar nieve de un camino también en forma constante. La máquina avanzó 6 km del mediodía a la 1:00 p.m. pero sólo 3 km de la 1:00 p.m. a las 2:00 p.m. ¿Cuándo empezó a caer nieve? [*Sugerencias*: Para empezar, sea t el tiempo medido en horas después del mediodía; sea $x(t)$ la distancia recorrida por la máquina quitanieves en el tiempo t; entonces la rapidez de la máquina es dx/dt. Sea b el número de horas antes del mediodía en que empezó a nevar. Encuentre una expresión para la altura de la nieve en el tiempo t. Entonces use la información dada de que la rapidez de remoción R (en m^3/h) es constante.]

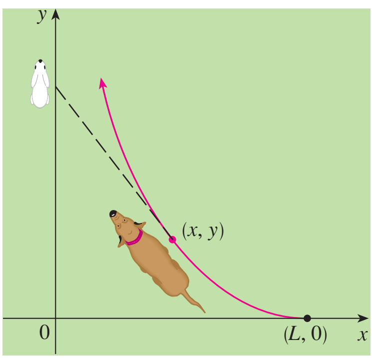


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. Un perro ve un conejo corriendo en línea recta por un campo abierto y lo persigue. En un sistema de coordenadas rectangulares (como se ve en la figura), suponga:

(i) El conejo está en el origen y el perro está en el punto $(L, 0)$ en el instante en que el perro ve al conejo por primera vez.

(ii) El conejo corre por el eje y y el perro siempre corre directo hacia el conejo.

(iii) El perro corre a la misma rapidez que el conejo.

(a) Demuestre que la trayectoria del perro es la gráfica de la función $y = f(x)$, donde y satisface la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

(b) Determine la solución de la ecuación del inciso (a) que satisfaga las condiciones iniciales $y = y' = 0$ cuando $x = L$. [*Sugerencia*: Sea $z = dy/dx$ en la ecuación diferencial y resuelva la resultante ecuación de primer orden para hallar z; a continuación integre z para hallar y.]

(c) ¿El perro alcanza en algún momento al conejo?

10. (a) Suponga que el perro del Problema 9 corre con rapidez doble que la del conejo. Encuentre una ecuación diferencial para la trayectoria del perro. A continuación resuélvala para hallar el punto donde el perro atrapa al conejo.

(b) Suponga que el perro corre a la mitad de rapidez que el conejo. ¿Qué tan cerca llega el perro del conejo? ¿Cuáles son las posiciones de ambos cuando están más cercanos?

11. Un ingeniero de planeación para una nueva planta de aluminio presenta algunas estimaciones a su compañía, respecto a la capacidad de un silo diseñado para contener mineral de bauxita hasta que éste sea procesado en aluminio. El mineral parece talco de color rosado y se vierte de una banda transportadora a lo alto del silo. Éste es un cilindro de 100 ft de alto con radio de 200 ft. La banda transportadora lleva $60{,}000\pi$ ft^3/h y el mineral mantiene una forma cónica cuyo radio es 1.5 veces su altura.

(a) Si, en cierto tiempo t, la pila mide 60 ft de alto, ¿cuánto tardará la pila en llegar a lo alto del silo?

(b) La administración desea saber cuánto espacio quedará de área de piso del silo cuando la pila llegue a 60 ft de alto. ¿Con qué rapidez está creciendo el área de piso de la pila a esa altura?

(c) Suponga que una máquina cargadora empieza a remover mineral a razón de $20{,}000\pi$ ft^3/h cuando la altura de la pila llega a 90 ft. Suponga, también, que la pila continúa manteniendo su forma. ¿Cuánto tardará la pila en llegar a lo alto del silo bajo estas condiciones?

12. Encuentre la curva que pasa por el punto (3, 2) y tiene la propiedad de que si la recta tangente se traza en cualquier punto P sobre la curva, entonces la parte de la recta tangente que está en el primer cuadrante está bisecada en P.

13. Recuerde que la recta normal a una curva en un punto P sobre la curva es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en P. Encuentre la curva que pasa por el punto (3, 2) y tiene la propiedad de que si la recta normal se traza en cualquier punto sobre la curva, entonces la intersección con el eje y de la recta normal es siempre 6.

14. Encuentre todas las curvas con la propiedad de que si la recta normal se traza en cualquier punto P sobre la curva, entonces la parte de la recta normal entre P y el eje x es bisecada por el eje y.

thomasmayerarchive.com

8 Sucesiones y series infinitas

Las sucesiones y series infinitas se introdujeron brevemente en *A Preview of Calculus* en relación a las paradojas de Zenón y la representación decimal de números. Su importancia en cálculo proviene de la idea de Newton de representar funciones como sumas de series infinitas. Por ejemplo, al hallar áreas él con frecuencia integraba una función expresándola primero como una serie y luego integrando cada término de la serie. Seguiremos esta idea en la Sección 8.7 para integrar funciones tales como e^{-x^2}. (Recuerde que ya antes lo hemos hecho.) Muchas de las funciones que aparecen en física matemática y química, por ejemplo las funciones de Bessel, están definidas como sumas de series, de modo que es importante estar familiarizado con los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y series infinitas.

Los físicos también usan series en otras formas, como veremos en la Sección 8.8. Al estudiar campos tan diversos como la óptica, relatividad especial y electromagnetismo, analizan fenómenos al sustituir una función con los primeros pocos términos de la serie que la representan.

8.1 Sucesiones

Se puede considerar una **sucesión** como una lista de números escritos en un orden definido:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n, \ldots$$

El número a_1 se denomina *primer término*, a_2 es el *segundo término*, y en general a_n es el n-ésimo término. Trataremos exclusivamente con sucesiones infinitas y por tanto cada término a_n tendrá un sucesor a_{n+1}.

Nótese que para todo entero positivo n hay un correspondiente número a_n y entonces una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Pero por lo general escribimos a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

Notación: La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ también se denota con

$$\{a_n\} \qquad \text{o bien} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLO 1 Descripción de sucesiones Algunas sucesiones se pueden definir al dar una fórmula para el n-ésimo término. En los ejemplos siguientes damos tres descripciones de la sucesión: una usando la notación precedente, otra usando la fórmula de definición y una tercera escribiendo los términos de la sucesión. Nótese que n no tiene que empezar en 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\qquad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\qquad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

V EJEMPLO 2 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}$$

suponiendo que continúe el patrón de los primeros pocos términos.

SOLUCIÓN Nos indican que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Nótese que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y aumentan en 1 siempre que pasemos al siguiente término. El segundo término tiene numerador 4, el tercer término tiene numerador 5; en general, el n-ésimo término tendrá numerador $n + 2$. Los denominadores son las potencias de 5, de modo que a_n tiene denominador 5^n. Los signos de los términos son alternativamente positivos y negativos, por lo cual necesitamos multiplicar por una potencia de -1. En el Ejemplo 1(b) el factor $(-1)^n$ significa que empezamos con un término negativo. Aquí deseamos empezar con un término positivo y por lo tanto usamos $(-1)^{n-1}$ o $(-1)^{n+1}$. En consecuencia

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$

EJEMPLO 3 A continuación veamos algunas sucesiones que no tienen ecuaciones de definición sencillas.

(a) La sucesión $\{p_n\}$, donde p_n es la población mundial hasta el 1 de enero del año n.

(b) Si hacemos que a_n sea el dígito en el n-ésimo lugar decimal del número e, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión bien definida cuyos primeros términos son

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) La **sucesión de Fibonacci** $\{f_n\}$ está definida en forma recursiva por las condiciones

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada término es la suma de los dos términos precedentes. Los primeros términos son

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Esta sucesión apareció cuando el matemático italiano del siglo XIII conocido como Fibonacci resolvió un problema relacionado con la cría de conejos (vea Ejercicio 47).

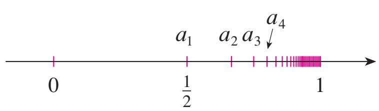


FIGURA 1

Una sucesión como la del Ejemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$, se puede ver ya sea localizando sus términos sobre una recta numérica, como en la Figura 1, o trazando su gráfica, como en la Figura 2. Nótese que, puesto que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos, su gráfica está formada por puntos aislados con coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

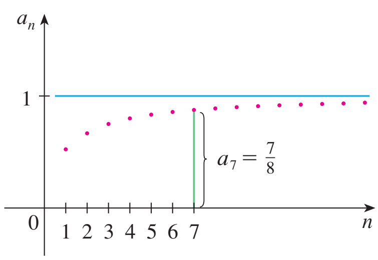


FIGURA 2

De la Figura 1 o la Figura 2 se ve que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n se hace grande. De hecho, la diferencia

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

se puede hacer tan pequeña como se desee al tomar n suficientemente grande. Indicamos esto al escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

En general, la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

significa que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L a medida que n se hace grande. Nótese que la siguiente definición del límite de una sucesión es muy semejante a la definición de un límite de una función en el infinito dada en la Sección 2.5.

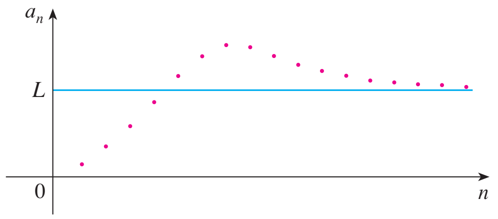
Una definición más precisa del límite de una sucesión se da en el Apéndice D.

1 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si podemos hacer que los términos a_n sean tan cercanos a L como queramos tomando n suficientemente grande. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, decimos que la sucesión **converge** (o es **convergente**). De otro modo, decimos que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

La Figura 3 ilustra la Definición 1 al mostrar las gráficas de dos sucesiones que tienen el límite L.



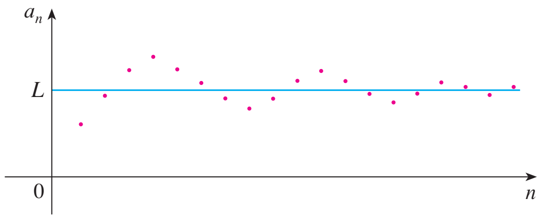


FIGURA 3
Gráficas de dos sucesiones con $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Si se compara la Definición 1 con la Definición 2.5.4 se verá que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea un entero. Así, tenemos el siguiente teorema que está ilustrado por la Figura 4.

2 Teorema Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

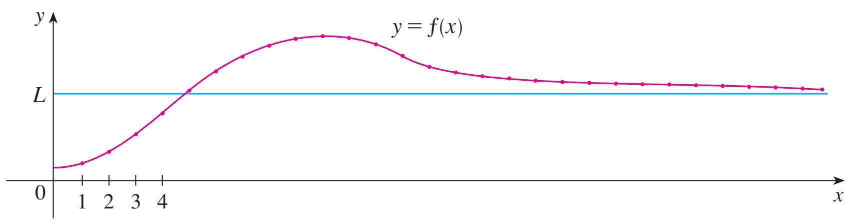


FIGURA 4

En particular, dado que sabemos de la Sección 2.5 que $\lim_{x\to\infty} (1/x^r) = 0$ cuando $r > 0$, tenemos

$$\boxed{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{si } r > 0$$

Si a_n se hace grande cuando n se hace grande, usamos la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

En este caso la sucesión $\{a_n\}$ es divergente, pero en una forma especial. Decimos que $\{a_n\}$ diverge a ∞.

Las Leyes de Límites dadas en la Sección 2.3 también se cumplen para los límites de sucesiones y sus pruebas son semejantes.

Leyes de Límites para Sucesiones

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{si } p > 0 \text{ y } a_n > 0$$

El Teorema de compresión también se puede adaptar para sucesiones como sigue (vea Figura 5).

Teorema de Restricción para Sucesiones

Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

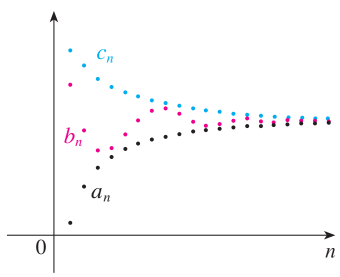


FIGURA 5
La sucesión $\{b_n\}$ está comprimida entre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$.

Otro dato útil acerca de límites de sucesiones está dado por el siguiente teorema, que se sigue del Teorema de compresión porque $-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$.

4 Teorema Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es semejante al que empleamos en la Sección 2.5: Dividir numerador y denominador entre la potencia de orden superior de n presente en el denominador y luego usar las Leyes de Límite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Esto demuestra que la conjetura que hicimos antes de las Figuras 1 y 2 era correcto.

Aquí empleamos la Ecuación 3 con $r = 1$.

EJEMPLO 5 **Aplicación de la Regla de l'Hospital a una función relacionada** Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

SOLUCIÓN Nótese que numerador y denominador se aproximan al infinito cuando $n \to \infty$. No podemos aplicar la Regla de l'Hospital directamente porque no aplica a sucesiones sino a funciones de una variable real, pero podemos aplicar la Regla de l'Hospital a la función relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

En consecuencia, por el Teorema 2, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

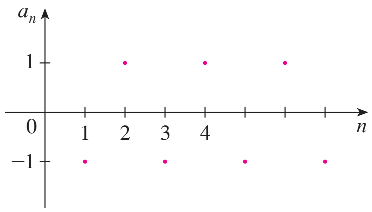


FIGURA 6

EJEMPLO 6 Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Si escribimos los términos de la sucesión, obtenemos

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

La gráfica de esta sucesión se muestra en la Figura 6. Como los términos oscilan entre 1 y -1 infinitamente, a_n no se aproxima a ningún número. Entonces $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe; esto es, la sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente.

La gráfica de la sucesión del Ejemplo 7 se ve en la Figura 7 y apoya la respuesta.

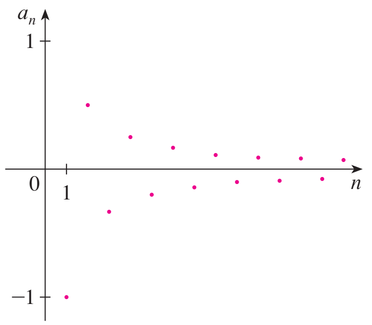


FIGURA 7

EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ si existe.

SOLUCIÓN Primero calculamos el límite del valor absoluto:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por tanto, por el Teorema 4,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

El siguiente teorema dice que si aplicamos una función continua a los términos de la sucesión convergente, el resultado también es convergente. La prueba está dada en el Apéndice E.

5 Teorema Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUCIÓN Como la función seno es continua en 0, el Teorema 5 hace posible que escribamos

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty}(\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

V EJEMPLO 9 Uso del Teorema de compresión Discuta la convergencia de la sucesión $a_n = n!/n^n$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUCIÓN Tanto el numerador como el denominador se aproximan al infinito cuando $n \to \infty$ pero aquí no tenemos función correspondiente para usar con la Regla de l'Hospital ($x!$ no está definida cuando x no es un entero). Escribamos unos pocos términos para

Creación de gráficas de sucesiones

Algunos sistemas computarizados de álgebra tienen comandos especiales que hacen posible crear sucesiones y graficarlas directamente. En casi todas las calculadoras de gráficas, no obstante, se pueden graficar sucesiones con ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la sucesión del Ejemplo 9 se puede graficar si se introducen las ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

y graficando en el modo de puntos, empezando con $t = 1$ y haciendo el escalón t igual a 1. El resultado se ve en la Figura 8.

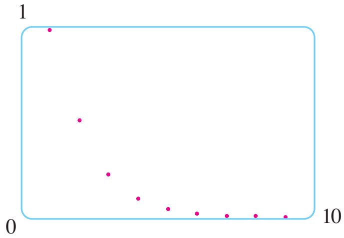


FIGURA 8

tener idea de lo que ocurre a a_n cuando n se hace grande:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$\boxed{6} \qquad a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

Se ve de estas expresiones y la gráfica de la Figura 8 que los términos son decrecientes y quizá se aproximen a 0. Para confirmar esto, observemos de la Ecuación 6 que

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Nótese que la expresión en paréntesis es a lo sumo 1 porque el numerador es menor (o igual) que el denominador. Por tanto,

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabemos que $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ por el Teorema de compresión.

V EJEMPLO 10 Límite de una sucesión geométrica ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

SOLUCIÓN Sabemos de la Sección 2.5 y las gráficas de las funciones exponenciales de la Sección 1.5 que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ y $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Por tanto, poniendo $a = r$ y usando el Teorema 2, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

Para los casos $r = 1$ y $r = 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Si $-1 < r < 0$, entonces $0 < |r| < 1$, y

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

y por tanto $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ por el Teorema 4. Si $r \leqslant -1$, entonces $\{r^n\}$ diverge como en el Ejemplo 6. La Figura 9 muestra las gráficas para varios valores de r. (El caso $r = -1$ se ve en la Figura 6.)

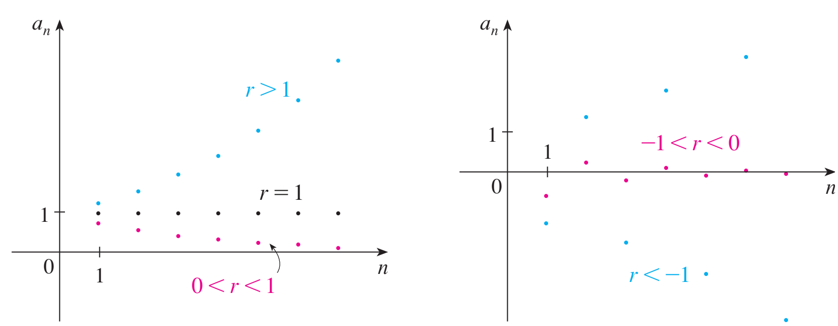


FIGURA 9
La sucesión $a_n = r^n$

Los resultados del Ejemplo 10 se resumen para uso futuro como sigue.

7 La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leqslant 1$ y divergente para todos los otros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Definición Una sucesión $\{a_n\}$ se denomina **creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Se denomina **decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. Una sucesión es **monótona** si es ya sea creciente o decreciente.

EJEMPLO 11 La sucesión $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ es decreciente porque

El lado derecho es menor porque tiene un denominador mayor.

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

y por tanto $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$.

EJEMPLO 12 Demuestre que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 1 Debemos demostrar que $a_{n+1} < a_n$, es decir,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Esta desigualdad es equivalente a la que obtenemos por multiplicación cruzada:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} &\iff (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \\ &\iff n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \\ &\iff 1 < n^2+n \end{aligned}$$

Como $n \geqslant 1$, sabemos que la desigualdad $n^2 + n > 1$ es verdadera. Por tanto $a_{n+1} < a_n$ y entonces $\{a_n\}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 2 Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{siempre que } x^2 > 1$$

Entonces f es decreciente en $(1, \infty)$ y entonces $f(n) > f(n+1)$. En consecuencia $\{a_n\}$ es decreciente.

Definición Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada superiormente** si hay un número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Está **acotada inferiormente** si hay un número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Si está acotada superior e inferiormente, entonces $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

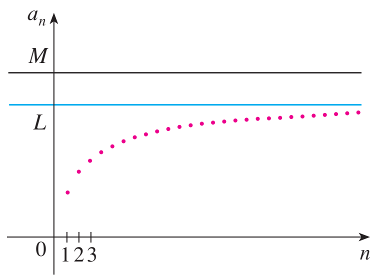


FIGURA 10

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ está acotada inferiormente ($a_n > 0$) pero no superiormente. La sucesión $a_n = n/(n + 1)$ está acotada porque $0 < a_n < 1$ para toda n.

Sabemos que no toda sucesión acotada es convergente [por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ satisface $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$ pero es divergente, del Ejemplo 6] y no toda sucesión monótona es convergente ($a_n = n \to \infty$). Pero si una sucesión es acotada *y* además es monótona, entonces debe ser convergente. Este hecho se expresa sin prueba como Teorema 8, pero intuitivamente se puede entender por qué es verdadero al ver la Figura 10. Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \leqslant M$ para toda n, entonces los términos están forzados a agruparse y aproximarse a algún número L.

8 **Teorema de sucesión monótona** Toda sucesión acotada, monotónica, es convergente.

EJEMPLO 13 **El límite de una sucesión definida recursivamente** Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida por la *relación de recurrencia*

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUCIÓN Empezamos por calcular los primeros varios términos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$

$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5.5 \qquad a_5 = 5.75 \qquad a_6 = 5.875$$

$$a_7 = 5.9375 \qquad a_8 = 5.96875 \qquad a_9 = 5.984375$$

Con frecuencia se usa inducción matemática al trabajar con sucesiones recursivas. Vea en la página 84 una exposición del Principio de inducción matemática.

Estos términos iniciales sugieren que la sucesión es creciente y los términos se están aproximando a 6. Para confirmar que la sucesión es creciente, usamos inducción matemática para demostrar que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geqslant 1$. Esto es verdadero para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Si suponemos que es verdadero para $n = k$, entonces tenemos

$$a_{k+1} > a_k$$

entonces $$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

y $$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Así $$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Hemos deducido que $a_{n+1} > a_n$ es verdadero para $n = k + 1$. Por tanto, la desigualdad es verdadera para toda n por inducción.

A continuación verificamos que $\{a_n\}$está acotada al demostrar que $a_n < 6$ para toda n. (Como la sucesión es creciente, ya sabemos que tiene un límite inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para toda n.) Sabemos que $a_1 < 6$, de modo que la aseveración es verdadera para $n = 1$. Suponga que es verdadera para $n = k$. Entonces

$$a_k < 6$$

entonces $$a_k + 6 < 12$$

y $$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Así $$a_{k+1} < 6$$

Esto demuestra, por inducción matemática, que $a_n < 6$ para toda n.

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, el Teorema de sucesión monótona garantiza que tiene un límite. El teorema no nos dice lo que es el valor del límite, pero ahora que sabemos que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, podemos usar la relación de recurrencia dada para escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Como $a_n \to L$, se deduce que $a_{n+1} \to L$ también (cuando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$ también). Entonces tenemos

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Al despejar L de esta ecuación, obtenemos $L = 6$, como pronosticamos.

8.1 Ejercicios

1. (a) ¿Qué es una sucesión?
(b) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión convergente? Dé dos ejemplos.
(b) ¿Qué es una sucesión divergente? Dé dos ejemplos.

3. Haga una lista de los seis primeros términos de la sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{2n + 1}$$

¿La sucesión parece tener un límite? Si es así, encuéntrelo.

4. Haga una lista de los nueve primeros términos de la sucesión $\{\cos(n\pi/3)\}$. ¿La sucesión parece tener un límite? Si es así, encuéntrelo; si no, explique por qué.

5–10 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que continúa el patrón de los primeros pocos términos.

5. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$

6. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$

7. $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$

8. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\right\}$

9. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$

10. $\{5, 1, 5, 1, 5, 1, \ldots\}$

11–34 Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, encuentre el límite.

11. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

12. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

13. $a_n = 1 - (0.2)^n$

14. $a_n = \dfrac{n^3}{n + 1}$

15. $a_n = e^{1/n}$

16. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

17. $a_n = \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

18. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

19. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$

20. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

21. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

22. $a_n = \cos(2/n)$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

23. $\{n^2 e^{-n}\}$

24. $\{\arctan 2n\}$

25. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

26. $\{n \cos n\pi\}$

27. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

28. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

29. $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

30. $a_n = \dfrac{\text{sen}\, 2n}{1 + \sqrt{n}}$

31. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots\}$

32. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

33. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

34. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

35–40 Use una gráfica de la sucesión para determinar si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, conjeture el valor del límite a partir de la gráfica y luego demuestre su conjetura. (Vea la nota al margen de la página 559 para consejos sobre cómo graficar sucesiones.)

35. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

36. $a_n = \sqrt{n}\, \text{sen}\left(\pi/\sqrt{n}\right)$

37. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

38. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

39. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

40. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$

41. Si se invierten \$1000 al 6% de interés, capitalizado anualmente, entonces después de n años la inversión vale $a_n = 1000(1.06)^n$ dólares.
(a) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión $\{a_n\}$.
(b) ¿La sucesión es convergente o divergente? Explique.

42. Si se depositan \$100 al final de cada mes en una cuenta que paga 3% de interés al año capitalizado mensualmente, la cantidad de interés acumulado después de n meses está dada por la sucesión

$$I_n = 100\left(\frac{1.0025^n - 1}{0.0025} - n\right)$$

(a) Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.
(b) ¿Cuánto interés habrá obtenido después de dos años?

43. Un productor de peces tiene 5000 bagres en su estanque de crías. El número de bagres aumenta en 8% al mes y el productor cosecha 300 bagres al mes.
(a) Demuestre que la población P_n de bagres después de n meses está dada periódicamente por

$$P_n = 1.08P_{n-1} - 300 \qquad P_0 = 5000$$

(b) ¿Cuántos bagres hay en el estanque después de seis meses?

44. Encuentre los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo si $a_1 = 25$. Haga una conjetura acerca de este tipo de sucesión.

45. (a) Determine si la sucesión definida como sigue es convergente o divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) ¿Qué ocurre si el primer término es $a_1 = 2$?

46. (a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, ¿cuál es el valor de $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}$?
(b) Una sucesión $\{a_n\}$ está definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 1/(1 + a_n) \quad \text{para } n \geqslant 1$$

Encuentre los primeros diez términos de la sucesión correctos a cinco lugares decimales. ¿Le parece que la sucesión es convergente? Si es así, estime el valor del límite a tres lugares decimales.
(c) Suponiendo que la sucesión del inciso (b) tiene un límite, use el inciso (a) para hallar su valor exacto. Compare con su estimación del inciso (b).

47. (a) Fibonacci planteó el siguiente problema: Suponga que los conejos viven para siempre y que cada mes cada pareja produce una nueva pareja que es productiva a los 2 meses de edad. Si empezamos con una pareja recién nacida, ¿cuántas parejas de conejos tendremos en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es f_n, donde $\{f_n\}$ es la sucesión de Fibonacci definida en el Ejemplo 3(c).
(b) Sea $a_n = f_{n+1}/f_n$ y demuestre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Suponiendo que $\{a_n\}$ es convergente, encuentre su límite.

48. Encuentre el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\right\}$$

49–52 Determine si la sucesión es creciente, decreciente o no monótona. ¿La sucesión está acotada?

49. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

50. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

51. $a_n = n(-1)^n$

52. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

53. Supongamos que el lector sabe que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y todos sus términos están entre los números 5 y 8. Explique por qué la sucesión tiene un límite. ¿Qué se puede decir acerca del valor del límite?

54. Una sucesión $\{a_n\}$ está dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
(a) Por inducción o por otro medio, demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente por 3. Aplique el Teorema de Sucesión Monótona para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
(b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$.

55. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

es creciente y $a_n < 3$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y encuentre su límite.

56. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisface $0 < a_n \leqslant 2$ y es decreciente. Deduzca que la sucesión es convergente y encuentre su límite.

57. Sabemos que $\lim_{n\to\infty} (0.8)^n = 0$ [de (7) con $r = 0.8$]. Use logaritmos para determinar qué tan grande tiene que ser n para que $(0.8)^n < 0.000001$.

58. (a) Sea $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \ldots,$ $a_{n+1} = f(a_n)$, donde f es una función continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $f(L) = L$.
(b) Ilustre el inciso (a) al tomar $f(x) = \cos x$, $a = 1$, y estimando el valor de L a cinco lugares decimales.

59. El tamaño de una población de peces no perturbada ha sido modelado por la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

donde p_n es la población de peces después de n años y a y b son constantes positivas que dependen de la especie y su entorno. Suponga que la población en el año 0 es $p_0 > 0$.
(a) Demuestre que si $\{p_n\}$ es convergente, entonces los únicos valores posibles para este límite son 0 y $b - a$.
(b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.
(c) Use el inciso (b) para demostrar que si $a > b$, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$; en otras palabras, la población desaparece.
(d) Ahora suponga que $a < b$. Demuestre que si $p_0 < b - a$, entonces $\{p_n\}$ es creciente y $0 < p_n < b - a$. Demuestre también que si $p_0 > b - a$, entonces $\{p_n\}$ es decreciente y $p_n > b - a$. Deduzca que si $a < b$, entonces $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

60. Una sucesión está definida en forma periódica por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

Encuentre los primeros ocho términos de la sucesión $\{a_n\}$. ¿Qué se observa acerca de los términos impares y de los términos pares? Al considerar los términos impares y pares por separado, demuestre que $\{a_n\}$ es convergente y deduzca que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

Esto da la **expansión de fracción continua**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

PROYECTO DE LABORATORIO CAS Sucesiones logísticas

Una sucesión que se presenta en ecología como modelo para crecimiento poblacional está definida por la **ecuación de diferencia logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n mide el tamaño de la población de la n-ésima generación de una especie individual. Para conservar manejables los números, p_n es una fracción del tamaño máximo de la población de manera que $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Nótese que la forma de esta ecuación es semejante a la ecuación diferencial logística de la Sección 7.5. El modelo discreto —con sucesiones en lugar de funciones continuas— es preferible para modelar poblaciones de insectos donde el apareamiento y muerte ocurren en forma periódica.

Un ecologista está interesado en predecir el tamaño de la población conforme transcurra el tiempo, y hace estas preguntas: ¿El tamaño de la población se estabiliza en un valor limitador? ¿Cambiará en forma cíclica? ¿Exhibirá comportamiento aleatorio?

Escriba un programa para calcular los primeros n términos de esta sucesión empezando con una población inicial p_0, donde $0 < p_0 < 1$. Use este programa para hacer lo siguiente.

1. Calcule 20 o 30 términos de la sucesión para $p_0 = \frac{1}{2}$ y para dos valores de k tales que $1 < k < 3$. Grafique cada sucesión. ¿Parecen converger las sucesiones? Repita para un valor diferente de p_0 entre 0 y 1. ¿El límite depende de la selección de p_0? ¿Depende de la selección de k?

2. Calcule términos de la sucesión para un valor de k entre 3 y 3.4 y grafíquelos. ¿Qué se observa acerca del comportamiento de los términos?

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

3. Experimento con valores de k entre 3.4 y 3.5. ¿Qué ocurre a los términos?

4. Para valores de k entre 3.6 y 4, calcule y grafique al menos 100 términos y comente sobre el comportamiento de la sucesión. ¿Qué pasa si se cambia p_0 por 0.001? Este tipo de comportamiento se denomina *caótico* y es exhibido por poblaciones de insectos bajo ciertas condiciones.

8.2 Series

¿Qué queremos decir cuando expresamos un número como decimal infinito? Por ejemplo, qué significa escribir

El récord actual es que π ha sido calculado a 1,241,100,000,000 (más de un trillón) de lugares decimales por Shigeru Kondo y sus colaboradores.

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ldots$$

La convención que hay detrás de nuestra notación decimal es que cualquier número se puede escribir como una suma infinita. Aquí significa que

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots$$

donde los tres puntos $(\cdots)$ indican que la suma continúa para siempre, y cuanto más términos agreguemos más nos acercamos al valor real de π.

En general, si tratamos de sumar términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtenemos una expresión de la forma

$$\boxed{1} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que se denomina **serie infinita** (o simplemente **serie**) y se denota, por brevedad, con el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

¿Tiene sentido hablar acerca de la suma de un número infinito de términos?

Sería imposible hallar una suma finita para la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque si empezamos sumando los términos obtenemos las sumas acumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . y, después del n-ésimo término, obtenemos $n(n+1)/2$, que se hace muy grande a medida que n aumenta.

No obstante, si empezamos por sumar los términos de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

n	Suma de los primeros n términos
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

obtenemos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$. La tabla muestra que cuando sumamos más y más términos, estas *sumas parciales* se acercan más y más a 1. (Vea también la Figura 11 en *A Preview of Calculus*, página 8.) De hecho, al sumar un número suficiente de términos de la serie podemos hacer las sumas parciales tan cerca de 1 como queramos. Por tanto, parece razonable decir que la suma de esta serie infinita es 1 y escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Usamos una idea similar para determinar si una serie general (1) tiene o no tiene suma. Consideramos las **sumas parciales**

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{s_n\}$, que puede o no puede tener límite. Si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe (como número finito), entonces, al igual que en el ejemplo precedente, se le da el nombre de suma de la serie infinita $\Sigma\, a_n$.

2 Definición Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denotemos con s_n su n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe como número real, entonces la serie $\Sigma\, a_n$ se llama **convergente** y escribimos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se denomina **suma** de la serie. Si la sucesión $\{s_n\}$ es divergente, entonces la serie se llama **divergente**.

Compare con la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} f(x)\,dx$$

Para hallar esta integral integramos de 1 a t y luego hacemos que $t \to \infty$. Para una serie, sumamos de 1 a n y luego hacemos que $n \to \infty$.

Entonces la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Por tanto, cuando escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ queremos decir que al sumar un número suficiente de términos de la serie podemos llegar tan cerca como queramos al número s. Nótese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

EJEMPLO 1 Un ejemplo importante de una serie infinita es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Cada término se obtiene del precedente al multiplicarlo por la **razón común** r. (Ya hemos considerado el caso especial donde $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ en la página 565.)

Si $r = 1$, entonces $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Como $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe, la serie geométrica diverge en este caso.

Si $r \neq 1$, tenemos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rs_n = \phantom{a +{}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

La Figura 1 da una demostración geométrica del resultado del Ejemplo 1. Si los triángulos se construyen como se muestra y s es la suma de la serie, entonces, por triángulos semejantes,

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{y} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

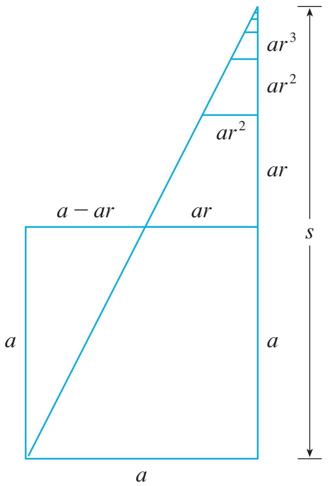


FIGURA 1

En palabras: La suma de una serie geométrica convergente es

$$\frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón común}}$$

Restando estas ecuaciones, obtenemos

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$\boxed{3} \qquad s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Si $-1 < r < 1$, sabemos de (8.1.7) que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Así, cuando $|r| < 1$ la serie geométrica es convergente y su suma es $a/(1 - r)$.

Si $r \leqslant -1$ o $r > 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente por (8.1.7) y entonces, por la Ecuación 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe. Por tanto, la serie geométrica diverge en esos casos.

Resumimos los resultados del Ejemplo 1 como sigue.

$\boxed{4}$ La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$

Si $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica es divergente.

V EJEMPLO 2 Encuentre la suma de la serie geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUCIÓN El primer término es $a = 5$ y la razón común es $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente por (4) y su suma es

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

¿Qué queremos decir en realidad cuando decimos que la suma de la serie del Ejemplo 2 es 3? Desde luego, no podemos literalmente sumar un número infinito de términos, uno por uno. Pero, de acuerdo con la Definición 2, la suma total es el límite de la sucesión de sumas parciales. Por tanto, al tomar la suma de un número suficiente de términos, podemos acercarnos tanto como queramos al número 3. La tabla siguiente muestra las primeras diez sumas parciales s_n y la gráfica de la Figura 2 muestra la forma en que la sucesión de sumas parciales se aproxima a 3.

n	s_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975

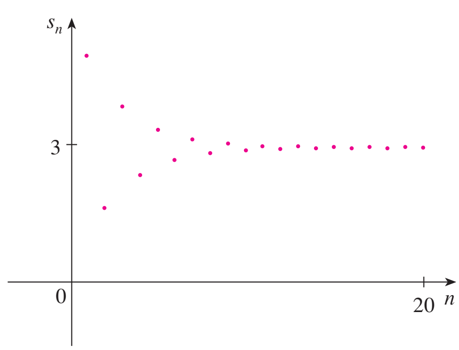


FIGURA 2

EJEMPLO 3 ¿La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ es convergente o divergente?

SOLUCIÓN Reescribamos el n-ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1}:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Otra forma de identificar a y r es escribir los primeros pocos términos

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

Reconocemos esta serie como una serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, la serie diverge por (4).

V **EJEMPLO 4** **Expresar un decimal periódico como un número racional**
Escriba el número $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ como una razón entre enteros.

SOLUCIÓN

$$2.3171717\ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Después de los primeros términos tenemos una serie geométrica con $a = 17/10^3$ y $r = 1/10^2$. Por tanto,

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{1000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$

EJEMPLO 5 **Una serie con términos variables** Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, donde $|x| < 1$.

TEC El Module 8.2 explora una serie que depende de un ángulo θ en un triángulo y hace posible ver la rapidez con que converge una serie cuando θ varía.

SOLUCIÓN Nótese que esta serie empieza con $n = 0$ y por tanto el primer término es $x^0 = 1$. (Con series, adoptamos la convención de que $x^0 = 1$ aun cuando $x = 0$.) Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Como $|r| = |x| < 1$, converge y (4) da

5 $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

EJEMPLO 6 **Una suma telescópica** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, y encuentre su suma.

SOLUCIÓN Ésta no es una serie geométrica, de modo que regresamos a la definición de una serie convergente y calculamos las sumas parciales.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos simplificar esta expresión si usamos la descomposición de fracción parcial

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(vea la Sección 5.7). Entonces tenemos

Nótese que los términos se cancelan en pares. Éste es un ejemplo de una **suma telescópica.** Debido a todas las cancelaciones, la suma se pliega (como un telescopio de pirata) en sólo dos términos.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

La Figura 3 ilustra el Ejemplo 6 al mostrar las gráficas de la sucesión de términos $a_n = 1/[n(n+1)]$ y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Nótese que $a_n \to 0$ y $s_n \to 1$. Vea Ejercicios 56 y 57 para dos interpretaciones geométricas del Ejemplo 6.

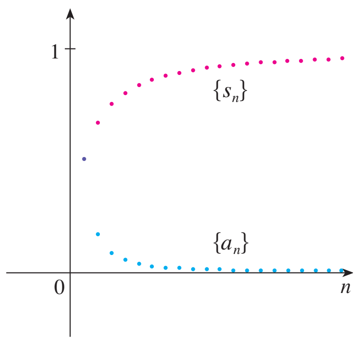


FIGURA 3

y entonces $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Por lo tanto la serie es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

V EJEMPLO 7 Muestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente.

SOLUCIÓN Para esta serie particular es conveniente considerar las sumas parciales s_2, s_4, s_8, s_{16}, $s_{32}, \ldots$ y demostrar que se hacen grandes.

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

Del mismo modo, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$ y en general

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

El método empleado en el Ejemplo 7 para demostrar que la serie armónica diverge se debe al científico francés Nicole Oresme (1323–1382).

Esto demuestra que $s_{2^n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por tanto $\{s_n\}$ es divergente. En consecuencia, la serie armónica diverge.

6 Teorema Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Entonces $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\Sigma\, a_n$ es convergente, la sucesión $\{s_n\}$ es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, también tenemos $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}\\ &= s - s = 0\end{aligned}$$

Nota 1: Con cualquier *serie* $\Sigma\, a_n$ asociamos dos *sucesiones*: la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales y la sucesión $\{a_n\}$ de sus términos. Si $\Sigma\, a_n$ es convergente, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}$ es s (la suma de la serie) y, como afirma el Teorema 6, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 0.

Nota 2: El recíproco del Teorema 6 no es verdadero en general. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no podemos concluir que $\Sigma\, a_n$ sea convergente. Observe que para la serie armónica $\Sigma\, 1/n$ tenemos $a_n = 1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero demostramos en el Ejemplo 7 que $\Sigma\, 1/n$ es divergente.

7 La Prueba para Divergencia Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

La Prueba para Divergencia se sigue del Teorema 6 porque, si la serie no es divergente, entonces es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 8 **Uso de la Prueba para divergencia** Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$ diverge.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5 + 4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Entonces la serie diverge por la Prueba para divergencia.

Nota 3: Si encontramos que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, sabemos que $\Sigma\, a_n$ es divergente. Si encontramos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no sabemos *nada* acerca de la convergencia o divergencia de $\Sigma\, a_n$. Recuerde la advertencia de la Nota 2: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría converger o podría divergir.

8 Teorema Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series convergentes, entonces así lo son las series $\Sigma\, ca_n$ (donde c es una constante), $\Sigma\, (a_n + b_n)$, y $\Sigma\, (a_n - b_n)$, y

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Estas propiedades de series convergentes se siguen de las correspondientes Leyes de límites para sucesiones de la Sección 8.1. Por ejemplo, veamos cómo se demuestra la parte (ii) del Teorema 8:

Sean

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

La n-ésima suma parcial de la serie $\sum (a_n + b_n)$ es

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

y, usando la Ecuación 5.2.10, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum (a_n + b_n)$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

EJEMPLO 9 Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$.

SOLUCIÓN La serie $\sum 1/2^n$ es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

En el Ejemplo 6 encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Entonces, por el Teorema 8, la serie dada es convergente y

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 3 \cdot 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

Nota 4: Un número finito de términos no afecta la convergencia o divergencia de una serie. Por ejemplo, suponga que podemos demostrar que la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

es convergente. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

se deduce que toda la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3 + 1)$ es convergente. Del mismo modo, si se sabe que la serie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, entonces toda la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

es también convergente.

8.2 Ejercicios

1. (a) ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
(b) ¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?

2. Explique lo que significa decir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3–8 Encuentre al menos 10 sumas parciales de la serie. Grafique la sucesión de términos y la sucesión de sumas parciales en la misma pantalla. ¿Le parece que la serie es convergente o divergente? Si es convergente, encuentre la suma. Si es divergente, explique por qué.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{10^n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

9. Sea $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
(a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.
(b) Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

10. (a) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

(b) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

11–18 Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

11. $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$ **12.** $4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \cdots$

13. $10 - 2 + 0.4 - 0.08 + \cdots$

14. $1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$ **16.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

19–30 Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$ **20.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

21. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$ **26.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0.8)^{n-1} - (0.3)^n]$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

31–34 Determine si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como una suma extensible (como en el Ejemplo 6). Si es convergente, encuentre su suma.

31. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$ **34.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

35. Sea $x = 0.99999\ldots$
(a) ¿Piensa usted que $x < 1$ o que $x = 1$?
(b) Sume una serie geométrica para hallar el valor de x.
(c) ¿Cuántas representaciones decimales tiene el número 1?
(d) ¿Cuáles números tienen más de una representación decimal?

36–40 Exprese el número como una razón entre enteros.

36. $0.\overline{73} = 0.73737373\ldots$

37. $0.\overline{2} = 0.2222\ldots$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

38. $6.2\overline{54} = 6.2545454\ldots$

39. $1.53\overline{42}$

40. $7.\overline{12345}$

41–43 Encuentre los valores de x para los cuales la serie converge. Encuentre la suma de la serie para esos valores de x.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

44. Hemos visto que la serie armónica es una serie divergente cuyos términos se aproximan a 0. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

es otra serie con esta propiedad.

CAS **45–46** Use el comando de fracción parcial de su CAS para hallar una expresión conveniente para la suma parcial, y a continuación use esta expresión para hallar la suma de la serie. Compruebe su respuesta con el uso del CAS para sumar la serie directamente.

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3}$

46. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$

47. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

encuentre a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

48. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = 3 - n2^{-n}$, encuentre a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

49. A un paciente se le prescribe una medicina y se le indica tomar una píldora de 100 mg cada ocho horas. Después de ocho horas, alrededor del 5% de la medicina queda en su cuerpo.
(a) ¿Qué cantidad de la medicina queda en el cuerpo después que el paciente toma tres píldoras?
(b) ¿Qué cantidad queda después de tomar n píldoras?
(c) ¿Qué pasa a largo plazo?

50. Para controlar una plaga agrícola llamada mosca de la fruta del Mediterráneo, N moscas macho esterilizadas se sueltan en la población general de moscas todos los días. Si s es la proporción de estas moscas esterilizadas supervivientes en un día determinado, entonces Ns^k seguirá con vida durante k días.
(a) ¿Cuántas moscas estériles hay después de n días? ¿Qué pasa a largo plazo?
(b) Si $s = 0.9$ y 10,000 machos estériles se necesitan para controlar la población de la mosca de la fruta del Mediterráneo en una zona determinada, ¿cuántos deben soltarse todos los días?

51. Cuando alguien gasta dinero en bienes y servicios, quienes reciben ese dinero también gastan parte del mismo. Las personas que reciben parte del dinero gastado dos veces gastarán otra parte, y así sucesivamente. A esta reacción en cadena los economistas le dan el nombre de *efecto multiplicador*. En una comunidad hipotética aislada, el gobierno local inicia el proceso al gastar D dólares. Suponga que cada persona que recibe dinero gasta $100c\%$ y ahorra $100s\%$ del dinero que recibe. Los valores c y s se llaman *propensión marginal a consumir* y la *propensión marginal a ahorrar* y, por supuesto, $c + s = 1$.
(a) Sea S_n el gasto total que se ha generado después de n transacciones. Encuentre una ecuación para S_n.
(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, donde $k = 1/s$. El número k se denomina *multiplicador*. ¿Cuál es el multiplicador si la propensión marginal a consumir es 80%?

Nota: El gobierno federal usa este principio para justificar un gasto deficitario. Los bancos usan este principio para justificar el préstamo del dinero de un gran porcentaje del dinero que reciben en depósitos.

52. Cierta pelota tiene la propiedad de que cada vez que cae desde una altura h sobre una superficie dura y nivelada, rebota a una altura rh donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota se deja caer desde una altura inicial de H metros.
(a) Suponiendo que la pelota continúe rebotando indefinidamente, encuentre la distancia total que recorre.
(b) Calcule el tiempo total que la pelota se mueve. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos.)
(c) Suponga que cada vez que la pelota haga contacto con la superficie con velocidad v rebota con velocidad $-kv$, donde $0 < k < 1$. ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en llegar al reposo?

53. Encuentre el valor de c si

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 + c)^{-n} = 2$$

54. Encuentre el valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

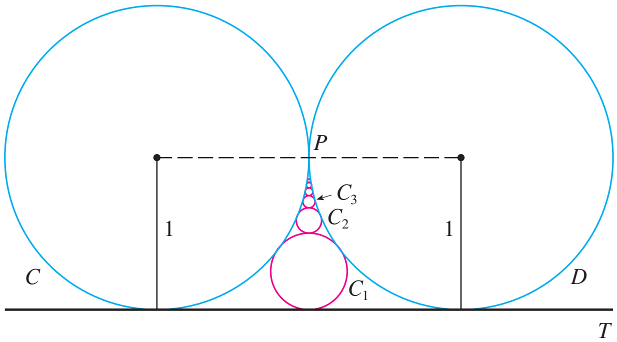
55. En el Ejemplo 7 demostramos que la serie armónica es divergente. Aquí resumimos otro método, haciendo uso del hecho de que $e^x > 1 + x$ para cualquier $x > 0$. (Vea el Ejercicio 4.3.62.)

Si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, demuestre que $e^{s_n} > n + 1$. ¿Por qué esto implica que la serie armónica es divergente?

56. Grafique las curvas $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ en una pantalla común. Al hallar las áreas entre curvas sucesivas, dé una demostración geométrica del hecho, mostrado en el Ejemplo 6, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

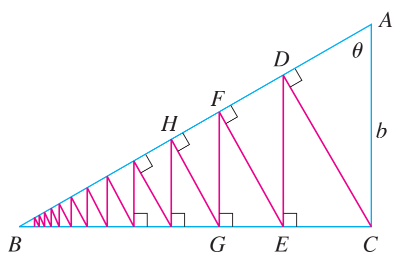
57. La figura muestra dos círculos C y D de radio 1 que se tocan en P. T es una recta tangente común; C_1 es el círculo que toca a C, D y T; C_2 es el círculo que toca a C, D y C_1; C_3 es el círculo que toca a C, D y C_2. Este procedimiento se puede continuar indefinidamente y produce una sucesión infinita de círculos $\{C_n\}$. Encuentre una expresión para el diámetro de C_n y con ello dé otra demostración geométrica del Ejemplo 6.



58. Un triángulo recto ABC está dado con $\angle A = \theta$ y $|AC| = b$. CD está trazado perpendicular a AB, DE está trazado perpendicular a BC, $EF \perp AB$, y este proceso puede continuar indefinidamente, como se ve en la figura. Encuentre la longitud total de todas las perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

en términos de b y θ.



59. ¿Qué está mal en el siguiente cálculo?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldus pensaba que esto demostraba la existencia de Dios porque "algo se ha creado de la nada.")

60. Suponga que se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \neq 0)$ es una serie convergente. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es una serie divergente.

61. Si $\Sigma\, a_n$ es convergente y $\Sigma\, b_n$ es divergente, demuestre que la serie $\Sigma\,(a_n + b_n)$ es divergente. [*Sugerencia*: Discuta por contradicción.]

62. Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son ambos divergentes, ¿$\Sigma\,(a_n + b_n)$ es necesariamente divergente?

63. Suponga que una serie $\Sigma\, a_n$ tiene términos positivos y sus sumas parciales s_n satisfacen la desigualdad $s_n \leqslant 1000$ para toda n. Explique por qué $\Sigma\, a_n$ debe converger.

64. La sucesión de Fibonacci se definió en la Sección 8.1 con las ecuaciones

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Demuestre que cada uno de los siguientes enunciados es verdadero.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1} f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

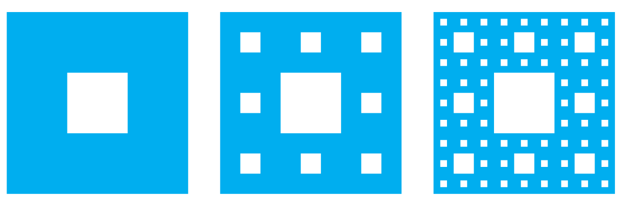
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$

65. El **conjunto de Cantor**, llamado así en honor al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), se construye como sigue. Empezamos con el intervalo cerrado [0, 1] y eliminamos el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Eso deja los dos intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y eliminamos el tercio medio abierto de cada uno. Quedan cuatro intervalos y de nuevo eliminamos el tercio medio abierto de cada uno de ellos. Continuamos este procedimiento indefinidamente, en cada paso eliminando el tercio medio abierto de cada intervalo que quede del paso precedente. El conjunto de Cantor está formado por los números que quedan en [0, 1] después de remover todos esos intervalos.

(a) Demuestre que la longitud total de todos los intervalos que se eliminan es 1. A pesar de eso, el conjunto de Cantor contiene un número infinito de números. Dé ejemplos de algunos números del conjunto de Cantor.

(b) El **tapete de Sierpinski** es un análogo bidimensional del conjunto de Cantor. Se forma quitando la novena parte central de un cuadrado de lado 1, suprimiendo después las partes centrales de los ocho cuadrados restantes, que son más pequeños, y así sucesivamente. (La figura siguiente muestra los primeros tres pasos de este procedimiento.) Demuestre que la suma de las áreas de los cuadrados es 1. Esto significa que el tapete de Sierpinski tiene un área igual a 0.



66. (a) Una sucesión $\{a_n\}$ está definida en forma recursiva por la ecuación $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, donde a_1 y a_2 pueden ser cualesquier números reales. Experimente con varios valores de a_1 y a_2 y use su calculadora para calcular el límite de la sucesión.

(b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$ en términos de a_1 y a_2 al expresar $a_{n+1} - a_n$ en términos de $a_2 - a_1$ y sumando una serie.

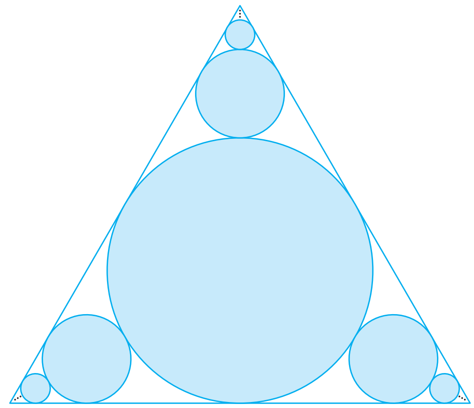
67. Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)!$.

(a) Encuentre las sumas parciales s_1, s_2, s_3 y s_4. ¿Reconoce los denominadores? Use el patrón para conjeturar una fórmula para s_n.

(b) Utilice inducción matemática para demostrar su estimación.

(c) Demuestre que la serie infinita dada es convergente y encuentre su suma.

68. En la figura siguiente se representa un número infinito de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero, con cada círculo tocando otros círculos y lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados de longitud 1, encuentre el área total ocupada por los círculos.



8.3 Pruebas de la integral y de comparación; estimación de sumas

En general, es difícil hallar la suma exacta de una serie. Esto fue posible para series geométricas y la serie $\sum 1/[n(n+1)]$ porque en cada uno de esos casos se pudo hallar una fórmula sencilla para la n-ésima suma parcial s_n. En general, no es fácil calcular $\lim_{n\to\infty} s_n$. Por tanto, en esta sección y en la siguiente desarrollamos pruebas que hagan posible determinar si una serie es convergente o divergente sin explícitamente hallar su suma pero, en algunos casos, nuestros métodos harán posible que hallemos buenas estimaciones de la suma.

En esta sección tratamos sólo con series con términos positivos, de modo que las sumas parciales son crecientes. En vista del Teorema de sucesión monótona, para determinar si una serie es convergente o divergente, necesitamos determinar si las sumas parciales están o no acotadas.

Prueba de una integral

Investiguemos la serie cuyos términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1.4636
10	1.5498
50	1.6251
100	1.6350
500	1.6429
1000	1.6439
5000	1.6447

No existe una fórmula sencilla para la suma s_n de los primeros n términos, pero la tabla generada por computadora de los valores dados al margen sugiere que las sumas parciales se están aproximando a un número cercano a 1.64 a medida que $n \to \infty$ por lo cual parece que la serie es convergente.

Podemos confirmar esta impresión con un argumento geométrico. La Figura 1 muestra la curva $y = 1/x^2$ y rectángulos que están debajo de la curva. La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud 1; la altura es igual al valor de la función $y = 1/x^2$ en el extremo derecho del intervalo.

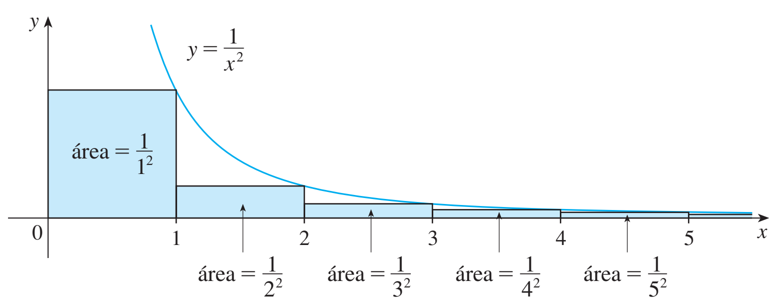


FIGURA 1

Por lo tanto, la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Si excluimos el primer rectángulo, el área total de los rectángulos restantes es más pequeña que el área bajo la curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que es el valor de la integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. En la Sección 5.10 descubrimos que esta integral impropia es convergente y tiene valor 1. Así que la figura muestra que todas las sumas parciales son menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

Por consiguiente, las sumas parciales están acotadas y la serie converge. La suma de la serie (el límite de las sumas parciales) es también menor a 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

[La suma exacta de esta serie fue calculada por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) y es $\pi^2/6$, pero la prueba de este dato está fuera del propósito de este libro.]

Ahora veamos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.2317
10	5.0210
50	12.7524
100	18.5896
500	43.2834
1000	61.8010
5000	139.9681

La tabla de valores s_n sugiere que las sumas parciales no se acercan a un número finito, de modo que sospechamos que la serie dada puede ser divergente. De nuevo, utilizamos una imagen para confirmar lo anterior. La Figura 2 muestra la curva $y = 1/\sqrt{x}$, pero esta vez usamos rectángulos cuyas partes superiores están *arriba* de la curva.

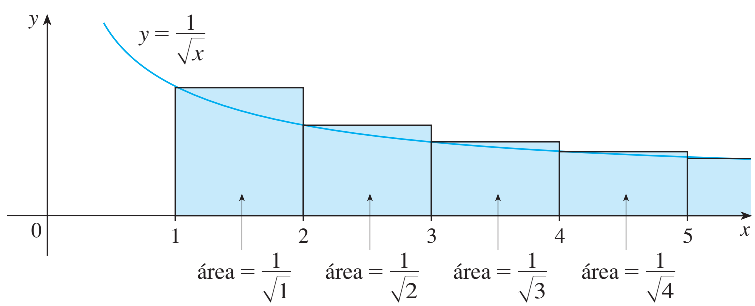


FIGURA 2

La base de cada rectángulo es un intervalo de longitud 1. La altura es igual al valor de la función $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto extremo *izquierdo* del intervalo, por lo cual la suma de las áreas de todos los rectángulos es

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esta área total es mayor que el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geqslant 1$, que es igual a la integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$, pero sabemos de la Sección 5.10 que esta integral impropia es divergente. En otras palabras, el área bajo la curva es infinita y por tanto la suma de la serie debe ser infinita, es decir, la serie es divergente.

El mismo tipo de razonamiento geométrico que empleamos para estas dos series se puede usar para demostrar la prueba siguiente.

Prueba de la integral Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. En otras palabras:

(a) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(b) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Nota: Cuando usamos la Prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Por ejemplo, al probar la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{usamos} \qquad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Tampoco es necesario que f sea siempre decreciente. Lo que es importante es que f sea *finalmente* decreciente, es decir, decreciente para x mayor que algún número N. Entonces $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente por la Nota 4 de la Sección 8.2.

V EJEMPLO 1 Uso de la Prueba de la integral

Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\ln x)/x$ es positiva y continua para $x > 1$ porque la función logaritmo es continua. Pero no es obvio que f sea o no sea decreciente, de modo que calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{x(1/x) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Entonces $f'(x) < 0$ cuando $\ln x > 1$, es decir, $x > e$. Se deduce que f es decreciente cuando $x > e$ y por tanto podemos aplicar la Prueba de la Integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Como esta integral impropia es divergente, la serie $\Sigma\,(\ln n)/n$ también es divergente por la Prueba de la Integral

V EJEMPLO 2 Convergencia de la *p*-serie

¿Para qué valores de p la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente?

SOLUCIÓN Si $p < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Si $p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. En cualquier caso, $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, de modo que la serie dada diverge por la Prueba para divergencia [vea (8.2.7)].

Para usar la Prueba de la Integral necesitamos tener capacidad para evaluar $\int_1^\infty f(x)\,dx$ y por tanto tenemos que hallar una antiderivada de f. Con frecuencia esto es difícil o imposible, de modo que también necesitamos otras pruebas para convergencia.

Si $p > 0$, entonces la función $f(x) = 1/x^p$ es claramente continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$. Encontramos en el Capítulo 5 [vea (5.10.2)] que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leqslant 1$$

Se deduce de la Prueba de la Integral que la serie $\Sigma\, 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$. (Para $p = 1$, esta serie es la serie armónica estudiada en el Ejemplo 7 en la Sección 8.2.)

La serie del Ejemplo 2 se denomina ***p*-serie.** Es importante en el resto de este capítulo, de modo que resumimos los resultados del Ejemplo 2 para futura referencia como sigue.

1 La p-serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

es convergente porque es una p-serie con $p = 3 > 1$. Pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

es divergente porque es una p-serie con $p = \frac{1}{3} < 1$.

Pruebas por comparación

La serie

2
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos recuerda la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, 1/2^n$, que es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ y por tanto es convergente. Como la serie (2) es tan semejante a una serie convergente, tenemos la impresión de que también debe ser convergente y de hecho lo es. La desigualdad

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

muestra que nuestra serie dada (2) tiene términos menores que los de la serie geométrica y por tanto todas sus sumas parciales son también menores que 1 (la suma de la serie geométrica). Esto significa que sus sumas parciales forman una sucesión creciente acotada, que es convergente. También se deduce que la suma de la serie es menor que la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Se puede usar un razonamiento similar para demostrar la prueba siguiente, que aplica sólo a series cuyos términos sean positivos. La primera parte dice que si tenemos una serie cuyos términos son *menores* que los de una serie conocida *convergente*, entonces nuestra serie también es convergente. La segunda parte dice que si empezamos con una serie cuyos términos sean *mayores* que los de una serie conocida *divergente*, entonces ella también es divergente.

Pruebas por comparación Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos.

(a) Si $\Sigma\, b_n$ es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para toda n, entonces $\Sigma\, a_n$ también es convergente.

(b) Si $\Sigma\, b_n$ es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para toda n, entonces $\Sigma\, a_n$ también es divergente.

Serie estándar para uso con Pruebas por Comparación

Al usar Pruebas por Comparación debemos, desde luego, tener alguna serie conocida $\Sigma\, b_n$ para fines de comparación. Casi todo el tiempo usamos una de estas series:

- Una p-serie $\left[\Sigma\, 1/n^p \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leqslant 1\text{; vea (1)}\right]$
- Una serie geométrica $\left[\Sigma\, ar^{n-1} \text{ converge si } |r| < 1 \text{ y diverge si } |r| \geqslant 1\text{; vea (8.2.4)}\right]$

V EJEMPLO 3 Uso de Pruebas por comparación

Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Para n grande, el término dominante en el denominador es $2n^2$, de modo que comparamos la serie dada con la serie $\Sigma\, 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

porque el lado izquierdo tiene un denominador más grande. (En la notación de Pruebas por Comparación, a_n es el lado izquierdo y b_n es el lado derecho.) Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente porque es una constante por una p-serie con $p = 2 > 1$. Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

es convergente por el inciso (a) de la Prueba por Comparación.

Aun cuando la condición $a_n \leqslant b_n$ o $a_n \geqslant b_n$ de la Prueba por Comparación está dada para toda n, necesitamos verificar que se cumpla para $n \geqslant N$, donde N es algún entero fijo, porque la convergencia de una serie no es afectada por un número finito de términos. Esto está ilustrado en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 4 Pruebe la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

SOLUCIÓN Usamos la Prueba de la Integral para probar esta serie en el Ejemplo 1, pero también podemos probarla si la comparamos con la serie armónica. Observe que $\ln n > 1$ para $n \geqslant 3$ y por tanto

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 3$$

Sabemos que $\Sigma\, 1/n$ es divergente (p-serie con $p = 1$). Así, la serie dada es divergente por la Prueba por Comparación.

Nota: Los términos de la serie bajo prueba deben ser menores que los de una serie convergente o mayores que los de una serie divergente. Si los términos son mayores que los términos de una serie convergente o menores que los de una serie divergente, entonces la Prueba por Comparación no aplica. Considere, por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

La desigualdad

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

es inútil en lo que se refiere a la Prueba por Comparación porque $\Sigma\, b_n = \Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y $a_n > b_n$. No obstante, tenemos la impresión que $\Sigma\, 1/(2^n - 1)$ debería ser convergente porque es muy semejante a la serie geométrica convergente $\Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$. En tales casos se puede usar la prueba siguiente.

Pruebas por comparación en el límite Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un número finito y $c > 0$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

Aun cuando no podemos demostrar que las Pruebas por comparación en el límite, parecen razonables porque para n grande, $a_n \approx cb_n$.

EJEMPLO 5 Uso de la prueba por comparación en el límite

Pruebe la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$.

SOLUCIÓN Usamos la Prueba por comparación en el límite con

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Como este límite existe y $\Sigma\, 1/2^n$ es una serie geométrica convergente, la serie dada converge por la Prueba por comparación en el límite.

Estimación de la suma de una serie

Suponga que hemos podido usar la Prueba de la Integral para demostrar que una serie $\Sigma\, a_n$ es convergente y ahora deseamos hallar una aproximación a la suma s de la serie. Por supuesto, cualquier suma parcial s_n es una aproximación a s porque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ pero, ¿qué tan buena es esa aproximación? Para averiguarlo, necesitamos estimar el tamaño del **residuo**

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

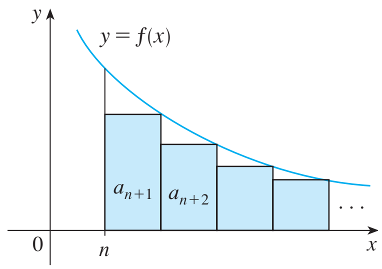


FIGURA 3

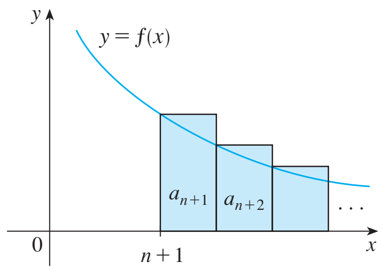


FIGURA 4

El residuo R_n es el error cometido cuando s_n, la suma de los primeros n términos, se usa como aproximación a la suma total.

Usamos la misma notación e ideas que en la Prueba de la integral, suponiendo que f es decreciente en $[n, \infty)$. Comparando las áreas de los rectángulos con el área bajo $y = f(x)$ para $x > n$ en la Figura 3, vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

Análogamente, vemos de la Figura 4 que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx$$

De modo que hemos demostrado la siguiente estimación de error.

$\boxed{3}$ **Estimación del residuo para la Prueba de la integral** Suponga que $f(k) = a_k$, donde f es una función continua, positiva, decreciente para $x \geqslant n$ y $\Sigma\, a_n$ es convergente. Si $R_n = s - s_n$, entonces

$$\int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

V EJEMPLO 6 Estimación de la suma de una serie

(a) Aproxime la suma de la serie $\Sigma\, 1/n^3$ usando la suma de los primeros 10 términos. Estime el error involucrado en esta aproximación.

(b) ¿Cuántos términos se requieren para asegurar que la suma sea precisa a no más de 0.0005?

SOLUCIÓN En los incisos (a) y (b) necesitamos conocer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Con $f(x) = 1/x^3$, que satisface las condiciones de la Prueba de la Integral, tenemos

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

(a) Aproximando la suma de la serie por la 10-ésima suma parcial, tenemos

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.1975$$

De acuerdo con la estimación del residuo en (3), tenemos

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

Por tanto, el tamaño del error es a lo sumo 0.005.

(b) La precisión a no más de 0.0005 significa que tenemos que hallar un valor de n tal que $R_n \leqslant 0.0005$. Como

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

buscamos $$\frac{1}{2n^2} < 0.0005$$

Resolviendo esta desigualdad, obtenemos

$$n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000 \qquad \text{o} \qquad n > \sqrt{1000} \approx 31.6$$

Necesitamos 32 términos para asegurar precisión a no más de 0.0005.

Si sumamos s_n a cada lado de las desigualdades en (3), tenemos

4 $$\boxed{s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx}$$

porque $s_n + R_n = s$. Las desigualdades en (4) dan una cota inferior y una cota superior para s. Dan una aproximación más precisa a la suma de la serie que lo que da la suma parcial s_n.

EJEMPLO 7 Una estimación mejorada

Use (4) con $n = 10$ para estimar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

SOLUCIÓN Las desigualdades en (4) se convierten en

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$$

Del Ejemplo 6 sabemos que

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

y por tanto $$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Usando $s_{10} \approx 1.197532$, obtenemos

$$1.201664 \leqslant s \leqslant 1.202532$$

Si aproximamos s por el punto medio de este intervalo, entonces el error es a lo sumo la mitad de la longitud del intervalo. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021 \qquad \text{con error} < 0.0005$$

Si comparamos el Ejemplo 7 con el Ejemplo 6, vemos que la estimación mejorada en (4) puede ser mucho mejor que la estimación $s \approx s_n$. Para hacer que el error sea menor a 0.0005 tuvimos que usar 32 términos en el Ejemplo 6 pero sólo 10 términos en el Ejemplo 7.

Si hemos usado la Prueba por comparación para demostrar que una serie $\Sigma\, a_n$ converge por comparación con una serie $\Sigma\, b_n$, entonces podemos estimar la suma $\Sigma\, a_n$ al comparar residuos, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

V EJEMPLO 8 Use la suma de los primeros 100 términos para aproximar la suma de la serie $\Sigma\, 1/(n^3 + 1)$. Estime el error involucrado en esta aproximación.

SOLUCIÓN Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

la serie dada es convergente por la Prueba por Comparación. El residuo T_n para la serie de comparación $\Sigma\, 1/n^3$ se calculó en el Ejemplo 6. Ahí encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

Por tanto, el residuo R_n para la serie dada satisface

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Con $n = 100$ tenemos

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0.00005$$

Usando una calculadora programable o computadora, encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0.6864538$$

con error menor a 0.00005.

8.3 Ejercicios

1. Dibuje una imagen para demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1.3}}\,dx$$

¿Qué se puede concluir acerca de la serie?

2. Suponga que f es una función continua, positiva, decreciente, para $x \geqslant 1$ y $a_n = f(n)$. Al dibujar una imagen, ordene las siguientes tres cantidades en orden creciente:

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3. Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y se sabe que $\Sigma\, b_n$ es convergente.
   (a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir acerca de $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?
   (b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir acerca de $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?

4. Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y se sabe que $\Sigma\, b_n$ es divergente.
   (a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir acerca de $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?
   (b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿qué se puede decir acerca de $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?

5. Es importante distinguir entre

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^b \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b^n$$

¿Qué nombre se da a la primera serie? ¿A la segunda? ¿Para qué valores de b converge la primera serie? ¿Para qué valores de b converge la segunda serie?

6–8 Use la Prueba de la integral para determinar si la serie es convergente o divergente.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n + 4}}$

9–10 Use la Prueba por Comparación para determinar si la serie es convergente o divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3 + 1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 - 1}$

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

11–30 Determine si la serie es convergente o divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1.4} + 3n^{-1.2})$

13. $1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{125} + \cdots$

14. $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{4}} + \dfrac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^4+1}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

23. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} + \cdots$

24. $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{17} + \cdots$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen} n}{10^n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$

31. Encuentre los valores de p para los cuales es convergente la siguiente serie.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

32. (a) Encuentre la suma parcial s_{10} de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime el error al usar s_{10} como aproximación a la suma de la serie.
(b) Use (4) con $n = 10$ para dar una estimación mejorada de la suma.
(c) Encuentre un valor de n para que s_n esté a no más de 0.00001 de la suma.

33. (a) Use la suma de los primeros 10 términos para estimar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. ¿Qué tan buena es esta estimación?
(b) Mejore esta estimación usando (4) con $n = 10$.
(c) Encuentre un valor de n que asegure que el error de la aproximación $s \approx s_n$ sea menor a 0.001.

34. Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ correcta a tres lugares decimales.

35. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^{-6}$ correcta a cinco lugares decimales.

36. ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ sería necesario sumar para hallar su suma a no más de 0.01?

37–38 Use la suma de los primeros 10 términos para aproximar la suma de la serie. Estime el error.

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

39. (a) Use una gráfica de $y = 1/x$ para demostrar que si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, entonces

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) La serie armónica diverge, pero muy lentamente. Use el inciso (a) para demostrar que la suma del primer millón de términos es menor a 15 y la suma de los primeros mil millones es menor a 22.

40. Demuestre que si deseamos aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1.001}$ para que el error sea menor a 5 en el noveno lugar decimal, entonces necesitamos sumar más de $10^{11,301}$ términos.

41. El significado de la representación decimal de un número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (donde el dígito d_i es uno de los números $0, 1, 2, \ldots, 9$) es que

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Demuestre que esta serie siempre converge.

42. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum \ln(1 + a_n)$ es convergente.

43. Si $\sum a_n$ es una serie convergente con términos positivos, ¿es cierto que $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ también es convergente?

44. Encuentre todos los valores positivos de b para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

45. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

46. Encuentre todos los valores de c para los cuales converge la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

8.4 Otras pruebas de convergencia

Las pruebas de convergencia que hemos visto hasta aquí aplican sólo a series con términos positivos. En esta sección aprenderemos a trabajar con series cuyos términos no son necesariamente positivos.

Series alternantes

Una **serie alternante** es aquella cuyos términos son positivos y negativos alternadamente. A continuación veamos dos ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$$

Vemos de estos ejemplos que el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{o} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

donde b_n es un número positivo. (De hecho, $b_n = |a_n|$.)

La prueba siguiente dice que si los términos de una serie alternante decrecen a 0 en valor absoluto, entonces la serie converge.

Prueba de la serie alternante Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad (b_n > 0)$$

satisface a

$$\text{(i)} \quad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{para toda } n$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

entonces la serie es convergente.

No presentaremos una demostración formal de esta prueba, pero la Figura 1 da una imagen de la idea que hay detrás de la prueba.

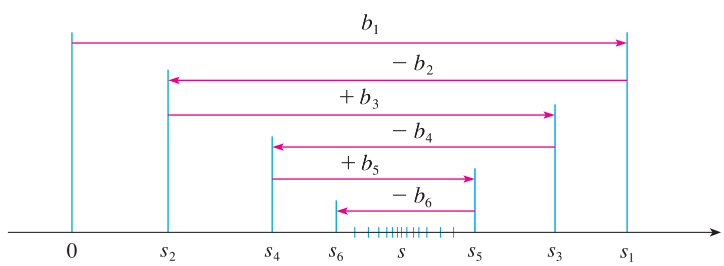


FIGURA 1

Primero marcamos $s_1 = b_1$ sobre una recta numérica. Para hallar s_2 restamos b_2, de modo que s_2 está a la izquierda de s_1. A continuación, para hallar s_3 sumamos b_3, para que s_3 quede a la derecha de s_2. Pero, como $b_3 < b_2$, s_3 está a la izquierda de s_1. Continuando de este modo, vemos que las sumas parciales oscilan en un sentido y otro. Como $b_n \to 0$, los pasos sucesivos se hacen cada vez más pequeños. Las sumas parciales pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ son crecientes y las sumas parciales impares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ son decrecientes. Entonces parece plausible que ambas sean convergentes a algún número s, que es la suma de la serie.

La Figura 2 ilustra el Ejemplo 1 al mostrar las gráficas de los términos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ y las sumas parciales s_n. Nótese la forma en que los valores de s_n hacen zigzag en el valor límite, el cual parece ser de alrededor de 0.7. De hecho, se puede demostrar que la suma exacta de la serie es $\ln 2 \approx 0.693$.

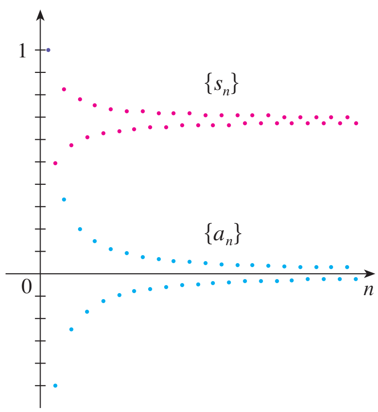


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 **Uso de la Prueba de la serie alternante** La serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisface

$$\text{(i)}\ b_{n+1} < b_n \qquad \text{porque} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

de modo que la serie es convergente por la Prueba de la serie alternante.

V EJEMPLO 2 **Una serie alternante para la cual no se cumple la Prueba de la serie alternante**

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ es alternante, pero

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

de modo que la condición (ii) no queda satisfecha. En cambio, vemos en el límite del n-ésimo término de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

Este límite no existe, por lo cual la serie diverge por la Prueba para Divergencia.

EJEMPLO 3 Pruebe la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$.

SOLUCIÓN La serie dada es alternante, por lo cual tratamos de verificar las condiciones (i) y (ii) de la Prueba de la serie alternante.

A diferencia de la situación del Ejemplo 1, no es obvio que la sucesión dada por $b_n = n^2/(n^3 + 1)$ es decreciente. No obstante, si consideramos la función relacionada $f(x) = x^2/(x^3 + 1)$, encontramos que

$$f'(x) = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2}$$

Como estamos considerando sólo las x positivas, vemos que $f'(x) < 0$ si $2 - x^3 < 0$, esto es, $x > \sqrt[3]{2}$. Así, f es decreciente en el intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Esto significa que $f(n + 1) < f(n)$ y por tanto $b_{n+1} < b_n$ cuando $n \geqslant 2$. (La desigualdad $b_2 < b_1$ se puede verificar directamente pero todo lo que en realidad importa es que la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente en última instancia.)

En lugar de verificar la condición (i) de la Prueba de la Serie Alternante al calcular una derivada, podríamos verificar que $b_{n+1} < b_n$ directamente con el uso de la técnica de Solución 1 del Ejemplo 12 de la Sección 8.1.

La condición (ii) se verifica fácilmente:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^3}} = 0$$

Entonces, la serie dada es convergente por la Prueba de la serie alternante.

El error involucrado en el uso de la suma parcial s_n como aproximación a la suma total s es el residuo $R_n = s - s_n$. El siguiente teorema dice que para series que satisfagan las condiciones de la Prueba de la serie alternante, el tamaño del error es menor a b_{n+1}, que es el valor absoluto del primer término ignorado (en la aproximación).

Teorema de la estimación de la serie alternante Si $s = \Sigma\,(-1)^{n-1}b_n$ es la suma de una serie alternante que satisfaga

$$\text{(i)}\ \ b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

entonces $$|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$$

Se puede ver geométricamente por qué esto es cierto al ver la Figura 1. Nótese que $s - s_4 < b_5$, $|s - s_5| < b_6$, y así sucesivamente.

Por definición, $0! = 1$.

V EJEMPLO 4 Uso del Teorema de estimación de la serie alternante

Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ correcta a tres lugares decimales.

SOLUCIÓN Primero observe que la serie es convergente por la Prueba de la serie alternante porque

$$\text{(i)}\quad b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!\,(n+1)} < \frac{1}{n!} = b_n$$

$$\text{(ii)}\quad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n!} \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty$$

Para presentir de cuántos términos necesitamos usar en nuestra aproximación, escribamos los primeros pocos términos de la serie:

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

Nótese que $$b_7 = \tfrac{1}{5040} < \tfrac{1}{5000} = 0.0002$$

y $$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0.368056$$

Por el Teorema de Estimación de la Serie Alternante sabemos que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0.0002$$

Este error menor a 0.0002 no afecta el tercer lugar decimal, de modo que tenemos $s \approx 0.368$ correcto a tres lugares decimales.

En la Sección 8.7 demostraremos que $e^x = \Sigma_{n=0}^{\infty}\, x^n/n!$ para toda x, y lo que hemos obtenido en el Ejemplo 4 es en realidad una aproximación al número e^{-1}.

Nota: La regla de que el error (al usar s_n para aproximar s) es menor que el primer término ignorado, en general, es válida sólo para series alternantes que satisfacen las condiciones del Teorema de estimación de la serie alternante. La regla no aplica a otros tipos de series.

Convergencia absoluta

Dada cualquier serie $\Sigma\, a_n$, podemos considerar la correspondiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

Tenemos pruebas de convergencia para series con términos positivos y para series alternantes. Pero ¿qué pasa si los signos de los términos cambian irregularmente? Veremos en el Ejemplo 7 que la idea de convergencia absoluta a veces ayuda en tales casos.

Definición Una serie $\Sigma\, a_n$ se denomina **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\Sigma\, |a_n|$ es convergente.

Nótese que si $\Sigma\, a_n$ es una serie con términos positivos, entonces $|a_n| = a_n$ y por tanto la convergencia absoluta es lo mismo que convergencia.

EJEMPLO 5 **Determinación de convergencia absoluta** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es una serie p convergente ($p = 2$).

EJEMPLO 6 **Una serie que es convergente pero no absolutamente convergente**
Sabemos que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es convergente (vea el Ejemplo 1), pero no es absolutamente convergente porque la serie correspondiente de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que es la serie armónica (p-serie con $p = 1$) y por tanto es divergente.

El Ejemplo 6 muestra que es posible para una serie ser convergente pero no absolutamente convergente. No obstante, el Teorema 1 muestra que la convergencia absoluta implica convergencia.

$\boxed{1}$ **Teorema** Si una serie $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Para ver por qué el Teorema 1 es verdadero, observe que la desigualdad

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

es verdadera porque $|a_n|$ es a_n o $-a_n$. Si $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\Sigma\,|a_n|$ es convergente, de modo que $\Sigma\, 2|a_n|$ es convergente. Por tanto, por la Prueba para comparación, $\Sigma\,(a_n + |a_n|)$ es convergente. Entonces

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

es la diferencia de dos series convergentes y por tanto es convergente.

V EJEMPLO 7 Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

es convergente o divergente.

La Figura 3 muestra las gráficas de los términos a_n y sumas parciales s_n de la serie del Ejemplo 7. Nótese que la serie no es alternante pero tiene términos positivos y negativos.

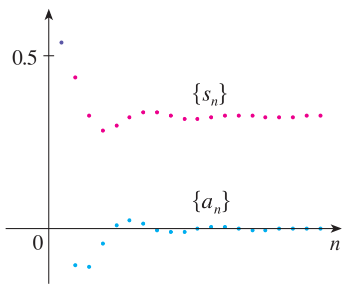


FIGURA 3

SOLUCIÓN Esta serie tiene términos tanto positivos como negativos, pero no es alternante. (El primer término es positivo, los siguientes tres son negativos, y los siguientes tres son positivos. Los signos cambian de manera irregular.) Podemos aplicar la Prueba por comparación a la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Como $|\cos n| \leqslant 1$ para toda n, tenemos

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\Sigma\, 1/n^2$ es convergente (p-serie con $p = 2$) y por tanto $\Sigma\,|\cos n|/n^2$ es convergente por la Prueba por comparación. Entonces la serie dada $\Sigma\,(\cos n)/n^2$ es absolutamente convergente y por tanto convergente por el Teorema 1.

Prueba de la razón

La prueba siguiente es muy útil para determinar si una serie dada es absolutamente convergente.

Prueba de la razón

(i) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y por tanto convergente).

(ii) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ o $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, la Prueba de la razón no es concluyente; esto es, no se puede obtener ninguna conclusión acerca de la convergencia o divergencia de $\Sigma\, a_n$.

La Prueba de la razón se puede demostrar al comparar la serie dada contra una serie geométrica. Es comprensible que series geométricas sean involucradas porque, para esas series, la razón r de términos consecutivos es constante y la serie converge si $|r| < 1$. En el inciso (i) de la Prueba de la razón, la razón entre términos consecutivos no es constante pero $|a_{n+1}/a_n| \to L$ de modo que, para n grande, $|a_{n+1}/a_n|$ es casi constante y la serie converge si $L < 1$.

Nota: El inciso (iii) de la Prueba de la razón dice que si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la prueba no da información. Por ejemplo, para la serie convergente $\Sigma\, 1/n^2$ tenemos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

mientras que para la serie divergente $\Sigma\, 1/n$ tenemos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Por tanto, si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría converger o diverger. En este caso la Prueba de la razón falla y debemos usar alguna otra prueba.

EJEMPLO 8 **Uso de la Prueba de la razón** Pruebe la convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$.

SOLUCIÓN Usamos la prueba de la razón con $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Así, por la Prueba de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y por lo tanto convergente.

V **EJEMPLO 9** Probar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Las series que contienen factoriales u otros productos (incluyendo una constante elevada a la n-ésima potencia) con frecuencia se prueban usando la Prueba de la razón.

SOLUCIÓN Como los términos $a_n = n^n/n!$ son positivos, no necesitamos los signos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

(vea la Ecuación 3.7.6). Como $e > 1$, la serie dada es divergente por la Prueba de la razón.

www.stewartcalculus.com

Ahora tenemos varias pruebas para convergencia de series. Por tanto, dada una serie, ¿cómo saber cuál prueba usar? Para obtener asesoría, haga clic en *Additional Topics* y luego en *Strategy for Testing Series.*

Nota: Aun cuando la Prueba de la razón funciona en el Ejemplo 9, otro método es usar la Prueba para divergencia. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

se deduce que a_n no se aproxima a 0 cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie dada es divergente por la Prueba de la divergencia.

8.4 Ejercicios

1. (a) ¿Qué es una serie alternante?
(b) ¿Bajo qué condiciones converge una serie alternante?
(c) Si estas condiciones se satisfacen, ¿qué se puede decir acerca del residuo después de n términos?

2. ¿Qué se puede decir acerca de la serie $\sum a_n$ en cada uno de los siguientes casos?

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.8$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

3–10 Pruebe la convergencia o divergencia de la serie.

3. $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$

4. $-\frac{3}{4} + \frac{5}{5} - \frac{7}{6} + \frac{9}{7} - \frac{11}{8} + \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+9}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

11. La 50ª suma parcial s_{50} de la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ ¿es exceso de estimación o subestimación de la suma total? Explique.

12. Calcule las primeras 10 sumas parciales de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

y grafique la sucesión de términos y la sucesión de sumas parciales en la misma pantalla. Estime el error al usar la 10ª suma parcial para aproximar la suma total.

13. ¿Para qué valores de p es convergente la serie siguiente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

14–16 Demuestre que la serie es convergente. ¿Cuántos términos de la serie necesitamos sumar para hallar la suma a la precisión indicada?

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,5^n}$ $\quad(|\text{error}| < 0.0001)$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ $\quad(|\text{error}| < 0.00005)$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n}$ $\quad(|\text{error}| < 0.01)$

17–18 Grafique la sucesión de términos y la sucesión de sumas parciales en la misma pantalla. Use la gráfica para hacer una estimación aproximada de la suma de la serie. A continuación use el Teorema de la estimación de la serie alternante para estimar la suma correcta a cuatro lugares decimales.

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0.8)^n}{n!}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{8^n}$

19–20 Aproxime la suma de la serie correcta a cuatro lugares decimales.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$ **20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

21–34 Determine si la serie es absolutamente convergente.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{2}{3}\right)^k$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n^4}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}$

33. $\displaystyle 1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$

34. $\displaystyle \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$

35. Los términos de una serie están definidos en forma recursiva por las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$$

Determine si $\Sigma\, a_n$ converge o diverge.

36. Una serie $\Sigma\, a_n$ está definida por las ecuaciones

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine si $\Sigma\, a_n$ converge o diverge.

37. ¿Para cuál de las series siguientes no es concluyente la Prueba de la razón (es decir, falla o da una respuesta definitiva)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

38–39 Sea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

La **Prueba de la raíz** dice lo siguiente:

(i) Si $L < 1$, entonces $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente.
(ii) Si $L > 1$ (o $L = \infty$), entonces $\Sigma\, a_n$ es divergente.
(iii) Si $L = 1$, entonces la Prueba de la raíz no es concluyente.

(Al igual que la Prueba de la razón, la Prueba de la raíz se demuestra por comparación con una serie geométrica.) Determine si la serie dada es absolutamente convergente.

38. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n}$

40. ¿Para cuáles enteros positivos k es convergente la serie siguiente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

41. (a) Demuestre que $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para toda x.
(b) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x.

42. Hacia el año 1910, Srinivasa Ramanujan, matemático de la India, descubrió la fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper usó esta serie en 1985 para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π.
(a) Verifique que la serie sea convergente.
(b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π obtiene el lector si usa sólo el primer término de la serie? ¿Qué pasa si usa dos términos?

8.5 Serie de potencias

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y las c_n son constantes llamadas **coeficientes** de la serie. Para cada valor de x, la serie (1) es una serie de constantes que podemos probar para ver si hay convergencia o divergencia. Una serie de potencias puede converger para algunos valores de x y diverger para otros valores de x. La suma de la serie es una función

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cuyo dominio es el conjunto de toda x para la cual la serie converge. Nótese que f se asemeja a un polinomio. La única diferencia es que f tiene un número infinito de términos.

Serie trigonométrica

Una serie de potencias es una serie en la que cada término es una función de potencia. Una **serie trigonométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es una serie cuyos términos son funciones trigonométricas. Este tipo de series se estudia en el website

www.stewartcalculus.com

Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Fourier Series*.

Por ejemplo, si tomamos $c_n = 1$ para toda n, la serie de potencias se convierte en la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge cuando $-1 < x < 1$ y diverge cuando $|x| \geqslant 1$. (Vea Ecuación 8.2.5.)

Más generalmente, una serie de la forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias en $(x - a)$** o una **serie de potencias centrada en a** o una **serie de potencias alrededor de a**. Nótese que al escribir el término correspondiente a $n = 0$ en las Ecuaciones 1 y 2 hemos adoptado la convención de que $(x - a)^0 = 1$ aun cuando $x = a$. Nótese también que cuando $x = a$ todos los términos son 0 para $n \geqslant 1$ y por tanto la serie de potencias (2) siempre converge cuando $x = a$.

V EJEMPLO 1 Una serie de potencias que converge sólo en su centro

¿Para qué valores de x es convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$?

SOLUCIÓN Usamos la Prueba de la razón. Si a_n denota el coeficiente del término x^n, el n-ésimo término de la serie, entonces $a_n = n!x^n$. Si $x \neq 0$, tenemos

Nótese que

$$(n+1)! = (n+1)n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= (n+1)n!$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

Por la Prueba de la razón, la serie diverge cuando $x \neq 0$. Así, la serie dada converge sólo cuando $x = 0$.

V EJEMPLO 2 Uso de la Prueba de la razón para determinar si converge una serie de potencias

¿Para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$?

SOLUCIÓN Sea $a_n = (x - 3)^n/n$. Entonces

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \to |x-3| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

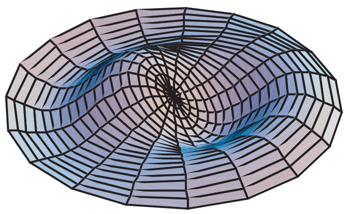
Por la Prueba de la razón, la serie dada es absolutamente convergente y, por tanto, convergente cuando $|x - 3| < 1$ y divergente cuando $|x - 3| > 1$. Ahora

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

de modo que la serie converge cuando $2 < x < 4$ y diverge cuando $x < 2$ o $x > 4$.

La Prueba de la razón no da información cuando $|x - 3| = 1$, por lo cual debemos considerar $x = 2$ y $x = 4$ separadamente. Si ponemos $x = 4$ en la serie, se convierte en $\Sigma\, 1/n$, la serie armónica divergente. Si $x = 2$, la serie es $\Sigma\, (-1)^n/n$, que converge por la prueba de la serie alternante. Entonces, la serie de potencias dada converge para $2 \leqslant x < 4$.

National Film Board of Canada



Nótese lo estrechamente que el modelo generado por computadora (que contiene funciones de Bessel y funciones coseno) se compara con la fotografía de un membrana vibratoria de hule.

Veremos que el principal uso de una serie de potencias es que proporciona una forma de representar algunas de las funciones más importantes que aparecen en matemáticas, física y química. En particular, la suma de la serie de potencias del siguiente ejemplo se denomina **función de Bessel**, en honor al astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784–1846), y la función dada en el Ejercicio 29 es otro ejemplo de una función de Bessel. De hecho, estas funciones aparecieron primero cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento planetario. Desde entonces, estas funciones se han aplicado en numerosas situaciones físicas, incluyendo la distribución de temperatura en una placa circular y la forma de un parche de tambor en vibración.

EJEMPLO 3 **Una serie de potencias que converge para todos los valores de x** Encuentre el dominio de la función de Bessel de orden 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right| \\ &= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}} \\ &= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{para toda } x\end{aligned}$$

Entonces, por la Prueba de la razón, la serie dada converge para todos los valores de x. En otras palabras, el dominio de la función de Bessel J_0 es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

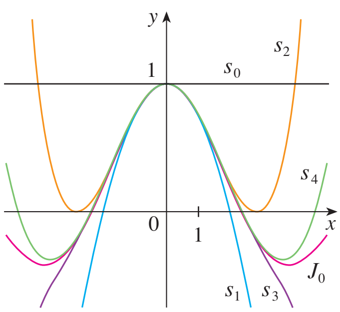


FIGURA 1
Sumas parciales de la función de Bessel J_0

Recuerde que la suma de una serie es igual al límite de la sucesión de sumas parciales. Entonces, cuando definimos la función de Bessel en el Ejemplo 3 como la suma de una serie queremos decir que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{donde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

Las primeras sumas parciales son

$$s_0(x) = 1 \qquad s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147{,}456}$$

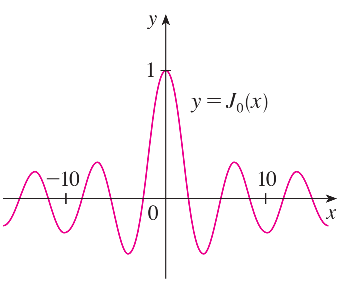


FIGURA 2

La Figura 1 muestra las gráficas de estas sumas parciales, que son polinomios. Todas son aproximaciones a la función J_0, pero nótese que las aproximaciones mejoran cuando más términos se incluyen. La Figura 2 muestra una gráfica más completa de la función de Bessel.

Para la serie de potencias que hemos visto hasta aquí, el conjunto de valores de x para el cual la serie es convergente siempre ha resultado ser un intervalo [un intervalo finito para la serie geométrica y la serie del Ejemplo 2, el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ del Ejemplo 3, y un intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ del Ejemplo 1.] El siguiente teorema, que no demostraremos, dice que es verdadero en general.

3 Teorema Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ determinada, hay sólo tres posibilidades:

(i) La serie converge sólo cuando $x = a$.

(ii) La serie converge para toda x.

(iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.

El número R en el caso (iii) se denomina **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso (i) y $R = \infty$ en el caso (ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es aquel que está formado por todos los valores de x para los cuales converge la serie. En el caso (i) el intervalo consta de sólo un punto a. En el caso (ii), el intervalo es $(-\infty, \infty)$. En el caso (iii) nótese que la desigualdad $|x-a| < R$ se puede reescribir como $a - R < x < a + R$. Cuando x es el *punto extremo* del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede pasar, esto es, la serie puede converger en uno o ambos puntos extremos o puede diverger en ambos puntos extremos. Entonces en el caso (iii) hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia:

$$(a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+R) \qquad [a-R, a+R]$$

La situación está ilustrada en la Figura 3.

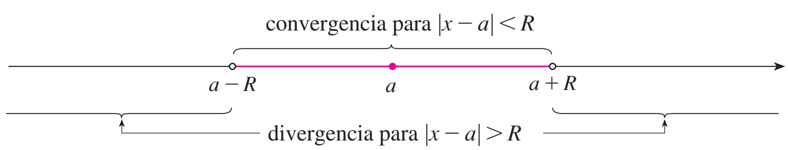


FIGURA 3

Resumimos aquí el radio e intervalo de convergencia para cada uno de los ejemplos ya considerados en esta sección.

	Serie	Radio de convergencia	Intervalo de convergencia
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Ejemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Ejemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Ejemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

La Prueba de la razón se puede usar para determinar el radio de convergencia R en la mayor parte de los casos. La Prueba de la razón falla cuando x es un punto extremo del intervalo de convergencia, de modo que los puntos extremos deben comprobarse con alguna otra prueba.

EJEMPLO 4 Encuentre el radio de convergencia e intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-3)^n x^n/\sqrt{n+1}$. Entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}\,|x| \to 3|x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Por la Prueba de la razón, la serie converge si $3|x| < 1$ y diverge si $3|x| > 1$. Entonces, converge si $|x| < \frac{1}{3}$ y diverge si $|x| > \frac{1}{3}$. Esto significa que el radio de convergencia es si $R = \frac{1}{3}$.

Sabemos que la serie converge en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, pero ahora debemos probar convergencia en los puntos extremos de este intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

que diverge. (Use la Prueba de la integral o simplemente observe que es una p-serie con $p = \frac{1}{2} < 1$.) Si $x = \frac{1}{3}$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que converge por la Prueba de la serie alternante. Por tanto, la serie de potencias dada converge cuando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$, por lo cual el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

V EJEMPLO 5 Encuentre el radio de convergencia e intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUCIÓN Si $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Usando la Prueba de la razón, vemos que la serie converge si $|x+2|/3 < 1$ y diverge si $|x+2|/3 > 1$. Entonces converge si $|x+2| < 3$ y diverge si $|x+2| > 3$. Por tanto, el radio de convergencia es $R = 3$.

La desigualdad $|x+2| < 3$ se puede escribir como $-5 < x < 1$, por lo cual probamos la serie en los puntos extremos -5 y 1. Cuando $x = -5$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

que diverge por la Prueba para divergencia [$(-1)^n n$ no converge a 0]. Cuando $x = 1$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

que también diverge por la Prueba para divergencia. Así, la serie converge sólo cuando $-5 < x < 1$, por lo cual el intervalo de convergencia es $(-5, 1)$.

8.5 Ejercicios

1. ¿Qué es una serie de potencias?

2. (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se encuentra?
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se encuentra?

3–24 Encuentre el radio de convergencia e intervalo de convergencia de la serie.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n} x^n$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n\,3^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ es convergente, ¿se sigue que la serie siguiente es convergente?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

26. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué se puede decir acerca de la convergencia o divergencia de las series siguientes?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

27. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

28. Grafique las primeras varias sumas parciales $s_n(x)$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, junto con la función suma $f(x) = 1/(1-x)$, en una pantalla común. ¿En qué intervalo parecen convergir a $f(x)$ estas sumas parciales?

29. La función J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!\,2^{2n+1}}$$

se denomina *función de Bessel de orden 1*.
(a) Encuentre su dominio.
(b) Grafique las primeras de varias sumas parciales en una pantalla común.
CAS (c) Si su CAS tiene funciones Bessel ya integradas, grafique J_1 en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso (b) y observe la forma en que las sumas parciales aproximan J_1.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

30. La función A definida por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

se denomina *función de Airy* en honor al matemático y astrónomo inglés Sir George Airy (1801-1892).

(a) Encuentre el dominio de la función de Airy.

(b) Grafique las primeras varias sumas parciales en una pantalla común.

(c) Si su CAS tiene funciones de Airy ya integradas, grafique A en la misma pantalla como las sumas parciales del inciso (b) y observe la forma en que las sumas parciales aproximan A.

31. Una función f está definida por

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

esto es, sus coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n+1} = 2$ para toda $n \geqslant 0$. Encuentre el intervalo de convergencia de la serie y encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

32. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_{n+4} = c_n$ para toda $n \geqslant 0$, encuentre el intervalo de convergencia de la serie y una fórmula para $f(x)$.

33. Suponga que la serie $\sum c_n x^n$ tiene radio de convergencia 2 y la serie $\sum d_n x^n$ tiene radio de convergencia 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum (c_n + d_n)x^n$?

34. Suponga que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^n$ es R. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^{2n}$?

35. ¿Es posible hallar una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $[0, \infty)$? Explique.

36. Sean p y q números reales con $p < q$. Encuentre una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es

(a) (p, q) (b) $(p, q]$

(c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

8.6 Representaciones de funciones como series de potencias

En esta sección aprenderemos a representar ciertos tipos de funciones como sumas de series de potencias al manipular series geométricas o derivar o integrar esas series. El lector podría preguntarse por qué siempre deseamos expresar una función conocida como suma de un número infinito de términos. Esta estrategia es útil para integrar funciones que no tienen antiderivadas elementales, para resolver ecuaciones diferenciales, y para aproximar funciones por medio de polinomios. (En ciencias se hace esto para simplificar las expresiones que se manejan; en computación, para representar funciones en calculadoras y computadoras.)

Empezaremos con una ecuación que ya hemos visto antes:

1
$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1}$$

Una ilustración geométrica de la Ecuación 1 se muestra en la Figura 1. Como la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales, tenemos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

donde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

es la n-ésima suma parcial. Nótese que cuando n aumenta, $s_n(x)$ se hace una mejor aproximación a $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

Encontramos primero esta ecuación en el Ejemplo 5 de la Sección 8.2, donde la obtuvimos al observar que la serie es geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Pero aquí nuestro punto de vista es diferente. Ahora consideramos la Ecuación 1 como que expresa la función $f(x) = 1/(1 - x)$ como una suma de una serie de potencias.

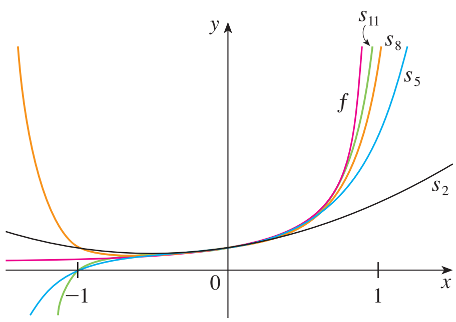


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y algunas sumas parciales

V EJEMPLO 1 Hallar una nueva serie de potencias a partir de una antigua Exprese $1/(1 + x^2)$ como la suma de una serie de potencias y encuentre el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN Sustituyendo x por $-x^2$ en la Ecuación 1, tenemos

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como ésta es una serie geométrica, converge cuando $|-x^2| < 1$, esto es, $x^2 < 1$ o $|x| < 1$. Por tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. (Desde luego, podríamos haber determinado el radio de convergencia al aplicar la Prueba de la razón, pero ese trabajo no es necesario aquí.)

EJEMPLO 2 Encuentre una representación de serie de potencias para $1/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Para poner esta función en la forma del lado izquierdo de la Ecuación 1 primero factorizamos un 2 del denominador:

$$\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1 - \left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

Esta serie converge cuando $|-x/2| < 1$, es decir, $|x| < 2$. Entonces, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

EJEMPLO 3 Encuentre una representación de serie de potencias de $x^3/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Como esta función es sólo x^3 veces la función del Ejemplo 2, todo lo que tenemos que hacer es multiplicar por x^3 la serie:

Es legítimo pasar x^3 al otro lado del signo de sigma porque no depende de n. [Use el Teorema 8.2.8(i) con $c = x^3$.]

$$\frac{x^3}{x + 2} = x^3 \cdot \frac{1}{x + 2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3}$$
$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Otra forma de escribir esta serie es como sigue:

$$\frac{x^3}{x + 2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Al igual que en el Ejemplo 2, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

Derivación e integración de una serie de potencias

La suma de una serie de potencias es una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Nos gustaría tener capacidad de derivar e integrar esas funciones, y el siguiente teorema (que no demostraremos) dice que podemos hacerlo al derivar o integrar cada término individual de la serie, como lo haríamos para un polinomio. Esto se denomina **derivación e integración término a término**.

$\boxed{2}$ **Teorema** Si la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y por tanto continua) en el intervalo $(a - R, a + R)$ y

$$\text{(i)}\quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$\text{(ii)}\quad \int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias de las Ecuaciones (i) y (ii) son ambos R.

En la parte (ii) $\int c_0\,dx = c_0x + C_1$ se escribe como $c_0(x-a) + C$, donde $C = C_1 + ac_0$, de modo que todos los términos de la serie tienen la misma forma.

Nota 1: Las Ecuaciones (i) y (ii) del Teorema 2 se pueden reescribir en la forma

$$\text{(iii)}\quad \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

$$\text{(iv)}\quad \int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\,dx$$

www.stewartcalculus.com

La idea de derivar una serie de potencias término a término es la base para un poderoso método para resolver ecuaciones diferenciales. Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Using Series to Solve Differential Equations*.

Sabemos que, para sumas finitas, la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la integral de una suma es la suma de las integrales. Las Ecuaciones (iii) y (iv) expresan que lo mismo es cierto para sumas infinitas, siempre que trabajemos con *series de potencias*. (Para otros tipos de series de funciones la situación no es tan sencilla; vea el Ejercicio 36.)

Nota 2: Aun cuando el Teorema 2 dice que el radio de convergencia sigue siendo el mismo cuando una serie de potencias se deriva o integra, no quiere decir que el *intervalo* de convergencia siga siendo el mismo. Puede ocurrir que la serie original converja en un punto extremo, mientras que la serie derivada diverja ahí. (Vea el Ejercicio 37.)

EJEMPLO 4 **Derivar una serie de potencias** En el Ejemplo 3 de la Sección 8.5 vimos que la función de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

está definida para toda x. Entonces, por el Teorema 2, J_0 es derivable para toda x y su derivada se encuentra por derivación término a término como sigue:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$

V EJEMPLO 5 Exprese $1/(1-x)^2$ como una serie de potencias al derivar la Ecuación 1. ¿Cuál es el radio de convergencia?

SOLUCIÓN Derivando cada lado de la ecuación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

obtenemos
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Si lo deseamos, podemos sustituir n por $n+1$ y escribimos la respuesta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acuerdo con el Teorema 2, el radio de convergencia de la serie derivada es el mismo que el radio de convergencia de la serie original, es decir, $R = 1$.

EJEMPLO 6 **Hallar una nueva serie de potencias al integrar una anterior** Encuentre una representación de serie de potencias para $\ln(1+x)$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Observamos que la derivada de esta función es $1/(1+x)$. De la Ecuación 1 tenemos

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad |x| < 1$$

Integrando ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\,dx \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1
\end{aligned}$$

Para determinar el valor de C ponemos $x = 0$ en esta ecuación y obtenemos $\ln(1+0) = C$. Entonces $C = 0$ y

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

El radio de convergencia es el mismo que para la serie original: $R = 1$.

V EJEMPLO 7 Encuentre una representación de una serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1}x$.

SOLUCIÓN Observamos que $f'(x) = 1/(1+x^2)$ y encontramos la serie pedida al integrar la serie de potencias de $1/(1+x^2)$ hallada en el Ejemplo 1.

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}x &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx \\
&= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots
\end{aligned}$$

La serie de potencias para $\tan^{-1}x$ obtenida en el Ejemplo 7 se denomina *serie de Gregory* en honor al matemático escocés James Gregory (1638–1675), quien había anticipado algunos de los descubrimientos de Newton. Hemos demostrado que la serie de Gregory es válida cuando $-1 < x < 1$, pero resulta (aun cuando no es fácil demostrar) que también es válida cuando $x = \pm 1$. Nótese que cuando $x = 1$ la serie se convierte en

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Este hermoso resultado se conoce como la fórmula de Leibniz para π.

Para hallar C ponemos $x = 0$ y obtenemos $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Por tanto,

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Como el radio de convergencia de la serie para $1/(1 + x^2)$ es 1, el radio de convergencia de esta serie para $\tan^{-1}x$ es también 1.

EJEMPLO 8

(a) Evalúe $\int [1/(1 + x^7)]\,dx$ como una serie de potencias.

(b) Use el inciso (a) para aproximar $\int_0^{0.5} [1/(1 + x^7)]\,dx$ correcta a no más de 10^{-7}.

SOLUCIÓN

(a) El primer paso es expresar el integrando, $1/(1 + x^7)$, como la suma de una serie de potencias. Al igual que en el Ejemplo 1, empezamos con la Ecuación 1 y sustituimos x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1 + x^7} = \frac{1}{1 - (-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Este ejemplo demuestra una forma en la que son útiles representaciones de una serie de potencias. Integrar $1/(1 + x^7)$ manualmente es muy difícil. Diferentes sistemas computarizados de álgebra dan diferentes formas de la respuesta, pero todos son por demás complicados. (Si el lector tiene un CAS, inténtelo.) La respuesta a la serie infinita que obtenemos en el Ejemplo 8(a) es en realidad mucho más fácil de trabajar con la respuesta finita dada por un sistema computarizado de álgebra (CAS).

Ahora integramos término a término:

$$\int \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Esta serie converge para $|-x^7| < 1$, es decir, para $|x| < 1$.

(b) Al aplicar el Teorema de evaluación no importa cuál antiderivada usemos, de modo que usemos la antiderivada del inciso (a) con $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Esta serie infinita es el valor exacto de la integral definida, pero como es una serie alternante podemos aproximar la suma usando el Teorema de estimación de la serie alternante. Si dejamos de sumar después del término con $n = 3$, el error es menor al del término con $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

Por tanto, tenemos

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$

8.6 Ejercicios

1. Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es 10, ¿cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$? ¿Por qué?

2. Supongamos que el lector sabe que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < 2$. ¿Qué puede decir acerca de la serie siguiente? ¿Por qué?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 Encuentre una representación de serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ **4.** $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ **6.** $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$ **8.** $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ **10.** $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

11. (a) Use derivación para hallar una representación de serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Use el inciso (a) para hallar una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Use el inciso (b) para hallar una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

12. (a) Use la Ecuación 1 para hallar una representación de una serie de potencias para $f(x) = \ln(1-x)$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Use el inciso (a) para hallar una serie de potencias para $f(x) = x\ln(1-x)$.

(c) Poniendo $x = \frac{1}{2}$ en su resultado del inciso (a), exprese ln 2 como la suma de una serie infinita.

13–18 Encuentre una representación de una serie de potencias para la función y determine el radio de convergencia.

13. $f(x) = \ln(5-x)$ **14.** $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x^3)$

15. $f(x) = \dfrac{x}{(1+4x)^2}$ **16.** $f(x) = \left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3$

17. $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$ **18.** $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

19–22 Encuentre una representación de una serie de potencias para f, y grafique f y varias sumas parciales $s_n(x)$ en la misma pantalla. ¿Qué ocurre cuando n aumenta?

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$ **20.** $f(x) = \ln(x^2+4)$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ **22.** $f(x) = \tan^{-1}(2x)$

23–26 Evalúe la integral indefinida como una serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia?

23. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$ **24.** $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \tan^{-1}(x^2)\,dx$

27–30 Use una serie de potencias para aproximar la integral definida a seis lugares decimales.

27. $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_0^{0.4} \ln(1+x^4)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{0.1} x\arctan(3x)\,dx$ **30.** $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

31. Use el resultado del Ejemplo 7 para calcular arctan 0.2 correcto a cinco lugares decimales.

32. Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

es una solución a la ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

33. (a) Demuestre que J_0 (la función de Bessel de orden 0 dada en el Ejemplo 4) satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Evalúe $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ correcto a tres lugares decimales.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

34. La función de Bessel de orden 1 está definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Demuestre que J_1 satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

35. (a) Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Demuestre que $f(x) = e^x$.

36. Sea $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^2$. Demuestre que la serie $\Sigma f_n(x)$ converge para todos los valores de x pero la serie de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ diverge cuando $x = 2n\pi$, n un entero. ¿Para qué valores de x converge la serie $\Sigma f_n''(x)$?

37. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Encuentre los intervalos de convergencia para f, f' y f''.

38. (a) Empezando con la serie geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, encuentre la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Encuentre la suma de cada una de las siguientes series.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $|x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Encuentre la suma de cada una de las siguientes series.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$, $|x| < 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

39. Use la serie de potencias para $\tan^{-1}x$ para demostrar la siguiente expresión para π como la suma de una serie infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

40. (a) Completando el cuadrado, demuestre que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Factorizando $x^3 + 1$ como suma de cubos, reescriba la integral del inciso (a). A continuación exprese $1/(x^3 + 1)$ como la suma de una serie de potencias y úsela para demostrar la fórmula siguiente para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

8.7 Series de Taylor y de Maclaurin

En la sección anterior pudimos hallar representaciones de cierta clase restringida de funciones. Aquí investigamos problemas más generales: ¿Qué funciones tienen representaciones de una serie de potencias? ¿Cómo podemos hallar esas representaciones?

Empezamos por suponer que f es cualquier función que se puede representar por una serie de potencias

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Tratemos de determinar lo que deben ser los coeficientes c_n en términos de f. Para empezar, nótese que si ponemos $x = a$ en la Ecuación 1, entonces todos los términos después del primero son 0 y obtenemos

$$f(a) = c_0$$

Por el Teorema 8.6.2, podemos derivar la serie de la Ecuación 1 término a término:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

y la sustitución de $x = a$ en la Ecuación 2 da

$$f'(a) = c_1$$

Ahora derivamos ambos lados de la Ecuación 2 y obtenemos

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

De nuevo ponemos $x = a$ en la Ecuación 3. El resultado es

$$f''(a) = 2c_2$$

Apliquemos el procedimiento una vez más. La derivación de la serie de la Ecuación 3 da

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

y la sustitución $x = a$ en la Ecuación 4 da

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

A estas alturas ya podemos ver el modelo. Si continuamos derivando y sustituimos $x = a$, obtenemos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Si de esta ecuación despejamos el n-ésimo coeficiente c_n, obtenemos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta fórmula continúa siendo válida aun para $n = 0$ si adoptamos las convenciones de que $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$. Entonces hemos demostrado el teorema siguiente.

$\boxed{5}$ **Teorema** Si f tiene una representación de serie de potencias (desarrollo) en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad |x - a| < R$$

entonces sus coeficientes están dados por la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Sustituyendo esta fórmula por c_n de nuevo en la serie, vemos que si f tiene un desarrollo de serie de potencias en a, entonces debe ser de la forma siguiente.

$$\boxed{6} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

La serie de la Ecuación 6 se denomina **serie de Taylor de la función f en a** (o **alrededor de a** o **centrada en a**).

Taylor y Maclaurin

La serie de Taylor recibe ese nombre en honor del matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) y la serie de Maclaurin se denomina así en honor del matemático escocés Colin Mclaurin (1698-1746) a pesar del hecho de que la serie de Maclaurin es en realidad sólo un caso especial de la serie de Taylor. Pero la idea de representar funciones particulares como sumas de series de potencias se remonta a Newton, y la serie general de Taylor ya era conocida al matemático escocés James Gregory en 1668 y al matemático suizo Johann Bernoulli en la década de 1690. Aparentemente, Taylor no estaba enterado de la obra de Gregory y de Bernoulli cuando publicó sus descubrimientos o series en 1715 en su libro *Methodus incrementorum directa et inversa*. Las series de Maclaurin se llaman así en honor a Colin Maclaurin porque él las popularizó en su libro de cálculo *Treatise of Fluxions* publicado en 1742.

Para el caso especial $a = 0$ la serie de Taylor se convierte en

7
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

Este caso aparece con tanta frecuencia que se le da el nombre especial de **serie de Maclaurin**.

Nota: Hemos demostrado que si f se puede representar como una serie de potencias alrededor de a, entonces f es igual a la suma de su serie de Taylor. Pero existen funciones que no son iguales a la suma de su serie de Taylor. Un ejemplo de esa función se da en el Ejercicio 68.

V EJEMPLO 1 Serie de Maclaurin para la función exponencial Encuentre la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, de modo que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para toda n. Por tanto, la serie de Taylor para f en 0 (esto es, la serie de Maclaurin) es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para hallar el radio de convergencia hacemos $a_n = x^n/n!$. Entonces

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

Por tanto, por la Prueba de la Razón, la serie converge para toda x y el radio de convergencia es $R = \infty$.

La conclusión que podemos sacar del Teorema 5 y el Ejemplo 1 es que *si* e^x tiene un desarrollo de serie de potencias en 0, entonces

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por tanto, ¿cómo podemos determinar si e^x *tiene* una representación de serie de potencias?

Investiguemos la pregunta más general: ¿Bajo qué condiciones una función es igual a la suma de su serie de Taylor? En otras palabras, si f tiene derivadas de todos los órdenes, cuando es cierto que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Al igual que con cualquier serie convergente, esto significa que $f(x)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales. En el caso de la serie de Taylor, las sumas parciales son

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

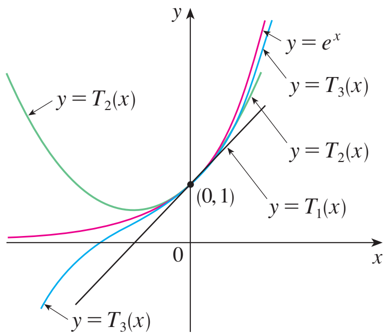


FIGURA 1

Cuando n aumenta, $T_n(x)$ parece aproximarse a e^x en la Figura 1. Esto sugiere que e^x es igual a la suma de su serie de Taylor.

Nótese que T_n es un polinomio de grado n llamado **polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a**. Por ejemplo, para la función exponencial $f(x) = e^x$, el resultado del Ejemplo 1 muestra que los polinomios de Taylor en 0 (o polinomios de Maclaurin) con $n = 1$, 2 y 3 son

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Las gráficas de la función exponencial y estos tres polinomios de Taylor están trazados en la Figura 1.

En general, $f(x)$ es la suma de su serie de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Si hacemos

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{para que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

entonces $R_n(x)$ se llama **residuo** de la serie de Taylor. Si podemos demostrar de algún modo que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entonces se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Por tanto, hemos demostrado lo siguiente.

8 Teorema Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde T_n es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, entonces f es igual a la suma de su serie de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

Al tratar de demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para una función específica f, por lo general usamos el siguiente hecho

9 Desigualdad de Taylor Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor satisface la desigualdad

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Para ver por qué esto es cierto para $n = 1$, suponemos que $|f''(x)| \leqslant M$. En particular, tenemos $f''(x) \leqslant M$, de modo que para $a \leqslant x \leqslant a + d$ tenemos

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leqslant \int_a^x M\,dt$$

Una antiderivada de f'' es f' y, por el Teorema de Evaluación, tenemos

$$f'(x) - f'(a) \leqslant M(x - a) \qquad \text{o bien} \qquad f'(x) \leqslant f'(a) + M(x - a)$$

Fórmulas para el Término Residuo de Taylor

Como alternativa a la desigualdad de Taylor, tenemos las siguientes fórmulas para el término residuo. Si $f^{(n+1)}$ es continua en un intervalo I y $x \in I$, entonces

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Esto recibe el nombre de *forma integral del término residuo.* Otra fórmula, llamada *forma de Lagrange del término residuo*, expresa que hay un número z entre x y a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta versión es una extensión del Teorema de Valor Medio (que es el caso $n = 0$).

Pruebas de estas fórmulas, junto con discusiones de cómo usarlas para resolver los ejemplos de las Secciones 8.7 y 8.8 se dan en el sitio web

www.stewartcalculus.com

Haga clic en *Additional Topics* y luego en *Formulas for the Remainder Term in Taylor series*.

Entonces
$$\int_a^x f'(t)\,dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Pero $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Por tanto

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Un argumento similar, usando $f''(x) \geqslant -M$, demuestra que

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

En consecuencia,
$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x-a|^2$$

Aun cuando hemos supuesto que $x > a$, cálculos similares demuestran que esta desigualdad también es verdadera para $x < a$.

Esto demuestra la Desigualdad de Taylor para el caso donde $n = 1$. El resultado para cualquier n se demuestra de un modo semejante al integrar $n + 1$ veces. (Vea Ejercicio 67 para el caso $n = 2$.)

Nota: En la Sección 8.8 hemos explorado el uso de la Desigualdad de Taylor para aproximar funciones. Nuestro uso inmediato de ella está en coordinación con el Teorema 8.

Al aplicar los Teoremas 8 y 9, con frecuencia es útil hacer uso del dato siguiente.

10
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Esto es cierto porque sabemos del Ejemplo 1 que la serie $\Sigma\, x^n/n!$ converge para toda x y por tanto su n-ésimo término se aproxima a 0.

V EJEMPLO 2 Demuestre que e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para toda n. Si d es cualquier número positivo y $|x| \leqslant d$, entonces $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leqslant e^d$. Por lo tanto la Desigualdad de Taylor, con $a = 0$ y $M = e^d$, dice que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Nótese que la misma constante $M = e^d$ funciona para todo valor de n. Pero, de la Ecuación 10, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Se deduce del Teorema de Restricción que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x. Por el Teorema 8, e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin, es decir,

11 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para toda } x$$

En particular, si ponemos $x = 1$ en la Ecuación 11, obtenemos la siguiente expresión para el número e como una suma de una serie infinita:

En 1748 Leonhard Euler usó la Ecuación 12 para hallar el valor de e correcto a 23 dígitos. En 2003 Shigeru Kondo, también usando la serie en (12), calculó e a más de 50,000 millones de lugares decimales. Las técnicas especiales empleadas para acelerar el cálculo se explican en la página web

numbers.computation.free.fr

12 $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

EJEMPLO 3 Encuentre la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

SOLUCIÓN Tenemos $f^{(n)}(2) = e^2$ y así, poniendo $a = 2$ en la definición de una serie de Taylor (6), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

De nuevo se puede verificar, como en el Ejemplo 1, que el radio de convergencia es $R = \infty$. Al igual que en el Ejemplo 2 podemos verificar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, de modo que

13 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para toda } x$$

Tenemos dos desarrollos de serie de potencias para e^x, la serie de Maclaurin en la Ecuación 11 y la serie de Taylor en la Ecuación 13. El primero es mejor si estamos interesados en valores de x cercanos a 0 y el segundo es mejor si x es cercano a 2.

EJEMPLO 4 Encuentre la serie de Maclaurin para sen x y demuestre que representa sen x para toda x.

SOLUCIÓN Ordenamos nuestro cálculo en dos columnas como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Como las derivadas se repiten en un ciclo de cuatro, podemos escribir la serie de Maclaurin como sigue:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

La Figura 2 muestra la gráfica de sen x junto con sus polinomios de Taylor (o de Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Nótese que, cuando n aumenta, $T_n(x)$ se hace una mejor aproximación a sen x.

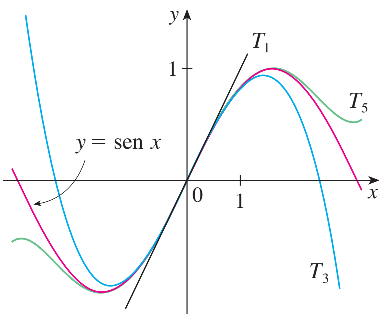


FIGURA 2

Como $f^{(n+1)}(x)$ es $\pm$sen x o $\pm$cos x, sabemos que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ para toda x. Por tanto, podemos tomar $M = 1$ en la Desigualdad de Taylor:

14 $$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Por la Ecuación 10, el lado derecho de esta desigualdad se aproxima a 0 cuando $n \to \infty$, por lo que $|R_n(x)| \to 0$ por el Teorema de compresión. Se deduce que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, de modo que sen x es igual a la suma de la serie de Maclaurin por el Teorema 8.

Expresamos el resultado del Ejemplo 4 para futura referencia.

15 $$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para toda } x \end{aligned}}$$

EJEMPLO 5 Obtener una serie de Maclaurin al derivar una serie conocida
Encuentre la serie de Maclaurin para cos x.

SOLUCIÓN Podríamos proceder directamente como en el Ejemplo 4, pero es más fácil derivar la serie de Maclaurin para sen x dada por la ecuación 15:

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Las series de Maclaurin para e^x, sen x, y cos x que encontramos en los Ejemplos 2, 4 y 5 fueron descubiertas, usando métodos diferentes, por Newton. Estas ecuaciones son notables porque dicen que lo sabemos todo acerca de cada una de estas funciones si sabemos todas sus derivadas simplemente en cero.

Como la serie de Maclaurin para sen x converge para toda x, el Teorema 2 de la Sección 8.6 nos dice que la serie derivada para cos x también converge para toda x. Por tanto,

16 $$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para toda } x \end{aligned}}$$

EJEMPLO 6 Un método rápido para obtener una serie de Maclaurin Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x \cos x$.

SOLUCIÓN En lugar de calcular derivadas y sustituir en la Ecuación 7, es más fácil multiplicar la serie por cos x (Ecuación 16) por x:

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

La serie de potencias que obtuvimos por métodos indirectos en los Ejemplos 5 y 6 y en la Sección 8.6 son de hecho las series de Taylor o de Maclaurin de las funciones dadas porque el Teorema 5 dice que, sin importar cómo se obtenga una representación de serie de potencias $f(x) = \Sigma\, c_n(x - a)^n$ siempre es cierto que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. En otras palabras, los coeficientes están determinados de manera única.

EJEMPLO 7 Represente $f(x) = \operatorname{sen} x$ como la suma de su serie de Taylor centrada ent $\pi/3$.

SOLUCIÓN Ordenando nuestro trabajo en columnas, tenemos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Hemos obtenido dos representaciones diferentes de series para $\operatorname{sen} x$, la serie de Maclaurin del Ejemplo 4 y la serie de Taylor del Ejemplo 7. Es mejor usar la serie de Maclaurin para valores de x cercanos a 0 y la serie de Taylor para x cercana a $\pi/3$. Nótese que el tercer polinomio de Taylor, T_3 en la Figura 3, es una buena aproximación a $\operatorname{sen} x$ cerca de $\pi/3$ pero no tan buena cerca de 0. Compárela con el tercer polinomio T_3 de Maclaurin en la Figura 2, donde lo opuesto es verdadero.

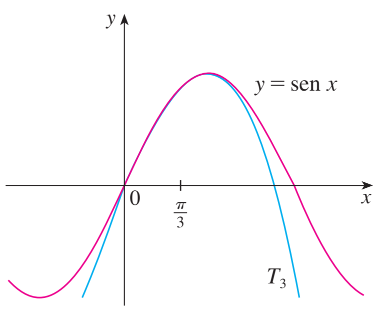


FIGURA 3

y este modelo se repite indefinidamente. Por tanto, la serie de Taylor en $\pi/3$ es

$$
f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots
$$

$$
= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots
$$

La prueba de que esta serie representa $\operatorname{sen} x$ para toda x es muy semejante a la del Ejemplo 4. [Sólo sustituya x por $x - \pi/3$ en (14).] Podemos escribir la serie en notación sigma si separamos los términos que contengan $\sqrt{3}$:

$$
\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n + 1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}
$$

EJEMPLO 8 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 + x)^k$, donde k es cualquier número real.

SOLUCIÓN Ordenando nuestro trabajo en columnas, tenemos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x)^k & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= k(1 + x)^{k-1} & f'(0) &= k \\
f''(x) &= k(k - 1)(1 + x)^{k-2} & f''(0) &= k(k - 1) \\
f'''(x) &= k(k - 1)(k - 2)(1 + x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k - 1)(k - 2) \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1)(1 + x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1)
\end{aligned}
$$

Por tanto, la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 + x)^k$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

Esta serie se denomina **serie del binomio**. Si su n-ésimo término es a_n, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1 - \dfrac{k}{n}\right|}{1 + \dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Entonces, por la Prueba de la razón, la serie del binomio converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$.

La notación tradicional para los coeficientes de la serie del binomio es

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

y estos números reciben el nombre de **coeficientes binomiales**.

El siguiente teorema expresa que $(1 + x)^k$ es igual a la suma de su serie de Maclaurin. Es posible comprobar esto al demostrar que el término residuo $R_n(x)$ se aproxima a 0, pero eso resulta ser muy difícil. La prueba resumida en el Ejercicio 69 es mucho más fácil.

17 **La serie del binomio** Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1 + x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Aun cuando la serie del binomio siempre converge cuando $|x| < 1$, la pregunta de si converge o no converge en los puntos extremos, ± 1, depende del valor de k. Resulta que la serie converge en 1 si $-1 < k \leqslant 0$ y en ambos puntos extremos si $k \geqslant 0$. Nótese que si k es un entero positivo y $n > k$, entonces la expresión para $\binom{k}{n}$ contiene un factor $(k - k)$, por lo cual $\binom{k}{n} = 0$ para $n > k$. Esto significa que la serie termina y se reduce al Teorema del Binomio cuando k es un entero positivo. (Vea Página de Referencia 1.)

V EJEMPLO 9 Uso de una serie binomial para obtener una serie de Maclaurin

Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x}}$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Reescribimos $f(x)$ en una forma donde podemos usar la serie del binomio:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1 - \dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \dfrac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Usando la serie del binomio con $k = -\frac{1}{2}$ y con x sustituida por $-x/4$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1\cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Sabemos de (17) que esta serie converge cuando $|-x/4| < 1$, esto es, $|x| < 4$, de modo que el radio de convergencia es $R = 4$.

Reunimos en la tabla siguiente, para futura referencia, algunas series importantes de Maclaurin que hemos derivado en esta sección y la precedente.

TABLA 1

Series importantes de Maclaurin y sus radios de convergencia

$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = \infty$
$\tan^{-1}x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$R = 1$

EJEMPLO 10 Encuentre la suma de la serie $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 2^2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^3} - \dfrac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$.

SOLUCIÓN Con notación sigma podemos escribir la serie dada como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

Entonces, de la Tabla 1, vemos que esta serie se compara con la entrada para $\ln(1 + x)$ con $x = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) = \ln \tfrac{3}{2}$$

TEC El Module 8.7/8.8 hace posible ver la forma en que sucesivos polinomios de Taylor aproximan la función original.

Una razón por la que las series de Taylor son importantes es que hacen posible integrar funciones que previamente no podríamos manejar. De hecho, en la introducción a este capítulo mencionamos que Newton integraba con frecuencia funciones expresándolas primero como series de potencias y luego integrando la serie término a término. La función $f(x) = e^{-x^2}$ no puede ser integrada por técnicas explicadas hasta aquí porque su antiderivada no es una función elemental (vea la Sección 5.8). En el ejemplo siguiente usamos la idea de Newton para integrar esta función.

V EJEMPLO 11 Uso de una serie para evaluar una integral

(a) Evalúe $\int e^{-x^2}\,dx$ como serie infinita.

(b) Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ correcta a dentro de un error de 0.001.

SOLUCIÓN

(a) Primero hallamos la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{-x^2}$. Aun cuando es posible usar el método directo, encontrémosla con sólo sustituir x con $-x^2$ en la serie para e^x dada en la Tabla 1. De este modo, para todos los valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Ahora integramos término a término:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)n!} + \cdots$$

Esta serie converge para toda x porque la serie original para e^{-x^2} converge para toda x.

(b) El Teorema de Evaluación da

Podemos tomar $C = 0$ en la antiderivada del inciso (a).

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0.7475$$

El Teorema de Estimación de la Serie Alternante muestra que el error involucrado en esta aproximación es menor a

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$

Otro uso de la serie de Taylor se ilustra en el siguiente ejemplo. El límite podría hallarse con la Regla de l'Hospital, pero en su lugar usamos una serie.

EJEMPLO 12 **Uso de una serie para evaluar un límite** Evalúe $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Usando la serie de Maclaurin para e^x, tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

Algunos sistemas computarizados de álgebra calculan límites de este modo.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

porque las series de potencias son funciones continuas.

Multiplicación y división de series de potencias

Si se suman o restan series de potencias, se comportan como polinomios (el Teorema 8.2.8 demuestra esto). De hecho, como lo ilustra el siguiente ejemplo, también se pueden multiplicar y dividir como polinomios. Encontramos sólo los primeros pocos términos porque los cálculos para los últimos términos se hacen tediosos y los términos iniciales son los más importantes.

EJEMPLO 13 **Hallar series de Maclaurin por multiplicación y división** Encuentre los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para (a) e^x sen x y (b) tan x.

SOLUCIÓN

(a) Usando la serie de Maclaurin para e^x y sen x en la Tabla 1, tenemos

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Multiplicamos estas expresiones, reuniendo términos semejantes igual que para polinomios:

$$\begin{array}{rl}
 & 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\times & \quad\;\; x \qquad\quad - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\hline
 & x + \;\; x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4 + \cdots \\
+ & \qquad\qquad - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{6}x^4 - \cdots \\
\hline
 & x + \;\; x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{array}$$

Entonces, $$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Usando la serie de Maclaurin en la Tabla 1, tenemos

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Usamos un procedimiento como división larga:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\hline
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\
\cline{2-2}
 & \qquad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \qquad \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad \frac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}
$$

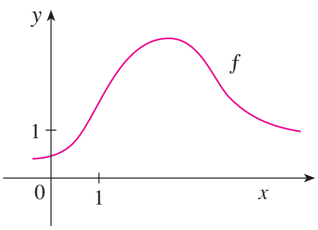
Así,
$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Aun cuando no hemos intentado justificar las manipulaciones formales empleadas en el Ejemplo 13, éstas son formales. Hay un teorema que expresa que si $f(x) = \Sigma\, c_n x^n$ y $g(x) = \Sigma\, b_n x^n$ convergen para $|x| < R$ y las series se multiplican como si fueran polinomios, entonces la serie resultante también converge para $|x| < R$ y representa $f(x)g(x)$. Para división requerimos que $b_0 \neq 0$; la serie resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeña.

8.7 Ejercicios

1. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para toda x, escriba una fórmula para b_8.

2. Se muestra la gráfica de f.



(a) Explique por qué la serie

$$1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 1.

(b) Explique por qué la serie

$$2.8 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 2.

3. Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y el radio de convergencia.

4. Encuentre la serie de Taylor para f centrada en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

5–10 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de una serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo de serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] También encuentre el radio asociado de convergencia.

5. $f(x) = (1-x)^{-2}$

6. $f(x) = \ln(1+x)$

7. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

8. $f(x) = \cos 3x$

9. $f(x) = e^{5x}$

10. $f(x) = xe^x$

11–18 Encuentre la serie de Taylor para $f(x)$ con centro en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo de serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.]

11. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$

12. $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$

13. $f(x) = e^x, \quad a = 3$

14. $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

15. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$

16. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/2$

17. $f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad a = 9$

18. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1$

19. Demuestre que la serie obtenida en el Ejercicio 7 representa $\operatorname{sen} \pi x$ para toda x.

20. Demuestre que la serie obtenida en el Ejercicio 16 representa $\operatorname{sen} x$ para toda x.

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

21–24 Use la serie del binomio para desarrollar la función como una serie de potencias. Exprese el radio de convergencia.

21. $\sqrt{1+x}$

22. $\dfrac{1}{(1+x)^4}$

23. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$

24. $(1-x)^{2/3}$

25–34 Use una serie de Maclaurin en la Tabla 1 para obtener la serie de Maclaurin para la función dada.

25. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

26. $f(x) = \cos(\pi x/2)$

27. $f(x) = e^x + e^{2x}$

28. $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

29. $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

30. $f(x) = x^2 \ln(1 + x^3)$

31. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2 + x}}$

33. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ $\left[\textit{Sugerencia:} \text{ Use } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).\right]$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

35–38 Encuentre la serie de Maclaurin de f (por cualquier método) y su radio de convergencia. Grafique f y sus primeros pocos polinomios de Taylor en la misma pantalla. ¿Qué se observa acerca de la relación entre estos polinomios y f?

35. $f(x) = \cos(x^2)$

36. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

37. $f(x) = xe^{-x}$

38. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

39. Use la serie de Maclaurin para e^x para calcular $e^{-0.2}$ correcta a cinco lugares decimales.

40. Use la serie de Maclaurin para sen x para calcular sen 3° correcto a cinco lugares decimales.

41. (a) Use la serie binomial para desarrollar $1/\sqrt{1 - x^2}$.
(b) Use el inciso (a) para hallar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1} x$.

42. (a) Desarrolle $1/\sqrt[4]{1 + x}$ como serie de potencias.
(b) Use el inciso (a) para estimar $1/\sqrt[4]{1.1}$ correcta a tres lugares decimales.

43–46 Evalúe la integral indefinida como serie infinita.

43. $\int x \cos(x^3)\, dx$

44. $\int \dfrac{e^x - 1}{x}\, dx$

45. $\int \dfrac{\cos x - 1}{x}\, dx$

46. $\int \arctan(x^2)\, dx$

47–50 Use series para aproximar la integral definida a no más de la precisión indicada.

47. $\int_0^1 x \cos(x^3)\, dx$ (tres lugares decimales)

48. $\int_0^{0.2} [\tan^{-1}(x^3) + \operatorname{sen}(x^3)]\, dx$ (cinco lugares decimales)

49. $\int_0^{0.4} \sqrt{1 + x^4}\, dx$ $(|\text{error}| < 5 \times 10^{-6})$

50. $\int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2}\, dx$ $(|\text{error}| < 0.001)$

51–53 Use series para evaluar el límite.

51. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1 + x)}{x^2}$

52. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

53. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

54. Use la serie del Ejemplo 13(b) para evaluar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

Encontramos este límite en el Ejemplo 4 de la Sección 4.5 usando tres veces la Regla de l'Hospital. ¿Cuál método prefiere?

55–58 Use multiplicación o división de series de potencias para hallar los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin para cada función.

55. $y = e^{-x^2} \cos x$

56. $y = \sec x$

57. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

58. $y = e^x \ln(1 + x)$

59–66 Encuentre la suma de la serie.

59. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{4n}}{n!}$

60. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3^n}{n\, 5^n}$

62. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{5^n n!}$

63. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n + 1)!}$

64. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

65. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

66. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} + \dfrac{1}{5 \cdot 2^5} - \dfrac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots$

67. Demuestre la Desigualdad de Taylor para $n = 2$, es decir, demuestre que si $|f'''(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, entonces

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{6}|x - a|^3 \qquad \text{para } |x - a| \leq d$$

68. (a) Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es igual a su serie de Maclaurin.

(b) Grafique la función del inciso (a) y comente sobre su comportamiento cerca del origen.

69. Use los siguientes pasos para demostrar (17).

(a) Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$. Derive esta serie para demostrar que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1 + x} \qquad -1 < x < 1$$

(b) Sea $h(x) = (1 + x)^{-k} g(x)$ y demuestre que $h'(x) = 0$.

(c) Deduzca que $g(x) = (1 + x)^k$.

70. En el Ejercicio 31 de la Sección 6.4 se demostró que la longitud de la elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$, donde $a > b > 0$, es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse. Desarrolle el integrando como una serie del binomio y use el resultado del Ejercicio 38 de la Sección 5.6 para expresar L como una serie en potencias de la excentricidad hasta el término en e^6.

PROYECTO DE LABORATORIO

CAS Un límite elusivo

Este proyecto se refiere a la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)}$$

1. Use su sistema computarizado de álgebra (CAS) para evaluar $f(x)$ para $x = 1, 0.1, 0.01, 0.001$, y 0.0001. ¿Le parece que f tiene un límite cuando $x \to 0$?
2. Use el CAS para graficar f cerca de $x = 0$. ¿Le parece que f tiene un límite cuando $x \to 0$?
3. Trate de evaluar $\lim_{x \to 0} f(x)$ con la Regla de l'Hospital, usando el CAS para hallar derivadas del numerador y denominador. ¿Qué descubre? ¿Cuántas aplicaciones de la Regla de l'Hospital se requieren?
4. Evalúe $\lim_{x \to 0} f(x)$ usando el CAS para hallar un gran número de términos de la serie de Taylor del numerador y denominador. (Use el comando `taylor` en Maple o `Series` en Mathematica.)
5. Use el comando de límites de su CAS para hallar $\lim_{x \to 0} f(x)$ directamente. (Casi todos los sistemas computarizados de álgebra usan el método del Problema 4 para calcular límites.)
6. En vista de las respuestas a los Problemas 4 y 5, ¿cómo se explican los resultados de los Problemas 1 y 2?

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN HISTÓRICA

Cómo descubrió Newton la serie del binomio

El Teorema del Binomio, que da la expansión de $(a + b)^k$, ya era conocido por matemáticos chinos muchos siglos antes de la época de Newton para el caso donde el exponente k es un entero positivo. En 1665, cuando tenía 22 años de edad, Newton fue el primero en descubrir el desarrollo de una serie infinita de $(a + b)^k$ cuando k es un exponente fraccionario (positivo o negativo). No publicó su descubrimiento, pero lo expresó y dio ejemplos de cómo usarlo en una carta (ahora llamada *epistola prior*) fechada el 13 de junio de 1676 que envió a Henry Oldenburg, secretario de la Real Sociedad de Londres, para que la transmitiera a Leibniz. Cuando Leibniz contestó, le preguntó en qué forma había descubierto Newton la serie del binomio. Newton escribió una segunda carga, la *epistola posterior* del 24 de octubre de 1676, en la que explicaba en gran detalle cómo había llegado a su descubrimiento por una ruta bastante indirecta. Él estaba investigando las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 a x para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Éstas son fáciles de calcular si n es par. Al observar patrones e interpolar, Newton pudo calcular las respuestas para valores impares de n. Entonces se dio cuenta que podía obtener las mismas respuestas al expresar $(1 - x^2)^{n/2}$ como una serie infinita.

Escriba un informe sobre el descubrimiento de Newton de la serie del binomio. Empiece por dar el enunciado de la serie del binomio en notación de Newton (vea la *epistola prior* en la página 285 de [4] o la página 402 de [2]). Explique por qué la versión de Newton es equivalente al Teorema 17 de la página 612. A continuación lea la *epistola posterior* de Newton (página 289 en [4] o la página 404 en [2]) y explique los patrones que Newton descubrió en las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Demuestre cómo pudo él calcular las áreas bajo las curvas restantes y cómo verificó sus respuestas. Por último, explique la forma en que estos descubrimientos llevaron a la serie del binomio. Los libros de Edwards [1] y Katz [3] contienen comentarios sobre las cartas de Newton.

1. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (New York: Springer-Verlag, 1979), pp. 178–187.
2. John Fauvel and Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader* (London: MacMillan Press, 1987).
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (New York: HarperCollins, 1993), pp. 463–466.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969).

8.8 Aplicaciones de los polinomios de Taylor

En esta sección exploramos dos tipos de aplicaciones de polinomios de Taylor. Primero vemos cómo se usan para aproximar funciones, que gustan a expertos en ciencias de la computación porque son las funciones más sencillas. A continuación investigamos la forma en que físicos e ingenieros las usan en campos como la relatividad, óptica, radiación de cuerpo negro, dipolos eléctricos y construcción de carreteras en un desierto.

Aproximación de funciones por polinomios

Suponga que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor en a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

En la Sección 8.7 introdujimos la notación $T_n(x)$ para la n-ésima suma parcial de esta serie y la llamamos polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a. Entonces

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \end{aligned}$$

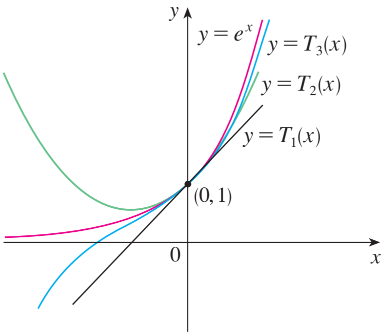


FIGURA 1

	$x = 0.2$	$x = 3.0$
$T_2(x)$	1.220000	8.500000
$T_4(x)$	1.221400	16.375000
$T_6(x)$	1.221403	19.412500
$T_8(x)$	1.221403	20.009152
$T_{10}(x)$	1.221403	20.079665
e^x	1.221403	20.085537

Como f es la suma de su serie de Taylor, sabemos que $T_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ y por tanto T_n se puede usar como una aproximación a f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Nótese que el polinomio de Taylor de primer grado

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es el mismo que la linealización de f en a que estudiamos en la Sección 3.9. Nótese también que T_1 y su derivada tienen los mismos valores en a que f y f' tienen. En general, se puede demostrar que las derivadas de T_n en a concuerdan con las de f hasta e incluyendo derivadas de orden n.

Para ilustrar estas ideas demos otra mirada a las gráficas de $y = e^x$ y sus primeros polinomios de Taylor (figura 1). La gráfica de T_1 es la recta tangente a $y = e^x$ en (0, 1); esta recta tangente es la mejor aproximación lineal a e^x cerca de (0, 1). La gráfica de T_2 es la parábola $y = 1 + x + x^2/2$, y la gráfica de T_3 es la curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que es un ajuste más cercano a la curva exponencial $y = e^x$ que T_2. El siguiente polinomio de Taylor, T_4, sería una aproximación incluso mejor, y así sucesivamente.

Los valores de la tabla de la izquierda dan una demostración numérica de la convergencia de los polinomios de Taylor $T_n(x)$ a la función $y = e^x$. Vemos que cuando $x = 0.2$ la convergencia es muy rápida, pero cuando $x = 3$ es un poco más lenta. De hecho, cuanto más alejada se encuentra x de 0, con más lentitud converge $T_n(x)$ a e^x.

Cuando se use un polinomio de Taylor T_n para aproximar una función f, tenemos que hacer estas preguntas: ¿Qué tan buena aproximación es? ¿Qué tan grande debemos escoger n para lograr la precisión deseada? Para contestar estas preguntas necesitamos ver el valor absoluto del residuo:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Hay tres posibles métodos para estimar el tamaño del error:

1. Si se dispone de una calculadora de gráficas, podemos usarla para graficar $|R_n(x)|$ y por tanto estimar el error.
2. Si ocurre que la serie es una serie alternante, podemos usar el Teorema de estimación de la serie alternante.
3. En todos los casos podemos usar la Desigualdad de Taylor (Teorema 8.7.9), que dice que si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, entonces

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1}$$

V EJEMPLO 1 Aproximar una función de raíz por medio de una función cuadrática

(a) Aproxime la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por medio de un polinomio de Taylor de grado 2 en $a = 8$.

(b) ¿Qué tan precisa es esta aproximación cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$?

SOLUCIÓN

(a)

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f(8) = 2$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(8) = \tfrac{1}{12}$$

$$f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f''(8) = -\tfrac{1}{144}$$

$$f'''(x) = \tfrac{10}{27}x^{-8/3}$$

Entonces el polinomio de Taylor de segundo grado es

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2 \end{aligned}$$

La aproximación deseada es

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) La serie de Taylor no es alternante cuando $x < 8$, de modo que no podemos usar el Teorema de Estimación de la Serie Alternante en este ejemplo, pero podemos usar la Desigualdad de Taylor con $n = 2$ y $a = 8$:

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

donde $|f'''(x)| \leqslant M$. Como $x \geqslant 7$, tenemos $x^{8/3} \geqslant 7^{8/3}$ y por tanto

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leqslant \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0.0021$$

En consecuencia, podemos tomar $M = 0.0021$. También $7 \leqslant x \leqslant 9$, de modo que $-1 \leqslant x - 8 \leqslant 1$ y $|x - 8| \leqslant 1$. Entonces la Desigualdad de Taylor da

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0.0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0.0021}{6} < 0.0004$$

Por tanto, si $7 \leqslant x \leqslant 9$, la aproximación en el inciso (a) es precisa a no más de 0.0004.

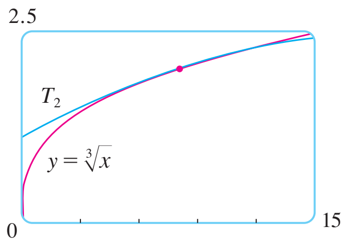


FIGURA 2

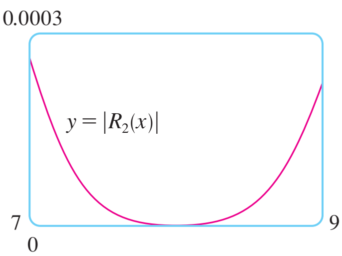


FIGURA 3

Usemos una calculadora de gráficas para comprobar el cálculo del Ejemplo 1. La Figura 2 muestra que las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = T_2(x)$ están muy cercanas entre sí cuando x está cerca de 8. La Figura 3 muestra la gráfica de $|R_2(x)|$ calculada a partir de la expresión

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

Vemos de la gráfica que

$$|R_2(x)| < 0.0003$$

cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$. Así, la estimación de error por métodos gráficos es ligeramente mejor que la estimación de error por la Desigualdad de Taylor en este caso.

V EJEMPLO 2 Aproximar sen *x* por medio de un polinomio de Taylor de quinto grado

(a) ¿Cuál es el máximo error posible al usar la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

cuando $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$? Use esta aproximación para hallar sen 12° correcto a seis lugares decimales.

(b) ¿Para qué valores de x es esta aproximación precisa a no más de 0.00005?

SOLUCIÓN

(a) Nótese que la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

es alternante para todos los valores de x diferentes de cero, y los términos sucesivos disminuyen en tamaño porque $|x| < 1$, de modo que podemos usar el Teorema de Estimación de la Serie Alternante. El error al aproximar sen x por medio de los primeros tres términos de su serie de Maclaurin es a lo sumo

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5040}$$

Si $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$, entonces $|x| \leqslant 0.3$, y el error es menor a

$$\frac{(0.3)^7}{5040} \approx 4.3 \times 10^{-8}$$

Para hallar sen 12° primero convertimos a medida en radianes:

$$\operatorname{sen} 12° = \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0.20791169$$

Entonces, correcto a seis lugares decimales, sen 12° ≈ 0.207912.

(b) El error será menor a 0.00005 si

$$\frac{|x|^7}{5040} < 0.00005$$

TEC El Module 8.7/8.8 gráficamente muestra los residuos en aproximaciones de un polinomio de Taylor.

Despejando x de esta desigualdad tendremos

$$|x|^7 < 0.252 \qquad \text{o} \qquad |x| < (0.252)^{1/7} \approx 0.821$$

Entonces la aproximación dada es precisa a no más de 0.00005 cuando $|x| < 0.82$.

¿Qué pasa si usamos la Desigualdad de Taylor para resolver el Ejemplo 2? Como $f^{(7)}(x) = -\cos x$, tenemos $|f^{(7)}(x)| \leqslant 1$ y entonces

$$|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{7!}|x|^7$$

Por tanto, obtenemos las mismas estimaciones que con el Teorema de estimación de la serie alternante.

¿Qué se puede decir de métodos gráficos? La Figura 4 muestra la gráfica de

$$|R_6(x)| = \left|\operatorname{sen} x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\right|$$

y vemos de ella que $|R_6(x)| < 4.3 \times 10^{-8}$ cuando $|x| \leqslant 0.3$. Ésta es la misma estimación que obtuvimos en el Ejemplo 2. Para el inciso (b) buscamos $|R_6(x)| < 0.00005$, de modo que graficamos $y = |R_6(x)|$ y $y = 0.00005$ en la Figura 5. Al poner el cursor en el punto de intersección derecho encontramos que la desigualdad se satisface cuando $|x| < 0.82$. De nuevo, ésta es la misma estimación que obtuvimos en la solución del Ejemplo 2.

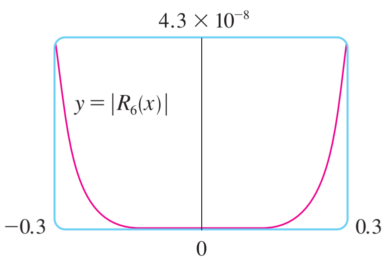


FIGURA 4

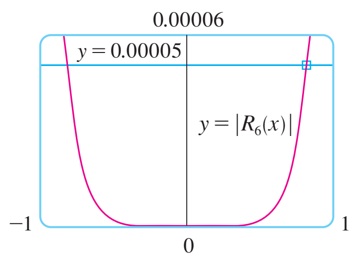


FIGURA 5

Si nos hubieran pedido aproximar sen 72° en lugar de sen 12° en el Ejemplo 2, hubiera sido inteligente usar los polinomios de Taylor en $a = \pi/3$ (en lugar de $a = 0$) porque son mejores aproximaciones a sen x para valores de x cercanos a $\pi/3$. Nótese que 72° es cercano a 60° (o $\pi/3$ radianes) y las derivadas de sen x son fáciles de calcular en $\pi/3$.

La Figura 6 muestra las gráficas de las aproximaciones en polinomios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad\qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad\qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

a la curva senoidal. Se puede ver que cuando n aumenta, $T_n(x)$ es una buena aproximación a sen x en un intervalo cada vez más grande.

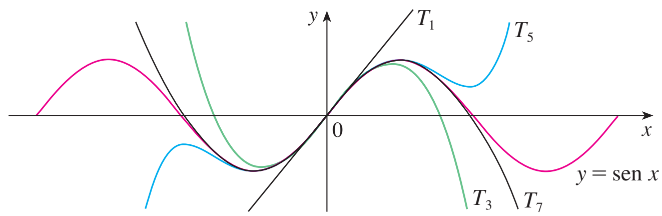


FIGURA 6

Un uso del tipo de cálculo realizado en los Ejemplos 1 y 2 ocurre en calculadoras y computadoras. Por ejemplo, cuando se pulsa la tecla sen o e^x en una calculadora, o cuando un programador usa una subrutina para una función trigonométrica o exponencial o de Bessel, en muchas máquinas se calcula una aproximación con polinomio. El polinomio es con frecuencia un polinomio de Taylor que se ha modificado para que el error se extienda en forma más homogénea en todo un intervalo.

Aplicaciones a la física

Los polinomios de Taylor se usan con frecuencia en física. Para tener un mejor concepto en una ecuación, un físico a veces simplifica una función al considerar sólo los primeros dos o tres términos en su serie de Taylor. En otras palabras, el físico usa un polinomio de Taylor como aproximación a la función. La Desigualdad de Taylor se puede usar entonces para medir la precisión de la aproximación. El siguiente ejemplo muestra una forma en la que esta idea se usa en relatividad especial.

V EJEMPLO 3 **Usando a Taylor para comparar a Einstein y Newton** En la teoría de Einstein de relatividad especial, la masa de un objeto que se mueve con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa del objeto cuando está en reposo y c es la velocidad de la luz. La energía cinética del objeto es la diferencia entre su energía total y su energía en reposo:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

(a) Demuestre que cuando v es muy pequeña en comparación con c, esta expresión para K concuerda con la física clásica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
(b) Use la Desigualdad de Taylor para estimar la diferencia en estas expresiones para K cuando $|v| \leqslant 100$ m/s.

SOLUCIÓN

(a) Usando las expresiones dadas para K y m, obtenemos

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

La curva superior de la Figura 7 es la gráfica de la expresión para la energía cinética K de un cuerpo con velocidad v en relatividad especial. La curva inferior muestra la función empleada para K en física clásica de Newton. Cuando v es mucho menor que la velocidad de la luz, las curvas son prácticamente idénticas.

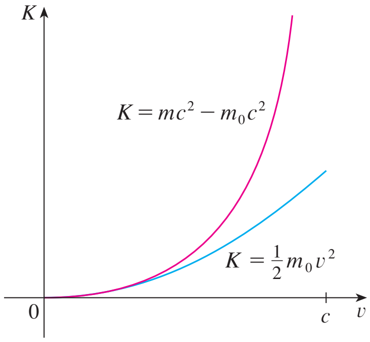


FIGURA 7

Con $x = -v^2/c^2$, la serie de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ se calcula con más facilidad como serie del binomio con $k = -\frac{1}{2}$. (Nótese que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}(1 + x)^{-1/2} &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned}K &= m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right] \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)\end{aligned}$$

Si v es mucho menor que c, entonces todos los términos después del primero son muy pequeños cuando se comparan con el primer término. Si los omitimos, obtenemos

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

(b) Si $x = -v^2/c^2$, $f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$, y M es un número tal que $|f''(x)| \leqslant M$, entonces podemos usar la Desigualdad de Taylor para escribir

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}x^2$$

Tenemos $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1 + x)^{-5/2}$ y nos dicen que $|v| \leqslant 100$ m/s, de modo que

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (= M)$$

Entonces, con $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4.17 \times 10^{-10})m_0$$

En consecuencia, cuando $|v| \leqslant 100$ m/s, la magnitud del error al usar la expresión de Newton para energía cinética es a lo sumo $(4.2 \times 10^{-10})m_0$.

Otra aplicación a la física se presenta en óptica. La Figura 8 está adaptada de *Optics*, 4ª ed., de Eugene Hecht (San Francisco, 2002), página 153. Describe una onda desde la fuente puntual S que encuentra una interfase esférica de radio R con centro en C. El rayo SA se refracta hacia P.

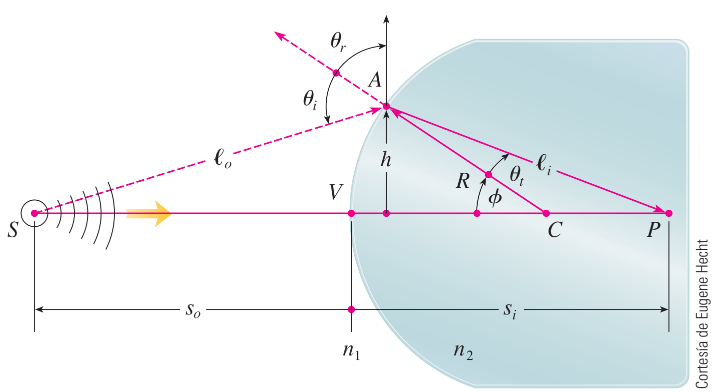


FIGURA 8
Refracción en una interfase esférica

Usando el principio de Fermat de que la luz se desplaza para reducir al mínimo el tiempo tomado, Hecht deriva la ecuación

$$\boxed{1} \qquad \frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

donde n_1 y n_2 son índices de refracción y ℓ_o, ℓ_i, s_o, y s_i son las distancias indicadas en la Figura 8. Por la Ley de Coseno, aplicada a los triángulos ACS y ACP, tenemos

Aquí usamos la identidad

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$$

$$\boxed{2} \qquad \ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

Como la Ecuación 1 es engorrosa para trabajarse, Gauss, en 1841, la simplificó usando la aproximación lineal $\cos\phi \approx 1$ para pequeños valores de ϕ. (Esto equivale a usar el polinomio de Taylor de grado 1.) Entonces la Ecuación 1 se convierte en la siguiente ecuación más sencilla [como se pide al lector demostrar en el Ejercicio 28(a)]:

$$\boxed{3} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de Gauss*, o bien, *óptica de primer orden*, y se ha convertido en la herramienta teórica básica para diseñar lentes.

Una teoría más precisa se obtiene al aproximar $\cos\phi$ por su polinomio de Taylor de grado 3 (que es igual que el polinomio de Taylor de grado 2). Esto toma en cuenta rayos para los cuales ϕ no es pequeño, es decir, rayos que inciden en la superficie a distancias mayores a h sobre el eje. En el Ejercicio 28(b) se pide al lector que use esta aproximación para derivar la ecuación más precisa

$$\boxed{4} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de tercer orden*.

Otras aplicaciones de polinomios de Taylor a física e ingeniería se exploran en los Ejercicios 29–32 y en el Proyecto de Aplicación de la página 627.

8.8 Ejercicios

1. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta el grado 6 para $f(x) = \cos x$ con centro en $a = 0$. Grafique f y estos polinomios en una pantalla común.
(b) Evalúe f y estos polinomios en $x = \pi/4$, $\pi/2$, y π.
(c) Comente sobre la forma en que los polinomios de Taylor convergen a $f(x)$.

2. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta el grado 3 para $f(x) = 1/x$ con centro en $a = 1$. Grafique f y estos polinomios en una pantalla común.
(b) Evalúe f y estos polinomios en $x = 0.9$ y 1.3.
(c) Comente sobre la forma en que los polinomios de Taylor convergen a $f(x)$.

3–8 Encuentre el polinomio de Taylor $T_3(x)$ para la función f en el número a. Grafique f y T_3 en la misma pantalla.

3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$

4. $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$

5. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

6. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad a = 1$

7. $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$

8. $f(x) = \tan^{-1}x, \quad a = 1$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

CAS **9–10** Use un sistema computarizado de álgebra para hallar los polinomios de Taylor T_n con centro en a para $n = 2, 3, 4, 5$. A continuación grafique estos polinomios y f en la misma pantalla.

9. $f(x) = \cot x, \quad a = \pi/4$

10. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}, \quad a = 0$

11–18
(a) Aproxime f por medio de un polinomio de Taylor con grado n en el número a.
(b) Use la Desigualdad de Taylor para estimar la precisión de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x se encuentra en el intervalo dado.
(c) Compruebe su resultado del inciso (b) graficando $|R_n(x)|$.

11. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leqslant x \leqslant 4.2$

12. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$

13. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.8 \leqslant x \leqslant 1.2$

14. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

15. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.1$

16. $f(x) = \ln(1 + 2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

17. $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

18. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

19. Use la información del Ejercicio 5 para estimar cos 80° correcto a cinco lugares decimales.

20. Use la información del Ejercicio 14 para estimar sen 38° correcto a cinco lugares decimales.

21. Use la Desigualdad de Taylor para determinar el número de términos de la serie de Maclaurin para e^x que debe usarse para estimar $e^{0.1}$ a no más de 0.00001.

22. ¿Cuántos términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ son necesarios para estimar ln 1.4 a no más de 0.001?

23–25 Use el Teorema de estimación de la serie alternante o la Desigualdad de Taylor para estimar el intervalo de valores de x para los cuales la aproximación dada es precisa a no más del error expresado. Compruebe gráficamente su respuesta.

23. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \quad (|\text{error}| < 0.01)$

24. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \quad (|\text{error}| < 0.005)$

25. $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad (|\text{error}| < 0.05)$

26. Supongamos que el lector sabe que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n + 1)}$$

y la serie de Taylor de f centrada en 4 converge a $f(x)$ para toda x en el intervalo de convergencia. Demuestre que el polinomio de Taylor de quinto grado aproxima $f(5)$ con error menor a 0.0002.

27. Un auto se desplaza con una rapidez de 20 m/s y aceleración 2 m/s² en un instante determinado. Usando un polinomio de Taylor de segundo grado, estime cuánto se desplaza el auto en el siguiente segundo. ¿Sería razonable usar este polinomio para estimar la distancia recorrida durante el siguiente minuto?

28. (a) Derive la Ecuación 3 para óptica de Gauss a partir de la Ecuación 1 al aproximar $\cos \phi$ en la Ecuación 2 por medio de su polinomio de Taylor de primer grado.
(b) Demuestre que si $\cos \phi$ es sustituido por su polinomio de Taylor de tercer grado en la Ecuación 2, entonces la Ecuación 1 se convierte en la Ecuación 4 para óptica de tercer orden. [*Sugerencia*: Use los primeros dos términos de la serie del binomio para ℓ_o^{-1} y ℓ_i^{-1}. También, use $\phi \approx \operatorname{sen} \phi$.]

29. Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas eléctricas de igual magnitud y signo contrario. Si las cargas son q y $-q$ y están colocadas a una distancia d una de otra, entonces el campo eléctrico E en el punto P en la figura es

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D + d)^2}$$

Al desarrollar esta expresión para E como una serie de potencias de d/D, demuestre que E es aproximadamente proporcional a $1/D^3$ cuando P está alejada del dipolo.

30. La resistividad ρ de un alambre conductor es el recíproco de la conductividad y se mide en unidades de ohm-metro (Ω-m). La resistividad de un metal determinado depende de la temperatura de acuerdo con la ecuación

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

donde t es la temperatura en °C. Hay tablas que indican los valores de α (llamada coeficiente de temperatura) y ρ_{20} (la resistividad a 20°C) para varios metales. Excepto a muy bajas temperaturas, la resistividad varía casi linealmente con la temperatura y por tanto es común para aproximar la expresión para $\rho(t)$ por su polinomio de Taylor de primero o segundo grado a $t = 20$.
(a) Encuentre expresiones para estas aproximaciones lineales y cuadráticas.

(b) Para el cobre, las tablas dan $\alpha = 0.0039/°\text{C}$ y $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8}\ \Omega$-m. Grafique la resistividad del cobre y las aproximaciones lineales y cuadráticas para $-250°\text{C} \leqslant t \leqslant 1000°\text{C}$.

(c) ¿Para qué valores de t concuerda la aproximación lineal con la expresión exponencial a no más de uno por ciento?

31. Si un topógrafo mide diferencias en elevación cuando haga planos para una carretera en un desierto, deben hacerse correcciones por la curvatura de la Tierra.

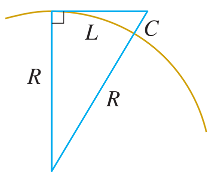
(a) Si R es el radio de la Tierra y L es la longitud de la carretera, demuestre que la corrección es

$$C = R\ \sec(L/R) - R$$

(b) Use un polinomio de Taylor para demostrar que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare las correcciones dadas por las fórmulas de los incisos (a) y (b) para una carretera que mide 100 km de largo. (Tome el radio de la Tierra como 6370 km.)



32. El periodo de un péndulo con longitud L que forma un ángulo máximo θ_0 con la vertical es

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2 x}}$$

donde $k = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. (En el Ejercicio 34 de la Sección 5.9 aproximamos esta integral usando la Regla de Simpson.)

(a) Desarrolle el integrando como una serie del binomio y use el resultado del Ejercicio 38 de la Sección 5.6 para demostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Si θ_0 no es demasiado grande, se utiliza la aproximación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtenida al usar sólo el primer término de la serie. Se obtiene una mejor aproximación si se usan dos términos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Nótese que todos los términos de la serie después del primero tienen coeficientes que son a lo sumo $\frac{1}{4}$. Use este dato para comparar esta serie con una serie geométrica y demostrar que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leqslant T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ \frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Use las desigualdades del inciso (b) para estimar el periodo de un péndulo con $L = 1$ metro y $\theta_0 = 10°$. ¿Cómo se compara con la estimación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? ¿Qué pasa si $\theta_0 = 42°$?

33. En la Sección 4.7 consideramos el método de Newton para aproximar una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, y de una aproximación inicial x_1 obtuvimos aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$, donde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Use la Desigualdad de Taylor con $n = 1$, $a = x_n$, y $x = r$ para demostrar que si $f''(x)$ existe en un intervalo I que contiene r, x_n y x_{n+1}, y $|f''(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ para toda $x \in I$, entonces

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Esto significa que si x_n es precisa a d lugares decimales, entonces x_{n+1} es precisa a alrededor de $2d$ lugares decimales. Más precisamente, si el error en la etapa n es a lo sumo 10^{-m}, entonces el error en la etapa $n + 1$ es a lo sumo $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROYECTO DE APLICACIÓN — Radiación de las estrellas

© Luke Dodd / Photo Researchers, Inc.

Cualquier cuerpo emite radiación cuando se calienta. Un *cuerpo negro* es un sistema que absorbe toda la radiación que cae en él. Por ejemplo, una superficie mate negra o una cavidad grande con un pequeño agujero en sus paredes (como un alto horno) es un agujero negro y emite radiación de cuerpo negro. Incluso la radiación del Sol es cercana a ser radiación de cuerpo negro.

Propuesta a fines del siglo XIX, la Ley de Rayleigh-Jeans expresa la densidad de energía de radiación de cuerpo negro de longitud λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins (K), y k es la constante de Boltzmann. La Ley de Rayleigh-Jeans concuerda con mediciones experimentales para longitudes de onda largas

---

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

pero está en drástico desacuerdo con longitudes de onda cortas. [La ley predice que $f(\lambda) \to \infty$ cuando $\lambda \to 0^+$ pero experimentos realizados han demostrado que $f(\lambda) \to 0$ Este dato se conoce como *catástrofe ultravioleta*.

En 1900, Max Planck encontró un modelo mejor (conocido como Ley de Planck) para radiación de cuerpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura (en kelvins), y

$$h = \text{constante de Planck} = 6.6262 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$$

$$c = \text{rapidez de la luz} = 2.997925 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1.3807 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

1. Use la Regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para la Ley de Planck. Por tanto, esta ley modela radiación de un cuerpo negro mejor que la Ley de Rayleigh-Jeans para longitudes de onda cortas.

2. Use un polinomio de Taylor para demostrar que, para longitudes de onda largas, la Ley de Planck da aproximadamente los mismos valores que la Ley de Rayleigh-Jeans.

3. Grafique f como se da para ambas leyes en la misma pantalla y comente sobre las similitudes y diferencias. Use $T = 5700$ K (la temperatura del Sol). (El lector puede cambiar de metros a la unidad más conveniente de micrómetros: $1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m.)

4. Use su gráfica del Problema 3 para estimar el valor de λ para el cual $f(\lambda)$ es un máximo bajo la Ley de Planck.

5. Investigue cómo cambia la gráfica de f cuando T varía. (Use la Ley de Planck.) En particular, grafique f para las estrellas Betelgeuse ($T = 3400$ K), Porción ($T = 6400$ K), y Sirio ($T = 9200$ K), así como el Sol. ¿Cómo varía la radiación total emitida (el área bajo la curva) con T? Use la gráfica para comentar sobre por qué Sirio se conoce como una estrella azul y Betelgeuse como una estrella roja.

8 Repaso

Revisión de conceptos

1. (a) ¿Qué es una sucesión convergente?
(b) ¿Qué es una serie convergente?
(c) ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
(d) ¿Qué significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión acotada?
(b) ¿Qué es una sucesión monotónica?
(c) ¿Qué se puede decir acerca de una sucesión monotónica acotada?

3. (a) ¿Qué es una serie geométrica? ¿Bajo qué circunstancias es convergente? ¿Cuál es su suma?
(b) ¿Qué es una serie p? ¿Bajo qué circunstancias es convergente?

4. Suponga que $\sum a_n = 3$ y s_n es la n-ésima suma parcial de la serie. ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} a_n$? ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} s_n$?

5. Exprese lo siguiente.
(a) La Prueba para divergencia
(b) La Prueba de la integral
(c) La Prueba de comparación
(d) La Prueba de comparación del límite
(e) La Prueba de la serie alternante
(f) La Prueba de la razón

6. (a) ¿Qué es una serie absolutamente convergente?
(b) ¿Qué se puede decir acerca de esa serie?

7. (a) Si una serie es convergente por la Prueba de la integral, ¿cómo se estima su suma?
(b) Si una serie es convergente por la Prueba de comparación, ¿cómo se estima su suma?
(c) Si una serie es convergente por la Prueba de la serie alternante, ¿cómo se estima su suma?

8. (a) Escriba la forma general de una serie de potencias.
(b) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias?
(c) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias?

9. Suponga que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia R.
(a) ¿Cómo se deriva f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para f'?
(b) ¿Cómo se integra f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para $\int f(x)\,dx$?

10. (a) Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f con centro en a.
(b) Escriba una expresión para la serie de Taylor de f con centro en a.
(c) Escriba una expresión para la serie de Maclaurin de f.
(d) ¿Cómo se demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor?
(e) Exprese la Desigualdad de Taylor.

11. Escriba la serie de Maclaurin y el intervalo de convergencia para cada una de las siguientes funciones.
(a) $1/(1 - x)$ (b) e^x
(c) sen x (d) $\cos x$
(e) $\tan^{-1}x$ (f) $\ln(1 + x)$

12. Escriba el desarrollo de la serie del binomio de $(1 + x)^k$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

Preguntas de verdadero-falso

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué; si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\Sigma\, a_n$ es convergente.
2. La serie $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, n^{-\text{sen}\,1}$ es convergente.
3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.
4. Si $\Sigma\, c_n 6^n$ es convergente, entonces $\Sigma\, c_n(-2)^n$ es convergente.
5. Si $\Sigma\, c_n 6^n$ es convergente, entonces $\Sigma\, c_n(-6)^n$ es convergente.
6. Si $\Sigma\, c_n x^n$ diverge cuando $x = 6$, entonces diverge cuando $x = 10$.
7. La Prueba de la Razón se puede usar para determinar si $\Sigma\, 1/n^3$ converge.
8. La Prueba de la Razón se puede usar para determinar si $\Sigma\, 1/n!$ converge.
9. Si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ y $\Sigma\, b_n$ diverge, entonces $\Sigma\, a_n$ diverge.
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$
11. Si $-1 < \alpha < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.
12. Si $\Sigma\, a_n$ es divergente, entonces $\Sigma\, |a_n|$ es divergente.
13. Si $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ converge para toda x, entonces $f'''(0) = 2$.
14. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n + b_n\}$ es divergente.
15. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n b_n\}$ es divergente.
16. Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n > 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es convergente.
17. Si $a_n > 0$ y $\Sigma\, a_n$ converge, entonces $\Sigma\, (-1)^n a_n$ converge.
18. Si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
19. $0.99999\ldots = 1$
20. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_{n+3} - a_n) = 0$.

Ejercicios

1–7 Determine si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su límite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$
2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$
3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$
4. $a_n = \cos(n\pi/2)$
5. $a_n = \dfrac{n \,\text{sen}\, n}{n^2 + 1}$
6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$
7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$

8. Una sucesión está definida en forma recursiva por la ecuación $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y $a_n < 2$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y encuentre su límite.

9–18 Determine si la serie es convergente o divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n+1}\right)$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1+(1.2)^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{5^n n!}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$

19–22 Encuentre la suma de la serie.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n]$

22. $1 - e + \dfrac{e^2}{2!} - \dfrac{e^3}{3!} + \dfrac{e^4}{4!} - \cdots$

23. Exprese el decimal periódico 1.2345345345 . . . como una fracción.

24. ¿Para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$?

25. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ correcta a cuatro lugares decimales.

26. (a) Encuentre la suma parcial s_5 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ y estime el error al usarlo como aproximación a la suma de la serie.
(b) Encuentre la suma de esta serie correcta a cinco lugares decimales.

27. Use la suma de los primeros ocho términos para aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2+5^n)^{-1}$. Estime el error involucrado en esta aproximación.

28. (a) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ es convergente.

(b) Deduzca que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

29. Demuestre que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n$$

también es absolutamente convergente.

30–33 Encuentre el radio de convergencia e intervalo de convergencia de la serie.

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n 4^n}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{(n+2)!}$

33. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

34. Encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

35. Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \pi/6$.

36. Encuentre la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/3$.

37–44 Encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. Se puede usar ya sea el método directo (definición de una serie de Maclaurin) o series conocidas como una serie geométrica, serie del binomio o serie de Maclaurin para e^x, sen x y $\tan^{-1} x$.

37. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

38. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

39. $f(x) = \ln(4-x)$

40. $f(x) = xe^{2x}$

41. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

42. $f(x) = 10^x$

43. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16-x}$

44. $f(x) = (1-3x)^{-5}$

45. Evalúe $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$ como una serie infinita.

46. Use series para aproximar $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ correcto a dos lugares decimales.

47–48
(a) Aproxime f por un polinomio de Taylor con grado n al número a.
(b) Grafique f y T_n en una pantalla común.
(c) Use la Desigualdad de Taylor para estimar la precisión de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x está en el intervalo dado.
(d) Compruebe su resultado del inciso (c) al graficar $|R_n(x)|$.

47. $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad a = 1$, $\quad n = 3$, $\quad 0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$

48. $f(x) = \sec x$, $\quad a = 0$, $\quad n = 2$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

49. Use series para evaluar el límite siguiente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

50. La fuerza debida la gravedad sobre un cuerpo con masa m a una altura h sobre la superficie terrestre es

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad.
(a) Exprese F como una serie en potencias de h/R.
(b) Observe que si aproximamos F por el primer término de la serie, obtenemos la expresión $F \approx mg$ que por lo general se usa cuando h es mucho menor que R. Use el Teorema de estimación de la serie alternante para estimar el intervalo de valores de h para el cual la aproximación $F \approx mg$ es precisa a no más de uno por ciento. (Use $R = 6400$ km.)

Principios de resolución de problemas

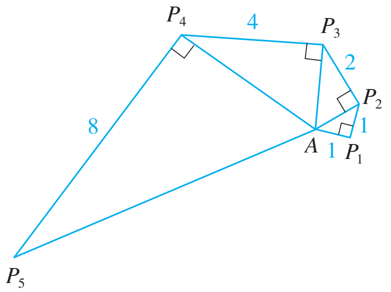


FIGURA PARA EL PROBLEMA 2

1. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encuentre $f^{(15)}(0)$.

2. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de puntos determinada como en la figura. Entonces $|AP_1| = 1$, $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$, y el ángulo AP_nP_{n+1} es un ángulo recto. Encuentre $\lim_{n\to\infty} \angle P_nAP_{n+1}$.

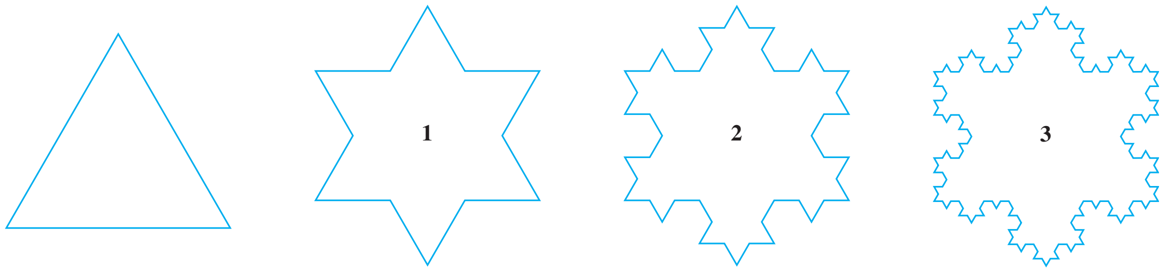
3. Para construir una **curva de copo de nieve,** empiece con un triángulo equilátero con lados de longitud 1. El Paso 1 en la construcción es dividir cada lado en tres partes iguales, construir un triángulo equilátero en la parte media y luego borrar la parte media (vea la figura). El Paso 2 es repetir el paso 1 para cada lado del polígono resultante. Este proceso se repite en cada paso sucesivo. La curva de copo de nieve es la curva que resulta de repetir este proceso indefinidamente.

(a) Con s_n, I_n y p_n represente el número de lados, la longitud de un lado y la longitud total de la n-ésima curva de aproximación (la curva obtenida después del paso n de la construcción), respectivamente. Encuentre fórmulas para s_n, I_n y p_n.

(b) Demuestre que $p_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

(c) Sume una serie infinita para hallar el área encerrada por la curva de copo de nieve.

Nota: Los incisos (b) y (c) muestran que la curva de copo de nieve es infinitamente más larga pero encierra sólo un área finita.



4. Encuentre la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

donde los términos son los recíprocos de los enteros positivos cuyos únicos factores primos son los números 2 y 3.

5. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

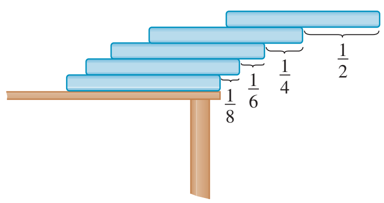


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. Supongamos que el lector tiene gran cantidad de libros, todos del mismo tamaño, y los acomoda uno sobre otro al borde de una mesa, con cada libro sobresaliendo un poco del libro de abajo sobre el borde de la mesa. Demuestre que es posible hacer esto de modo que el libro que está en lo más alto se extienda por entero fuera de la mesa. De hecho, demuestre que este libro se puede extender cualquier distancia fuera del borde de la mesa si la estibación es suficientemente alta. Use el siguiente método de estibar: El libro que esté en lo alto se extiende la mitad de su longitud más que el segundo libro. El segundo libro se extiende un cuarto de su longitud más allá del tercero. El tercer libro se extiende un sexto de su longitud más que el cuarto libro, y así sucesivamente. (Inténtelo con un "monte" de barajas.) Considere centros de masa.

7. Sea

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Demuestre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

8. Si $p > 1$, evalúe la expresión

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

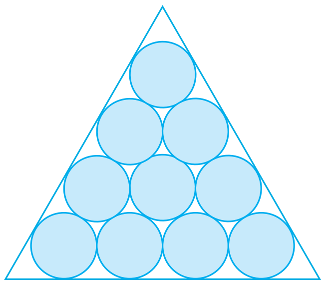


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. Suponga que círculos de igual diámetro están estrechamente apretados en n filas dentro de un triángulo equilátero. (La figura ilustra el caso de $n = 4$.) Si A es el área del triángulo y A_n es el área total ocupada por las n filas de círculos, demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

10. Una sucesión $\{a_n\}$ está definida en forma recursiva por las ecuaciones

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

11. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

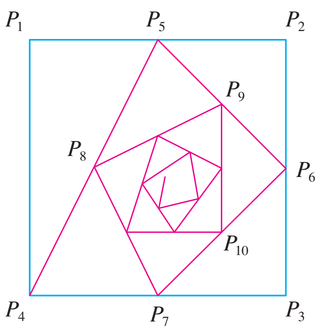


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

12. Empezando con los vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de un cuadrado, construimos más puntos como se ve en la figura: P_5 es el punto medio de P_1P_2, P_6 es el punto medio de P_2P_3, P_7 es el punto medio de P_3P_4, y así sucesivamente. La trayectoria espiral poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7 \ldots$ se aproxima a un punto P dentro del cuadrado.

(a) Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), demuestre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ y encuentre una ecuación semejante para las coordenadas y.

(b) Encuentre las coordenadas de P.

13. Encuentre todas las soluciones de la ecuación

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots = 0$$

Sugerencia: Considere los casos $x \geqslant 0$ y $x < 0$ separadamente.

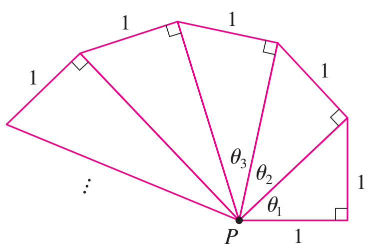


FIGURA PARA EL PROBLEMA 14

14. Se construyen triángulos rectángulos como en la figura. Cada triángulo tiene altura 1 y su base es la hipotenusa del triángulo precedente. Demuestre que esta sucesión de triángulos hace un número indefinido de vueltas alrededor de P al demostrar que $\sum \theta_n$ es una serie divergente.

15. Considere la serie cuyos términos son los recíprocos de los enteros positivos que se pueden escribir en notación de base 10 sin usar el dígito 0. Demuestre que esta serie es convergente y la suma es menor a 90.

16. (a) Demuestre que la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \qquad \text{es} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci, es decir, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Sugerencia*: Escriba $x/(1 - x - x^2) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ y multiplique ambos lados de esta ecuación por $1 - x - x^2$.]

(b) Escriba $f(x)$ como suma de fracciones parciales y por ello obtenga la serie de Maclaurin en una forma diferente, encuentre una fórmula explícita para el n-ésimo número de Fibonacci.

Apéndices

A Intervalos, desigualdades y valores absolutos
B Geometría de coordenadas
C Trigonometría
D Definiciones precisas de límites
E Algunas demostraciones
F Notación sigma
G Integración de funciones racionales por fracciones parciales
H Coordenadas polares
I Números complejos
J Respuestas a ejercicios de número impar

A Intervalos, desigualdades y valores absolutos

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de rectas. Por ejemplo, si $a < b$, el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y está denotado por el símbolo (a, b). Usando notación de construcción de conjuntos, podemos escribir

FIGURA 1
Intervalo abierto (a, b)

$$(a, b) = \{x \,|\, a < x < b\}$$

Nótese que los puntos extremos del intervalo, es decir a y b, están excluidos. Esto está indicado por los paréntesis ( ) y por los puntos abiertos en la Figura 1. El **intervalo cerrado** de a a b es el conjunto

FIGURA 2
Intervalo cerrado $[a, b]$

$$[a, b] = \{x \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$$

Aquí los puntos extremos del intervalo están incluidos. Esto está indicado por los corchetes [ ] y por los puntos llenos de la Figura 2. También es posible incluir sólo un punto extremo en un intervalo, como se ve en la Tabla 1.

1 Tabla de intervalos

Notación	Descripción de conjunto	Imagen
(a, b)	$\{x \,\|\, a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \,\|\, a \leqslant x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x \,\|\, a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \,\|\, a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \,\|\, x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \,\|\, x \geqslant a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \,\|\, x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \,\|\, x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

La tabla 1 contiene los nueve tipos posibles de intervalos. Cuando se estudian estos intervalos, siempre se supone que $a < b$.

También es necesario considerar intervalos infinitos como son

$$(a, \infty) = \{x \,|\, x > a\}$$

Esto no significa que ∞ ("infinito") sea un número. La notación (a, ∞) representa el conjunto de todos los números que son mayores que a, de modo que el símbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se prolonga indefinidamente en la dirección positiva.

Desigualdades

Cuando trabaje con desigualdades, nótense las reglas siguientes.

Reglas para desigualdades

1. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
5. Si $0 < a < b$, entonces $1/a > 1/b$.

La Regla 1 dice que podemos sumar cualquier número a ambos lados de una desigualdad, y la Regla 2 dice que dos desigualdades se pueden sumar, pero debemos tener cuidado con la multiplicación. La Regla 3 dice que podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número *positivo*, pero la Regla 4 dice que si multiplicamos ambos lados de una desigualdad por un número negativo, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si tomamos la desigualdad $3 < 5$ y multiplicamos por 2, obtenemos $6 < 10$, pero si multiplicamos por -2, obtenemos $-6 > -10$. Finalmente, la Regla 5 dice que si tomamos recíprocos, entonces invertimos la dirección de una desigualdad (siempre que los números sean positivos).

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $1 + x < 7x + 5$.

SOLUCIÓN La desigualdad dada queda satisfecha por algunos valores de x pero no por otros. *Resolver* una desigualdad significa determinar el conjunto de números x para los cuales la desigualdad es cierta; éste se denomina *conjunto solución*.

Primero restamos 1 de cada lado de la desigualdad (usando la Regla 1 con $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

A continuación restamos $7x$ de ambos lados (Regla 1 con $c = -7x$):

$$-6x < 4$$

Ahora dividimos ambos lados entre -6 $\left(\text{Regla 4 con } c = -\frac{1}{6}\right)$:

$$x > -\tfrac{4}{6} = -\tfrac{2}{3}$$

Todos estos pasos se pueden invertir, de modo que el conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo:

$$(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$$

Sabemos que la ecuación correspondiente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tiene las soluciones 2 y 3. Los números 2 y 3 dividen la recta real en tres intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

Un método visual para resolver el ejemplo 2, es graficar la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ (fig. 3) y observar que la curva está por abajo del eje x, cuando $2 \leqslant x \leqslant 3$.

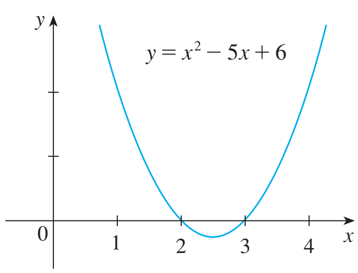


FIGURA 3

En cada uno de estos intervalos determinamos los signos de los factores. Por ejemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0$$

Entonces registramos estos signos en la siguiente tabla:

Intervalo	$x - 2$	$x - 3$	$(x - 2)(x - 3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Otro método para obtener la información en la tabla es usar *valores de prueba*. Por ejemplo, si usamos el valor de prueba $x = 1$ para el intervalo $(-\infty, 2)$, entonces la sustitución en $x^2 - 5x + 6$ da

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

El polinomio $x^2 - 5x + 6$ no cambia de signo dentro de ninguno de estos tres intervalos, de modo que concluimos que es positivo en $(-\infty, 2)$.

A continuación leemos de la tabla que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo cuando $2 < x < 3$. Entonces la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ es

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3]$$

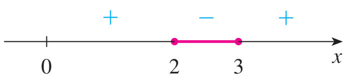


FIGURA 4

Nótese que hemos incluido los puntos extremos 2 y 3 porque estamos buscando valores de x tales que el producto es negativo o cero. La solución está ilustrada en la Figura 4.

EJEMPLO 3 Resuelva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUCIÓN Primero llevamos todos los términos diferentes de cero a un lado del signo de desigualdad y factorizamos la expresión resultante:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{o} \qquad x(x - 1)(x + 4) > 0$$

Al igual que en el Ejemplo 2 resolvemos la correspondiente ecuación $x(x - 1)(x + 4) = 0$ y usamos las soluciones $x = -4$, $x = 0$, y $x = 1$ para dividir la recta real en cuatro intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. En cada intervalo el producto mantiene un signo constante como se muestra en la tabla siguiente:

Intervalo	x	$x - 1$	$x + 4$	$x(x - 1)(x + 4)$
$x < -4$	−	−	−	−
$-4 < x < 0$	−	−	+	+
$0 < x < 1$	+	−	+	−
$x > 1$	+	+	+	+

FIGURA 5

A continuación leemos de la tabla que el conjunto solución es

$$\{x \mid -4 < x < 0 \ \text{ o } \ x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

La solución está ilustrada en la Figura 5.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta real. Las distancias son siempre positivas o 0, de modo que tenemos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general, tenemos

2
$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a \qquad \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a \qquad \text{si } a < 0 \end{aligned}}$$

Recuerde que si a es negativa, entonces $-a$ es positiva.

EJEMPLO 4 Exprese $|3x - 2|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

SOLUCIÓN

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } 3x - 2 \geqslant 0 \\ -(3x - 2) & \text{si } 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{si } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Recuerde que el símbolo $\sqrt{}$ significa “la raíz cuadrada positiva de.” Entonces $\sqrt{r} = s$ significa $s^2 = r$ y $s \geqslant 0$. Por tanto la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; lo es sólo cuando $a \geqslant 0$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, de modo que tenemos $\sqrt{a^2} = -a$. En vista de (2), tenemos entonces la ecuación

3 $$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

que es verdadera para todos los valores de a.

En los ejercicios se dan sugerencias para las pruebas de las siguientes propiedades.

Propiedades de valores absolutos Suponga que a y b son cualesquier números reales y n es un entero. Entonces

1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$ **3.** $|a^n| = |a|^n$

Para resolver ecuaciones o desigualdades que contengan valores absolutos, con frecuencia es muy útil usar los siguientes enunciados.

Suponga que $a > 0$. Entonces

4. $|x| = a$ si y sólo si $x = \pm a$

5. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$

6. $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$

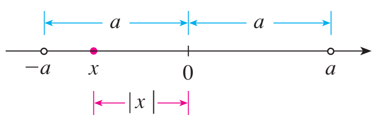


FIGURA 6

Por ejemplo, la desigualdad $|x| < a$ dice que la distancia de x al origen es menor que a, y se puede ver de la Figura 6 que esto es cierto si y sólo si x está entre $-a$ y a.

Si a y b son cualesquier números reales, entonces la distancia entre a y b es el valor absoluto de la diferencia, es decir, $|a - b|$, que también es igual a $|b - a|$. (Vea la Figura 7.)

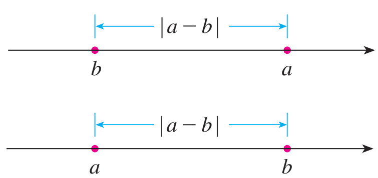


FIGURA 7

Longitud de un segmento de recta $= |a - b|$

EJEMPLO 5 Resuelva $|2x - 5| = 3$.

SOLUCIÓN Por la Propiedad 4 de valores absolutos, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$2x - 5 = 3 \qquad \text{o} \qquad 2x - 5 = -3$$

Por tanto, $2x = 8$ o $2x = 2$. Entonces $x = 4$ o $x = 1$.

EJEMPLO 6 Resuelva $|x - 5| < 2$.

SOLUCIÓN 1 Por la Propiedad 5 de valores absolutos, $|x - 5| < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

Por tanto, sumando 5 a cada lado, tenemos

$$3 < x < 7$$

y el conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 7)$.

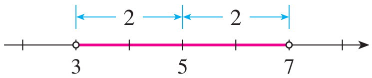


FIGURA 8

SOLUCIÓN 2 Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números x cuya distancia desde 5 es menor a 2. De la Figura 8 vemos que éste es el intervalo $(3, 7)$.

EJEMPLO 7 Resuelva $|3x + 2| \geqslant 4$.

SOLUCIÓN Por las Propiedades 4 y 6 de valores absolutos, $|3x + 2| \geqslant 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{o} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

En el primer caso, $3x \geqslant 2$, que da $x \geqslant \frac{2}{3}$. En el segundo caso, $3x \leqslant -6$, que da $x \leqslant -2$. Entonces el conjunto solución es

$$\left\{x \mid x \leqslant -2 \text{ o } x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = (-\infty, -2] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right)$$

A Ejercicios

1–10 Reescriba la expresión sin usar el símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$

2. $|\pi - 2|$

3. $|\sqrt{5} - 5|$

4. $||-2| - |-3||$

5. $|x - 2|$ si $x < 2$

6. $|x - 2|$ si $x > 2$

7. $|x + 1|$

8. $|2x - 1|$

9. $|x^2 + 1|$

10. $|1 - 2x^2|$

11–26 Resuelva la desigualdad en términos de intervalos e ilustre el conjunto solución sobre la recta numérica.

11. $2x + 7 > 3$

12. $4 - 3x \geqslant 6$

13. $1 - x \leqslant 2$

14. $1 + 5x > 5 - 3x$

15. $0 \leqslant 1 - x < 1$

16. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

17. $(x - 1)(x - 2) > 0$

18. $x^2 < 2x + 8$

19. $x^2 < 3$

20. $x^2 \geqslant 5$

21. $x^3 - x^2 \leqslant 0$

22. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$

23. $x^3 > x$

24. $x^3 + 3x < 4x^2$

25. $\dfrac{1}{x} < 4$

26. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

27. La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura en grados Celsius y F es la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Qué intervalo en la escala Celsius corresponde al intervalo de temperatura $50 \leqslant F \leqslant 95$?

28. Use la relación entre C y F dada en el Ejercicio 27 para hallar el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al intervalo de temperatura $20 \leqslant C \leqslant 30$.

29. Cuando se mueve el aire seco hacia arriba, se dilata y al hacerlo se enfría a razón de alrededor de 1°C por cada 100 m de ascenso, hasta unos 12 km.
(a) Si la temperatura del suelo es 20°C, escriba una fórmula para la temperatura a una altura h.
(b) ¿Qué intervalo de temperatura se puede esperar si un avión despega y alcanza una altura máxima de 5 km?

30. Si una pelota es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio de 128 ft de altura con una velocidad inicial de 16 ft/s, entonces la altura h arriba del suelo t segundos después será

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

¿Durante qué intervalo (tiempo) estará la pelota al menos a 32 ft sobre el nivel del suelo?

31–32 Despeje x de las ecuaciones siguientes.

31. $|x + 3| = |2x + 1|$

32. $|3x + 5| = 1$

33–40 Resuelva la desigualdad.

33. $|x| < 3$

34. $|x| \geqslant 3$

35. $|x - 4| < 1$

36. $|x - 6| < 0.1$

37. $|x + 5| \geqslant 2$

38. $|x + 1| \geqslant 3$

39. $|2x - 3| \leqslant 0.4$

40. $|5x - 2| < 6$

41. Despeje x de la desigualdad $a(bx - c) \geqslant bc$, suponiendo que a, b y c son constantes positivas.

42. Despeje x de la desigualdad $ax + b < c$, suponiendo que a, b y c son constantes negativas.

43. Demuestre que $|ab| = |a||b|$. [*Sugerencia*: Use la Ecuación 3.]

44. Demuestre que si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

B Geometría de coordenadas

Los puntos en un plano pueden identificarse con pares ordenados de números reales. Empezamos por trazar dos rectas perpendiculares coordenadas que se cruzan en el origen O de cada recta. Por lo general una recta es horizontal con dirección positiva a la derecha y recibe el nombre de eje x; la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba y se denomina eje y.

Cualquier punto P del plano puede ser localizado por un par ordenado único de números como sigue. Trace rectas que pasen por P perpendiculares a los ejes x y y. Estas rectas cruzan los ejes en puntos con coordenadas a y b como se ve en la Figura 1. Entonces al punto P se le asigna el par ordenado (a, b). El primer número a se llama **coordenada *x*** de P; el segundo número b se llama **coordenada *y*** de P. Decimos que P es el punto con coordenadas (a, b) y denotamos el punto por el símbolo $P(a, b)$. Varios puntos están marcados con sus coordenadas en la Figura 2.

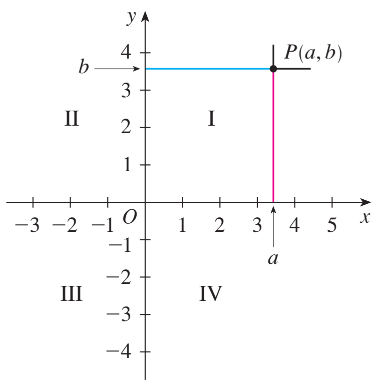


FIGURA 1

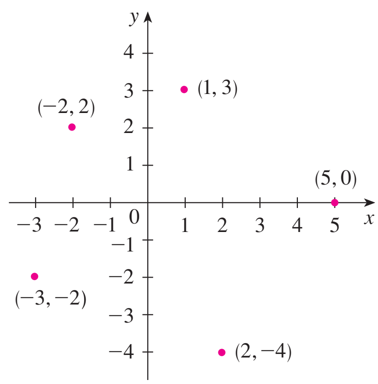


FIGURA 2

Al invertir el proceso anterior podemos empezar con un par ordenado (a, b) y llegar al punto P correspondiente. A veces identificamos el punto P con el par ordenado (a, b) y nos referimos al "punto (a, b)." [Aun cuando la notación empleada para un intervalo abierto (a, b) es la misma que la empleada para un punto (a, b), según el contexto se puede decir cuál es el significado que se pretende.]

Este sistema de coordenadas se denomina **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema cartesiano de coordenadas** en honor al matemático francés René Descartes (1596−1650), aun cuando otro francés, Pierre Fermat (1601−1665) inventó los principios de geometría analítica más o menos al mismo tiempo que Descartes. El plano marcado con este sistema de coordenadas se llama **plano de coordenadas** o **plano cartesiano** y está denotado por $\mathbb{R}^2$.

Los ejes x y y se llaman **ejes de coordenadas** y dividen al plano cartesiano en cuatro cuadrantes, que se indican como I, II, III y IV en la Figura 1. Nótese que el primer cuadrante está formado por puntos cuyas coordenadas x y y son positivas ambas.

EJEMPLO 1 Describa y trace las regiones dadas por los conjuntos siguientes.

(a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ (c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUCIÓN

(a) Los puntos cuyas coordenadas x sean 0 o positivas se encuentran sobre el eje y o a la derecha de éste, como está indicado por la región sombreada de la Figura 3(a).

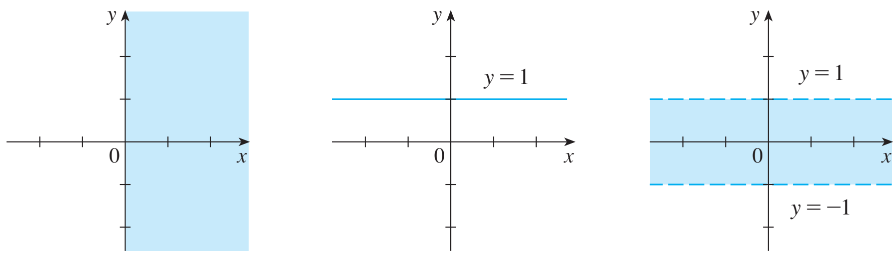


FIGURA 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

(b) El conjunto de todos los puntos con coordenada y de 1 es una recta horizontal una unidad arriba del eje x [vea la Figura 3(b)].

(c) Recuerde del Apéndice A que

$$|y| < 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad -1 < y < 1$$

La región dada está formada por los puntos del plano cuyas coordenadas y se encuentran entre -1 y 1. Así, la región consta de todos los puntos que estén entre (pero no sobre) las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$. [Estas rectas se muestran como líneas interrumpidas en la Figura 3(c) para indicar que los puntos sobre estas rectas no están en el conjunto.]

Recuerde del Apéndice A que la distancia entre puntos a y b sobre una recta numérica es $|a - b| = |b - a|$. Entonces la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_3(x_2, y_1)$ en una recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$ y la distancia entre $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_2, y_1)$ en una recta vertical debe ser $|y_2 - y_1|$. (Vea Figura 4.)

Para hallar la distancia $|P_1P_2|$ entre cualesquier dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, observamos que el triángulo $P_1P_2P_3$ de la Figura 4 es un triángulo recto, y por el Teorema de Pitágoras tenemos

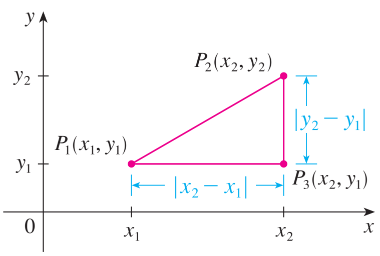


FIGURA 4

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmula de la distancia La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por ejemplo, la distancia entre $(1, -2)$ y $(5, 3)$ es

$$\sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

Circunferencias

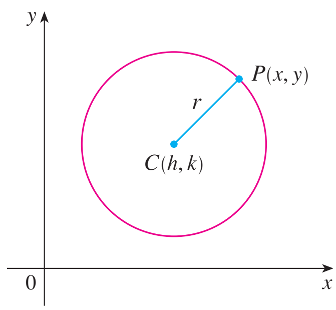


FIGURA 5

Una **ecuación de una curva** es una ecuación satisfecha por las coordenadas de los puntos sobre la curva y por ningunos otros puntos. Usemos la fórmula de la distancia para hallar la ecuación de una circunferencia de radio r y centro (h, k). Por definición, la circunferencia es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia desde el centro $C(h, k)$ es r. (Vea Figura 5.) Entonces P está en la circunferencia si y sólo si $|PC| = r$. De la fórmula de la distancia, tenemos

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

o, de manera equivalente, al elevar al cuadrado ambos lados tendremos

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ésta es la ecuación buscada.

Ecuación de una circunferencia Una ecuación de la circunferencia con centro (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen $(0, 0)$, la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Por ejemplo, una ecuación de la circunferencia con radio 3 y centro $(2, -5)$ es

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ demostrando primero que representa una circunferencia y luego encontrando su centro y radio.

SOLUCIÓN Primero agrupamos los términos en x y los términos en y como sigue:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7$$

A continuación completamos el cuadrado dentro de cada grupo, sumando las constantes apropiadas (los cuadrados de la mitad de los coeficientes de x y de y) a ambos lados de la ecuación:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

o bien $$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 3$$

Comparando esta ecuación con la ecuación estándar de una circunferencia, vemos que $h = -1$, $k = 3$, y $r = \sqrt{3}$, de modo que la ecuación dada representa una circunferencia con centro $(-1, 3)$ y radio $\sqrt{3}$. Está trazado en la Figura 6.

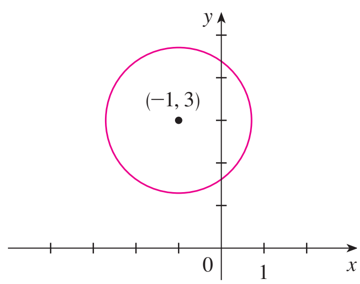


FIGURA 6
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

Rectas

Para hallar la ecuación de una recta L usamos su *pendiente*, que es una medida de la inclinación de la recta.

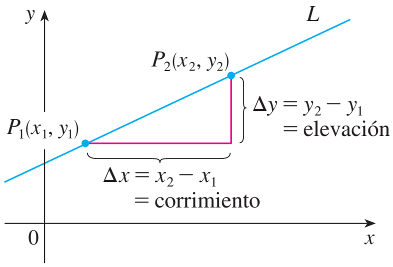


FIGURA 7

Definición La **pendiente** de una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

Así, la pendiente de una recta es la razón entre el cambio en y, Δy, y el cambio en x, Δx. (Vea la Figura 7.) La pendiente es por tanto la rapidez de cambio de y con respecto a x. El hecho de que la línea sea recta significa que la rapidez de cambio es constante.

La Figura 8 muestra varias rectas marcadas con sus pendientes. Nótese que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Nótese también que las rectas más inclinadas son aquellas para las cuales el valor absoluto de la pendiente es máximo, y una recta horizontal tiene pendiente 0.

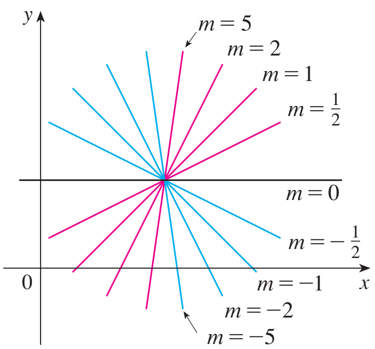


FIGURA 8

Ahora busquemos una ecuación de la recta que pase por un punto determinado $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m; esto es,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

y observamos que esta ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por tanto, es una ecuación de la recta dada.

Forma de punto-pendiente de la ecuación de una recta Una ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EJEMPLO 3 Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

Usando la forma de punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1)$$

que se simplifica a $$3x + 2y = 1$$

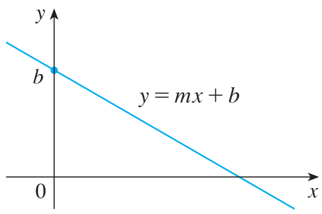


FIGURA 9

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente m y punto b de cruce con el eje y. (Vea Figura 9.) Esto significa que corta al eje y en el punto $(0, b)$, de modo que la forma de punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x_1 = 0$ y $y_1 = b$ se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica como sigue.

Forma de intercepción-pendiente de la ecuación de una recta Una ecuación de la recta con pendiente m y punto b de cruce con el eje y es

$$y = mx + b$$

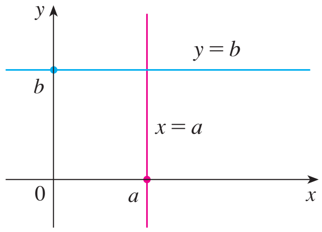


FIGURA 10

En particular, si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de manera que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de cruce con el eje y (vea Figura 10). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de cruce con el eje x, porque la coordenada x de todo punto sobre la recta es a.

EJEMPLO 4 Grafique la desigualdad $x + 2y > 5$.

SOLUCIÓN Nos piden trazar la gráfica del conjunto $\{(x, y) \mid x + 2y > 5\}$ y empezamos por despejar y de la desigualdad:

$$x + 2y > 5$$
$$2y > -x + 5$$
$$y > -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

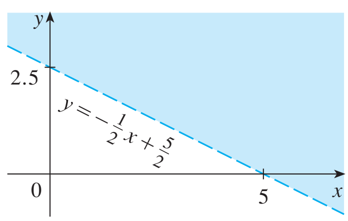


FIGURA 11

Compare esta desigualdad con la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, que representa una recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ y punto de cruce con el eje y de $\frac{5}{2}$. Vemos que la gráfica dada está formada de puntos cuyas coordenadas y son *más grandes* que las de la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Entonces la gráfica es la región que está *arriba* de la recta, como se ilustra en la Figura 11.

Rectas paralelas y perpendiculares

Las pendientes se pueden usar para demostrar que las rectas son paralelas o perpendiculares. Los datos siguientes están demostrados, por ejemplo, en *Precalculus: Mathematics for Calculus, Fifth Edition* de Stewart, Redlin, y Watson (Belmont, CA, 2006).

Rectas paralelas y perpendiculares

1. Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.
2. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$; esto es, sus pendientes son recíprocos negativos:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EJEMPLO 5 Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN La recta dada se puede escribir en la forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

que es una forma de intercepción-pendiente con $m = -\frac{2}{3}$. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente, de modo que la recta pedida tiene pendiente $-\frac{2}{3}$ y su ecuación en forma de punto-pendiente es

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Podemos escribir esta ecuación como $2x + 3y = 16$.

EJEMPLO 6 Demuestre que las rectas $2x + 3y = 1$ y $6x - 4y - 1 = 0$ son perpendiculares.

SOLUCIÓN Las ecuaciones se pueden escribir como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

de las que podemos ver que las pendientes son

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1 m_2 = -1$, las rectas son perpendiculares.

Secciones cónicas

Aquí repasamos las definiciones geométricas de parábolas, elipses e hipérbolas y sus ecuaciones estándar. Se denominan **secciones cónicas**, o **cónicas**, porque resultan de cortar un cono con un plano como se muestra en la Figura 12.

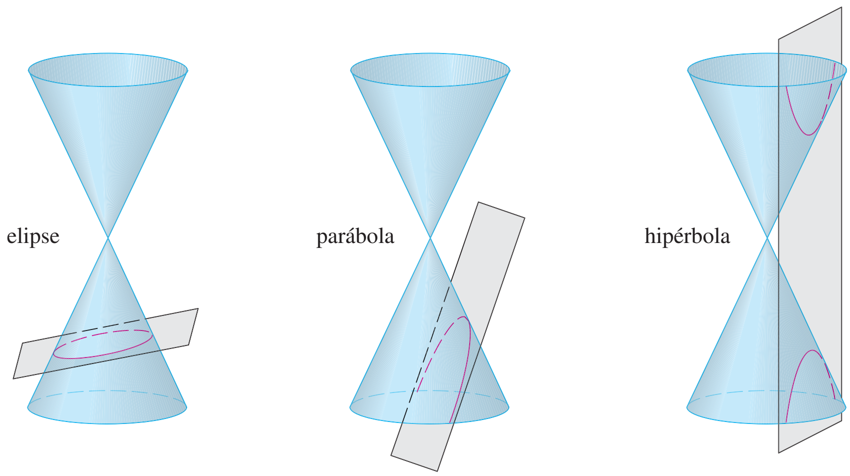


FIGURA 12
Cónicas

Parábolas

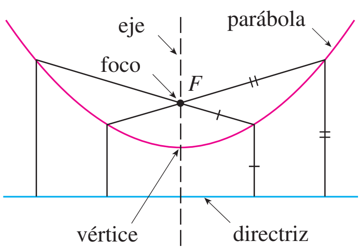
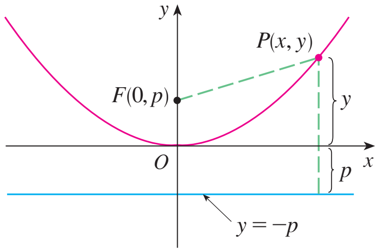


FIGURA 13

Una **parábola** es el conjunto de puntos en un plano que están equidistantes de un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija (llamada **directriz**). Esta definición está ilustrada en la Figura 13. Nótese que el punto situado a la mitad entre el foco y la directriz se encuentra en la parábola; recibe el nombre de **vértice**. La recta que pasa por el foco perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola.

En el siglo XVI, Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil que es disparado al aire a un ángulo con respecto al suelo es una parábola. Desde entonces se han empleado formas parabólicas en el diseño de faros de automóviles, telescopios reflectores y puentes colgantes. (Vea en el Problema 18 de la página 254 la propiedad de reflexión de parábolas que las hace tan útiles.)

Obtenemos una ecuación particularmente sencilla para una parábola si ponemos su vértice en el origen O y su directriz paralela al eje x como en la figura 14. Si el foco es el punto



FIGUR4 14

$(0, p)$, entonces la directriz tiene la ecuación $y = -p$ y la parábola tiene la ecuación

$$x^2 = 4py$$

(Vea Ejercicio 47.)

Si escribimos $a = 1/(4p)$, entonces la ecuación de la parábola se convierte en

$$\boxed{y = ax^2}$$

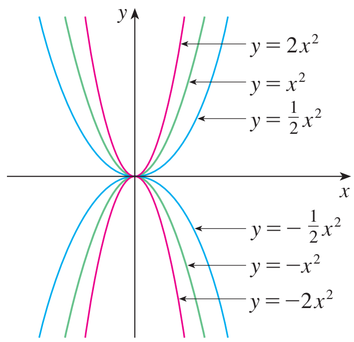


FIGURA 15

La Figura 15 muestra las gráficas de varias parábolas con ecuaciones de la forma $y = ax^2$ para varios valores del número a. Vemos que la parábola $y = ax^2$ abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$ (como en la Figura 16). La gráfica es simétrica con respecto al eje y porque su ecuación no cambia cuando x se sustituye con $-x$. Esto corresponde al hecho de que la función $f(x) = ax^2$ es una función par.

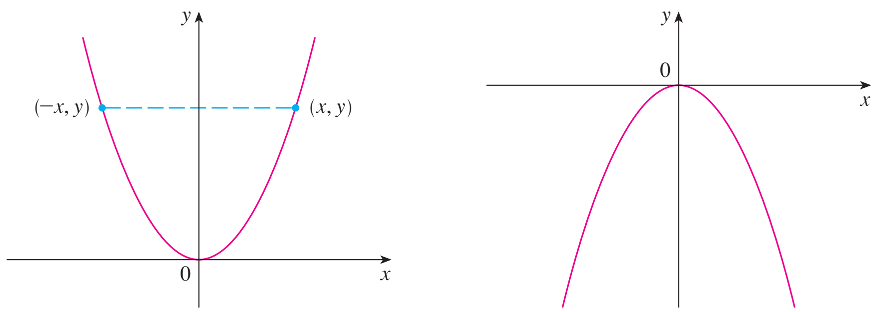


FIGURA 16 (a) $y = ax^2,\ a > 0$ (b) $y = ax^2,\ a < 0$

Si intercambiamos x y y en la ecuación $y = ax^2$, el resultado es $x = ay^2$, que también representa una parábola. (Intercambiar x y y equivale a reflejar alrededor de la recta diagonal $y = x$.) La parábola $x = ay^2$ abre a la derecha si $a > 0$ y a la izquierda si $a < 0$. (Vea la Figura 17.) Esta vez la parábola es simétrica con respecto al eje x porque la ecuación no cambia cuando y se sustituye con $-y$.

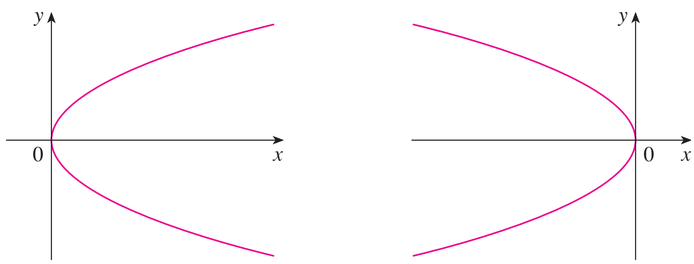


FIGURA 17 (a) $x = ay^2,\ a > 0$ (b) $x = ay^2,\ a < 0$

EJEMPLO 7 Trace la región acotada por la parábola $x = 1 - y^2$ y la recta $x + y + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Primero hallamos los puntos de intersección al resolver las dos ecuaciones. Sustituyendo $x = -y - 1$ en la ecuación $x = 1 - y^2$, obtenemos $-y - 1 = 1 - y^2$, que da

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

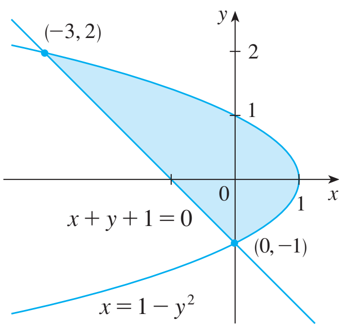


FIGURA 18

de modo que $y = 2$ o -1. Entonces los puntos de intersección son $(-3, 2)$ y $(0, -1)$, y trazamos la recta $x + y + 1 = 0$ que pasa por estos puntos.

Para trazar la parábola $x = 1 - y^2$ empezamos con la parábola $x = -y^2$ en la Figura 17(b) y nos desplazamos una unidad a la derecha. También nos aseguramos que pase por los puntos $(-3, 2)$ y $(0, -1)$. La región acotada por $x = 1 - y^2$ y $x + y + 1 = 0$ significa la región finita cuyas fronteras son estas curvas. Está trazada en la Figura 18.

Elipses

Una **elipse** es el conjunto de puntos de un plano cuya suma de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante (vea Figura 19). Estos dos puntos fijos se denominan **focos**. Una de las leyes de Kepler es que las órbitas de los planetas del sistema solar son elipses con el Sol en un foco.

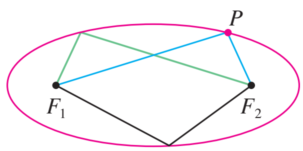


FIGURA 19

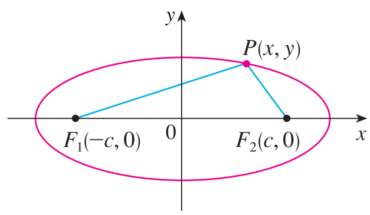


FIGURA 20

Para obtener la ecuación más sencilla para una elipse, ponemos los focos sobre el eje x en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ como en la Figura 20, de modo que el origen está a la mitad entre los focos. Si hacemos que la suma de las distancias desde un punto en la elipse a los focos sea $2a$, entonces podemos escribir una ecuación de la elipse como

1
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

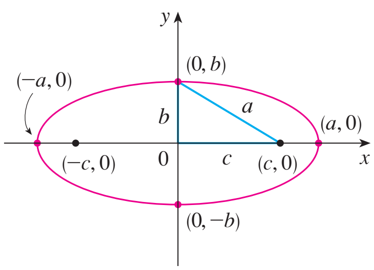


FIGURA 21
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b$

donde $c^2 = a^2 - b^2$. (Vea Ejercicio 49 y Figura 21.) Nótese que los puntos de cruce con el eje x son $\pm a$, los puntos de cruce con el eje y son $\pm b$, los focos son $(\pm c, 0)$, y la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes. Si los focos de una elipse están situados en el eje y en $(0, \pm c)$, entonces podemos hallar su ecuación al intercambiar x y y en (1).

EJEMPLO 8 Trace la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ y localice los focos.

SOLUCIÓN Divida ambos lados de la ecuación entre 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación está ahora en la forma estándar para una elipse, de manera que tenemos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$, y $b = 3$. Los puntos de cruce con el eje x son ± 4 y los puntos de cruce con el eje y son ± 3. También, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, de modo que $c = \sqrt{7}$ y los focos son $\left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$. La gráfica se presenta en la Figura 22.

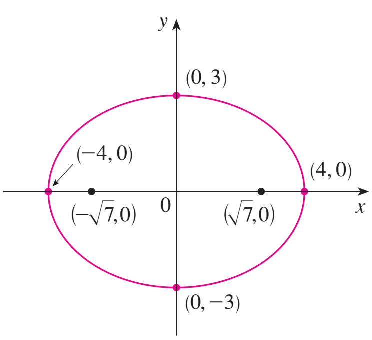


FIGURA 22
$9x^2 + 16y^2 = 144$

Al igual que las parábolas, las elipses tienen una interesante propiedad de reflexión que tiene consecuencias prácticas. Si una fuente de luz o de sonido se coloca en un foco de una superficie con secciones transversales elípticas, entonces la luz o el sonido se reflejan en la superficie al otro foco (vea el Ejercicio 55). Este principio se utiliza en *litotripcia*, tratamiento para piedras en los riñones. Un reflector con sección transversal elíptica se coloca en forma tal que la piedra en un riñón se encuentre en un foco. Ondas acústicas de alta intensidad se generan en el otro foco y se reflejan a la piedra y la destruyen sin dañar el tejido circundante. El paciente no sufre el trauma de una cirugía y se recupera en unos cuantos días.

Hipérbolas

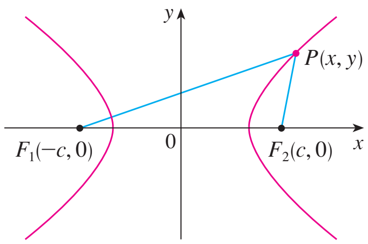


FIGURA 23
P está sobre la hipérbola cuando $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$.

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya diferencia de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 (los focos) es una constante. Esta definición está ilustrada en la Figura 23.

Nótese que la definición de una hipérbola es semejante a la de una elipse; el único cambio es que la suma de distancias es ahora una diferencia de distancias. Se deja como Ejercicio 51 demostrar que cuando los focos están en el eje x en $(\pm c, 0)$ y la diferencia de distancias es $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, entonces la ecuación de la hipérbola es

2 $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$. Nótese que los puntos de cruce con el eje x son de nuevo $\pm a$ pero, si ponemos $x = 0$ en la Ecuación 2 obtenemos $y^2 = -b^2$, lo cual es imposible, no hay punto de cruce con el eje y. La hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes.

Para analizar más aún la hipérbola, vemos la Ecuación 2 y obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

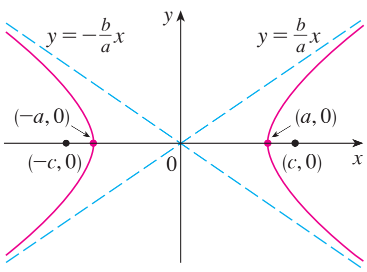


FIGURA 24
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Esto demuestra que $x^2 \geqslant a^2$, por lo cual $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Por tanto, tenemos $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola está formada por dos partes, llamadas *ramas*.

Cuando dibujemos una hipérbola es útil primero trazar sus *asíntotas*, que son las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ que se ven en la Figura 24. Ambas ramas de la hipérbola se aproximan a las asíntotas; es decir, de manera arbitraria se acercan a las asíntotas. Si los focos de una hipérbola están en el eje y, encontramos su ecuación al invertir los papeles de x y y.

EJEMPLO 9 Encuentre los focos y asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Si dividimos ambos lados de la ecuación entre 144, ésta se convierte en

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que es la forma dada en (2) con $a = 4$ y $b = 3$. Como $c^2 = 16 + 9 = 25$, los focos son $(\pm 5, 0)$. Las asíntotas son las rectas $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$. La gráfica se muestra en la Figura 25.

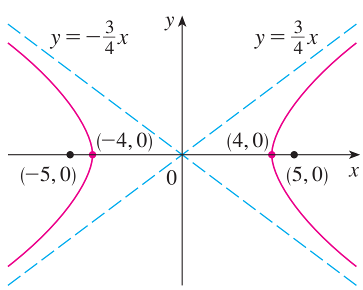


FIGURA 25
$9x^2 - 16y^2 = 144$

B Ejercicios

1–2 Encuentre la distancia entre los puntos.

1. $(1, 1), \quad (4, 5)$

2. $(1, -3), \quad (5, 7)$

3–4 Encuentre la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

3. $P(-3, 3), \quad Q(-1, -6)$

4. $P(-1, -4), \quad Q(6, 0)$

5. Demuestre que los puntos $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$, y $(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

6. (a) Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$, y $C(5, 15)$ son colineales (están en la misma línea) al mostrar que $|AB| + |BC| = |AC|$.
(b) Use pendientes para demostrar que A, B y C son colineales.

7–10 Trace la gráfica de la ecuación.

7. $x = 3$

8. $y = -2$

9. $xy = 0$

10. $|y| = 1$

11–24 Encuentre una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

11. Pasa por $(2, -3)$, pendiente 6

12. Pasa por $(-3, -5)$, pendiente $-\frac{7}{2}$

13. Pasa por $(2, 1)$ y $(1, 6)$

14. Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$

15. Pendiente 3, cruce con eje y en -2

16. Pendiente $\frac{2}{5}$, cruce con eje y en 4

17. Cruce con eje x en 1, cruce con eje y en -3

18. Cruce con eje x en -8, cruce con eje y en 6

19. Pasa por $(4, 5)$, paralela al eje x

20. Pasa por $(4, 5)$, paralela al eje y

21. Pasa por $(1, -6)$, paralela a la recta $x + 2y = 6$

22. Cruce con el eje y en 6, paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

23. Pasa por $(-1, -2)$, perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

24. Pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

25–28 Encuentre la pendiente y cruce con el eje y de la recta y trace su gráfica.

25. $x + 3y = 0$

26. $2x - 3y + 6 = 0$

27. $3x - 4y = 12$

28. $4x + 5y = 10$

29–36 Trace la región del plano xy.

29. $\{(x, y) \mid x < 0\}$

30. $\{(x, y) \mid x \geqslant 1 \text{ y } y < 3\}$

31. $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2\}$

32. $\{(x, y) \mid |x| < 3 \text{ y } |y| < 2\}$

33. $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ y } x \leqslant 2\}$

34. $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$

35. $\{(x, y) \mid 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$

36. $\{(x, y) \mid -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\}$

37–38 Encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

37. Centro $(3, -1)$, radio 5

38. Centro $(-1, 5)$, pasa por $(-4, -6)$

39–40 Demuestre que la ecuación representa una circunferencia y encuentre el centro y radio.

39. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

40. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

41. Demuestre que las rectas $2x - y = 4$ y $6x - 2y = 10$ no son paralelas y encuentre el punto de intersección de ambas.

42. Demuestre que las rectas $3x - 5y + 19 = 0$ y $10x + 6y - 50 = 0$ son perpendiculares y encuentre el punto de intersección de ambas.

43. Demuestre que el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

44. Encuentre el punto medio del segmento de recta que une los puntos $(1, 3)$ y $(7, 15)$.

45. Encuentre una ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$.

46. (a) Demuestre que si los puntos de cruce con los ejes x y y de una recta son los números a y b diferentes de cero, entonces la ecuación de la recta se puede poner en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta ecuación se denomina **forma de dos puntos de intercepción** de una ecuación de una recta.
(b) Use el inciso (a) para hallar una ecuación de la recta cuyo punto de cruce con el eje x es 6 y con el eje y es de -8.

47. Suponga que $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$. (Vea Figura 14.) Use la definición de una parábola para demostrar que $x^2 = 4py$.

48. Encuentre el foco y directriz de la parábola $y = x^2$. Ilustre con un diagrama.

49. Suponga que una elipse tiene focos $(\pm c, 0)$ y la suma de las distancias desde cualquier punto $P(x, y)$ sobre la elipse a los focos es $2a$. Demuestre que las coordenadas de P satisfacen la Ecuación 1.

50. Encuentre los focos de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ y trace su gráfica.

51. Use la definición de una hipérbola para derivar la Ecuación 2 para una hipérbola con focos $(\pm c, 0)$.

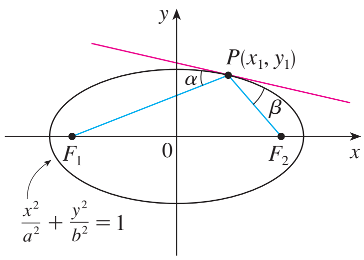
52. (a) Encuentre los focos y asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y trace su gráfica.
(b) Trace la gráfica de $y^2 - x^2 = 1$.

53–54 Trace la región acotada por las curvas.

53. $x + 4y = 8$ y $x = 2y^2 - 8$

54. $y = 4 - x^2$ y $x - 2y = 2$

55. Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las rectas PF_1, PF_2 y la elipse como se ve en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. Esto explica la forma en que funcionan galerías con eco y operaciones de litotripcia. El sonido que proviene de un foco se refleja y pasa por el otro foco. [*Sugerencia*: Use la fórmula del Problema 17 de la página 253 para demostrar que $\tan\alpha = \tan\beta$.]



C Trigonometría

Aquí repasamos los aspectos de trigonometría que se emplean en cálculo: medida en radianes, funciones trigonométricas, identidades trigonométricas y funciones trigonométricas inversas.

Ángulos

Los ángulos se pueden medir en grados o en radianes (abreviado rad). El ángulo dado por una revolución completa contiene 360°, que es igual a 2π rad. Por tanto,

1 $$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$$

y

2 $$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.3° \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}$$

EJEMPLO 1
(a) Encuentre la medida de 60° en radianes. (b) Exprese $5\pi/4$ rad en grados.

SOLUCIÓN
(a) De las Ecuaciones 1 o 2 vemos que para convertir de grados a radianes multiplicamos por $\pi/180$. Por tanto,

$$60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(b) Para convertir de radianes a grados multiplicamos por $180/\pi$. Entonces,

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225°$$

En cálculo usamos radianes para medir ángulos excepto cuando se indique de otro modo. La tabla siguiente da la correspondencia entre medidas en grados y en radianes para algunos ángulos comunes.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

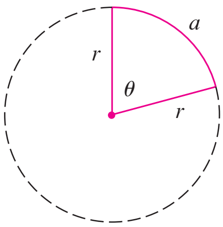


FIGURA 1

La Figura 1 muestra un sector de círculo con ángulo central θ y radio r que subtiende un arco de longitud a. Como la longitud del arco es proporcional al tamaño del ángulo, y como todo el círculo tiene circunferencia $2\pi r$ y ángulo central 2π, tenemos

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Despejando θ y a de esta ecuación, obtenemos

3 $$\boxed{\theta = \frac{a}{r}} \qquad \boxed{a = r\theta}$$

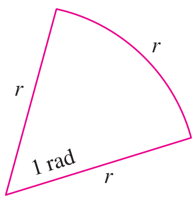


FIGURA 2

Recuerde que las Ecuaciones 3 son válidas sólo cuando θ se mide en radianes.

En particular, poniendo $a = r$ en la Ecuación 3, vemos que un ángulo de 1 rad es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco de igual longitud al radio del círculo (vea la Figura 2).

EJEMPLO 2

(a) Si el radio de un círculo es 5 cm, ¿qué ángulo está subtendido por un arco de 6 cm?
(b) Si un círculo tiene radio de 3 cm, ¿cuál es la longitud de un arco subtendido por un ángulo central de $3\pi/8$ rad?

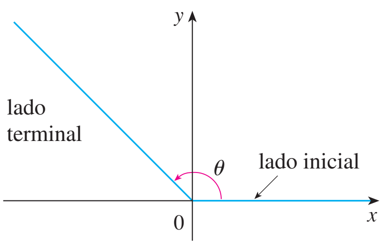


FIGURA 3 $\theta \geqslant 0$

SOLUCIÓN

(a) Usando la Ecuación 3 con $a = 6$ y $r = 5$, vemos que el ángulo es

$$\theta = \tfrac{6}{5} = 1.2 \text{ rad}$$

(b) Con $r = 3$ cm y $\theta = 3\pi/8$ rad, la longitud del arco es

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8} \text{ cm}$$

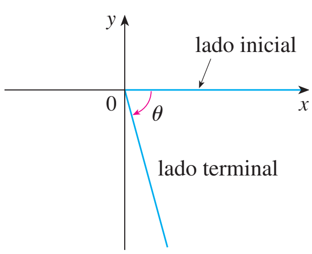


FIGURA 4 $\theta < 0$

La **posición estándar** de un ángulo se presenta cuando colocamos su vértice en el origen de un sistema de coordenadas y su lado inicial sobre el eje x positivo como en la Figura 3. Un ángulo **positivo** se obtiene al girar el lado inicial en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj hasta que coincida con el lado terminal. Del mismo modo, se obtienen ángulos **negativos** por rotación en el sentido de giro de las manecillas de un reloj como en la Figura 4.

La Figura 5 muestra varios ejemplos de ángulos en posición estándar. Nótese que diferentes ángulos pueden tener el mismo lado terminal. Por ejemplo, los ángulos $3\pi/4$,

$-5\pi/4$, y $11\pi/4$ tienen los mismos lados inicial y terminal porque

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

y 2π rad representa una revolución completa.

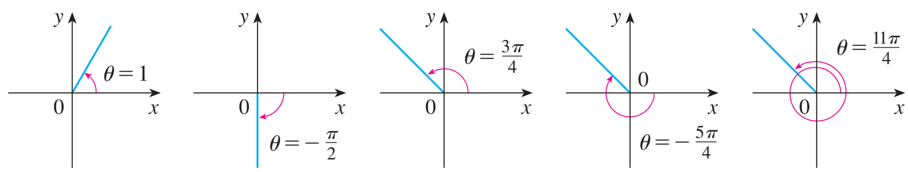


FIGURA 5
Ángulos en posición estándar

Las funciones trigonométricas

Para un ángulo agudo θ, las seis funciones trigonométricas están definidas como razones entre longitudes de lados de un triángulo recto como sigue (vea Figura 6).

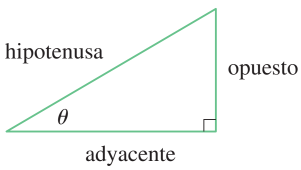


FIGURA 6

4

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

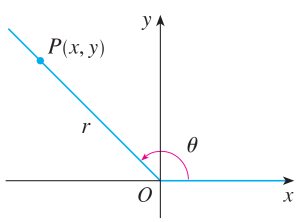


FIGURA 7

Esta definición no aplica a ángulos obtusos o negativos, de modo que para un ángulo general θ en posición estándar hacemos que $P(x, y)$ sea cualquier punto en el lado terminal de θ y hacemos que r sea la distancia $|OP|$ como en la Figura 7. Entonces definimos

5

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Como la división entre 0 no está definida, $\tan\theta$ y $\sec\theta$ no están definidas cuando $x = 0$ y $\csc\theta$ y $\cot\theta$ no están definidas cuando $y = 0$. Nótese que las definiciones en (4) y (5) son consistentes cuando θ es un ángulo agudo.

Si θ es un número, la convención es que $\operatorname{sen}\theta$ es el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es θ. Por ejemplo, la expresión sen 3 implica que estamos trabajando con un ángulo de 3 rad. Cuando se busca una aproximación con calculadora a este número, debemos recordar poner nuestra calculadora en el modo de radianes, y luego obtenemos

$$\operatorname{sen} 3 \approx 0.14112$$

Si deseamos saber cuál es el seno del ángulo 3° escribiríamos sen 3° y, con nuestra calculadora en el modo de grados, encontramos que

$$\operatorname{sen} 3° \approx 0.05234$$

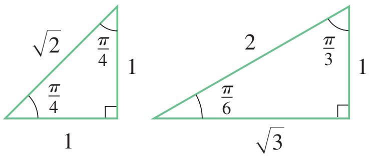


FIGURA 8

Las razones trigonométricas exactas para ciertos ángulos se pueden leer de los triángulos de la Figura 8. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

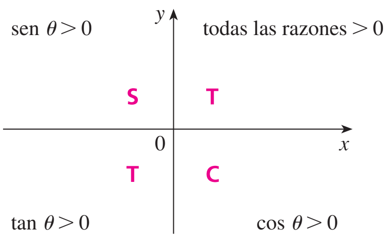


FIGURA 9

Los signos de las funciones trigonométricas para ángulos en cada uno de los cuatro cuadrantes pueden recordarse con el dicho "Todos los Supervisores Toman Cálculo" como se ve en la Figura 9.

EJEMPLO 3 Encuentre las razones trigonométricas exactas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUCIÓN De la Figura 10 vemos que un punto en la recta terminal para $\theta = 2\pi/3$ es $P(-1, \sqrt{3})$. Por tanto, tomando

$$x = -1 \qquad y = \sqrt{3} \qquad r = 2$$

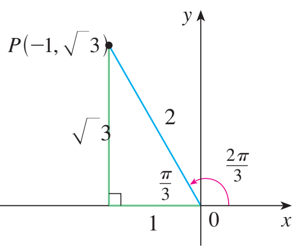


FIGURA 10

en las definiciones de las razones trigonométricas, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\csc\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

La tabla siguiente da algunos valores para sen θ y cos θ hallados por el método del Ejemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

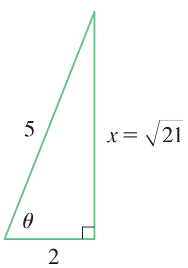


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Si $\cos\theta = \frac{2}{5}$ y $0 < \theta < \pi/2$, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN Como $\cos\theta = \frac{2}{5}$, podemos marcar la hipotenusa como que tiene longitud 5 y el lado adyacente como que tiene longitud 2 en la Figura 11. Si el lado opuesto tiene longitud x, entonces el Teorema de Pitágoras da $x^2 + 4 = 25$ y por tanto $x^2 = 21$, $x = \sqrt{21}$. Podemos ahora usar el diagrama para escribir las otras cinco funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec\theta = \frac{5}{2} \qquad \cot\theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

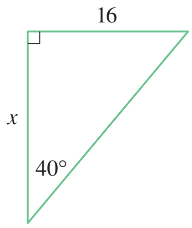


FIGURA 12

EJEMPLO 5 Use una calculadora para aproximar el valor de x de la Figura 12.

SOLUCIÓN Del diagrama vemos que

$$\tan 40° = \frac{16}{x}$$

Por tanto, $$x = \frac{16}{\tan 40°} \approx 19.07$$

Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una relación entre las funciones trigonométricas. Las más elementales son las siguientes, que son consecuencias inmediatas de las definiciones de las funciones trigonométricas.

6 $$\boxed{\begin{gathered}\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \\ \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\end{gathered}}$$

Para la siguiente identidad consultamos de nuevo la Figura 7. La fórmula de la distancia (o bien, lo que es equivalente, el Teorema de Pitágoras) nos dice que $x^2 + y^2 = r^2$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por lo tanto hemos demostrado una de las más útiles de todas las identidades trigonométricas:

7 $$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

Si ahora dividimos ambos lados de la Ecuación 7 entre $\cos^2\theta$ y usamos las Ecuaciones 6, obtenemos

8 $$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

Del mismo modo, si dividimos ambos lados de la Ecuación 7 entre $\operatorname{sen}^2\theta$, obtenemos

9 $$\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta}$$

Las identidades

10a $$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

10b $$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

Funciones impares y pares se estudian en la Sección 1.1.

muestran que sen es una función impar y cos es una función par. Se demuestran fácilmente al trazar un diagrama con θ y $-\theta$ en posición estándar (vea Ejercicio 19).

Como los ángulos θ y $\theta + 2\pi$ tienen el mismo lado terminal, tenemos

11 $$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Estas identidades muestran que las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π.

Las identidades trigonométricas restantes son todas ellas consecuencias de dos identidades básicas llamadas **fórmulas de la adición**:

12a $$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y$$

12b $$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

Las pruebas de estas fórmulas de la adición se compendian en los Ejercicios 43, 44 y 45.

Al sustituir $-y$ por y en las Ecuaciones 12a y 12b y usando las Ecuaciones 10a y 10b, obtenemos las siguientes **fórmulas de la sustracción**:

13a $$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}x\cos y - \cos x\operatorname{sen}y$$

13b $$\cos(x - y) - \cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$$

Entonces, al dividir las fórmulas de las Ecuaciones 12 o Ecuaciones 13, obtenemos las correspondientes fórmulas para $\tan(x \pm y)$:

14a $$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

14b $$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

Si ponemos $y = x$ en las fórmulas de la adición (12), obtenemos las **fórmulas de doble ángulo**:

15a $$\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

15b $$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Entonces, al usar la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtenemos las siguientes formas alternas de las fórmulas de doble ángulo para $\cos 2x$:

16a $$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

16b $$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$$

Si ahora de estas ecuaciones despejamos $\cos^2 x$ y $\text{sen}^2 x$, obtenemos las siguientes **fórmulas de medio ángulo**, que son útiles en cálculo integral:

17a $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

17b $$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Hay muchas otras identidades trigonométricas, pero las que hemos explicado aquí son las que más se usan en cálculo. Si el lector olvida cualquiera de ellas, recuerde que todas se pueden deducir de las Ecuaciones 12a y 12b.

EJEMPLO 6 Encuentre todos los valores de x del intervalo $[0, 2\pi]$ tales que $\text{sen}\, x = \text{sen}\, 2x$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula de doble ángulo (15a), reescribimos la ecuación dada como

$$\text{sen}\, x = 2\,\text{sen}\, x \cos x \qquad \text{o} \qquad \text{sen}\, x(1 - 2\cos x) = 0$$

Por tanto, hay dos posibilidades:

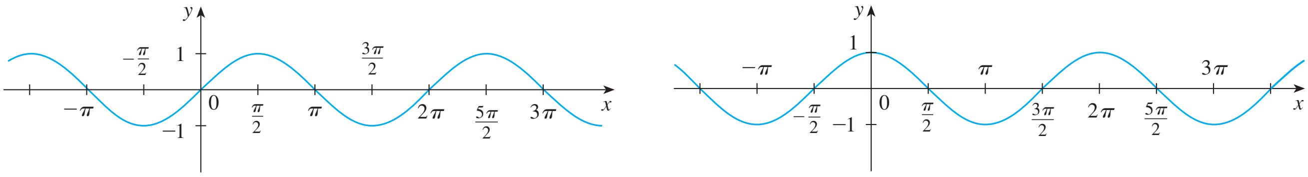
$$\begin{array}{lcl} \text{sen}\, x = 0 & \quad\text{o}\quad & 1 - 2\cos x = 0 \\ x = 0, \pi, 2\pi & & \cos x = \frac{1}{2} \\ & & x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3} \end{array}$$

La ecuación dada tiene cinco soluciones: 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ y 2π.

Gráficas de las funciones trigonométricas

La gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\, x$, que se ve en la Figura 13(a), se obtiene al localizar los puntos para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ y a continuación usando la naturaleza periódica de la función (de la Ecuación 11) para completar la gráfica. Nótese que los ceros de la función seno se presentan en los múltiplos enteros de π, es decir,

$$\text{sen}\, x = 0 \qquad \text{siempre que } x = n\pi, \quad n \text{ un entero}$$



(a) $f(x) = \text{sen}\, x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 13

Debido a la identidad

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(que se puede verificar usando la Ecuación 12a), la gráfica de coseno se obtiene al desplazar la gráfica de seno en una cantidad $\pi/2$ a la izquierda [vea Figura 13(b)]. Nótese que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el intervalo es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Entonces, para todos los valores de x, tenemos

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

Las gráficas de las restantes cuatro funciones trigonométricas se muestran en la Figura 14 y sus dominios están indicados ahí. Nótese que tangente y cotangente tienen intervalo $(-\infty, \infty)$, mientras que cosecante y secante tienen intervalo $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Las cuatro funciones son periódicas: tangente y cotangente tienen periodo π, mientras que cosecante y secante tienen periodo 2π.

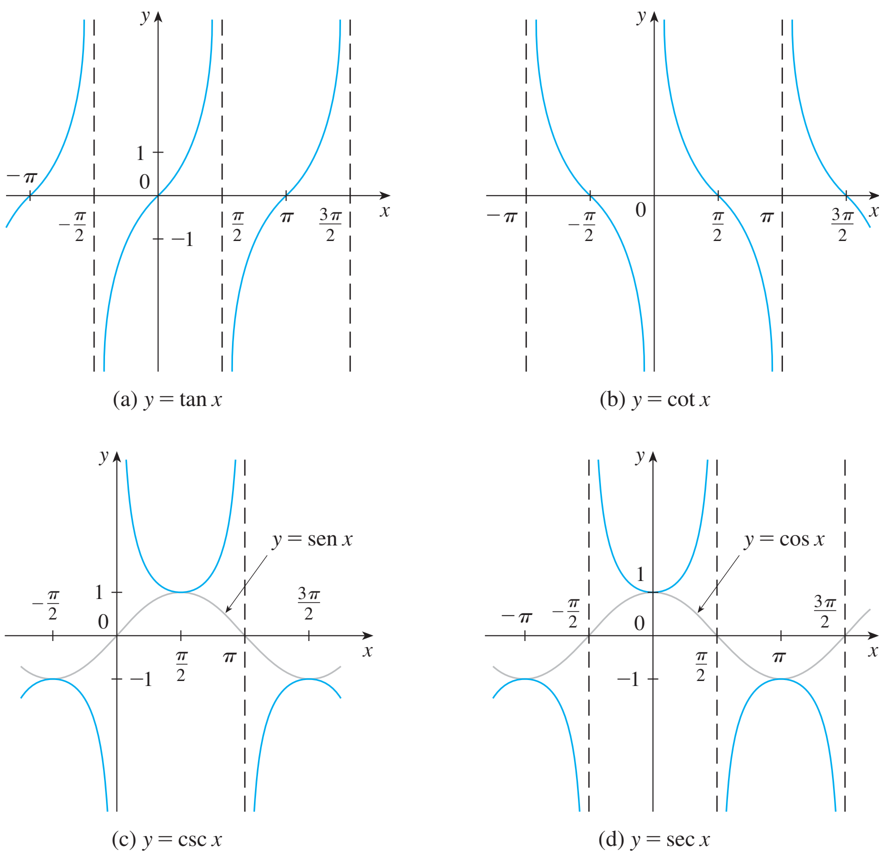


FIGURA 14

C Ejercicios

1–2 Convierta de grados a radianes.

1. (a) $210°$ (b) $9°$

2. (a) $-315°$ (b) $36°$

3–4 Convierta de radianes a grados.

3. (a) 4π (b) $-\dfrac{3\pi}{8}$

4. (a) $-\dfrac{7\pi}{2}$ (b) $\dfrac{8\pi}{3}$

5. Encuentre la longitud de un arco circular subtendido por un ángulo de $\pi/12$ rad si el radio del círculo es 36 cm.

6. Si un círculo tiene radio 10 cm, encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 72°.

7. Un círculo tiene radio de 1.5 m. ¿Qué ángulo está subtendido en el centro del círculo por un arco de 1 m de largo?

8. Encuentre el radio de un sector circular con ángulo $3\pi/4$ y longitud de arco de 6 cm.

9–10 Trace, en posición estándar, el ángulo cuya medida está dada.

9. (a) $315°$ (b) $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

10. (a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad (b) -3 rad

11–12 Encuentre las razones trigonométricas exactas para el ángulo cuya medida en radianes está dada.

11. $\dfrac{3\pi}{4}$

12. $\dfrac{4\pi}{3}$

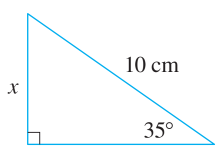
13–14 Encuentre las razones trigonométricas restantes.

13. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

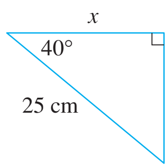
14. $\tan\alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

15–18 Encuentre, correcta a cinco lugares decimales, la longitud del lado marcado x.

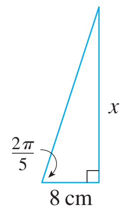
15.



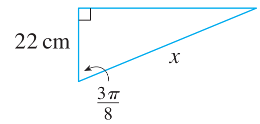
16.



17.



18.



19–20 Demuestre cada una de estas ecuaciones.

19. (a) Ecuación 10a (b) Ecuación 10b

20. (a) Ecuación 14a (b) Ecuación 14b

21–26 Demuestre la identidad.

21. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

22. $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

23. $\operatorname{sen}\theta \cot\theta = \cos\theta$

24. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

25. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

26. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

27–28 Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x y y están entre 0 y $\pi/2$, evalúe la expresión.

27. $\operatorname{sen}(x + y)$

28. $\cos 2y$

29–32 Encuentre todos los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la ecuación.

29. $2\cos x - 1 = 0$

30. $2\operatorname{sen}^2 x = 1$

31. $\operatorname{sen} 2x = \cos x$

32. $|\tan x| = 1$

33–36 Encuentre todos los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfagan la desigualdad.

33. $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$

34. $2\cos x + 1 > 0$

35. $-1 < \tan x < 1$

36. $\operatorname{sen} x > \cos x$

37–40 Grafique la función empezando con las gráficas de las Figuras 13 y 14 y aplicando las transformaciones de la Sección 1.3 donde sea apropiado.

37. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

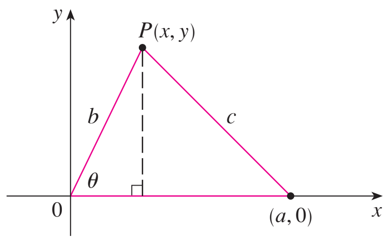
38. $y = \tan 2x$

39. $y = \dfrac{1}{3}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

40. $y = |\operatorname{sen} x|$

41. Demuestre la **Ley de Cosenos:** Si un triángulo tiene lados con longitudes a, b y c y θ es el ángulo entre los lados con longitudes a y b, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

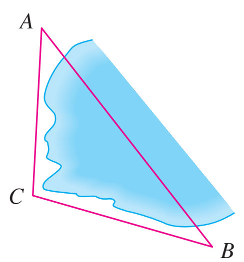


[*Sugerencia*: Introduzca un sistema de coordenadas de modo que θ esté en posición estándar, como en la figura. Exprese x y y en términos de θ y a continuación use la fórmula de la distancia para calcular c.]

42. Para hallar la distancia $|AB|$ en una pequeña entrada, se localiza un punto C como en la figura y se registran las siguientes medidas:

$$\angle C = 103^\circ \qquad |AC| = 820 \text{ m} \qquad |BC| = 910 \text{ m}$$

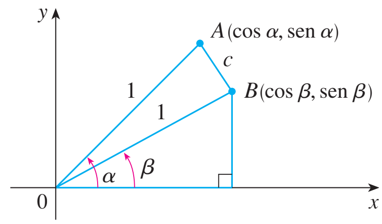
Use la Ley de Cosenos del Ejercicio 41 para hallar la distancia pedida.



43. Use la figura para demostrar la fórmula de sustracción

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

[*Sugerencia*: Calcule c^2 en dos formas (usando la Ley de Cosenos del Ejercicio 41 y también usando la fórmula de la distancia) y compare las dos expresiones.]



44. Use la fórmula del Ejercicio 43 para demostrar la fórmula de la adición para cosenos (12b).

45. Use la fórmula de la adición para cosenos y las identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

para demostrar la fórmula de la sustracción para la función seno.

46. (a) Demuestre que el área de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo incluido θ es

$$A = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$$

(b) Encuentre el área del triángulo ABC, correcta a cinco lugares decimales, si

$$|AB| = 10 \text{ cm} \qquad |BC| = 3 \text{ cm} \qquad \angle ABC = 107^\circ$$

D Definiciones precisas de límites

Las definiciones de límites que se han dado en este libro son apropiadas para entender de manera intuitiva los conceptos básicos de cálculo. Con el fin de entender con más profundidad y realizar pruebas más rigurosas, son necesarias las definiciones precisas de este apéndice. En particular, la definición de un límite dada aquí se usa en el Apéndice E para demostrar que el límite de una suma es la suma de los límites.

Cuando decimos que $f(x)$ tiene un límite L cuando x se aproxima a a, queremos decir, de acuerdo con la definición intuitiva de la Sección 2.2, que podemos hacer $f(x)$ arbitrariamente cercana a L al tomar x cerca de a lo suficiente (pero no igual a a). Una definición más precisa está basada en la idea de especificar qué tan pequeña es necesario hacer la distancia $|x - a|$ para hacer que la distancia $|f(x) - L|$ sea menor que algún número determinado. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

Es tradicional usar la letra griega δ en esta situación.

EJEMPLO 1 Use una gráfica para hallar el número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

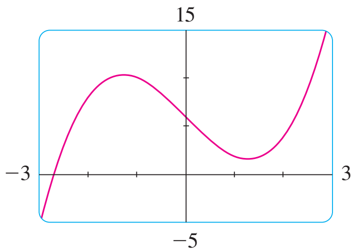


FIGURA 1

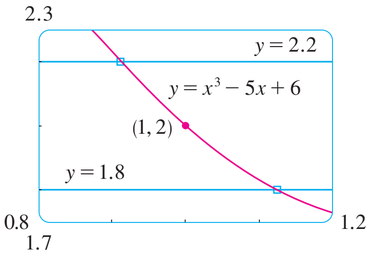


FIGURA 2

SOLUCIÓN Una gráfica de f se muestra en la Figura 1; estamos interesados en la región cercana al punto (1, 2). Nótese que podemos reescribir la desigualdad

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

como
$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

Entonces necesitamos determinar los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está entre las rectas horizontales $y = 1.8$ y $y = 2.2$. Por tanto, graficamos las curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1.8$ y $y = 2.2$ cerca del punto (1, 2) en la Figura 2. A continuación usamos el cursor para estimar que la coordenada x del punto de intersección de la recta $y = 2.2$ y la curva $y = x^3 - 5x + 6$ es aproximadamente 0.911. Del mismo modo, $y = x^3 - 5x + 6$ cruza la recta $y = 1.8$ cuando $x \approx 1.124$. Por tanto, redondeando para estar seguros, podemos decir que

$$\text{si} \qquad 0.92 < x < 1.12 \qquad \text{entonces} \qquad 1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

Este intervalo (0.92, 1.12) no es simétrico alrededor de $x = 1$. La distancia de $x = 1$ al punto extremo izquierdo es $1 - 0.92 = 0.08$ y la distancia al punto extremo derecho es 0.12. Podemos escoger que δ sea el más pequeño de estos números, es decir, $\delta = 0.08$. Entonces podemos reescribir nuestras desigualdades en términos de distancias como sigue:

$$\text{si} \qquad |x - 1| < 0.08 \qquad \text{entonces} \qquad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

Esto sólo dice que al mantener x a no más de 0.08 de 1, podemos conservar $f(x)$ a no más de 0.2 de 2.

Aun cuando escogemos $\delta = 0.08$, cualquier valor positivo más pequeño de δ también ha funcionado.

Usando el mismo procedimiento gráfico que en el Ejemplo 1, pero sustituyendo el número 0.2 por números más pequeños, encontramos que

$$\text{si} \qquad |x - 1| < 0.046 \qquad \text{entonces} \qquad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.1$$

$$\text{si} \qquad |x - 1| < 0.024 \qquad \text{entonces} \qquad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.05$$

$$\text{si} \qquad |x - 1| < 0.004 \qquad \text{entonces} \qquad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.01$$

En cada caso hemos encontrado un número δ tal que los valores de la función $f(x) = x^3 - 5x + 6$ están en intervalos sucesivamente más pequeños centrados en 2 si la distancia de x a 1 es menor a δ. Resulta que siempre es posible hallar tal número δ, no importa lo pequeño que sea el intervalo. En otras palabras, para *cualquier* número positivo ε, no importa lo pequeño que sea, existe un número positivo δ tal que

$$\text{si} \qquad |x - 1| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < \varepsilon$$

Esto indica que

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 5x + 6) = 2$$

y sugiere una forma más precisa de definir el límite de una función general.

1 Definición Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contenga el número a, excepto posiblemente en a mismo. Entonces decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a es L**, y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

La condición $0 < |x - a|$ es sólo otra forma de decir que $x \neq a$.

La Definición 1 está ilustrada en las Figuras 3–5. Si se da un número $\varepsilon > 0$, entonces trazamos las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ y la gráfica de f. (Vea Figura 3.) Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces podemos hallar un número $\delta > 0$ tal que si restringimos x a que se encuentre en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ y tomamos $x \neq a$, entonces la curva $y = f(x)$ estará entre las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$. (Vea Figura 4.) Se puede ver que si esa δ se ha encontrado, entonces cualquier δ más pequeña tambien funcionará.

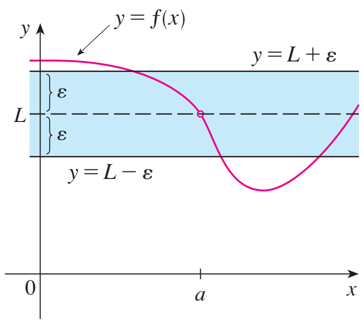


FIGURA 3

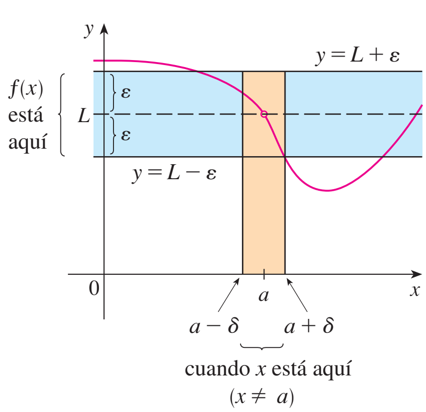


FIGURA 4

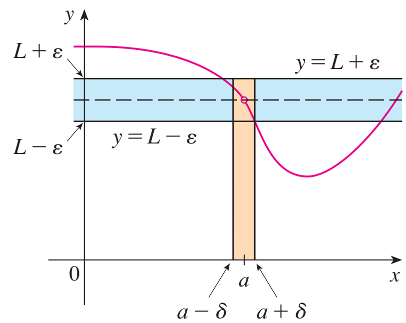


FIGURA 5

Es importante ver que el proceso ilustrado en las Figuras 3 y 4 debe funcionar para *todo* número positivo ε sin importar lo pequeño que se escoja. La Figura 5 muestra que si se escoge un ε más pequeño, entonces un δ más pequeño puede requerirse.

EJEMPLO 2 Use la definición ε, δ para demostrar que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

SOLUCIÓN Sea ε un número positivo dado. De acuerdo a la Definición 1 con $a = 0$ y $L = 0$, necesitamos hallar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - 0| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |x^2 - 0| < \varepsilon$$

esto es, $$\text{si} \qquad 0 < |x| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad x^2 < \varepsilon$$

Pero, como la función de raíz cuadrada es una función creciente, sabemos que

$$x^2 < \varepsilon \iff \sqrt{x^2} < \sqrt{\varepsilon} \iff |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

Por tanto escogemos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, entonces $x^2 < \varepsilon \iff |x| < \delta$. (Vea Figura 6.) Esto demuestra que $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.

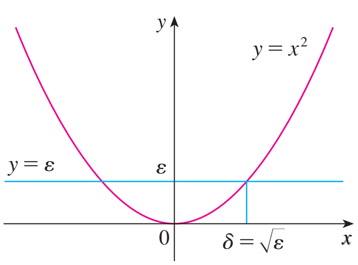


FIGURA 6

Al demostrar enunciados de límites puede ser útil considerar la definición de límite como un desafío. Primero nos desafía con un número ε y luego debemos producir una δ apropiada; el lector tiene que hacer esto para *toda* $\varepsilon > 0$, no sólo una ε particular.

TEC En Module D el lector puede explorar la definición precisa de un límite tanto gráfica como numéricamente.

Imaginemos que hay un concurso entre dos personas, A y B, y que el lector es B. La persona A estipula que el número fijo L debe aproximarse por los valores de $f(x)$ hasta un grado de precisión ε (por ejemplo 0.01). La persona B responde entonces al hallar un número δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Entonces A se puede hacer más exigente y desafiar a B con un valor más pequeño de ε (por ejemplo 0.0001). De nuevo B tiene que responder al hallar un δ correspondiente. Por lo general cuanto más pequeño sea el valor de ε, menor debe ser el correspondiente valor de δ. Si B siempre gana, no importa lo pequeño que A haga ε, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

V **EJEMPLO 3** Demuestre que $\lim\limits_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema* (*calculando un valor de* δ). Sea ε un número positivo determinado. Deseamos hallar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Pero $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Por tanto, deseamos un δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

esto es,
$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Esto sugiere que debemos escoger $\delta = \varepsilon/4$.

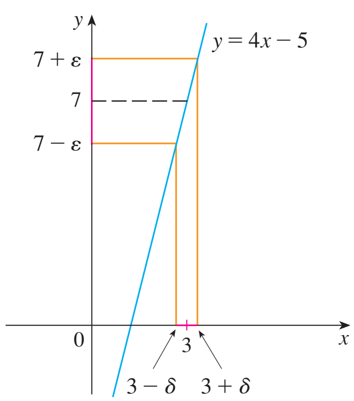


FIGURA 7

2. *Prueba* (*mostrando que este* δ *funciona*). Dado $\varepsilon > 0$, escoja $\delta = \varepsilon/4$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Por tanto

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

En consecuencia, por la definición de un límite

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este ejemplo está ilustrado por la figura 7.

Nótese que en la solución del Ejemplo 3 hubo dos etapas: calcular y demostrar. Hicimos un análisis previo que hizo posible calcular un valor de δ, pero entonces en la segunda etapa tuvimos que regresar y demostrar con cuidado y de manera lógica que teníamos que hacer un cálculo correcto, procedimiento típico en muchos matemáticos. A veces es necesario hacer primero un cálculo inteligente acerca de la respuesta a un problema y luego demostrar que el cálculo es correcto.

No siempre es fácil demostrar que los enunciados de límite son verdaderos usando una definición de ε y δ. Para una función más complicada como lo es $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, una prueba requeriría mucho ingenio. Por fortuna, esto no es necesario porque las Leyes de Límites expresadas en la Sección 2.3 se pueden demostrar usando la Definición 1, y luego los límites de funciones complicadas se pueden hallar de manera rigurosa a partir de las Leyes de Límites sin recurrir a la definición directamente.

Límites en el infinito

Los límites infinitos y los límites en el infinito se pueden definir de forma precisa. La siguiente es una versión precisa de la Definición 4 de la Sección 2.5.

2 Definición Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número N tal que

$$\text{si} \qquad x > N \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

En otras palabras, esto dice que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L (a una distancia no mayor de ε, donde ε es cualquier número positivo) al tomar x grande lo suficiente (mayor que N, donde N depende de ε). De manera gráfica dice que al escoger x suficientemente grande (más grande que algún número N) podemos hacer que la gráfica de f se encuentre entre las rectas horizontales dadas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ como en la Figura 8. Esto debe ser verdadero, no importa lo pequeño que escojamos ε. Si se escoge un valor más pequeño de ε, entonces puede hacerse necesario un valor más grande de N.

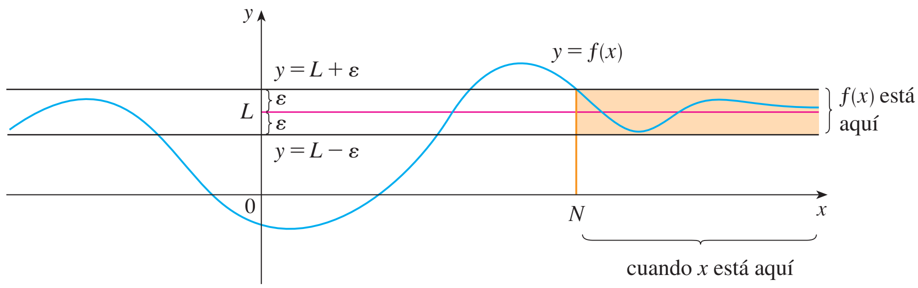


FIGURA 8
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

En el Ejemplo 5 de la Sección 2.5 calculamos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

En el ejemplo siguiente usamos una calculadora de gráficas para relacionar este enunciado a la Definición 2 con $L = \frac{3}{5}$ y $\varepsilon = 0.1$.

EJEMPLO 4 Use una gráfica para hallar un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

SOLUCIÓN Reescribimos la desigualdad dada como

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

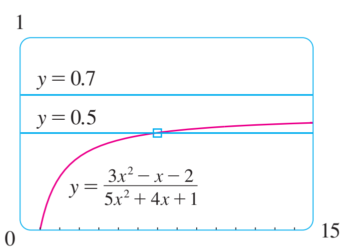


FIGURA 9

Necesitamos determinar los valores de x para los cuales la curva dada se encuentra entre las rectas horizontales $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Por tanto, graficamos la curva y estas rectas en la Figura 9. A continuación usamos el cursor para calcular que la curva cruce la recta

$y = 0.5$ cuando $x \approx 6.7$. A la derecha de este número la curva permanece entre las rectas $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Redondeando para estar seguros, podemos decir que

$$\text{si} \quad x > 7 \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

En otras palabras, para $\varepsilon = 0.1$ podemos escoger $N = 7$ (o cualquier número más grande) en la Definición 2.

EJEMPLO 5 Use la Definición 2 para demostrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Dado $\varepsilon > 0$, deseamos hallar N tal que

$$\text{si} \qquad x > N \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Al calcular el límite podemos suponer que $x > 0$. Entonces $1/x < \varepsilon \iff x > 1/\varepsilon$. Escojamos $N = 1/\varepsilon$. Por tanto,

$$\text{si} \qquad x > N = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Por tanto, por la Definición 2,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

La Figura 10 ilustra la prueba al mostrar algunos valores de ε y los correspondientes valores de N.

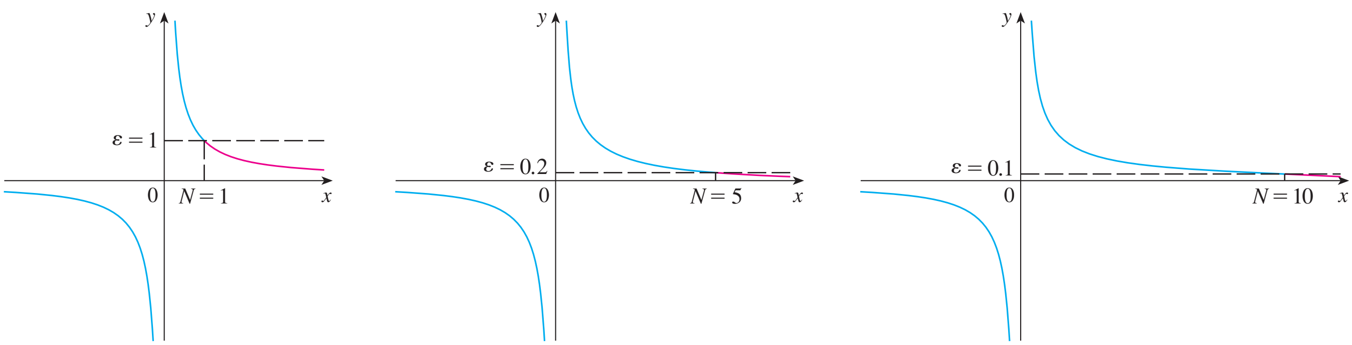


FIGURA 10

Los límites infinitos también se pueden formular de manera precisa. Vea el Ejercicio 20.

Integrales definidas

En la Sección 5.2 definimos la integral definida como una función f en un intervalo $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

donde, en la n-ésima etapa, hemos dividido $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho,

$\Delta x = (b - a)/n$, y x_i^* es cualquier punto muestral del i-ésimo subintervalo. El significado preciso de este límite que define la integral es como sigue:

Para todo número $\varepsilon > 0$ hay un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para todo entero $n > N$ y para toda elección de x_i^* del i-ésimo subintervalo.

Esto significa que una integral definida puede aproximarse a no más de cualquier grado deseado de precisión por una suma de Riemann.

Sucesiones

En la Sección 8.1 empleamos la notación

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

para querer decir que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L cuando n se hace grande. Nótese que la siguiente definición precisa del límite de una sucesión es muy semejante a la definición de un límite de una función en el infinito (Definición 2).

3 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y escribimos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

La Definición 3 está ilustrada en la Figura 11, en la que los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ están localizados sobre una recta numérica. No importa lo pequeño que se escoja un intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe un N tal que todos los términos de la sucesión de a_{N+1} en adelante están en ese intervalo.

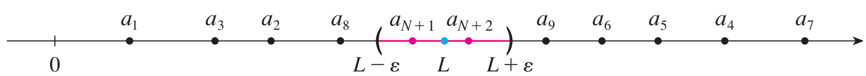


FIGURA 11

Otra ilustración de la Definición 3 se da en la figura 12. Los puntos sobre la gráfica de $\{a_n\}$ deben estar entre las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ si $n > N$. Esta imagen debe ser válida no importa lo pequeño que se escoja ε, pero por lo general un ε más pequeño requiere de un N más grande.

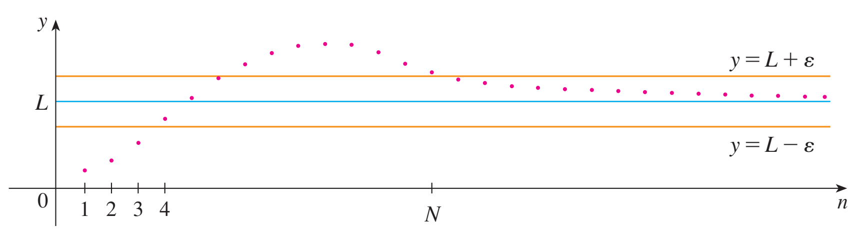


FIGURA 12

Si se comparan la Definición 2 y la Definición 3 se verá que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} = L$ y $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea un entero. La siguiente definición muestra cómo hacer precisa la idea de que $\{a_n\}$ se hace infinita cuando n se hace infinita.

4 Definición La notación $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M hay un entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad a_n > M$$

EJEMPLO 6 Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

SOLUCIÓN Sea M cualquier número positivo. (Considérelo muy grande.) Entonces

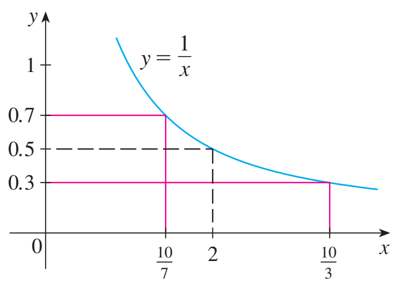
$$\sqrt{n} > M \iff n > M^2$$

Por tanto, si tomamos $N = M^2$, entonces la Definición 4 demuestra que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

D Ejercicios

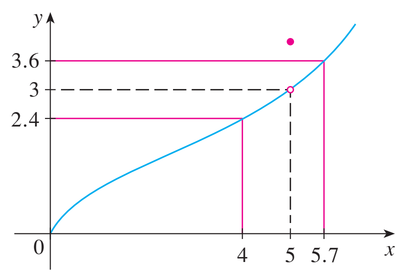
1. Use la gráfica dada de $f(x) = 1/x$ para hallar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad |x - 2| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad \left| \frac{1}{x} - 0.5 \right| < 0.2$$



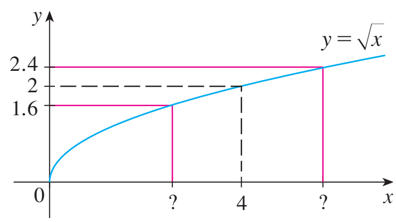
2. Use la gráfica dada de f para hallar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - 5| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - 3| < 0.6$$



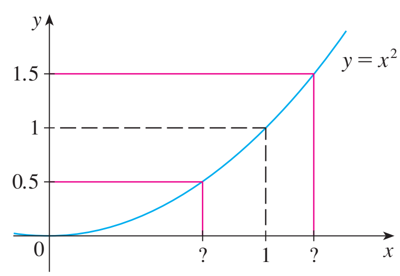
3. Use la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ para hallar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad |x - 4| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |\sqrt{x} - 2| < 0.4$$



4. Use la gráfica dada de $f(x) = x^2$ para hallar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad |x - 1| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$



5. Use una gráfica para hallar un número δ tal que

$$\text{si} \qquad \left| x - \frac{\pi}{4} \right| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |\tan x - 1| < 0.2$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

6. Use una gráfica para hallar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{2x}{x^2 + 4} - 0.4 \right| < 0.1$$

7. Para el límite

$$\lim_{x \to 1} (4 + x - 3x^3) = 2$$

ilustre la Definición 1 hallando los valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon = 0.1$.

8. Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ilustre la Definición 1 hallando los valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

9. Use la definición 1 para demostrar que $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$.

10. (a) ¿Cómo formularía usted una definición ε, δ del límite unilateral $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$?
(b) Use su definición del inciso (a) para demostrar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

11. A un mecánico se le pide que manufacture un disco metálico circular con área de 1000 cm^2.
(a) ¿Qué radio produce ese disco?
(b) Si al mecánico se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm^2 en el área del disco, ¿qué tan cerca del radio ideal del inciso (a) debe el mecánico controlar el radio?
(c) En términos de la definición ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε está dado? ¿Cuál es el correspondiente valor de δ?

12. Se emplea un horno de crecimiento de cristales, en investigación, para determinar cuál es la mejor forma de manufacturar cristales empleados en componentes electrónicos para el transbordador espacial. Para el adecuado crecimiento del cristal, la temperatura debe estar controlada con precisión ajustando para ello la potencia de entrada. Suponga que la relación está dada por

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la potencia de entrada en watts.
(a) ¿Cuánta potencia es necesaria para mantener la temperatura a 200°C?
(b) Si se deja que la temperatura varíe de 200°C hasta ± 1°C, ¿qué intervalo de potencia se permite para la entrada de potencia?
(c) En términos de la definición ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el correspondiente valor de δ?

13. (a) Encuentre un número δ tal que si $|x - 2| < \delta$, entonces $|4x - 8| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.
(b) Repita el inciso (a) con $\varepsilon = 0.01$.

14. Dado que $\lim_{x \to 2} (5x - 7) = 3$, ilustre la Definición 1 al hallar valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$, y $\varepsilon = 0.01$.

15–16 Demuestre el enunciado usando la definición ε, δ de límite e ilustre con un diagrama como en la Figura 7.

15. $\lim_{x \to -3} (1 - 4x) = 13$ **16.** $\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

17. Use una gráfica para hallar un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{6x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 1} - 3 \right| < 0.2$$

18. Para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre la Definición 2 hallando valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

19. (a) Determine qué tan grande debemos tomar x para que

$$1/x^2 < 0.0001$$

(b) Use la Definición 2 para demostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

20. (a) ¿Para qué valores de x es cierto que

$$\frac{1}{x^2} > 1{,}000{,}000$$

(b) La definición precisa de $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ expresa que para todo número positivo M (no importa lo grande que sea) hay un correspondiente número positivo δ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M$. Use esta definición para demostrar que $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$.

21. (a) Use una gráfica para calcular el valor del límite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Use una gráfica de la sucesión del inciso (a) para hallar los valores más pequeños de N que correspondan a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.001$ en la Definición 3.

22. Use la Definición 3 para demostrar que $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$.

23. Use la Definición 3 para demostrar que si $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

24. Use la Definición 4 para demostrar que $\lim_{n \to \infty} n^3 = \infty$.

E Algunas demostraciones

En este apéndice presentamos pruebas de algunos teoremas que se expresaron en el cuerpo principal del texto. Empezamos por demostrar la Desigualdad del Triángulo, que es una importante propiedad de un valor absoluto.

La Desigualdad del Triángulo Si a y b son cualesquier números reales, entonces

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Observe que si los números a y b son ambos positivos o ambos negativos, entonces los dos lados de la Desigualdad del Triángulo son realmente iguales. Pero si a y b tienen signos contrarios, el lado izquierdo contiene una resta y el derecho no la tiene. Esto hace parecer más razonable la Desigualdad del Triángulo, pero podemos probarlo como sigue.

Nótese que

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

es siempre verdadera porque a es igual ya sea a $|a|$ o a $-|a|$. El enunciado correspondiente para b es

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Cuando se combinan, las Propiedades 4 y 5 de valor absoluto (vea el Apéndice A) dicen que

$$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$$

Si ahora aplicamos las Propiedades 4 y 5 de valor absoluto del Apéndice A (con x sustituida con $a + b$ y a con $|a| + |b|$), obtenemos

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

que es lo que deseábamos demostrar

A continuación usamos la Desigualdad del Triángulo para demostrar la Ley de Sumas para límites.

La Ley de Sumas se expresó primero en la Sección 2.3.

Ley de Sumas Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ existen ambas, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

PRUEBA Sea dada $\varepsilon > 0$. De acuerdo con la Definición 1 en el Apéndice D, debemos hallar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Usando la Desigualdad del Triángulo podemos escribir

$$\boxed{1} \qquad \begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Haremos $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor a ε al hacer cada uno de los términos $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ menores a $\varepsilon/2$.

Como $\varepsilon/2 > 0$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Análogamente, como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{entonces} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, el menor de los números δ_1 y δ_2. Nótese que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

y por tanto
$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En consecuencia, por (1),

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Para resumir,

$$\text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Entonces, por la definición de un límite,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

El Teorema de Fermat se estudió en la Sección 4.2.

Teorema de Fermat Si f tiene un máximo o mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

PRUEBA Suponga, para aclarar las definiciones, que f tiene un máximo local en c. Entonces, $f(c) \geqslant f(x)$ si x es suficientemente cercana a c. Esto implica que si h es suficientemente cercana a 0, con h siendo positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

y por tanto

$$\boxed{2} \qquad f(c + h) - f(c) \leqslant 0$$

Podemos dividir ambos lados de una desigualdad entre un número positivo. Así, si $h > 0$ y h es pequeña lo suficiente, tenemos

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando el límite derecho de ambos lados de esta desigualdad (usando el Teorema 2.3.2), obtenemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

Pero como $f'(c)$ existe, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

y por tanto hemos demostrado que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad (2) se invierte cuando dividimos entre h:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

En consecuencia, tomando el límite izquierdo, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$$

Hemos demostrado que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Como estas dos desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Hemos demostrado el Teorema de Fermat para el caso de un máximo local. El caso de un mínimo local se puede demostrar de un modo semejante.

Este teorema fue expresado y empleado en la Sección 8.1.

Teorema Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

PRUEBA Debemos demostrar que, dado un número $\varepsilon > 0$, hay un entero N tal que si $n > N$, entonces $|f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$.

Suponga que $\varepsilon > 0$. Como f es continua en L, hay un número $\delta > 0$ tal que si $|x - L| < \delta$, entonces $|f(x) - f(L)| < \varepsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, hay un entero N tal que si $n > N$, entonces $|a_n - L| < \delta$. Suponga $n > N$. Entonces $|a_n - L| < \delta$ y por tanto $|f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$.

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$.

F Notación sigma

Una forma cómoda de escribir sumas usa la letra griega Σ (sigma mayúscula, correspondiente a nuestra S) y se denomina **notación sigma**.

Esto nos dice terminar con $i = n$.

Esto nos dice sumar

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

Esto nos dice empezar con $i = m$.

1 Definición Si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ son números reales y m y n son enteros tales que $m \leqslant n$, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Con notación de funciones, la Definición 1 se puede escribir como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Entonces el símbolo $\Sigma_{i=m}^{n}$ indica una suma en la que la letra i (llamada **índice de la suma**) toma valores enteros consecutivos que empiezan con m y terminan con n, es decir, $m, m+1, \ldots, n$. También se pueden usar otras letras como índice de la suma.

EJEMPLO 1

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(b) $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{i^2+3} = \frac{1-1}{1^2+3} + \frac{2-1}{2^2+3} + \frac{3-1}{3^2+3} = 0 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$

(f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

EJEMPLO 2 Escriba la suma $2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ en notación sigma.

SOLUCIÓN No hay una forma única de escribir una suma en notación sigma. Podríamos escribir

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3$$

o

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^3$$

o

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)^3$$

El siguiente teorema da tres reglas sencillas para trabajar con notación sigma.

2 Teorema Si c es cualquier constante (esto es, no depende de i), entonces

(a) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$

(b) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

(c) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$

DEMOSTRACIÓN Para ver por qué estas reglas son verdaderas, todo lo que tenemos que hacer es escribir ambos lados en forma desarrollada. La Regla (a) es sólo la propiedad distributiva de números reales:

$$ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

La Regla (b) se sigue de las propiedades asociativa y conmutativa:

$$\begin{aligned}(a_m + b_m) &+ (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)\end{aligned}$$

La Regla (c) se demuestra de manera similar.

EJEMPLO 3 Encuentre $\sum_{i=1}^{n} 1$.

SOLUCIÓN

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ términos}} = n$$

EJEMPLO 4 Demuestre la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUCIÓN Esta fórmula se puede demostrar por inducción matemática (vea página 84) o por el siguiente método empleado por el matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777–1855) cuando tenía diez años de edad.

Escriba la suma S dos veces, una vez en la forma acostumbrada y otra en el orden inverso:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \cdots + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + \quad 2 \quad + 1 \end{aligned}$$

Sumando todas las columnas verticalmente, obtenemos

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

En el lado derecho hay n términos, cada uno de los cuales es $n + 1$, y entonces

$$2S = n(n+1) \qquad \text{o} \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

EJEMPLO 5 Demuestre la fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SOLUCIÓN 1 Sea S la suma deseada. Empezamos con la *suma extensible* (o suma de reducción):

Casi todos los términos se cancelan en pares.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] &= (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + \cdots + [(n+1)^3 - \cancel{n^3}] \\ &= (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n\end{aligned}$$

Por otra parte, usando el Teorema 2 y los Ejemplos 3 y 4, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} [(1 + i)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n} [3i^2 + 3i + 1] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 3S + 3\,\frac{n(n + 1)}{2} + n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Entonces tenemos

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Al despejar S de esta ecuación obtendremos

$$3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

o

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Principio de Inducción Matemática

Sea S_n un enunciado que contiene el entero positivo n. Suponga que

1. S_1 es verdadera.
2. Si S_k es verdadera, entonces S_{k+1} es verdadera.

Entonces S_n es verdadera para todos los n enteros positivos.

SOLUCIÓN 2 Sea S_n la fórmula dada.

1. S_1 es verdadera porque $\quad 1^2 = \dfrac{1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

2. Suponga que S_k es verdadera; esto es,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$$

Entonces

Vea en las páginas 84 y 87 una explicación más completa de inducción matemática.

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k + 1)^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k + 1)^2 \\
&= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \\
&= (k + 1)\,\frac{k(2k + 1) + 6(k + 1)}{6} \\
&= (k + 1)\,\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \\
&= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6} \\
&= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]}{6}
\end{aligned}$$

Por tanto S_{k+1} es verdadera.

Por el Principio de Inducción Matemática, S_n es verdadero para toda n.

Citamos los resultados de los Ejemplos 3, 4 y 5 junto con un resultado similar para cubos (vea Ejercicios 37–40) como el Teorema 3. Estas fórmulas son necesarias para hallar áreas y evaluar integrales en el Capítulo 5.

3 Teorema Sea c una constante y n un entero positivo. Entonces

(a) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(b) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(c) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EJEMPLO 6 Evalúe $\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

SOLUCIÓN Usando los Teoremas 2 y 3, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3) &= \sum_{i=1}^{n} (4i^3 - 3i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)[2n(n+1) - 3]}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 3)}{2}
\end{aligned}$$

El tipo de cálculo del Ejemplo 7 aparece en el Capítulo 5 cuando calculamos áreas.

EJEMPLO 7 Encuentre $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{3}{n}\left[\left(\dfrac{i}{n}\right)^2 + 1\right]$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3}{n^3}i^2 + \frac{3}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n}\cdot n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) + 3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot 1\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 3\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 2 + 3 = 4
\end{aligned}$$

F Ejercicios

1–10 Escriba la suma en forma desarrollada.

1. $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

2. $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$

3. $\sum_{i=4}^{6} 3^i$

4. $\sum_{i=4}^{6} i^3$

5. $\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

6. $\sum_{k=5}^{8} x^k$

7. $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$

8. $\sum_{j=n}^{n+3} j^2$

9. $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j$

10. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

11–20 Escriba la suma en notación sigma.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

12. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

13. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$

14. $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \cdots + \frac{23}{27}$

15. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

16. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

17. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

19. $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

20. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

21–35 Encuentre el valor de la suma.

21. $\sum_{i=4}^{8} (3i-2)$

22. $\sum_{i=3}^{6} i(i+2)$

23. $\sum_{j=1}^{6} 3^{j+1}$

24. $\sum_{k=0}^{8} \cos k\pi$

25. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n$

26. $\sum_{i=1}^{100} 4$

27. $\sum_{i=0}^{4} (2^i + i^2)$

28. $\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i}$

29. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

30. $\sum_{i=1}^{n} (2-5i)$

31. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 4)$

32. $\sum_{i=1}^{n} (3+2i)^2$

33. $\sum_{i=1}^{n} (i+1)(i+2)$

34. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$

35. $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - i - 2)$

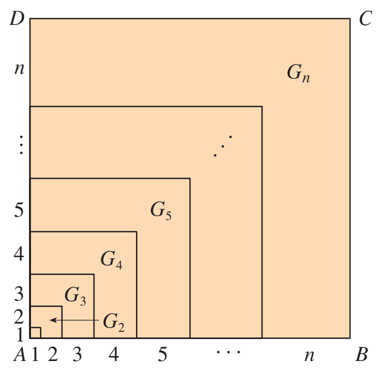
36. Encuentre el número n tal que $\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

37. Demuestre la fórmula (b) del Teorema 3.

38. Demuestre la fórmula (e) del Teorema 3 usando inducción matemática.

39. Demuestre la fórmula (e) del Teorema 3 usando un método semejante al del Ejemplo 5, Solución 1 [empiece con $(1+i)^4 - i^4$].

40. Demuestre la fórmula (e) del Teorema 3 usando el siguiente método publicado por Abu Bekr Mohammed ibn Alhusain Alkarchi hacia el año 1010. La figura muestra un cuadrado $ABCD$ en el que los lados AB y AD se han dividido en segmentos de longitudes $1, 2, 3, \ldots, n$. Entonces el lado del cuadrado tiene longitud $n(n+1)/2$ de modo que el área es $[n(n+1)/2]^2$. Pero el área también es la suma de las áreas de los n "nomon" $G_1, G_2, \ldots, G_n$ que se ven en la figura. Demuestre que el área de G_i es i^3 y concluya que la fórmula (e) es verdadera.



41. Evalúe cada suma extensible.

(a) $\sum_{i=1}^{n} [i^4 - (i-1)^4]$

(b) $\sum_{i=1}^{100} (5^i - 5^{i-1})$

(c) $\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

(d) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$

42. Demuestre la desigualdad del triángulo generalizada:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

43–46 Encuentre el límite.

43. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$

44. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1\right]$

45. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

46. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3 - 2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right]$

47. Demuestre la fórmula para la suma de una serie geométrica finita con primer término a y razón común $r \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

48. Evalúe $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{2^{i-1}}$.

49. Evalúe $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} (2i + 2^i)$.

50. Evalúe $\displaystyle \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} (i + j)\right]$.

G Integración de funciones racionales por fracciones parciales

En este apéndice mostramos cómo integrar cualquier función racional (una razón entre polinomios) al expresarla como suma de fracciones más sencillas, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabemos cómo integrar. Para ilustrar el método, observe que al tomar las fracciones $2/(x - 1)$ y $1/(x + 2)$ a un común denominador obtenemos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Si ahora invertimos el procedimiento, vemos cómo integrar la función del lado derecho de esta ecuación:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver la forma en que el método de fracciones parciales funciona en general, consideremos una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. Es posible expresar f como una suma de fracciones más sencillas siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. Esta función racional se denomina *propia*. Recuerde que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, entonces el grado de P es n y escribimos $\text{grad}(P) = n$.

Si f es impropia, es decir, $\text{grad}(P) \geqslant \text{grad}(Q)$, entonces debemos dar el paso preliminar de dividir Q en P (por división larga) hasta obtener un residuo $R(x)$ tal que $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$. El enunciado de división es

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde S y R también son polinomios.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, a veces este paso preliminar es todo lo que se requiere.

V EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\,dx$.

$$
\begin{array}{r}
x^2 + x + 2 \\
x - 1 \overline{)\, x^3 \qquad + x} \\
\underline{x^3 - x^2} \\
x^2 + x \\
\underline{x^2 - x} \\
2x \\
\underline{2x - 2} \\
2
\end{array}
$$

SOLUCIÓN Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero hacemos la división larga. Esto hace posible escribir

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x - 1| + C$$

El siguiente paso es factorizar el denominador $Q(x)$ tanto como sea posible. Se puede demostrar que cualquier polinomio Q se puede factorizar como un producto de factores lineales (de la forma $ax + b$) y factores cuadráticos irreductibles (de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$). Por ejemplo, si $Q(x) = x^4 - 16$, podríamos factorizarla como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

El tercer paso es expresar la función racional propia $R(x)/Q(x)$ (de la Ecuación 1) como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \qquad \text{o} \qquad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$$

Un teorema en álgebra garantiza que siempre es posible hacer esto. Explicamos los detalles para los cuatro casos que se presentan.

Caso I El denominador $Q(x)$ es un producto de distintos factores lineales.
Esto significa que podemos escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

donde no se repite un factor (y ningún factor es múltiplo constante de otro). En este caso el teorema de fracciones parciales dice que existen constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Estas constantes se pueden determinar como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUCIÓN Como el grado del numerador es menor que el del denominador, no necesitamos dividir. Factorizamos el denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Como el denominador tiene tres factores lineales distintos, la descomposición en fracciones parciales del integrando (2) tiene la forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Otro método para hallar A, B, y C se da en la nota después de este ejemplo.

Para determinar los valores de A, B y C, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por el producto de los denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, obteniendo

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Expandiendo el lado derecho de la Ecuación 4 y escribiéndolo en la forma estándar de polinomios, obtenemos

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Los polinomios de la Ecuación 5 son idénticos, por lo que sus coeficientes deben ser iguales. El coeficiente de x^2 del lado derecho, $2A + B + 2C$, debe ser igual al coeficiente de x^2 del lado izquierdo, es decir, 1. Del mismo modo, los coeficientes de x son iguales y los términos constantes son iguales. Esto da el siguiente sistema de ecuaciones para A, B y C.

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, y $C = -\frac{1}{10}$, y entonces

Podemos comprobar nuestro trabajo al llevar los términos a un común denominador y sumarlos.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2}\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

La Figura 1 muestra las gráficas del integrando del Ejemplo 2 y su integral indefinida (con $K = 0$). ¿Cuál es cuál?

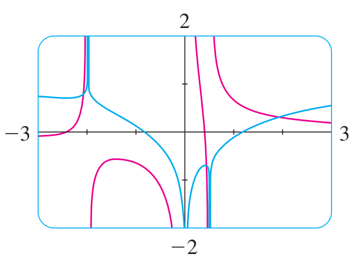


FIGURA 1

Integrando el término medio habremos hecho la sustitución mental $u = 2x - 1$, que da $du = 2\,dx$ y $dx = du/2$.

Nota: Podemos usar un método alterno para hallar los coeficientes A, B y C del Ejemplo 2. La Ecuación 4 es una identidad; es verdadera para todo valor de x. Escojamos valores de x que simplifiquen la ecuación. Si hacemos $x = 0$ en la Ecuación 4, entonces los términos segundo y tercero del lado derecho desaparecen y la ecuación se convierte en $-2A = -1$ o sea $A = \frac{1}{2}$. Del mismo modo, $x = \frac{1}{2}$ da $5B/4 = \frac{1}{4}$ y $x = -2$ da $10C = -1$, entonces $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$. (Se puede objetar que la Ecuación 3 no es válida para $x = 0, \frac{1}{2}$ o -2, y entonces ¿por qué debe ser válida la Ecuación 4 para esos valores? De hecho, la Ecuación 4 es verdadera para todos los valores de x, incluyendo $x = 0, \frac{1}{2}$ y -2. Vea en el Ejercicio 45 la explicación.)

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, donde $a \neq 0$.

SOLUCIÓN El método de fracciones parciales da

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

y por tanto

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Usando el método de la nota precedente, hacemos $x = a$ en esta ecuación y obtenemos $A(2a) = 1$, de modo que $A = 1/(2a)$. Si hacemos $x = -a$, obtenemos $B(-2a) = 1$, y $B = -1/(2a)$.
Entonces

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2a} [\ln |x - a| - \ln |x + a|] + C$$

Como $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, podemos escribir la integral como

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

Caso II ***$Q(x)$* es un producto de factores lineales, algunos de los cuales están repetidos.** Suponga que el primer factor lineal $(a_1 x + b_1)$ está repetido r veces; esto es, $(a_1 x + b_1)^r$ se presenta en la factorización de $Q(x)$. Entonces, en lugar del término individual $A_1/(a_1 x + b_1)$ en la Ecuación 2, usaríamos

$$\boxed{6} \qquad \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1 x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1 x + b_1)^r}$$

Por medio de ilustración, podríamos escribir

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} + \frac{E}{(x - 1)^3}$$

pero preferimos resolver en detalle un ejemplo más sencillo.

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx$.

SOLUCIÓN El primer paso es dividir. El resultado de la división larga es

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

El segundo paso es factorizar el denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ es un factor y obtenemos

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1)$$

$$= (x - 1)^2(x + 1)$$

Como el factor lineal $x - 1$ se presenta dos veces, la descomposición de fracción parcial es

$$\frac{4x}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador, $(x - 1)^2(x + 1)$, tendremos

$$\boxed{7} \qquad 4x = A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2$$

$$= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C)$$

Otro método para hallar los coeficientes:
Poner $x = 1$ en (7): $B = 2$.
Poner $x = -1$: $C = -1$.
Poner $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Ahora igualamos coeficientes:

$$\begin{aligned} A \qquad + \quad C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + \quad C &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $A = 1$, $B = 2$, y $C = -1$, por lo cual

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \ln|x + 1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x - 1} + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + K \end{aligned}$$

Caso III $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles, ninguno de los cuales está repetido. Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, además de las fracciones parciales de las Ecuaciones 2 y 6, la expresión para $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\boxed{8} \qquad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes a determinarse. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x/[(x - \ )(x^2 - 1)(x^2 + 4)]$ tiene una descomposición de fracción parcial de la forma

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

El término dado en (8) puede ser integrado al completar el cuadrado y usar la fórmula

$$\boxed{9} \qquad \boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

V EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ no se puede factorizar más, escribimos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, tenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Entonces $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$ por lo que

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4} \right) dx$$

Para integrar el segundo término lo dividimos en dos partes:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 4}\, dx = \int \frac{x}{x^2 + 4}\, dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\, dx$$

Hacemos la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera de estas integrales para que $du = 2x\, dx$. Evaluamos la segunda integral por medio de la Fórmula 9 con $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}\, dx &= \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\, dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\, dx \\ &= \ln |x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\, dx$.

SOLUCIÓN Como el grado del numerador es *no menor que* el grado del denominador, primero dividimos y obtenemos

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Nótese que el cuadrático $4x^2 - 4x + 3$ es irreductible porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Esto significa que no se puede factorizar, de modo que no es necesario usar la técnica de fracción parcial.

Para integrar la función dada completamos el cuadrado del denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Esto sugiere que hagamos la sustitución $u = 2x - 1$. Entonces, $du = 2\, dx$ y $x = \frac{1}{2}(u + 1)$, de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\, dx &= \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3} \right) dx \\ &= x + \tfrac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2}\, du = x + \tfrac{1}{4} \int \frac{u - 1}{u^2 + 2}\, du \\ &= x + \tfrac{1}{4} \int \frac{u}{u^2 + 2}\, du - \tfrac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 2}\, du \\ &= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}} \right) + C \end{aligned}$$

Nota: El Ejemplo 6 ilustra el procedimiento general para integrar una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{donde } b^2 - 4ac < 0$$

Completamos el cuadrado del denominador y a continuación hacemos una sustitución que lleva la integral a la forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Entonces la primera integral es un logaritmo y la segunda está expresada en términos de $\tan^{-1}$.

Caso IV $Q(x)$ **contiene un factor cuadrático irreductible repetido.**
Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces en lugar de la fracción parcial única (8), la suma

$$\boxed{10} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

se presenta en la descomposición en fracciones parciales de $R(x)/Q(x)$. Cada uno de los términos en (10) puede ser integrado si primero se completa el cuadrado.

Sería por demás tedioso resolver manualmente los valores numéricos de los coeficientes del Ejemplo 7. Casi todos los sistemas computarizados de álgebra, no obstante, pueden hallar los valores numéricos con gran rapidez. Por ejemplo, el comando Maple

```
convert(f, parfrac, x)
```

o el comando de Mathematica

```
Apart[f]
```

da los valores siguientes:

$$A = -1, \quad B = \tfrac{1}{8}, \quad C = D = -1,$$
$$E = \tfrac{15}{8}, \quad F = -\tfrac{1}{8}, \quad G = H = \tfrac{3}{4},$$
$$I = -\tfrac{1}{2}, \quad J = \tfrac{1}{2}$$

EJEMPLO 7 Escriba la forma de la descomposición de fracción parcial de la función

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN La forma de la descomposición de fracción parcial es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, tenemos

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A \end{aligned}$$

Si igualamos coeficientes, obtenemos el sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tiene la solución $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$ y $E = 0$. Entonces,

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K$$

En los términos segundo y cuarto hicimos la sustitución mental $u = x^2 + 1$.

G Ejercicios

1–6 Escriba la forma de la descomposición de fracción parcial de la función (como en el Ejemplo 7). No determine los valores numéricos de los coeficientes.

1. (a) $\dfrac{2x}{(x+3)(3x+1)}$ (b) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2+x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2+x+2}$

3. (a) $\dfrac{x^4+1}{x^5+4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2-9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^3}{x^2+4x+3}$ (b) $\dfrac{2x+1}{(x+1)^3(x^2+4)^2}$

5. (a) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$ (b) $\dfrac{t^4+t^2+1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$

6. (a) $\dfrac{x^4}{(x^3+x)(x^2-x+3)}$ (b) $\dfrac{1}{x^6-x^3}$

7–34 Evalúe la integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

32. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

35–38 Haga una sustitución para expresar el integrando como función racional y a continuación evalúe la integral.

35. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

CAS Se requiere de un sistema computarizado de álgebra

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

37. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}\,dx$

39. Use una gráfica de $f(x) = 1/(x^2 - 2x - 3)$ para determinar si $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positiva o negativa. Use la gráfica para dar una estimación aproximada del valor de la integral y luego use fracciones parciales para hallar el valor exacto.

40. Grafique $y = 1/(x^3 - 2x^2)$ y una antiderivada en la misma pantalla.

41. Un método para reducir el crecimiento de una población de insectos sin usar plaguicidas es introducir en la población varios machos estériles que se aparean con hembras fértiles que no producen crías. Si P representa el número de insectos hembras de una población, S el número de machos estériles introducidos en cada generación y r la tasa natural de crecimiento de la población, entonces la población de hembras está relacionada con el tiempo t por

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r-1)P - S]}\,dP$$

Suponga que una población de insectos con 10,000 hembras crece a razón de $r = 0.10$ y se agregan 900 machos estériles. Evalúe la integral para obtener una ecuación que relacione la población de hembras con el tiempo. (Nótese que de la ecuación resultante no se puede despejar P explícitamente.)

42. La región bajo la curva

$$y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

de $x = 0$ a $x = 1$ se hace girar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

CAS **43.** (a) Use un sistema computarizado de álgebra para hallar la descomposición de fracción parcial de la función

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Use el inciso (a) para hallar $\int f(x)\,dx$ (manualmente) y compare con el resultado de usar el CAS para integrar f directamente. Haga comentarios sobre cualquier discrepancia.

CAS **44.** (a) Encuentre la descomposición de fracción parcial de la función

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Use el inciso (a) para hallar $\int f(x)\,dx$ y grafique f y su integral indefinida en la misma pantalla.

(c) Use la gráfica de f para descubrir las principales características de la gráfica de $\int f(x)\,dx$.

45. Suponga que F, G y Q son polinomios y

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para toda x excepto cuando $Q(x) = 0$. Demuestre que $F(x) = G(x)$ para toda x. [*Sugerencia*: Use continuidad.]

46. Si f es una función cuadrática tal que $f(0) = 1$ y

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}\,dx$$

es una función racional, encuentre el valor de $f'(0)$.

H Coordenadas polares

Las coordenadas polares ofrecen un modo alternativo de localizar puntos en un plano. Son útiles porque, para ciertos tipos de regiones y curvas, las coordenadas polares dan descripciones y ecuaciones muy sencillas. Las principales aplicaciones de esta idea se presentan en cálculo de varias variables: la evaluación de integrales dobles y la derivación de las leyes de Kepler del movimiento planetario.

H.1 Curvas en coordenadas polares

Un sistema de coordenadas representa un punto del plano por medio de un par ordenado de números llamados coordenadas. Por lo general usamos coordenadas cartesianas, que son distancias dirigidas desde dos ejes perpendiculares. Aquí describimos un sistema de coordenadas introducido por Newton, llamado **sistema de coordenadas polares**, que es más cómodo para numerosas aplicaciones.

Escogemos un punto del plano que se denomina **polo** (u origen) y está marcado O. A continuación trazamos una recta (la mitad) que se inicia en O y es llamada **eje polar**. Este eje suele trazarse horizontalmente a la derecha y corresponde al eje positivo x en coordenadas cartesianas.

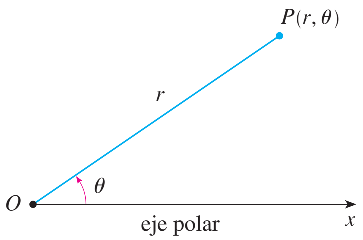


FIGURA 1

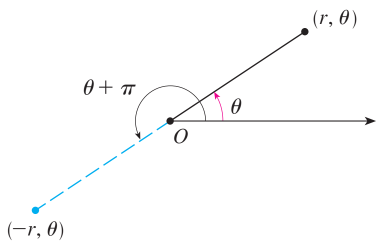


FIGURA 2

Si P es cualquier otro punto del plano, sea r la distancia de O a P y sea θ el ángulo (por lo general medido en radianes) entre el eje polar y la recta OP como en la Figura 1. Entonces el punto P está representado por el par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman **coordenadas polares** de P. Usamos la convención de que un ángulo es positivo si se mide en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj desde el eje polar, y negativo si se mide en dirección de las manecillas de un reloj. Si $P = O$, entonces $r = 0$ y convenimos que $(0, \theta)$ representa el polo para cualquier valor de θ.

Extendemos el significado de coordenadas polares (r, θ) al caso en el que r es negativa al convenir que, como en la Figura 2, los puntos $(-r, \theta)$ y (r, θ) están sobre la misma recta pasando por O y a la misma distancia $|r|$ desde O, pero en lados opuestos de O. Si $r > 0$, el punto (r, θ) está en el mismo cuadrante que θ; si $r < 0$, está en el cuadrante en el lado opuesto del polo. Nótese que $(-r, \theta)$ representa el mismo punto que $(r, \theta + \pi)$.

EJEMPLO 1 Localice los puntos cuyas coordenadas polares se dan.

(a) $(1, 5\pi/4)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $(2, -2\pi/3)$ (d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUCIÓN Los puntos están localizados en la Figura 3. En el inciso (d), el punto $(-3, 3\pi/4)$ está situado a tres unidades del polo en el cuarto cuadrante porque el ángulo $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante y $r = -3$ es negativo.

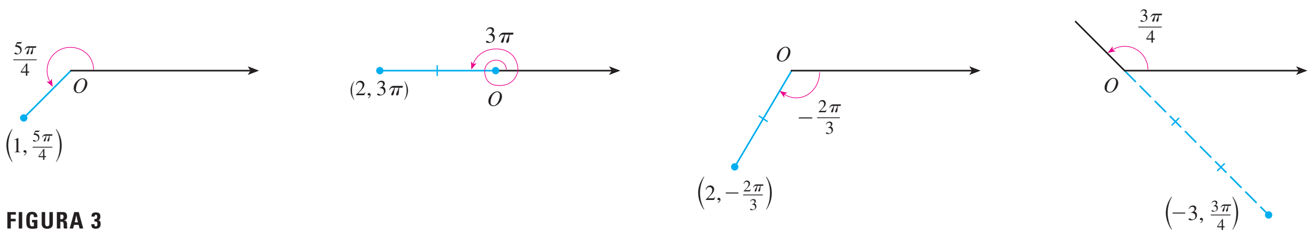


FIGURA 3

En el sistema de coordenadas cartesianas todo punto tiene sólo una representación, pero en el sistema de coordenadas polares cada punto tiene numerosas representaciones. Por ejemplo, el punto $(1, 5\pi/4)$ del Ejemplo 1(a) podría escribirse como $(1, -3\pi/4)$ o $(1, 13\pi/4)$ o $(-1, \pi/4)$. (Vea Figura 4.)

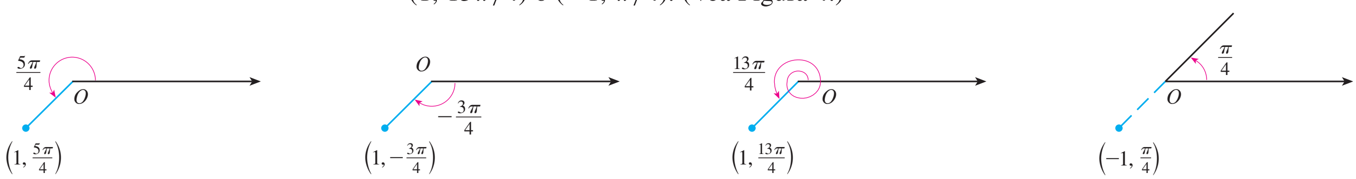


FIGURA 4

De hecho, como una rotación completa en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj está dada por un ángulo 2π, el punto representado por coordenadas polares (r, θ) también está representado por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero.

La conexión entre coordenadas polares y cartesianas se puede ver de la Figura 5, en la que el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje x positivo. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), entonces, de la figura, tenemos

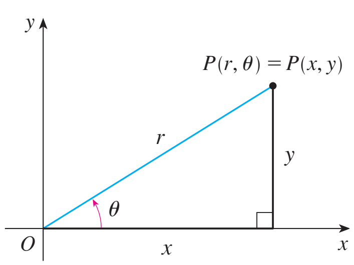


FIGURA 5

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \text{sen } \theta = \frac{y}{r}$$

y por tanto

1
$$\boxed{x = r \cos \theta \qquad y = r \text{ sen } \theta}$$

Aun cuando las Ecuaciones 1 se dedujeron de la Figura 5, que ilustra el caso donde $r > 0$ y $0 < \theta < \pi/2$, estas ecuaciones son válidas para todos los valores de r y θ. (Vea la definición general de sen θ y cos θ en el Apéndice C.)

Las Ecuaciones 1 nos permiten hallar las coordenadas cartesianas de un punto donde se conocen las coordenadas polares. Para hallar r y θ cuando x y y se conocen, usamos las ecuaciones

2
$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

que se pueden deducir de las Ecuaciones 1 o simplemente viendo la Figura 5.

EJEMPLO 2 Convierta el punto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares a cartesianas.

SOLUCIÓN Como $r = 2$ y $\theta = \pi/3$, las Ecuaciones 1 dan

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Por tanto, el punto es $(1, \sqrt{3})$ en coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 3 Represente el punto con coordenadas cartesianas $(1, -1)$ en términos de coordenadas polares.

SOLUCIÓN Si escogemos que r sea positiva, entonces las Ecuaciones 2 dan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Como el punto $(1, -1)$ está en el cuarto cuadrante, podemos escoger $\theta = -\pi/4$ o $\theta = 7\pi/4$. Entonces una posible respuesta es $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; otra es $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$.

Nota: Las Ecuaciones 2 no determinan de manera única θ cuando se dan x y y porque, cuando θ aumenta por el intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$, cada valor de $\tan\theta$ se presenta dos veces. Por tanto, al convertir de coordenadas cartesianas a polares, no es suficientemente bueno hallar sólo r y θ que satisfagan las Ecuaciones 2. Al igual que en el Ejemplo 3, debemos escoger θ de modo que el punto (r, θ) se encuentre en el cuadrante correcto.

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$, o más generalmente $F(r, \theta) = 0$, consiste de todos puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

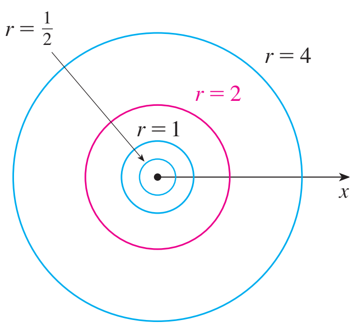


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 ¿Qué curva está representada por la ecuación polar $r = 2$?

SOLUCIÓN La curva está formada por todos los puntos (r, θ) con $r = 2$. Como r representa la distancia del punto al polo, la curva $r = 2$ representa el círculo con centro O y radio 2. En general, la ecuación $r = a$ representa un círculo con centro O y radio $|a|$. (Vea la Figura 6.)

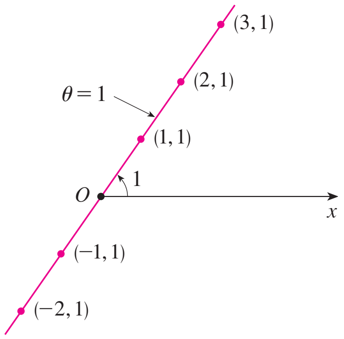


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Trace la curva polar $\theta = 1$.

SOLUCIÓN Esta curva está formada por todos los puntos (r, θ) tales que el ángulo polar θ es 1 radián. Es una recta que pasa por O y forma un ángulo de 1 radián con el eje polar (vea Figura 7). Nótese que los puntos $(r, 1)$ en la recta con $r > 0$ están en el primer cuadrante, mientras que los puntos con $r < 0$ están en el tercer cuadrante.

EJEMPLO 6

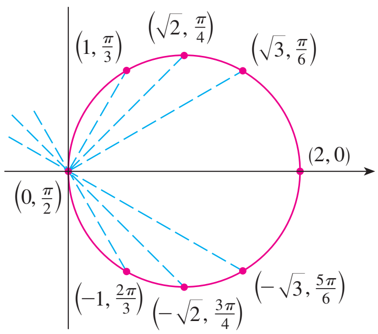
(a) Trace la curva con ecuación polar $r = 2 \cos \theta$.
(b) Encuentre una ecuación cartesiana para esta curva.

SOLUCIÓN

(a) En la Figura 8 encontramos los valores de r para algunos valores convenientes de θ y localizamos los correspondientes puntos (r, θ). A continuación unimos estos puntos para trazar la curva, que parece ser un círculo. Hemos empleado sólo valores de θ entre 0 y π, porque si hacemos que θ aumente a más que π, obtenemos de nuevo los mismos puntos.

FIGURA 8
Tabla de valores y gráfica de $r = 2 \cos \theta$

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2



(b) Para convertir la ecuación dada en una ecuación cartesiana usamos las Ecuaciones 1 y 2. De $x = r \cos \theta$ tenemos $\cos \theta = x/r$, de modo que la ecuación $r = 2 \cos \theta$ se convierte en $r = 2x/r$, que da

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando el cuadrado, obtenemos

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que es una ecuación de una circunferencia con centro $(1, 0)$ y radio 1.

La Figura 9 muestra una ilustración geométrica de que el círculo del Ejemplo 6 tiene la ecuación $r = 2 \cos \theta$. El ángulo OPQ es un ángulo recto (¿Por qué?) y por tanto $r/2 = \cos \theta$.

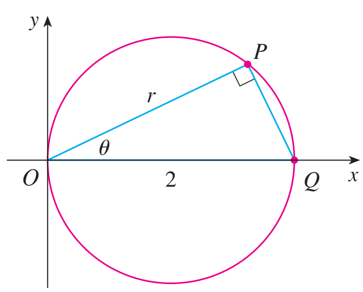


FIGURA 9

V EJEMPLO 7 Trace la curva $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

SOLUCIÓN En lugar de localizar puntos como en el Ejemplo 6, primero trazamos la gráfica de $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ en coordenadas *cartesianas* en la Figura 10 al desplazar la curva del seno hacia arriba una unidad. Esto hace posible que leamos de una mirada los valores de r que corresponden a aumentar valores de θ. Por ejemplo, vemos que cuando θ aumenta de 0 a $\pi/2$, r (la distancia desde O) aumenta de 1 a 2, de modo que trazamos la parte correspondiente de la curva polar en la Figura 11(a). Cuando θ aumenta de $\pi/2$ a π, la Figura 10 muestra que r disminuye de 2 a 1, por lo cual trazamos la siguiente parte de la curva como en la Figura 11(b). Cuando θ aumenta de π a $3\pi/2$, r disminuye de 1 a 0 como se ve en el inciso (c). Por último, cuando θ aumenta de $3\pi/2$ a 2π, r aumenta de 0 a 1 como se ve en el inciso (d). Si hacemos que θ aumente a más de 2π o que disminuya a menos de 0, simplemente volveríamos a trazar la trayectoria. Uniendo las partes de la curva de la Figura 11(a)–(d), trazamos la curva completa en el inciso (e) que se denomina **cardioide** por su forma parecida a un corazón.

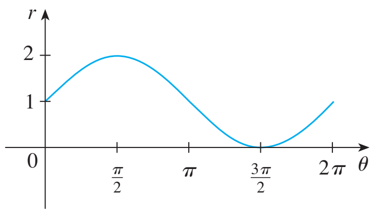


FIGURA 10
$r = 1 + \text{sen}\,\theta$ en coordenadas cartesianas $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

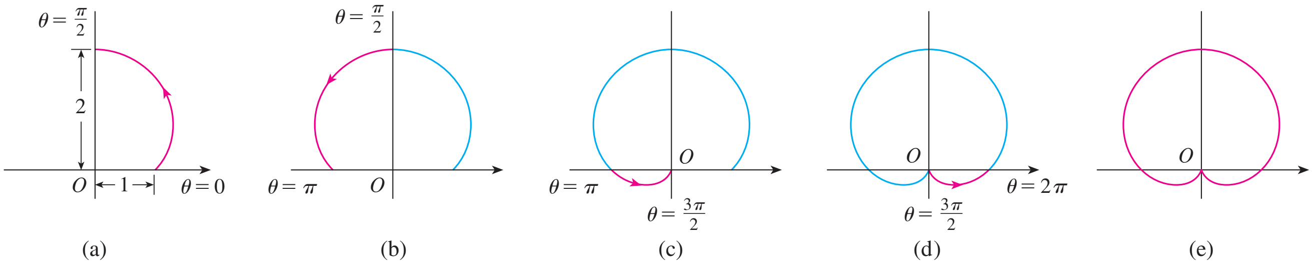


FIGURA 11 Etapas en el trazo del cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

EJEMPLO 8 Trace la curva $r = \cos 2\theta$.

TEC Module H ayuda a ver cómo se trazan las curvas polares a partir de animaciones similares a las figuras 10–13.

SOLUCIÓN Al igual que en el Ejemplo 7, primero trazamos $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, en coordenadas cartesianas como en la Figura 12. Cuando θ aumenta de 0 a $\pi/4$, la Figura 12 muestra que r disminuye de 1 a 0 y por tanto trazamos la parte correspondiente de la curva polar en la Figura 13 (indicada por ①). Cuando θ aumenta de $\pi/4$ a $\pi/2$, r pasa de 0 a -1. Esto significa que la distancia desde O aumenta de 0 a 1, pero en lugar de estar en el primer cuadrante esta parte de la curva polar (indicada por ②) está en el lado opuesto del polo del tercer cuadrante. El resto de la curva se traza de un modo similar, con las flechas y números indicando el orden en el que las partes se trazan. La curva resultante tiene cuatro lazos y se denomina **rosa (o trébol) de cuatro hojas**.

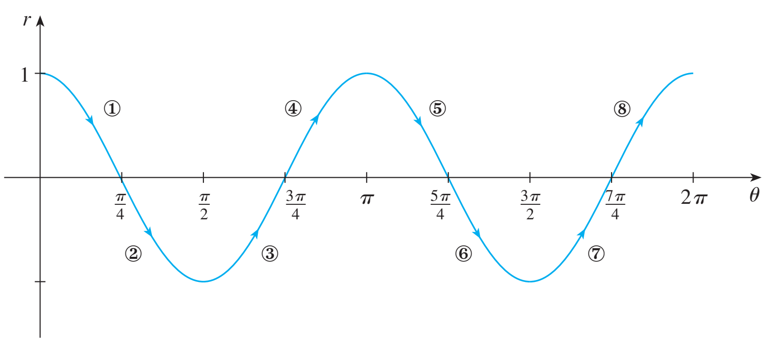


FIGURA 12
$r = \cos 2\theta$ en coordenadas cartesianas

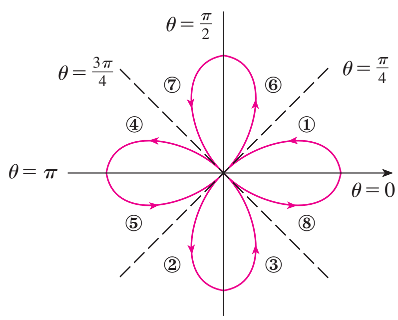


FIGURA 13
Rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$

Cuando trazamos las curvas polares a veces es útil aprovechar la simetría. Las tres reglas siguientes están explicadas por la Figura 14.

(a) Si una ecuación polar no cambia cuando θ se sustituye con $-\theta$ la curva es simétrica alrededor del eje polar.

(b) Si la ecuación no cambia cuando r se sustituye con $-r$, o cuando θ es sustituido con $\theta + \pi$, la curva es simétrica alrededor del polo. (Esto significa que la curva permanece sin cambio si la giramos un ángulo de 180° alrededor del origen.)

(c) Si la ecuación no cambia cuando θ es sustituida con $\pi - \theta$, la curva es simétrica alrededor de la recta vertical $\theta = \pi/2$.

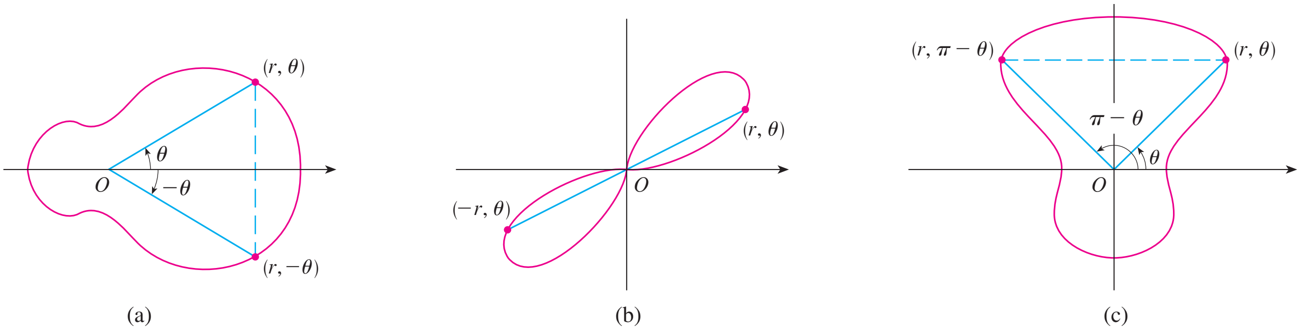


FIGURA 14

Las curvas trazadas en los Ejemplos 6 y 8 son simétricas alrededor del eje polar ya que $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Las curvas en los Ejemplos 7 y 8 son simétricas alrededor de $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. La rosa de cuatro hojas también es simétrica alrededor del polo. Estas propiedades de simetría podrían haberse usado para trazar las curvas. Por ejemplo, en el Ejemplo 6 necesitamos sólo haber localizado puntos para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y luego reflejarlos alrededor del eje polar para obtener el círculo completo.

Tangentes a curvas polares

Para hallar una recta tangente a una curva polar $r = f(\theta)$ consideramos θ como parámetro y escribimos sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Entonces, usando el método para hallar pendientes de curvas paramétricas (Ecuación 3.4.7) y la Regla del Producto, tenemos

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Localizamos tangentes horizontales al hallar los puntos donde $dy/d\theta = 0$ (siempre que $dx/d\theta \neq 0$). Del mismo modo, localizamos tangentes verticales en los puntos donde $dx/d\theta = 0$ (siempre que $dy/d\theta \neq 0$).

Nótese que si estamos buscando rectas tangentes en el polo, entonces $r = 0$ y la Ecuación 3 se simplifica a

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \text{si} \quad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

Por ejemplo, en el Ejemplo 8 encontramos que $r = \cos 2\theta = 0$ cuando $\theta = \pi/4$ o $3\pi/4$. Esto significa que las rectas $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ (o $y = x$ y $y = -x$) son rectas tangentes a $r = \cos 2\theta$ en el origen.

EJEMPLO 9

(a) Para el cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ del Ejemplo 7, encuentre la pendiente de la recta tangente cuando $\theta = \pi/3$.
(b) Encuentre los puntos sobre el cardioide donde la recta tangente es horizontal o vertical.

SOLUCIÓN Usando la Ecuación 3 con $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\,\cos\theta - (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta)}$$

(a) La pendiente de la tangente en el punto donde $\theta = \pi/3$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\operatorname{sen}(\pi/3))}{(1 + \operatorname{sen}(\pi/3))(1 - 2\operatorname{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}/2)(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Por tanto, hay tangentes horizontales en los puntos $(2, \pi/2)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$ y tangentes verticales en $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. Cuando $\theta = 3\pi/2$, tanto $dy/d\theta$ como $dx/d\theta$ son 0, por lo que debemos tener cuidado. Usando la Regla de l'Hospital, tenemos

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1 + 2\operatorname{sen}\theta}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \infty$$

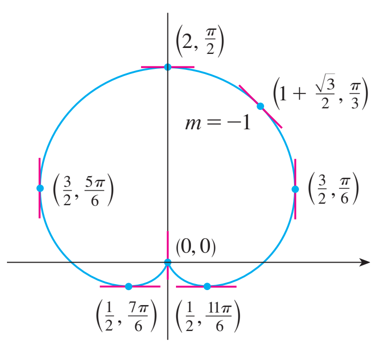


FIGURA 15
Rectas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

Por simetría,
$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+}\frac{dy}{dx} = -\infty$$

Por tanto, hay una recta tangente vertical en el polo (vea la Figura 15).

Nota: En lugar de tener que recordar la Ecuación 3, podríamos emplear el método usado para derivarla. Por ejemplo, en el Ejemplo 9, podríamos haber escrito

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Entonces tendremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}2\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta}$$

que es equivalente a nuestra expresión previa.

Graficar curvas polares con calculadoras de gráficas

Aunque es útil ser capaz de dibujar curvas polares simples a mano, es necesario usar calculadoras gráfica de red o computadoras cuando enfrentemos curvas complicadas como las de las Figuras 16 y 17.

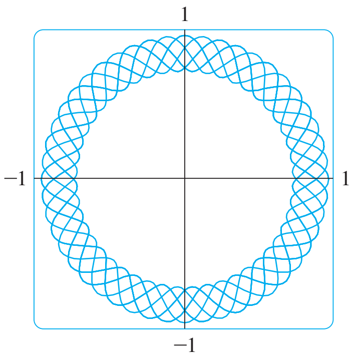


FIGURA 16
$r = \operatorname{sen}^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$

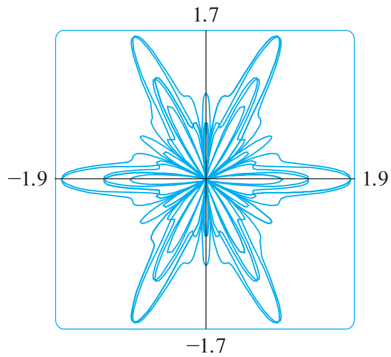


FIGURA 17
$r = \operatorname{sen}^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$

Algunas calculadoras de gráficas tienen comandos que hacen posible graficar curvas polares directamente. Con otras máquinas primero es necesario convertir a ecuaciones paramétricas. En este caso tomamos la ecuación polar $r = f(\theta)$ y escribimos sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Algunas máquinas requieren que el parámetro se denomine t en lugar de θ.

EJEMPLO 10 Grafique la curva r sen$(8\theta/5)$.

SOLUCIÓN Supongamos que nuestra calculadora de gráficas no tiene integrado un comando de gráficas polares. En este caso necesitamos trabajar con las correspondientes ecuaciones paramétricas, que son

$$x = r\cos\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\operatorname{sen}\theta$$

En cualquier caso necesitamos determinar el dominio para θ. Entonces nos preguntamos: ¿Cuántas rotaciones completas son necesarias hasta que la curva empiece a repetirse a sí misma? Si la respuesta es n, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

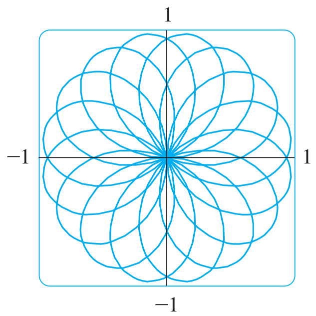


FIGURA 18
$r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

En el ejercicio 47 se le pide demostrar analíticamente lo que usted descubrió de las gráficas en la figura 19.

y por tanto requerimos que $16n\pi/5$ sea un múltiplo par de π. Esto ocurrirá primero cuando $n = 5$. En consecuencia, graficaremos toda la curva si especificamos que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Cambiando de θ a t, tenemos las ecuaciones

$$x = \operatorname{sen}(8t/5) \cos t \qquad y = \operatorname{sen}(8t/5) \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

y la Figura 18 muestra la curva resultante. Nótese que esta rosa tiene 16 lazos.

V EJEMPLO 11 Investigue la familia de curvas polares dadas por $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$. ¿Cómo cambia la forma cuando c cambia? (Estas curvas se denominan **limaçons**, por la palabra francesa que significa caracol, por la forma de las curvas para ciertos valores de c.)

SOLUCIÓN La Figura 19 muestra gráficas trazadas por computadora para varios valores de c. Para $c > 1$ el lazo decrece en tamaño cuando c decrece. Cuando c $= 1$, el lazo desaparece y la curva se convierte en el cardioide que trazamos en el Ejemplo 7. Para c entre 1 y $\frac{1}{2}$ la cúspide del cardioide se alisa y se convierte en “hoyuelo.” Cuando c disminuye de $\frac{1}{2}$ a 0, el limaçon toma la forma de un óvalo. Este óvalo se hace más circular cuando $c \to 0$, y cuando $c = 0$ la curva es precisamente el círculo $r = 1$.

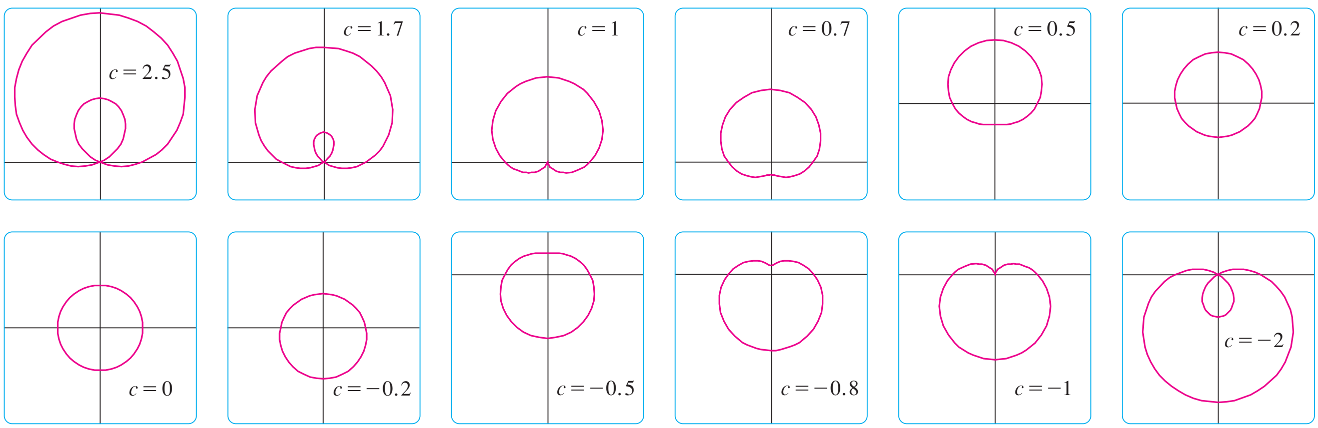


FIGURA 19
Miembros de la familia de limaçons $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$

Las partes restantes de la Figura 19 muestran que cuando c se hace negativa, las formas cambian en orden inverso. De hecho, estas curvas son reflexiones alrededor del eje horizontal de las curvas correspondientes con c positiva.

H.1 Ejercicios

1–2 Localice el punto cuyas coordenadas polares se dan. A continuación encuentre otros dos pares de coordenadas polares de este punto, uno con $r > 0$ y uno con $r < 0$.

1. (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(1, -3\pi/4)$ (c) $(-1, \pi/2)$

2. (a) $(1, 7\pi/4)$ (b) $(-3, \pi/6)$ (c) $(1, -1)$

3–4 Localice el punto cuyas coordenadas polares se dan. A continuación encuentre las coordenadas cartesianas del punto.

3. (a) $(1, \pi)$ (b) $(2, -2\pi/3)$ (c) $(-2, 3\pi/4)$

4. (a) $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (b) $(1, 5\pi/2)$ (c) $(2, -7\pi/6)$

5–6 Se dan las coordenadas cartesianas de un punto.
(i) Encuentre las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r > 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.
(ii) Encuentre las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r < 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

5. (a) $(2, -2)$ (b) $(-1, \sqrt{3})$

6. (a) $(3\sqrt{3}, 3)$ (b) $(1, -2)$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

7–12 Trace la región del plano formada por puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas.

7. $1 \leqslant r \leqslant 2$

8. $r \geqslant 0, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$

9. $0 \leqslant r < 4, \quad -\pi/2 \leqslant \theta < \pi/6$

10. $2 < r \leqslant 5, \quad 3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13–16 Identifique la curva al hallar una ecuación cartesiana para la curva.

13. $r = 3 \operatorname{sen} \theta$

14. $r = 2 \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta$

15. $r = \csc \theta$

16. $r = \tan \theta \sec \theta$

17–20 Encuentre una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

17. $x = -y^2$

18. $x + y = 9$

19. $x^2 + y^2 = 2cx$

20. $xy = 4$

21–22 Para cada curva descrita, decida si la curva sería más fácil darla como una ecuación polar o una ecuación cartesiana. Después, escriba una ecuación para la curva.

21. (a) Una recta que pasa por el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo
(b) Una recta vertical que pase por el punto (3, 3)

22. (a) Una circunferencia con radio 5 y centro (2, 3)
(b) Una circunferencia con centro en el origen con radio 4

23–42 Trace la curva con la ecuación polar dada.

23. $\theta = -\pi/6$

24. $r^2 - 3r + 2 = 0$

25. $r = \operatorname{sen} \theta$

26. $r = -3 \cos \theta$

27. $r = 2\,(1 - \operatorname{sen} \theta), \ \theta \geqslant 0$

28. $r = 1 - 3 \cos \theta$

29. $r = \theta, \ \theta \geqslant 0$

30. $r = \ln \theta, \ \theta \geqslant 1$

31. $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

32. $r = \cos 5\theta$

33. $r = 2 \cos 4\theta$

34. $r = 3 \cos 6\theta$

35. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$

36. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$

37. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

38. $r^2 = \cos 4\theta$

39. $r = 2 \cos(3\theta/2)$

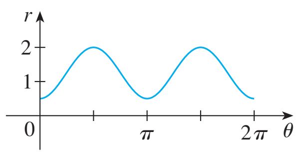
40. $r^2\theta = 1$

41. $r = 1 + 2 \cos 2\theta$

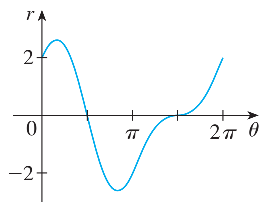
42. $r = 1 + 2 \cos(\theta/2)$

43–44 La figura muestra la gráfica de r como función de θ en coordenadas cartesianas. Úsela para trazar la correspondiente curva polar.

43.



44.



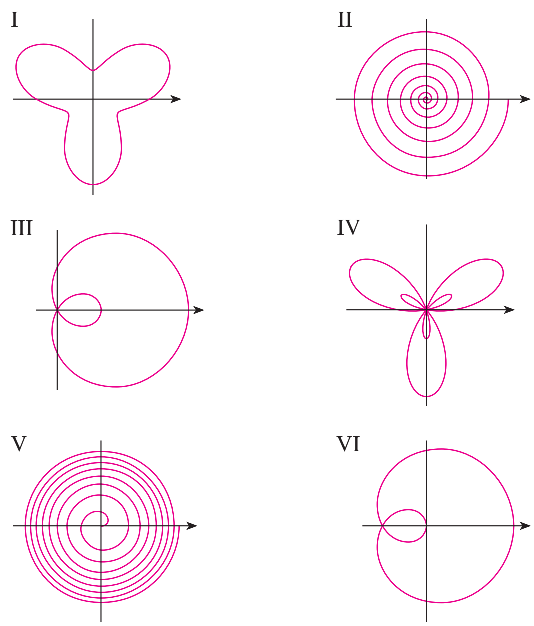
45. Demuestre que la curva polar $r = 4 + 2 \sec \theta$ (llamada **concoide**) tiene la recta $x = 2$ como una asíntota vertical al mostrar que $\lim_{r \to \pm\infty} x = 2$. Use este dato para ayudar a trazar la concoide.

46. Demuestre que la curva $r = \operatorname{sen} \theta \tan \theta$ (llamada **cisoide de Diocles**) tiene la recta $x = 1$ como asíntota vertical. Demuestre también que la curva se encuentra por entero dentro de la franja vertical $0 \leqslant x < 1$. Use estos datos para ayudar a trazar la cisoide.

47. (a) En el Ejemplo 11, las gráficas sugieren que el limaçon $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ tiene un lazo interior cuando $|c| > 1$. Demuestre que esto es verdadero y encuentre los valores de θ que corresponden al lazo interior.
(b) De la Figura 19 parece que el limaçon pierde su hoyuelo cuando $c = \frac{1}{2}$. Demuestre esto.

48. Enlace las ecuaciones polares con las gráficas marcadas I–VI. Dé razones para sus elecciones. (No use calculadora de gráficas.)

(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(c) $r = \cos(\theta/3)$
(d) $r = 1 + 2 \cos \theta$
(e) $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$
(f) $r = 1 + 2 \operatorname{sen} 3\theta$



49–52 Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva polar dada en el punto especificado por el valor de θ.

49. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$

50. $r = 2 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/3$

51. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$

52. $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

53–56 Encuentre los puntos sobre la curva dada donde la recta tangente es horizontal o vertical.

53. $r = 3\cos\theta$

54. $r = e^{\theta}$

55. $r = 1 + \cos\theta$

56. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

57. Demuestre que la ecuación polar $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$, donde $ab \neq 0$, representa un círculo y encuentre su centro y radio.

58. Demuestre que las curvas $r = a \operatorname{sen} \theta$ y $r = a \cos \theta$ se cruzan a ángulos rectos.

59–62 Use una calculadora de gráficas para graficar la curva polar. Con todo cuidado escoja un intervalo paramétrico para asegurarse de producir una curva apropiada.

59. $r = e^{\operatorname{sen}\theta} - 2\cos(4\theta)$ (curva de mariposa)

60. $r = |\tan\theta|^{|\cot\theta|}$ (curva valentina)

61. $r = 2 - 5\operatorname{sen}(\theta/6)$

62. $r = \cos(\theta/2) + \cos(\theta/3)$

63. ¿Cómo están relacionadas las gráficas de $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$? En general, ¿cómo está relacionada la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

64. Use una gráfica para estimar la coordenada y de los puntos más altos en la curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. A continuación use cálculo para hallar el valor exacto.

65. (a) Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo. ¿Cómo están relacionados n y el número de lazos?
(b) ¿Qué pasa si la ecuación del inciso (a) se sustituye con $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

66. Una familia de curvas está dada por las ecuaciones $r = 1 + c \operatorname{sen} n\theta$, donde c es un número real y n es un entero positivo. ¿Cómo cambia la gráfica cuando n aumenta? ¿Cómo cambia cuando c cambia? Ilustre al graficar suficientes miembros de la familia para apoyar sus conclusiones.

67. Una familia de curvas tiene ecuaciones polares

$$r = \frac{1 - a\cos\theta}{1 + a\cos\theta}$$

Investigue la forma en que cambia la gráfica cuando cambia el número a. En particular, identifique el lector los valores de transición de a para los cuales cambia la forma básica de la curva.

68. El astrónomo Giovanni Cassini (1625–1712) estudió la familia de curvas con ecuaciones polares

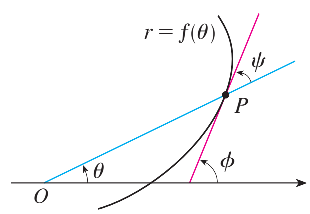
$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

donde a y c son números reales positivos. Estas curvas se denominan **óvalos de Cassini** aun cuando tienen forma oval sólo para ciertos valores de a y c. (Cassini pensaba que estas curvas podrían representar órbitas planetarias mejor que las elipses de Kepler.) Investigue la variedad de formas que pueden tener estas curvas. En particular, ¿cómo están relacionadas a y c entre sí cuando la curva se divide en dos partes?

69. Sea P cualquier punto (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es el ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, demuestre que

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Sugerencia*: Observe que $\psi = \phi - \theta$ en la figura.]



70. (a) Use el Ejercicio 69 para demostrar que el ángulo entre la recta tangente y la recta radial es $\psi = \pi/4$ en todo punto sobre la curva $r = e^{\theta}$.
(b) Ilustre el inciso (a) al graficar la curva y las rectas tangentes en los puntos donde $\theta = 0$ y $\pi/2$.
(c) Demuestre que cualquier curva polar $r = f(\theta)$ con la propiedad de que el ángulo ψ entre la recta radial y la recta tangente es una constante, debe ser de la forma $r = Ce^{k\theta}$, donde C y k son constantes.

H.2 Áreas y longitudes en coordenadas polares

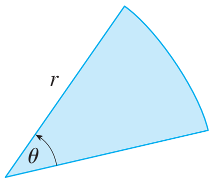


FIGURA 1

En esta sección desarrollamos la fórmula para el área de una región cuya frontera está dada por una ecuación polar. Necesitamos usar la fórmula para el área de un sector de un círculo

1 $$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

donde, al igual que en la Figura 1, r es el radio y θ es la medida en radianes del ángulo central. La Fórmula 1 se sigue del hecho que el área de un sector es proporcional a su ángulo central: $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$.

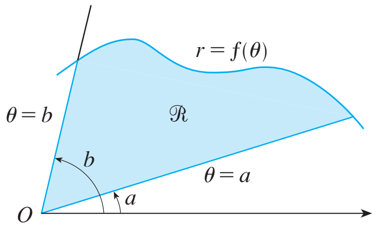


FIGURA 2

Sea $\mathcal{R}$ la región, ilustrada en la Figura 2, acotada por la curva polar $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$, donde f es una función positiva continua y donde $0 < b - a \leqslant 2\pi$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos con puntos extremos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ y ancho igual $\Delta\theta$. Los rayos $\theta = \theta_i$ dividen entonces a $\mathcal{R}$ en n regiones más pequeñas con ángulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Si escogemos θ_i^* del i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, entonces el área ΔA_i de la i-ésima región es aproximada por el área del sector de un círculo con ángulo central $\Delta\theta$ y radio $f(\theta_i^*)$. (Vea Figura 3.)

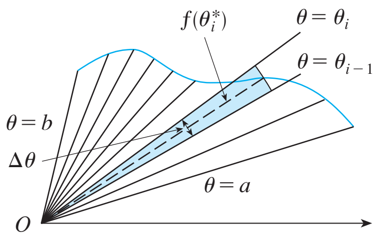


FIGURA 3

Entonces, de la Fórmula 1, tenemos

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

y por tanto una aproximación al área total A de $\mathcal{R}$ es

2 $$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

Se ve de la Figura 3 que la aproximación en (2) mejora cuando $n \to \infty$. Pero las sumas en (2) son sumas de Riemann para la función $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

Por tanto, parece ser plausible (y en efecto se puede probar) que la fórmula para el área A de la región polar $\mathcal{R}$ es

3 $$\boxed{A = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta}$$

La Fórmula 3 se escribe con frecuencia como

4 $$\boxed{A = \int_a^b \frac{1}{2}r^2\,d\theta}$$

con la interpretación de que $r = f(\theta)$. Nótese la similitud entre las Fórmulas 1 y 4.

Cuando aplicamos la Fórmula 3 o la 4 es útil considerar el área como siendo barrida por un rayo giratorio que pasa por O, que se inicia con el ángulo a y termina con el ángulo b.

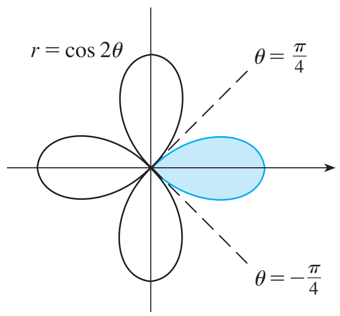


FIGURA 4

V EJEMPLO 1 Encuentre el área encerrada por un lazo de la rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN La curva $r = \cos 2\theta$ se trazó en el Ejemplo 8 de la Sección H.1. Nótese de la Figura 4 que la región encerrada por el lazo derecho es barrida por una recta que gira de $\theta = -\pi/4$ a $\theta = \pi/4$. Por tanto, la Fórmula 4 da

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

Podríamos evaluar la integral usando la Fórmula 64 de la Tabla de Integrales. O bien, al igual que en la Sección 5.7, podríamos usar la identidad $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ para escribir

$$A = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\, 4\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

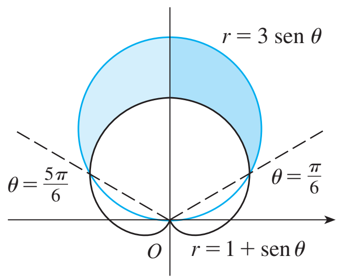


FIGURA 5

V EJEMPLO 2 Encuentre el área de la región que está dentro del círculo $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$ y fuera del cardioide $r = 1 + \mathrm{sen}\,\theta$.

SOLUCIÓN El cardioide (vea Ejemplo 7 en la Sección H.1) y el círculo están trazados en la Figura 5 y la región deseada está sombreada. Los valores de a y b de la Fórmula 4 se determinan al hallar los puntos de intersección de las dos curvas. Se cruzan cuando $3\,\mathrm{sen}\,\theta = 1 + \mathrm{sen}\,\theta$, que da $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$, de modo que $\theta = \pi/6, 5\pi/6$. El área deseada se encuentra al restar el área dentro del cardioide a $\theta = \pi/6$ y $\theta = 5\pi/6$ del área dentro del círculo de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Entonces

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \mathrm{sen}\,\theta)^2\, d\theta$$

Como la región es simétrica alrededor del eje vertical $\theta = \pi/2$, podemos escribir

$$\begin{aligned} A &= 2\left[\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 9\,\mathrm{sen}^2\theta\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}^2\theta)\, d\theta\right] \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8\,\mathrm{sen}^2\theta - 1 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4\cos 2\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta \qquad [\text{porque } \mathrm{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)] \\ &= 3\theta - 2\,\mathrm{sen}\, 2\theta + 2\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi \end{aligned}$$

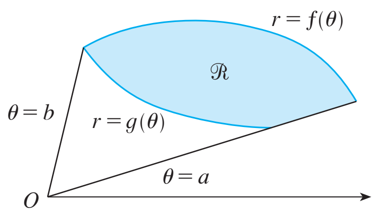


FIGURA 6

El Ejemplo 2 ilustra el procedimiento para hallar el área de la región acotada por dos curvas polares. En general, sea $\mathscr{R}$ una región, como se ilustra en la Figura 6, que está acotada por curvas con ecuaciones polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$, y $\theta = b$, donde $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ y $0 < b - a \leqslant 2\pi$. El área A de $\mathscr{R}$ se encuentra al restar el área dentro de $r = g(\theta)$ del área dentro de $r = f(\theta)$, de modo que al usar la Fórmula 3 tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_a^b \big([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\big)\, d\theta \end{aligned}$$

ATENCIÓN El hecho de que un solo punto tenga numerosas representaciones en coordenadas polares a veces hace difícil hallar todos los puntos de intersección de dos curvas polares. Por ejemplo, es obvio de la figura 5 que el círculo y el cardioide tienen tres puntos de intersección; no obstante, en el Ejemplo 2 resolvimos las ecuaciones $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$ y

$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y encontramos sólo dos de estos puntos, $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. El origen también es un punto de intersección, pero no podemos hallarlo con resolver las ecuaciones de las curvas porque el origen no tiene ni una representación en coordenadas polares que satisfaga ambas ecuaciones. Nótese que, cuando se representa como $(0, 0)$ o $(0, \pi)$, el origen satisface $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ y por tanto está en el círculo; cuando está representado como $(0, 3\pi/2)$, satisface $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y por tanto está sobre el cardioide. Considere dos puntos que se mueven a lo largo de curvas cuando el valor de parámetro θ aumenta de 0 a 2π. En una curva el origen se alcanza en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; en la otra curva se alcanza en $\theta = 3\pi/2$. Los puntos no se colisionan en el origen porque llegan al origen en tiempos diferentes, pero las curvas se cruzan ahí.

Por tanto, para hallar *todos* los puntos de intersección de dos curvas polares, es recomendable trazar las gráficas de ambas curvas. Es especialmente conveniente usar una calculadora de gráficas o computadora para ayudar en este trabajo.

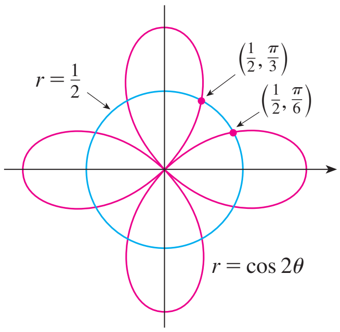


FIGURA 7

EJEMPLO 3 Hállense todos los puntos de intersección de las curvas $r = \cos 2\theta$ y $r = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Si resolvemos la ecuación $r = \cos 2\theta$ y $r = \frac{1}{2}$, obtenemos $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ y por tanto $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Entonces los valores de θ entre 0 y 2π que satisfagan ambas ecuaciones son $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Hemos encontrado cuatro puntos de intersección: $\left(\frac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$, y $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$.

No obstante, se puede ver de la Figura 7 que las curvas tienen otros cuatro puntos de intersección que son $\left(\frac{1}{2}, \pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/3\right)$. Éstos se pueden hallar usando simetría o tomando nota que otra ecuación del círculo es $r = -\frac{1}{2}$ y luego resolviendo la ecuación $r = \cos 2\theta$ y $r = -\frac{1}{2}$.

Longitud de arco

Para hallar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, consideramos θ como un parámetro y escribimos las ecuaciones paramétricas de la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Usando la Regla del Producto y derivando con respecto a θ, obtenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$$

entonces, usando $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &\quad + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\operatorname{sen}^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r^2\cos^2\theta \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\end{aligned}$$

Suponiendo que f' sea continua, podemos usar la Fórmula 6.4.1 para escribir la longitud de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Por tanto, la longitud de una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, es

5
$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre la longitud del cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN El cardioide se muestra en la Figura 8. (Lo trazamos en el Ejemplo 7 en la Sección H.1.) Su longitud total está dada por el intervalo paramétrico $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, por lo que la Fórmula 5 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta}\; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\theta}\; d\theta$$

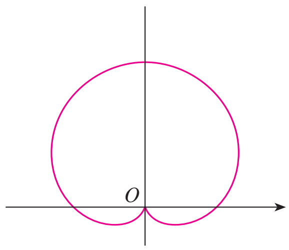


FIGURA 8
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

Podríamos evaluar esta integral al multiplicar y dividir el integrando entre $\sqrt{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$, o podríamos usar un sistema computarizado de álgebra. En cualquier caso, encontramos que la longitud del cardioide es $L = 8$.

H.2 Ejercicios

1–4 Encuentre el área de la región que está acotada por la curva dada y está en el sector especificado.

1. $r = \theta^2$, $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$

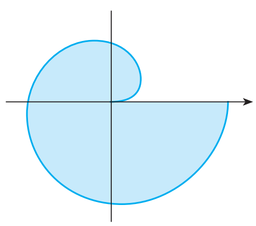
2. $r = e^{\theta/2}$, $\quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

3. $r = \operatorname{sen}\theta$, $\quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$

4. $r = \sqrt{\operatorname{sen}\theta}$, $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

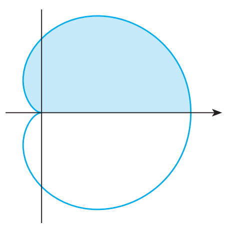
5–8 Encuentre el área de la región sombreada.

5.



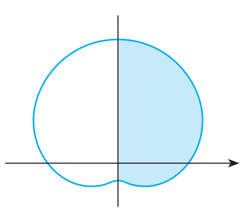
$r = \sqrt{\theta}$

6.



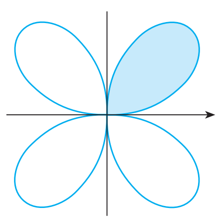
$r = 1 + \cos\theta$

7.



$r = 4 + 3\operatorname{sen}\theta$

8.



$r = \operatorname{sen} 2\theta$

9–12 Trace la curva y encuentre el área que encierra.

9. $r^2 = 4\cos 2\theta$

10. $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

11. $r = 2\cos 3\theta$

12. $r = 2 + \cos 2\theta$

13–14 Grafique la curva y encuentre el área que encierra.

13. $r = 1 + 2\operatorname{sen} 6\theta$

14. $r = 2\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen} 9\theta$

15–18 Encuentre el área de la región encerrada por un lazo de la curva.

15. $r = \operatorname{sen} 2\theta$

16. $r = 4\operatorname{sen} 3\theta$

17. $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ (lazo interior)

18. $r = 2\cos\theta - \sec\theta$

19–22 Encuentre el área de la región que está dentro de la primera curva y fuera de la segunda curva.

19. $r = 2\cos\theta$, $\quad r = 1$

20. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$, $\quad r = 1$

21. $r = 3\cos\theta$, $\quad r = 1 + \cos\theta$

22. $r = 3\operatorname{sen}\theta$, $\quad r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

1. Tareas sugeridas disponibles en TEC

23–26 Encuentre el área de la región que se encuentra dentro de ambas curvas.

23. $r = \sqrt{3}\cos\theta, \quad r = \operatorname{sen}\theta$

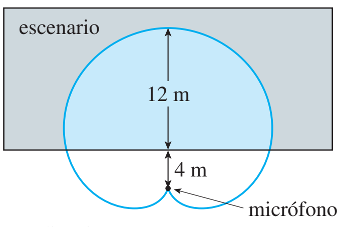
24. $r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

25. $r = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$

26. $r = 3 + 2\cos\theta, \quad r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$

27. Encuentre el área dentro del lazo más grande y fuera del lazo más pequeño del limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

28. Cuando se graban programas en vivo, los ingenieros de sonido usan con frecuencia un micrófono con un patrón de captación cardioide porque suprime el ruido de la audiencia. Suponga que el micrófono está colocado 4 m del frente del escenario (como en la figura) y la frontera de la región óptima de captación está dada por el cardioide $r = 8 + 8\operatorname{sen}\theta$, donde r se mide en metros y el micrófono está en el polo. Los músicos desean conocer el área que tendrán en el escenario dentro del alcance óptimo de captación del micrófono. Conteste la pregunta de ellos.



29–32 Encuentre todos los puntos de intersección de las curvas dadas.

29. $r = 2\operatorname{sen} 2\theta, \quad r = 1$

30. $r = \cos 3\theta, \quad r = \operatorname{sen} 3\theta$

31. $r = \operatorname{sen}\theta, \quad r = \operatorname{sen} 2\theta$

32. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

33. Los puntos de intersección del cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y el lazo espiral $r = 2\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ no se pueden hallar exactamente. Use una calculadora de gráficas para hallar los valores aproximados de θ en los que se crucen. A continuación utilice estos valores para calcular el área que se encuentra dentro de ambas curvas.

34. Use una gráfica para calcular los valores de θ para los cuales las curvas $r = 3 + \operatorname{sen} 5\theta$ y $r = 6\operatorname{sen}\theta$ se cruzan. A continuación estime el área que está dentro de ambas curvas.

35–38 Encuentre la longitud exacta de la curva polar.

35. $r = 3\operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

36. $r = e^{2\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

37. $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

38. $r = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

39–40 Use una calculadora para hallar la longitud de la curva correcta a cuatro lugares decimales.

39. $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$

40. $r = 4\operatorname{sen} 3\theta$

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO

Secciones cónicas en coordenadas polares

En este proyecto damos un tratamiento unificado de los tres tipos de secciones cónicas en términos de un foco y directriz. Veremos que si ponemos el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar sencilla. En el Capítulo 10 usaremos la ecuación polar de una elipse para derivar las leyes de Kepler de movimiento planetario.

Sea F un punto fijo (llamado **foco**) y sea l una recta fija (llamada **directriz**) en un plano. Sea e el número positivo fijo (llamado **excentricidad**). Sea C el conjunto de todos los puntos P del plano tales que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(esto es, la razón entre la distancia desde F y la distancia desde l es una constante e). Nótese que si la excentricidad es $e = 1$, entonces $|PF| = |Pl|$ y en consecuencia la condición dada simplemente se convierte en la definición de una parábola como se da en el Apéndice B.

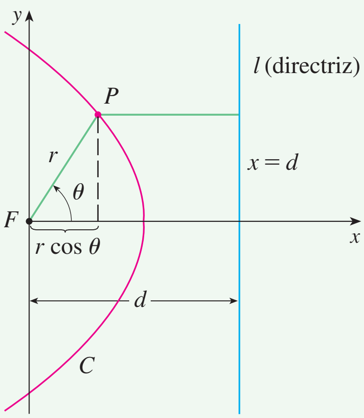


FIGURA 1

1. Si colocamos el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha, entonces la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el punto P tiene coordenadas polares (r, θ), use la Figura 1 para demostrar que

$$r = e(d - r\cos\theta)$$

2. Al convertir la ecuación polar del Problema 1 a coordenadas rectangulares, demuestre que la curva C es una elipse si $e < 1$. (Vea en el Apéndice B una exposición sobre elipses.)

Se requiere calculadora graficadora o computadora con software de gráficas

3. Demuestre que C es una hipérbola si $e > 1$.

4. Demuestre que la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

representa una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

5. Para cada una de las siguientes cónicas, encuentre la excentricidad y directriz. A continuación identifique y trace la cónica

(a) $r = \dfrac{4}{1 + 3\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{8}{3 + 3\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{2}{2 + \cos\theta}$

6. Grafique las cónicas $r = e/(1 - e\cos\theta)$ con $e = 0.4$, 0.6, 0.8 y 1.0 en una pantalla común. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la curva?

7. (a) Demuestre que la ecuación polar de una elipse con directriz $x = d$ se puede escribir en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

(b) Encuentre una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica del planeta Tierra alrededor del Sol (en un foco) dado que la excentricidad es alrededor de 0.017 y la longitud del eje mayor es aproximadamente de 2.99×10^8 km.

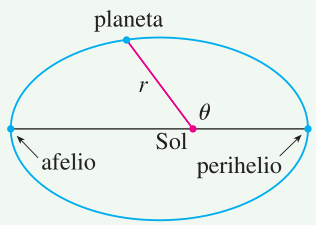


FIGURA 2

8. (a) Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. Las posiciones de un planeta que son más cercanas y más alejadas del Sol se denominan *perihelio* y *afelio*, respectivamente. (Vea la Figura 2.) Use el Problema 7(a) para demostrar que la distancia de perihelio de un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia de afelio es $a(1 + e)$.

(b) Use los datos del Problema 7(b) para hallar las distancias del planeta Tierra al Sol en perihelio y en afelio.

9. (a) El planeta Mercurio se desplaza en órbita elíptica con excentricidad 0.206. Su distancia mínima desde el Sol es 4.6×10^7 km. Use los resultados del Problema 8(a) para hallar su distancia máxima desde el Sol.

(b) Encuentre la distancia recorrida por el planeta Mercurio durante una órbita completa alrededor del Sol. (Use su calculadora o sistema computarizado de álgebra para evaluar la integral definida.)

I Números complejos

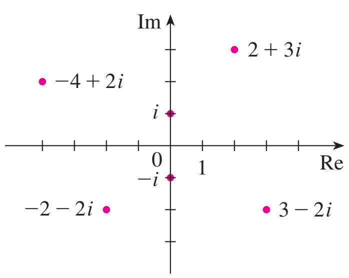


FIGURA 1
Números complejos como puntos en el plano de Argand

Un **número complejo** puede ser representado por una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es un símbolo con la propiedad de que $i^2 = -1$. El número complejo $a + bi$ también puede ser representado por el par ordenado (a, b) y graficado como un punto en un plano (llamado plano de Argand) como en la Figura 1. Entonces el número complejo $i = 0 + 1 \cdot i$ está identificado con el punto $(0, 1)$.

La **parte real** del número complejo $a + bi$ es el número real a y la **parte imaginaria** es el número real b. Entonces la parte real de $4 - 3i$ es 4 y la parte imaginaria es -3. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** si $a = c$ y $b = d$, es decir, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. En el plano de Argand el eje horizontal se denomina eje real y el eje vertical se llama eje imaginario.

La suma y diferencia de dos números complejos están definidas al sumar o restar sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por ejemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

El producto de números complejos se define de modo que se cumplen sus leyes conmutativa y distributiva:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di)\\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Como $i^2 = -1$, esto se convierte en

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EJEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i)\\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$

La división de números complejos es muy semejante a racionalizar el denominador de una expresión racional. Para el número complejo $z = a + bi$, definimos su **conjugado complejo** como $\overline{z} = a - bi$. Para hallar el cociente de dos números complejos multiplicamos numerador y denominador por el conjugado complejo del denominador.

EJEMPLO 2 Exprese el número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado complejo de $2 + 5i$, es decir $2 - 5i$, y aprovechamos el resultado del Ejemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$

La interpretación geométrica del conjugado complejo se ve en la Figura 2: $\overline{z}$ es la reflexión de z en el eje real. Citamos algunas de las propiedades del conjugado complejo en la siguiente caja. Las pruebas se siguen de la definición y se piden en el Ejercicio 18.

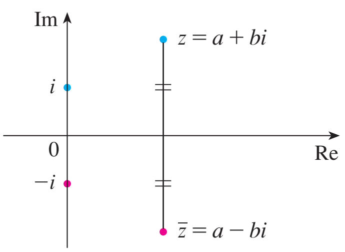


FIGURA 2

Propiedades de conjugados

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

El **módulo**, o **valor absoluto**, $|z|$ de un número complejo $z = a + bi$ es su distancia desde el origen. De la Figura 3 vemos que si $z = a + bi$, entonces

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

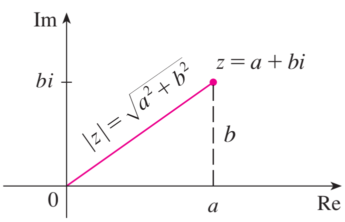


FIGURA 3

Nótese que

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

y por tanto

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$$

Esto explica por qué el procedimiento de división del Ejemplo 2 funciona en general:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

Como $i^2 = -1$, podemos considerar que i es raíz cuadrada de -1. Pero nótese que también tenemos $(-i)^2 = i^2 = -1$ y por tanto $-i$ es también una raíz cuadrada de -1. Decimos que i es la **raíz cuadrada principal** de -1 y escribimos $\sqrt{-1} = i$. En general, si c es cualquier número positivo, escribimos

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Con esta convención, la derivación usual y fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son válidas aun cuando $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 3 Encuentre las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Usando la fórmula cuadrática, tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

Observamos que las soluciones de la ecuación del Ejemplo 3 son conjugados complejos entre sí. En general, las soluciones de cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes reales a, b y c son siempre conjugados complejos. (Si z es real, $\overline{z} = z$, de modo que z es su propio conjugado.)

Hemos visto que si consideramos números complejos como soluciones, entonces toda ecuación cuadrática tiene una solución. Más generalmente, es cierto que toda ecuación con polinomios

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grado al menos uno tiene una solución entre los números complejos. Este hecho se conoce como Teorema Fundamental de Álgebra y fue demostrado por Gauss.

Forma polar

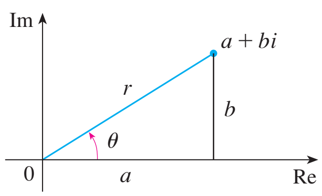


FIGURA 4

Sabemos que cualquier número complejo $z = a + bi$ puede ser considerado como un punto (a, b) y que cualquier punto como éste puede ser representado por coordenadas polares (r, θ) con $r \geqslant 0$. De hecho,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

como en la Figura 4. Por tanto, tenemos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)i$$

Entonces podemos escribir cualquier número complejo z en la forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

donde $\qquad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad$ y $\qquad \tan\theta = \dfrac{b}{a}$

El ángulo θ se denomina **argumento** de z y escribimos $\theta = \arg(z)$. Nótese que $\arg(z)$ no es único; cualesquier dos argumentos de z difieren en un múltiplo entero de 2π.

EJEMPLO 4 Escriba los siguientes números en forma polar.

(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUCIÓN

(a) Tenemos $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\tan \theta = 1$, por lo que podemos tomar $\theta = \pi/4$. Por tanto, la forma polar es

$$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$$

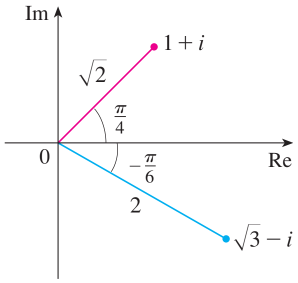


FIGURA 5

(b) Aquí tenemos $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ y $\tan \theta = -1/\sqrt{3}$. Como w está en el cuarto cuadrante, tomamos $\theta = -\pi/6$ y

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Los números z y w se muestran en la Figura 5.

La forma polar de números complejos da un claro entendimiento a la multiplicación y división. Sean

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

dos números complejos escritos en forma polar. Entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \end{aligned}$$

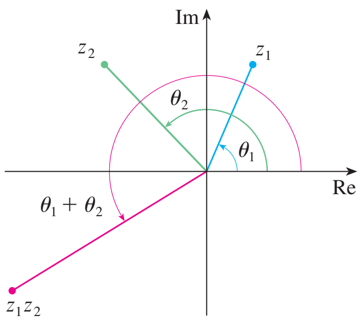


FIGURA 6

Por tanto, usando las fórmulas de la adición para coseno y seno, tenemos

1 $$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Esta fórmula dice que *para multiplicar dos números complejos multiplicamos los módulos y sumamos los argumentos.* (Vea Figura 6.)

Un argumento similar usando las fórmulas de la sustracción para seno y coseno muestra que *para dividir dos números complejos dividimos los módulos y restamos los argumentos.*

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0}$$

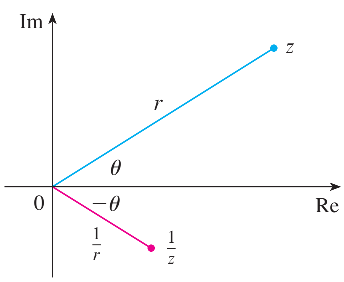


FIGURA 7

En particular, tomando $z_1 = 1$ y $z_2 = z$ (y por tanto $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \theta$), tenemos lo siguiente, que se ilustra en la figura 7.

$$\boxed{\text{Si} \quad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}$$

EJEMPLO 5 Encuentre el producto de los números complejos $1 + i$ y $\sqrt{3} - i$ en forma polar.

SOLUCIÓN Del Ejemplo 4 tenemos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

y

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

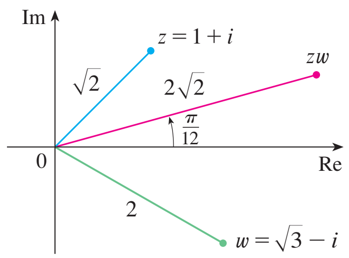


FIGURA 8

Entonces, por la Ecuación 1,

$$(1 + i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$$

Esto está ilustrado en la Figura 8.

El uso repetido de la Fórmula 1 muestra cómo calcular potencias de un número complejo. Si

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

entonces

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$$

y

$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta)$$

En general, obtenemos el siguiente resultado, que se denomina así en honor al matemático francés Abraham De Moivre (1667–1754).

2 Teorema de De Moivre Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ y n es un entero positivo, entonces

$$z^n = [r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Esto dice que *para tomar la n-ésima potencia de un número complejo tomamos la n-ésima potencia del módulo y multiplicamos el argumento por n.*

EJEMPLO 6 Encuentre $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUCIÓN Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, se deduce del Ejemplo 4(a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tiene la forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Entonces, por el Teorema de De Moivre,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

El Teorema de De Moivre también se puede usar para hallar las n-ésimas raíces de números complejos. Una n-ésima raíz del número complejo z es un número complejo w tal que

$$w^n = z$$

Escribiendo estos dos números en forma trigonométrica como

$$w = s(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi) \qquad \text{y} \qquad z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

y usando el Teorema de De Moivre, obtenemos

$$s^n(\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

La igualdad de estos dos números complejos muestra que

$$s^n = r \qquad \text{o} \qquad s = r^{1/n}$$

y $$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\,n\phi = \text{sen}\,\theta$$

Del hecho que seno y coseno tienen periodo 2π se deduce que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Por tanto, $$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Como esta expresión da un valor diferente de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, tenemos lo siguiente.

$\boxed{3}$ **Raíces de un número complejo** Sea $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ y sea n un entero positivo. Entonces z tiene las n raíces n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Nótese que cada una de las n-ésimas raíces de z tiene módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Por tanto, todas las n-ésimas raíces de z se encuentran en el círculo de radio $r^{1/n}$ en el plano complejo. También, como el argumento de cada n-ésima raíz sucesiva excede al argumento de la raíz previa en $2\pi/n$, vemos que las n-ésimas raíces de z están igualmente espaciadas en este círculo.

EJEMPLO 7 Encuentre las seis raíces sextas de $z = -8$ y grafique estas raíces en el plano complejo.

SOLUCIÓN En forma trigonométrica, $z = 8(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$. Aplicando la Ecuación 3 con $n = 6$, obtenemos

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtenemos las seis raíces sextas de -8 al tomar $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en esta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)$$

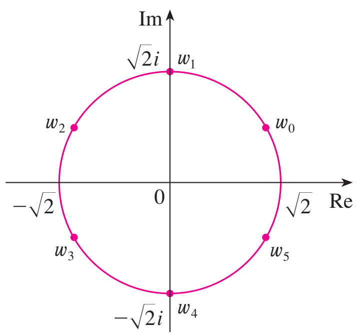


FIGURA 9
Las seis raíces sextas de $z = -8$

Todos estos puntos se encuentran en el círculo de radio $\sqrt{2}$ como se ve en la Figura 9.

Exponenciales complejos

También necesitamos dar un significado a la expresión e^z cuando $z = x + iy$ es un número complejo. La teoría de series infinitas como se desarrolla en el Capítulo 8 se puede extender al caso donde los términos son números complejos. Usando la serie de Taylor para e^x (8.7.11) como nuestra guía, definimos

4 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

y resulta que esta función exponencial compleja tiene las mismas propiedades que la función exponencial real. En particular, es cierto que

5 $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Si ponemos $z = iy$, donde y es un número real, en la Ecuación 4, y usamos los hechos de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

obtenemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\,\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i\,\text{sen}\,y \end{aligned}$$

Aquí hemos empleado la serie de Taylor para cos y y sen y (Ecuaciones 8.7.16 y 8.7.15). El resultado es una fórmula famosa llamada **fórmula de Euler**:

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y} \tag{6}$$

Combinando la fórmula de Euler con la Ecuación 5, obtenemos

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{7}$$

EJEMPLO 8 Evalúe: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

Podríamos escribir el resultado del Ejemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta ecuación relaciona los cinco números más famosos de todas las matemáticas: 0, 1, e, i, y π.

SOLUCIÓN

(a) De la ecuación de Euler (6) tenemos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando la Ecuación 7 obtenemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$

Por último, observamos que la ecuación de Euler nos da un método más fácil de demostrar el Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

I Ejercicios

1–14 Evalúe la expresión y escriba su respuesta en la forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$
2. $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$
3. $(2 + 5i)(4 - i)$
4. $(1 - 2i)(8 - 3i)$
5. $\overline{12 + 7i}$
6. $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$
7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$
8. $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$
9. $\dfrac{1}{1 + i}$
10. $\dfrac{3}{4 - 3i}$
11. i^3
12. i^{100}
13. $\sqrt{-25}$
14. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15–17 Encuentre el conjugado complejo y el módulo del número.

15. $12 - 5i$
16. $-1 + 2\sqrt{2}\, i$
17. $-4i$

18. Demuestre las siguientes propiedades de números complejos.
(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
(c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, donde n es un entero positivo [*Sugerencia*: Escriba $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19–24 Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

19. $4x^2 + 9 = 0$
20. $x^4 = 1$
21. $x^2 + 2x + 5 = 0$
22. $2x^2 - 2x + 1 = 0$
23. $z^2 + z + 2 = 0$
24. $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25–28 Escriba el número en forma polar con argumento entre 0 y 2π.

25. $-3 + 3i$
26. $1 - \sqrt{3}\, i$
27. $3 + 4i$
28. $8i$

29–32 Encuentre formas polares para zw, z/w y $1/z$ al poner primero z y w en forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i$, $w = 1 + \sqrt{3}\, i$
30. $z = 4\sqrt{3} - 4i$, $w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4(\sqrt{3} + i), \quad w = -3 - 3i$

33–36 Encuentre la potencia indicada usando el Teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$

34. $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$

35. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$

36. $(1 - i)^8$

37–40 Encuentre las raíces indicadas. Trace las raíces en el plano complejo.

37. Las raíces octavas de 1

38. Las raíces quintas de 32

39. Las raíces cúbicas de i

40. Las raíces cúbicas de $1 + i$

41–46 Escriba el número en la forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$

42. $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$

44. $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$

46. $e^{\pi+i}$

47. Use el Teorema de De Moivre con $n = 3$ para expresar $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

48. Use la fórmula de Euler para demostrar las siguientes fórmulas para $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Si $u(x) = f(x) + ig(x)$ es una función de valor complejo de una variable real x y las partes real e imaginaria $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables de x, entonces la derivada de u está definida como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Use esto junto con la Ecuación 7 para demostrar que si $F(x) = e^{rx}$, entonces $F'(x) = re^{rx}$ cuando $r = a + bi$ es un número complejo.

50. (a) Si u es una función de valor complejo de una variable real, su integral indefinida $\int u(x)\,dx$ es una antiderivada de u. Evalúe

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando las partes real e imaginaria de la integral de la parte (a), evalúe las integrales reales

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

(c) Compare con el método empleado en el Ejemplo 4 de la Sección 5.6.

J Respuestas a ejercicios de número impar

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS 1.1 ■ PÁGINA 21

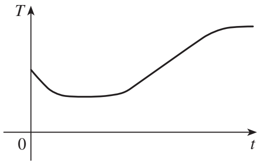
1. (a) 3 (b) -0.2 (c) 0, 3 (d) -0.8
(e) $[-2, 4], [-1, 3]$ (f) $[-2, 1]$

3. $[-85, 115]$ **5.** No

7. Sí, $[-3, 2], [-3, -2) \cup [-1, 3]$

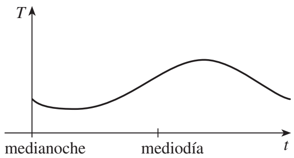
9. Dieta, ejercicio, o enfermedad

11.

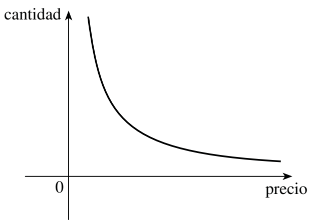


13. (a) 500 MW; 730 MW (b) 4 a.m.; mediodía

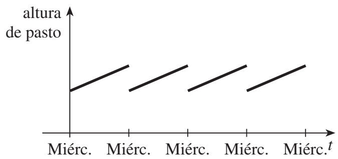
15.



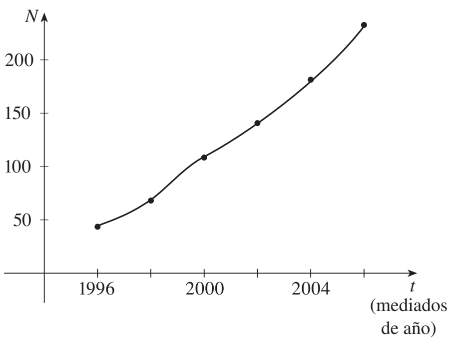
17.



19.



21. (a)



(b) 126 millones; 207 millones

23. 12, 16, $3a^2 - a + 2$, $3a^2 + a + 2$, $3a^2 + 5a + 4$, $6a^2 - 2a + 4$, $12a^2 - 2a + 2$, $3a^4 - a^2 + 2$, $9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4$, $3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

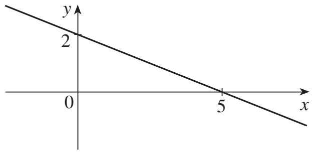
25. $-3 - h$ **27.** $-1/(ax)$

29. $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

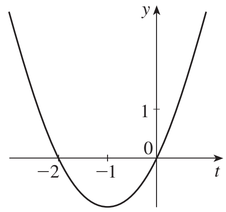
31. $(-\infty, \infty)$

33. $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

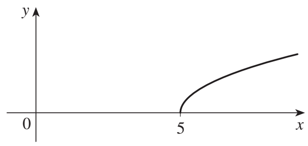
35. $(-\infty, \infty)$



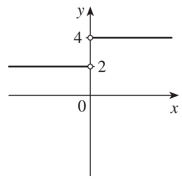
37. $(-\infty, \infty)$



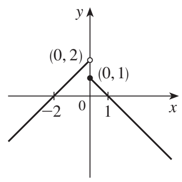
39. $[5, \infty)$



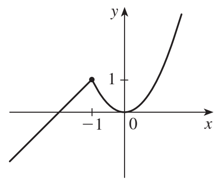
41. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



43. $(-\infty, \infty)$



45. $(-\infty, \infty)$



47. $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}, 1 \leqslant x \leqslant 5$ **49.** $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

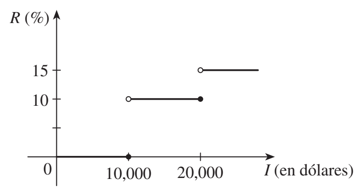
51. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x - 6 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$

53. $A(L) = 10L - L^2, 0 < L < 10$

55. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4, x > 0$ **57.** $S(x) = x^2 + (8/x), x > 0$

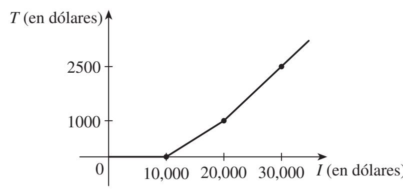
59. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x, 0 < x < 6$

61. (a)



(b) \$400, \$1900

(c)



63. f es impar, g es par **65.** (a) $(-5, 3)$ (b) $(-5, -3)$

67. Impar **69.** Ninguno **71.** Par

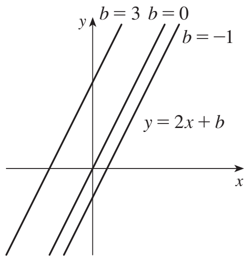
73. Par; impar; ninguno (a menos que $f = 0$ o $g = 0$)

EJERCICIOS 1.2 ■ PÁGINA 35

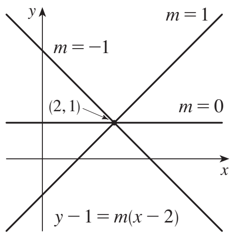
1. (a) Logarítmica (b) Raíz (c) Racional
(d) Con polinomios, grado 2 (e) Exponencial
(f) Trigonométrica

3. (a) h (b) f (c) g

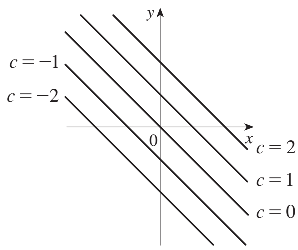
5. (a) $y = 2x + b$,
donde b es el cruce con eje y.



(b) $y = mx + 1 - 2m$,
donde m es la pendiente.
Vea la gráfica a la derecha.
(c) $y = 2x - 3$



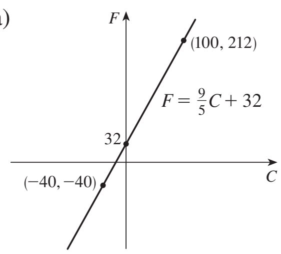
7. Sus gráficas tienen pendiente -1.



9. $f(x) = -3x(x + 1)(x - 2)$

11. (a) 8.34, cambio en mg por cada cambio de 1 año (b) 8.34 mg

13. (a)



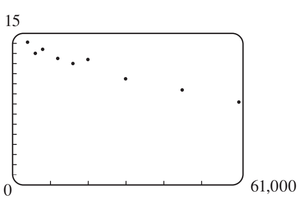
(b) $\frac{9}{5}$, cambio en °F por cada cambio de 1°C; 32, temperatura Fahrenheit correspondiente a 0°C

15. (a) $T = \frac{1}{6}N + \frac{307}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$, cambio en °F por cada chirrido de cambio por minuto (c) 76°F

17. (a) $P = 0.434d + 15$ (b) 196 ft

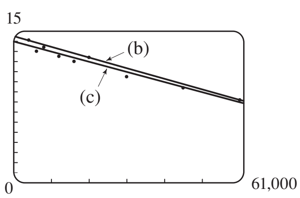
19. (a) Coseno (b) Lineal

21. (a)



El modelo lineal es apropiado

(b) $y = -0.000105x + 14.521$

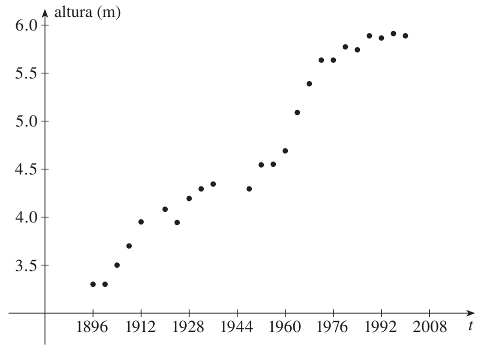


(c) $y = -0.00009979x + 13.951$ [Vea gráfica en (b).]

(d) Aprox. 11.5 por 100 de población (e) Alrededor de 6%

(f) No

23. (a)



El modelo lineal es apropiado

(b) $y = -0.027t - 47.758$

(c) 6.35 m; más alto que el valor real

(d) No

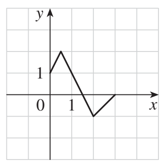
25. $y \approx 0.0012937x^3 - 7.06142x^2 + 12{,}823x - 7{,}743{,}770$; 1914 millones

EJERCICIOS 1.3 ■ PÁGINA 43

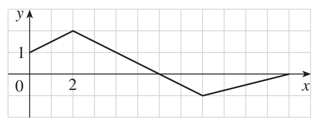
1. (a) $y = f(x) + 3$ (b) $y = f(x) - 3$ (c) $y = f(x - 3)$
(d) $y = f(x + 3)$ (e) $y = -f(x)$ (f) $y = f(-x)$
(g) $y = 3f(x)$ (h) $y = \frac{1}{3}f(x)$

3. (a) 3 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 2

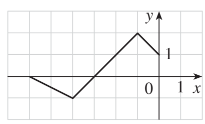
5. (a)



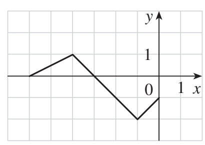
(b)



(c)

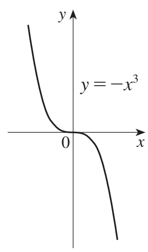


(d)

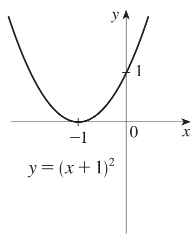


7. $y = -\sqrt{-x^2 - 5x - 4} - 1$

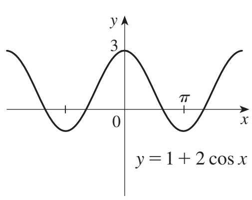
9.



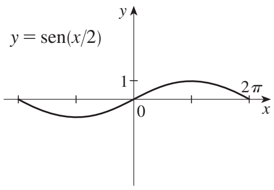
11.



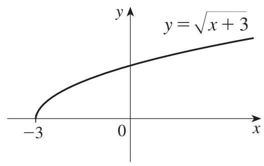
13.



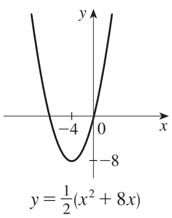
15.



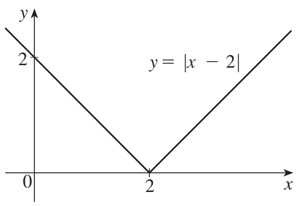
17.



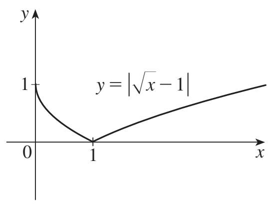
19.



21.



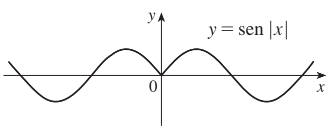
23.



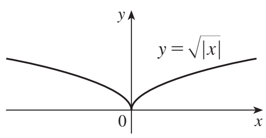
25. $L(t) = 12 + 2\,\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$

27. (a) La parte de la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha del eje y está reflejada alrededor del eje y.

(b)



(c)



29. (a) $(f + g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1$, $(-\infty, \infty)$

(b) $(f - g)(x) = x^3 - x^2 + 1$, $(-\infty, \infty)$

(c) $(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2$, $(-\infty, \infty)$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{3x^2 - 1}$, $\{x \mid x \neq \pm 1/\sqrt{3}\}$

31. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x$, $(-\infty, \infty)$

(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1$, $(-\infty, \infty)$

(c) $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2$, $(-\infty, \infty)$

(d) $(g \circ g)(x) = 4x + 3$, $(-\infty, \infty)$

33. (a) $(f \circ g)(x) = 1 - 3\cos x$, $(-\infty, \infty)$

(b) $(g \circ f)(x) = \cos(1 - 3x)$, $(-\infty, \infty)$

(c) $(f \circ f)(x) = 9x - 2$, $(-\infty, \infty)$

(d) $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x)$, $(-\infty, \infty)$

35. (a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{(x + 2)(x + 1)}$, $\{x \mid x \neq -2, -1\}$

(b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2}$, $\{x \mid x \neq -1, 0\}$

(c) $(f \circ f)(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}$, $\{x \mid x \neq 0\}$

(d) $(g \circ g)(x) = \dfrac{2x + 3}{3x + 5}$, $\{x \mid x \neq -2, -\frac{5}{3}\}$

37. $(f \circ g \circ h)(x) = 2x - 1$

39. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^6 + 4x^3 + 1}$

41. $g(x) = 2x + x^2$, $f(x) = x^4$

43. $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x/(1 + x)$

45. $g(t) = \cos t$, $f(t) = \sqrt{t}$

47. $h(x) = x^2$, $g(x) = 3^x$, $f(x) = 1 - x$

49. $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sec x$, $f(x) = x^4$

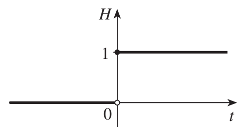
51. (a) 4 (b) 3 (c) 0 (d) No existe; $f(6) = 6$ no está en el dominio de g. (e) 4 (f) -2

53. (a) $r(t) = 60t$ (b) $(A \circ r)(t) = 3600\pi t^2$; el área del círculo como función del tiempo

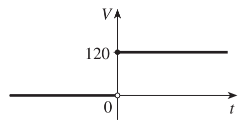
55. (a) $s = \sqrt{d^2 + 36}$ (b) $d = 30t$

(c) $(f \circ g)(t) = \sqrt{900t^2 + 36}$; la distancia entre el faro y el barco como función del tiempo transcurrido desde el mediodía

57. (a)

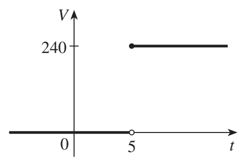


(b)



$V(t) = 120H(t)$

(c)



$V(t) = 240H(t - 5)$

59. Sí; $m_1 m_2$

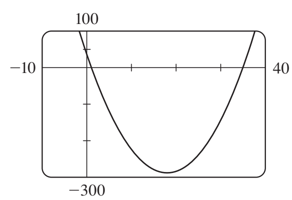
61. (a) $f(x) = x^2 + 6$ (b) $g(x) = x^2 + x - 1$

63. Sí

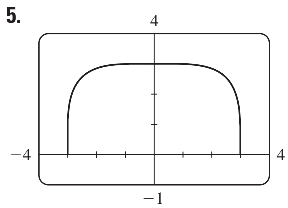
EJERCICIOS 1.4 ■ PÁGINA 51

1. (c)

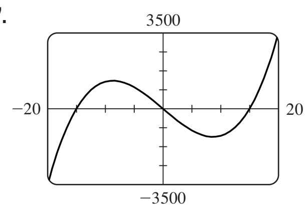
3.



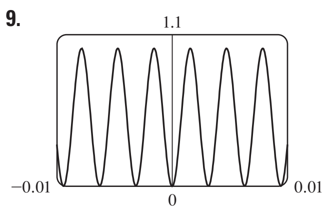
5.



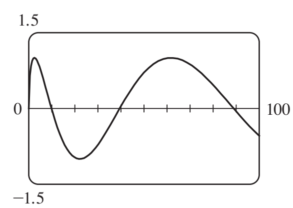
7.



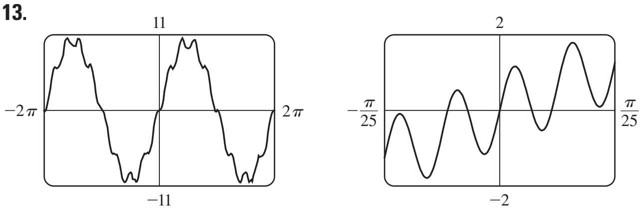
9.



11.

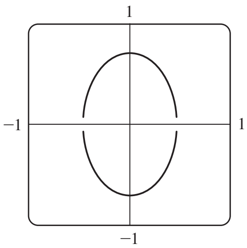


13.

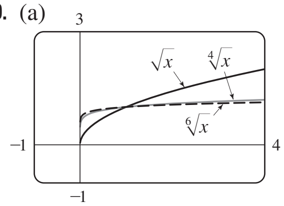


15. (b) Sí; se necesitan dos

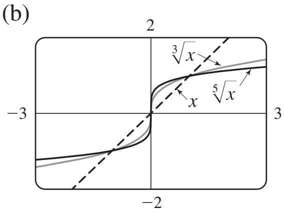
17.



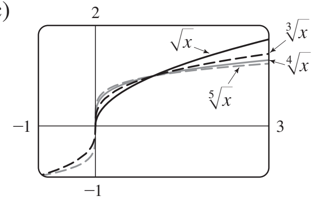
19. No **21.** $-0.72, 1.22$ **23.** 0.65
25. g **27.** $-0.85 < x < 0.85$
29. (a)



(b)

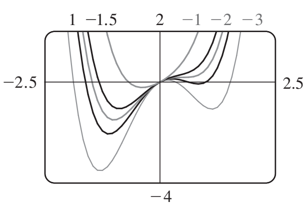


(c)



(d) Las gráficas de raíces pares son semejantes a $\sqrt{x}$, las gráficas de raíces impares son semejantes a $\sqrt[3]{x}$. Cuando n aumenta, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ se hace más aguda cerca de 0 y más plana para $x > 1$.

31.



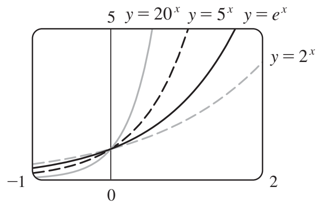
Si $c < -1.5$, la gráfica tiene tres protuberancias: dos puntos mínimos y un punto máximo. Estas protuberancias se hacen más planas cuando c aumenta hasta que en $c = -1.5$ dos de las protuberancias desaparecen y hay sólo un punto mínimo. Esta protuberancia única se mueve entonces a la derecha y se aproxima al origen cuando c aumenta.
33. La protuberancia se hace más grande y se mueve a la derecha.
35. Si $c < 0$, el lazo está a la derecha del origen; si $c > 0$, el lazo está a la izquierda. Cuanto más cerca esté c de 0, más grande es el lazo.

EJERCICIOS 1.5 ■ PÁGINA 59

1. (a) 4 (b) $x^{-4/3}$
3. (a) $16b^{12}$ (b) $648y^7$
5. (a) $f(x) = a^x, a > 0$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $(0, \infty)$

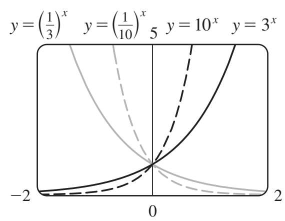
(d) Vea Figuras 4(c),4(b) y 4(a), respectivamente.

7.



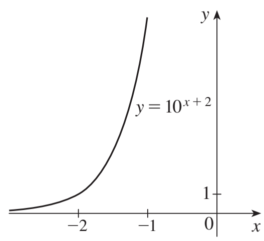
Todas se aproximan a 0 cuando $x \to -\infty$, todas pasan por $(0, 1)$ y todas son crecientes. Cuanto más grande es la base, mayor es la rapidez de aumento.

9.

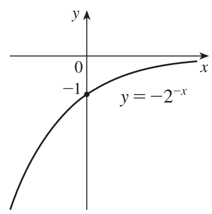


Las funciones con base mayor a 1 son crecientes y las de base menor a 1 son decrecientes. Las últimas son reflexiones de las primeras alrededor del eje y.

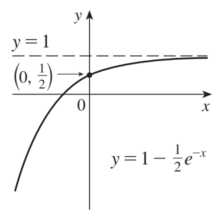
11.



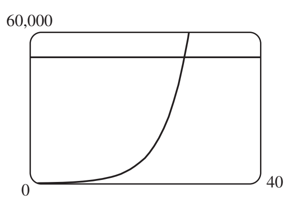
13.



15.



17. (a) $y = e^x - 2$ (b) $y = e^{x-2}$ (c) $y = -e^x$
(d) $y = e^{-x}$ (e) $y = -e^{-x}$
19. (a) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ (b) $(-\infty, \infty)$
21. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **27.** A $x \approx 35.8$
29. (a) 3200 (b) $100 \cdot 2^{t/3}$ (c) 10,159
(d)



$t \approx 26.9$ h

31. (a) 25 mg (b) $200 \cdot 2^{-t/5}$ (c) 10.9 mg (d) 38.2 días
33. $y = ab^t$, donde $a \approx 3.154832569 \times 10^{-12}$ y $b \approx 1.017764706$; 5498 millones; 7417 millones

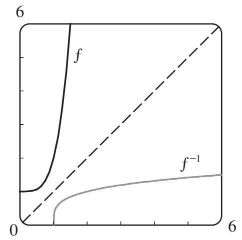
EJERCICIOS 1.6 ■ PÁGINA 69

1. (a) Vea Definición 1.
(b) Debe pasar la Prueba de la Recta Horizontal
3. No **5.** No **7.** Sí **9.** No
11. Sí **13.** No **15.** 2 **17.** 0
19. $F = \frac{9}{5}C + 32$; la temperatura Fahrenheit como función de la temperatura Celsius; $[-273.15, \infty)$

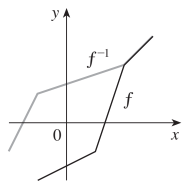
21. $y = \frac{1}{3}(x - 1)^2 - \frac{2}{3},\ x \geqslant 1$

23. $y = \frac{1}{2}(1 + \ln x)$ **25.** $y = e^x - 3$

27. $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x - 1}$



29.



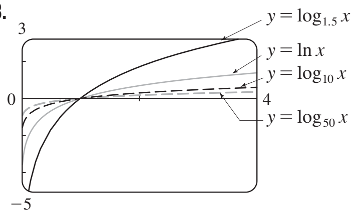
31. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1$; f^{-1} y f son la misma función. (b) Cuarto de círculo en el primer cuadrante

33. (a) Está definida como la inversa de la función exponencial con base a, esto es, $\log_a x = y \iff a^y = x$.
(b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R}$ (d) Vea Figura 11.

35. (a) 3 (b) -3 **37.** (a) 3 (b) -2 **39.** $\ln 1215$

41. $\ln \dfrac{(1 + x^2)\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}$

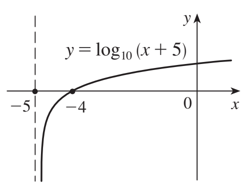
43.



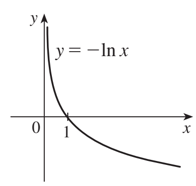
Todas las gráficas se aproximan al $-\infty$ cuando $x \to 0^+$, todas pasan por $(1, 0)$, y todas son crecientes. Cuanto mayor es la base, más lenta es la rapidez de aumento.

45. Alrededor de 1,084,588 millas

47. (a)



(b)



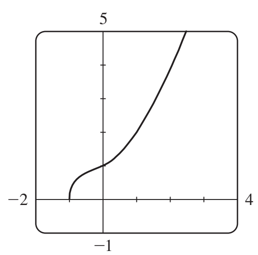
49. (a) $\frac{1}{4}(7 - \ln 6)$ (b) $\frac{1}{3}(e^2 + 10)$

51. (a) $5 + \log_2 3$ o $5 + (\ln 3)/\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4e}\right)$

53. (a) $x < \ln 10$ (b) $x > 1/e$

55. (a) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\ln 3\right]$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(3 - x^2)$, $\left[0, \sqrt{3}\right)$

57.



La gráfica pasa la Prueba de la recta horizontal.

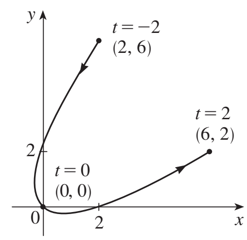
$f^{-1}(x) = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{D - 27x^2 + 20} - \sqrt[3]{D + 27x^2 - 20} + \sqrt[3]{2}\right)$, donde $D = 3\sqrt{3}\sqrt{27x^4 - 40x^2 + 16}$; dos de las expresiones son complejas.

59. (a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; el tiempo transcurrido cuando hay n bacterias (b) Después de unas 26.9 horas

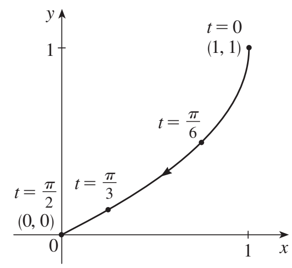
61. (a) $y = \ln x + 3$ (b) $y = \ln(x + 3)$ (c) $y = -\ln x$ (d) $y = \ln(-x)$ (e) $y = e^x$ (f) $y = e^{-x}$ (g) $y = -e^x$ (h) $y = e^x - 3$

EJERCICIOS 1.7 ■ PÁGINA 76

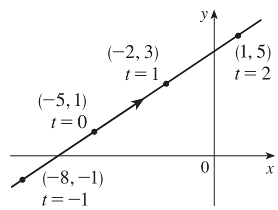
1.



3.

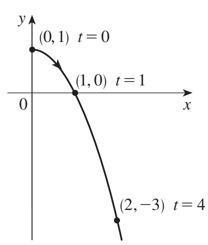


5. (a)



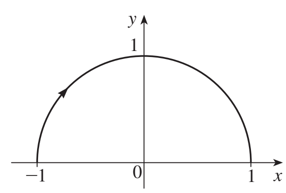
(b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

7. (a)

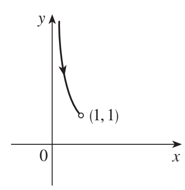


(b) $y = 1 - x^2,\ x \geqslant 0$

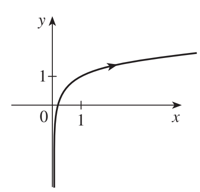
9. (a) $x^2 + y^2 = 1,\ y \geqslant 0$ (b)



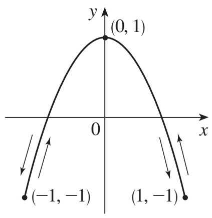
11. (a) $y = 1/x,\ y > 1$ (b)



13. (a) $y = \frac{1}{2}\ln x + 1$ (b)



15. (a) $y = 1 - 2x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (b)

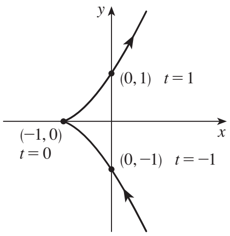


17. Se mueve en sentido contrario a las agujas de un reloj a lo largo de una circunferencia

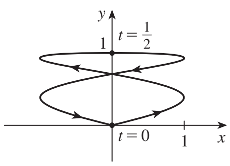
19. Se mueve tres veces en el sentido de las agujas de un reloj alrededor de la elipse $(x^2/25) + (y^2/4) = 1$, empezando y terminando en $(0, -2)$

21. Está contenido en el rectángulo descrito por $1 \leqslant x \leqslant 4$ y $2 \leqslant y \leqslant 3$.

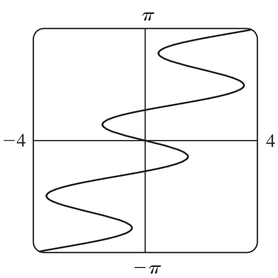
23.



25.



27.



29. (b) $x = -2 + 5t$, $y = 7 - 8t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

31. (a) $x = 2\cos t$, $y = 1 - 2\,\mathrm{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

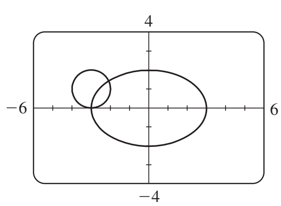
(b) $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 6\pi$

(c) $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,t$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

35. La curva $y = x^{2/3}$ es generada en (a). En (b), sólo la parte con $x \geqslant 0$ es generada y en (c) obtenemos sólo la parte con $x > 0$.

39. $x = a\cos\theta$, $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$; $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, elipse

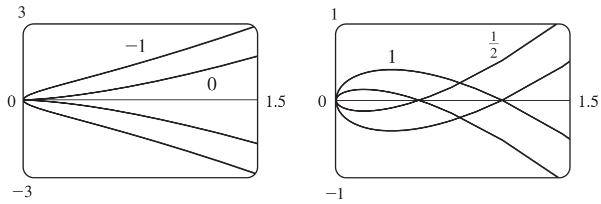
41. (a) Dos puntos de intersección



(b) Un punto de colisión en $(-3, 0)$ cuando $t = 3\pi/2$

(c) Hay todavía dos puntos de intersección, pero ningún punto de colisión.

43. Para $c = 0$, hay una cúspide; para $c > 0$, hay un lazo cuyo tamaño aumenta cuando c aumenta.



45. Cuando n aumenta, el número de oscilaciones aumenta; a y b determinan el ancho y altura.

REPASO DEL CAPÍTULO 1 ■ PÁGINA 80

Preguntas de verdadero-falso

1 Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso
9. Verdadero **11.** Falso

Ejercicios

1. (a) 2.7 (b) 2.3, 5.6 (c) $[-6, 6]$ (d) $[-4, 4]$
(e) $[-4, 4]$ (f) No; no pasa la Prueba de la Recta Horizontal.
(g) Impar; su gráfica es simétrica alrededor del origen.

3. $2a + h - 2$ **5.** $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

7. $(-6, \infty)$, $\mathbb{R}$

9. (a) Desplace la gráfica 8 unidades hacia arriba.

(b) Desplace la gráfica 8 unidades a la izquierda.

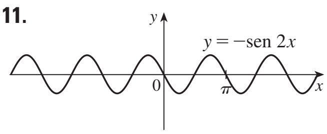
(c) Desplace la gráfica verticalmente por un factor de 2, luego desplácela 1 unidad hacia arriba.

(d) Desplace la gráfica 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

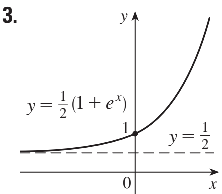
(e) Refleje la gráfica alrededor del eje x.

(f) Refleje la gráfica alrededor de la recta $y = x$ (suponiendo que f es biunívoca).

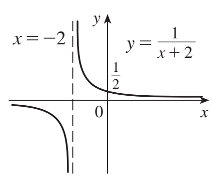
11.



13.



15.



17. (a) Ninguno (b) Impar (c) Par (d) Ninguno

19. (a) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

(b) $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $(0, \infty)$

(c) $(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$

(d) $(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $(-\infty, \infty)$

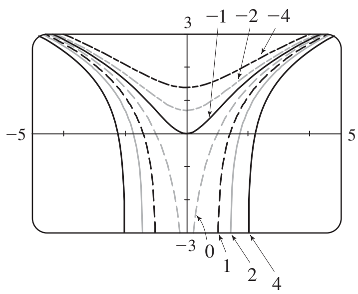
21. $y = 0.2493x - 423.4818$; alrededor de 77.6 años

23. 1 **25.** (a) 9 (b) 2

27. (a) $\frac{1}{16}$ g (b) $m(t) = 2^{-t/4}$

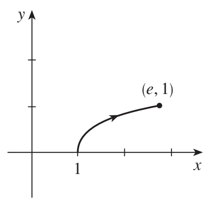
(c) $t(m) = -4\log_2 m$; el tiempo transcurrido cuando hay m gramos de ^{100}Pd (d) Alrededor de 26.6 días

29.



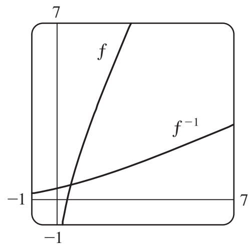
Para $c < 0$, f está definida en todas partes. Cuando c aumenta, la caída en $x = 0$ se hace más aguda. Para $c \geqslant 0$, la gráfica tiene asíntotas en $x = \pm\sqrt{c}$.

31. (a)



(b) $y = \sqrt{\ln x}$

33.

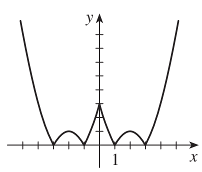


PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 88

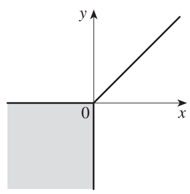
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, donde a es la longitud de la altitud y h es la longitud de la hipotenusa

3. $-\frac{7}{3}, 9$

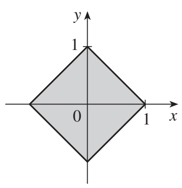
5.



7.



9.



11. 5 **13.** $x \in [-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3]$

15. 40 mi/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS 2.1 ■ PÁGINA 94

1. (a) $-44.4, -38.8, -27.8, -22.2, -16.\overline{6}$
(b) -33.3 (c) $-33\frac{1}{3}$

3. (a) (i) 0.333333 (ii) 0.263158 (iii) 0.251256
(iv) 0.250125 (v) 0.2 (vi) 0.238095 (vii) 0.248756
(viii) 0.249875 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

5. (a) (i) -32 ft/s (ii) -25.6 ft/s (iii) -24.8 ft/s
(iv) -24.16 ft/s (b) -24 ft/s

7. (a) (i) 4.65 m/s (ii) 5.6 m/s (iii) 7.55 m/s
(iv) 7 m/s (b) 6.3 m/s

9. (a) 0, 1.7321, -1.0847, -2.7433, 4.3301, -2.8173, 0, -2.1651, -2.6061, -5, 3.4202; no (c) -31.4

EJERCICIOS 2.2 ■ PÁGINA 102

1. Sí

3. (a) 2 (b) 3 (c) No existe (d) 4
(e) No existe

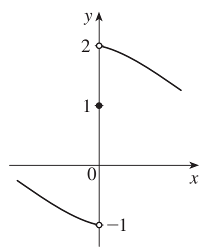
5. (a) -1 (b) -2 (c) No existe (d) 2 (e) 0
(f) No existe (g) 1 (h) 3

7. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe para toda a excepto $a = -1$.

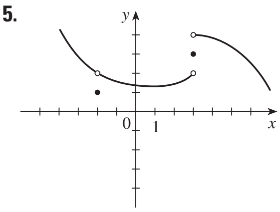
9. (a) 1 (b) 0 (c) No existe

11. (a) -2 (b) 2 (c) No existe

13.

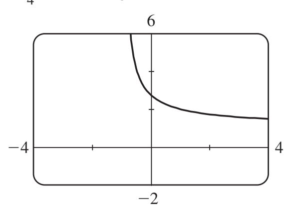


15.



17. $\frac{2}{3}$ **19.** 5 **21.** $\frac{1}{4}$ **23.** $\frac{3}{5}$ **25.** (a) -1.5

27. (a) 2.71828 (b)



29. (a) 0.998000, 0.638259, 0.358484, 0.158680, 0.038851, 0.008928, 0.001465; 0
(b) 0.000572, -0.000614, -0.000907, -0.000978, -0.000993, -0.001000; -0.001

31. No más de 0.021; no más de 0.011

EJERCICIOS 2.3 ■ PÁGINA 111

1. (a) -6 (b) -8 (c) 2 (d) -6
(e) No existe (f) 0

3. 59 **5.** 390 **7.** $\frac{3}{2}$ **9.** 4 **11.** No existe

13. $\frac{6}{5}$ **15.** 8 **17.** $\frac{1}{12}$

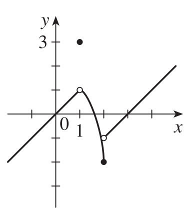
19. $-\frac{1}{16}$ **21.** $\frac{1}{128}$ **23.** $-\frac{1}{2}$ **25.** (a), (b) $\frac{2}{3}$

29. 7 **33.** 6

35. No existe

37. (a) (i) 1 (ii) 1 (iii) 3 (iv) -2 (v) -1
(vi) No existe

(b)



39. (a) (i) -2 (ii) No existe (iii) -3
(b) (i) $n - 1$ (ii) n (c) a no es un entero.
45. 8 **49.** 15; -1

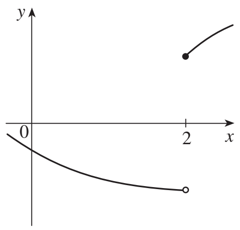
EJERCICIOS 2.4 ■ PÁGINA 121

1. $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$

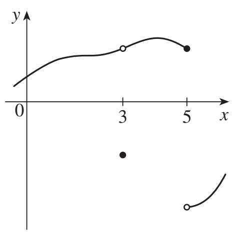
3. (a) $f(-4)$ no está definida y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ [para $a = -2, 2,$ y 4] no existe

(b) -4, ninguno; -2, izquierda; 2, derecha; 4, derecha

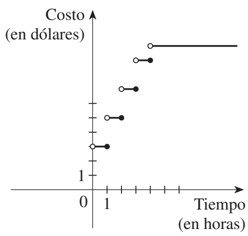
5.



7.



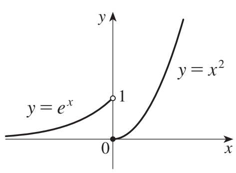
9. (a)



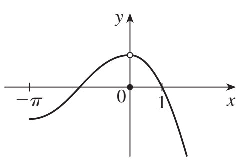
(b) Discontinua en $t = 1, 2, 3, 4$

11. 6

15. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

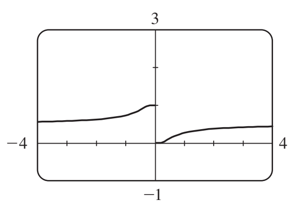


17. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$



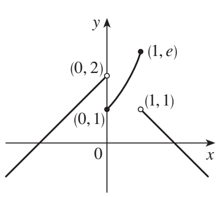
19. $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ **21.** $(-\infty, \infty)$ **23.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

25. $x = 0$



27. $\frac{7}{3}$ **29.** 1

33. 0, derecha; 1, izquierda



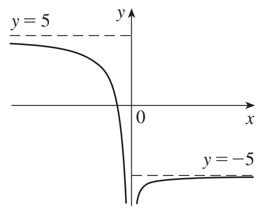
35. $\frac{2}{3}$ **37.** (a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ (b) $g(x) = x^2 + x$
45. (b) (0.86, 0.87) **47.** (b) 70.347
51. Sí

EJERCICIOS 2.5 ■ PÁGINA 132

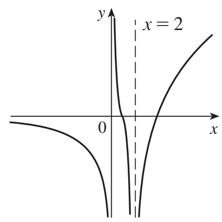
1. (a) Cuando x se aproxima a 2, $f(x)$ se hace grande.
(b) Cuando x se aproxima a 1 desde la derecha, $f(x)$ se hace negativa grande.
(c) Cuando x se hace grande, $f(x)$ se aproxima a 5. (d) Cuando x se hace negativa grande, $f(x)$ se aproxima a 3.

3. (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) 1 (e) 2
(f) $x = -1, x = 2, y = 1, y = 2$

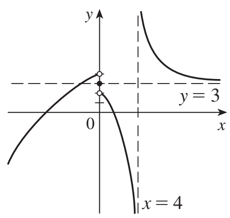
5.



7.



9.



11. 0 **13.** $x \approx -1.62, x \approx 0.62, x = 1; y = 1$
15. ∞ **17.** 0 **19.** $-\infty$ **21.** $-\infty$ **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** 2
27. $\frac{1}{6}$ **29.** 0 **31.** No existe **33.** 0 **35.** $-\infty$
37. ∞ **39.** $y = 2; x = -2, x = 1$ **41.** $x = 5$

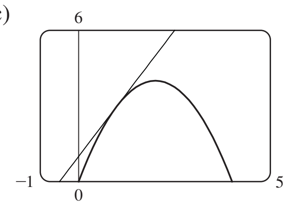
43. (a), (b) $-\frac{1}{2}$ **45.** $y = 3$ **47.** $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2(x - 3)}$

49. (a) $\frac{5}{4}$ (b) 5 **51.** (a) 0 (b) $\pm\infty$ **53.** 5
55. (b) Se aproxima a la concentración de la salmuera que se bombea hacia el tanque.
57. (b) $x > 23.03$ (c) Sí, $x > 10 \ln 10$

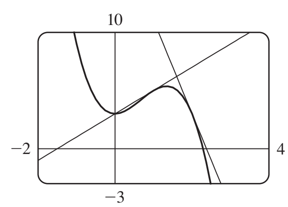
EJERCICIOS 2.6 ■ PÁGINA 142

1. (a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

3. (a) 2 (b) $y = 2x + 1$ (c)

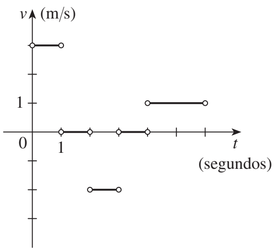


5. $y = -8x + 12$ **7.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
9. (a) $8a - 6a^2$ (b) $y = 2x + 3, y = -8x + 19$
(c)



11. (a) Derecha: $0 < t < 1$ y $4 < t < 6$; izquierda: $2 < t < 3$; cuando no se mueve: $1 < t < 2$ y $3 < t < 4$

(b)



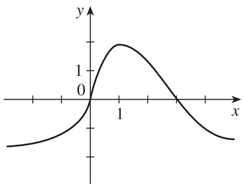
13. -24 ft/s

15. $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s

17. $g'(0)$, 0, $g'(4)$, $g'(2)$, $g'(-2)$

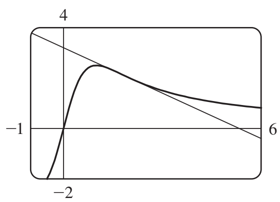
19. $f(2) = 3$; $f'(2) = 4$

21.



23. $y = 3x - 1$

25. (a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$ (b)



27. $6a - 4$ **29.** $\dfrac{5}{(a+3)^2}$ **31.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-2a}}$

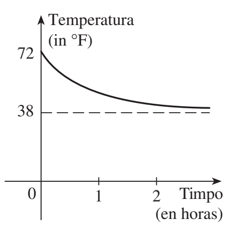
33. $f(x) = x^{10}$, $a = 1$ o $f(x) = (1+x)^{10}$, $a = 0$

35. $f(x) = 2^x$, $a = 5$

37. $f(x) = \cos x$, $a = \pi$ o $f(x) = \cos(\pi + x)$, $a = 0$

39. 1 m/s; 1 m/s

41.



Mayor (en magnitud)

43. (a) (i) 23 millones/año (ii) 20.5 millones/año (iii) 16 millones/año
(b) 18.25 millones/año (c) 17 millones/año

45. (a) (i) \$20.25/unidad (ii) \$20.05/unidad (b) \$20/unidad

47. (a) La tasa a la que está cambiando el costo por onza de oro producido; dólares por onza
(b) Cuando se produce la 800ava onza de oro, el costo de producción es \$17/onza.
(c) Disminuye a corto plazo; aumenta a largo plazo

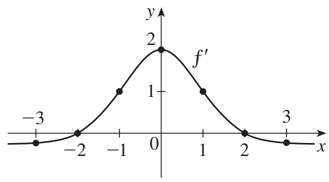
49. 5°F/h

51. (a) La rapidez a la que cambia la solubilidad del oxígeno con respecto a la temperatura del agua; (mg/L)/°C
(b) $S'(16) \approx -0.25$; cuando la temperatura aumenta más de 16°C, la solubilidad del oxígeno es decreciente a razón de 0.25 (mg/L)/°C.

53. No existe

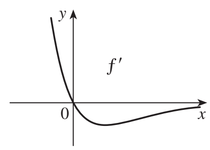
EJERCICIOS 2.7 ■ PÁGINA 155

1. (a) -0.2 (b) 0 (c) 1 (d) 2
(e) 1 (f) 0 (g) -0.2

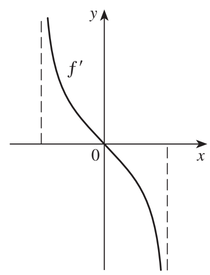


3. (a) II (b) IV (c) I (d) III

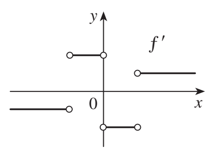
5.



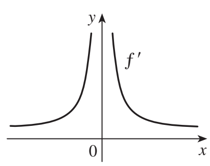
7.



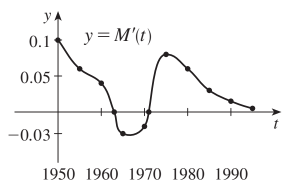
9.



11.

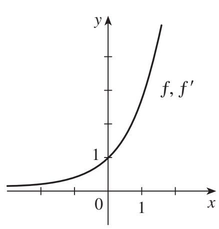


13.



1963 a 1971

15.



$f'(x) = e^x$

17. (a) 0, 1, 2, 4 (b) -1, -2, -4 (c) $f'(x) = 2x$

19. $f'(x) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **21.** $f'(t) = 5 - 18t$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

23. $f'(x) = 2x - 6x^2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

25. $g'(x) = 1/\sqrt{1+2x}$, $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

27. $G'(t) = \dfrac{4}{(t+1)^2}$, $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

29. $f'(x) = 4x^3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **31.** (a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

33. (a) La rapidez a la que está cambiando la tasa de desempleo, en porcentaje de desempleados por año.

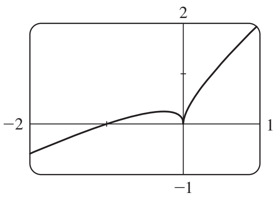
(b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1998	-0.30	2003	-0.15
1999	-0.25	2004	-0.45
2000	0.25	2005	-0.45
2001	0.90	2006	-0.25
2002	0.65	2007	0.00

35. -4 (esquina); 0 (discontinuidad)

37. -1 (tangente vertical); 4 (esquina)

39.

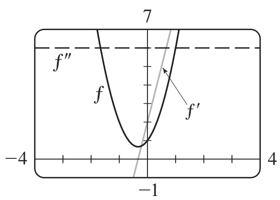


Derivable en -1; no derivable en 0

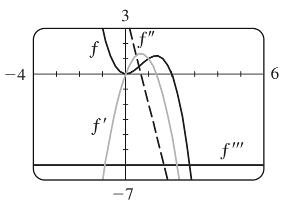
41. $a = f$, $b = f'$, $c = f''$

43. $a =$ aceleración, $b =$ velocidad, $c =$ posición

45. $6x + 2$; 6



47.

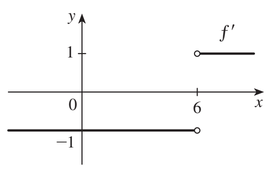


$f'(x) = 4x - 3x^2$,
$f''(x) = 4 - 6x$,
$f'''(x) = -6$,
$f^{(4)}(x) = 0$

49. (a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

51. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

o $f'(x) = \dfrac{x - 6}{|x - 6|}$

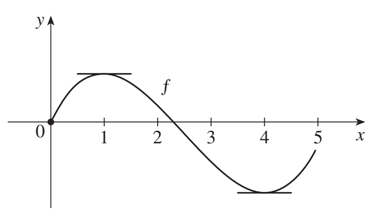


55. 63°

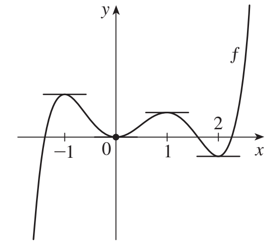
EJERCICIOS 2.8 ■ PÁGINA 162

Abreviaturas: cre, creciente; dec, decreciente; loc, local; max, máximo; min, mínimo

1. (a) Cre en (0, 1), (4, 5); dec en (1, 4)
(b) max loc en $x = 1$; min loc en $x = 4$
(c)



3. (a) Cre en $(-2, -1)$, $(0, 1)$; dec en $(-1, 0)$,$(1, 2)$
(b) max loc en $x = -1$, 1; min loc en x, 0, 2
(c)



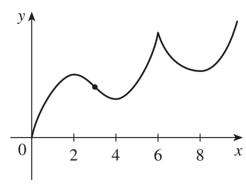
5. Cre en (2, 5); dec en $(-\infty, 2)$ y $(5, \infty)$ **7.** $f''(1)$

9. Si $D(t)$ es el tamaño del déficit como función del tiempo, entonces en el tiempo del discurso $D'(t) > 0$, pero $D''(t) < 0$.

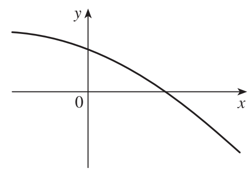
11. (a) La rapidez empieza pequeña, crece rápidamente, se nivela, a continuación disminuye y se hace negativa.
(b) (1932, 2.5) y (1937, 4.3); la rapidez de cambio de la densidad de población empieza a disminuir en 1932 y empieza a aumentar en 1937.

13. $K(3) - K(2)$; CD

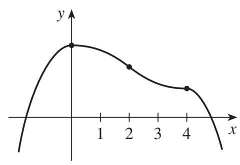
15. (a) Cre en (0, 2), (4, 6), $(8, \infty)$; dec en (2, 4), (6, 8)
(b) max loc en $x = 2{,}6$; min loc en $x = 4$, 8
(c) CU en (3, 6), $(6, \infty)$; CD en (0, 3)
(d) 3
(e) Vea gráfica a la derecha.



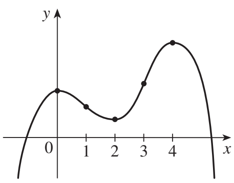
17.



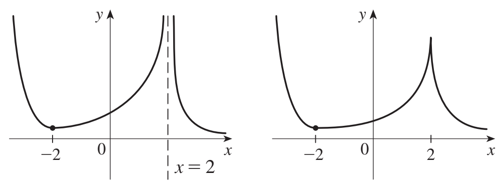
19.



21.



23.

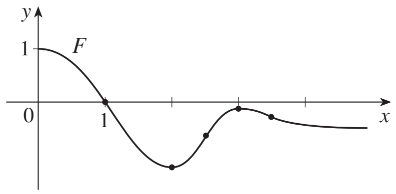


25. (a) Cre en $(0, \infty)$; dec en $(-\infty, 0)$
(b) Min en $x = 0$

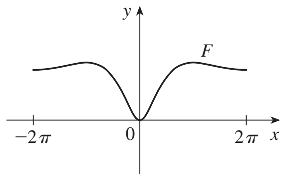
27. (a) Cre en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$; dec en $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
(b) CU en $(0, \infty)$; CD en $(-\infty, 0)$
(c) IP en (0, 0)

29. b

31.



33.



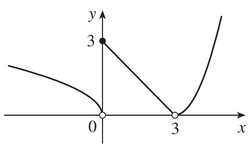
REPASO DEL CAPÍTULO 2 ■ PÁGINA 165

Preguntas de verdadero-falso

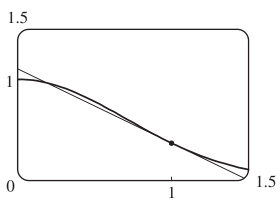
1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Verdadero
11. Falso **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Falso

Ejercicios

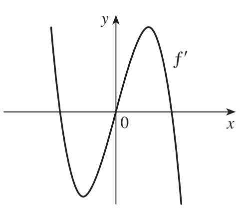
1. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) No existe (iv) 2
(v) ∞ (vi) $-\infty$ (vii) 4 (viii) -1
(b) $y = 4$, $y = -1$ (c) $x = 0$, $x = 2$ (d) $-3, 0, 2, 4$
3. 1 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** 3 **9.** ∞ **11.** $\frac{4}{7}$ **13.** $-\infty$ **15.** $\frac{1}{2}$
17. 2 **19.** $x = 0$, $y = 0$ **21.** 1
23. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) No existe (iv) 0 (v) 0 (vi) 0
(b) En 0 y 3 (c)



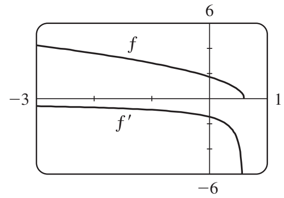
27. (a) (i) 3 m/s (ii) 2.75 m/s (iii) 2.625 m/s
(iv) 2.525 m/s (b) 2.5 m/s
29. $f''(5), 0, f'(5), f'(2), 1, f'(3)$
31. (a) -0.736 (b) $y \approx -0.736x + 1.104$
(c)



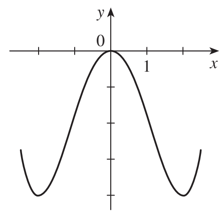
33. (a) La rapidez a la que cambia el costo con respecto a la tasa de interés; dólares/(porcentaje por año)
(b) Cuando la tasa de interés aumenta a más de 10%, el costo es creciente a razón de \$1200/(porcentaje por año).
(c) Siempre positiva
35.



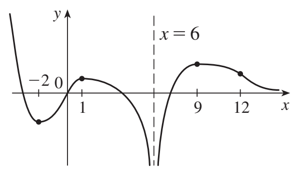
37. (a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3 - 5x)^{-1/2}$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right], \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$
(c)



39. -4 (discontinuidad), -1 (esquina), 2 (discontinuidad), 5(tangente vertical)
41. La rapidez a la que el valor total de dinero de Estados Unidos en circulación está cambiando en miles de millones de dólares por año; \$22.2 mil millones/año
43. (a) Cre en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$; dec en $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$
(b) Max en 0; min en -2 y 2
(c) CU en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; CD en $(-1, 1)$
(d)



45.



47. (a) Unos 35 ft/s (b) Aprox. (8, 180)
(c) El punto en el que la velocidad del auto se maximiza

ENFOQUE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 170

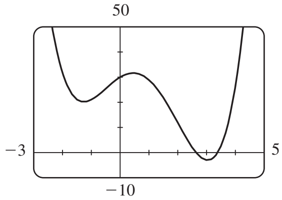
1. $\frac{2}{3}$ **3.** -4 **5.** 1 **7.** $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
9. (b) Sí (c) Sí; no **11.** $\left(\pm\sqrt{3}/2, \frac{1}{4}\right)$
13. (a) 0 (b) 1 (c) $f'(x) = x^2 + 1$ **15.** $\frac{3}{4}$

CAPÍTULO 3

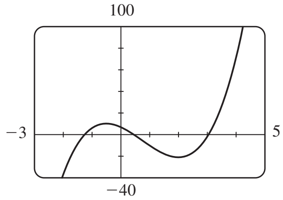
EJERCICIOS 3.1 ■ PÁGINA 181

1. (a) Vea Definición del número e (página 180).
(b) 0.99, 1.03; $2.7 < e < 2.8$
3. $f'(x) = 0$ **5.** $f'(t) = -\frac{2}{3}$ **7.** $f'(x) = 3x^2 - 4$
9. $f'(t) = t^3$ **11.** $A'(s) = 60/s^6$ **13.** $g'(t) = -\frac{3}{2}t^{-7/4}$
15. $y' = 3e^x - \frac{4}{3}x^{-4/3}$ **17.** $F'(x) = \frac{5}{32}x^4$
19. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$
21. $y' = 0$ **23.** $u' = \frac{1}{5}t^{-4/5} + 10t^{3/2}$
25. $z' = -10A/y^{11} + Be^y$ **27.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
29. Tangente: $y = 2x + 2$; normal: $y = -\frac{1}{2}x + 2$
31. $y = 3x - 1$ **33.** $e^x - 5$ **35.** $45x^{14} - 15x^2$ **37.** 3

39. (a)



(c) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$



41. $f'(x) = 100x^9 + 25x^4 - 1$; $f''(x) = 900x^8 + 100x^3$

43. $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}$, $f''(x) = \frac{15}{16}x^{-5/4}$

45. (a) $v(t) = 3t^2 - 3$, $a(t) = 6t$ (b) 12 m/s^2

(c) $a(1) = 6 \text{ m/s}^2$

47. $(-\infty, \ln 5)$ **49.** $(-2, 21)$, $(1, -6)$

53. $y = 12x - 15$, $y = 12x + 17$

55. $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ **57.** $(\pm 2, 4)$ **61.** $P(x) = x^2 - x + 3$

63. (a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, C cualquier número real; número infinito

(b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, $\frac{1}{5}x^5 + C$, C cualquier número real

(c) $F(x) = x^{n+1}/(n + 1)$ 1 C, C cualquier número real

65. $y = 2x^2 - x$ **67.** $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$

69. $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$ **71.** 1000 **73.** 3; 1

EJERCICIOS 3.2 ■ PÁGINA 188

1. $1 - 2x + 6x^2 - 8x^3$ **3.** $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2 + 2x + 2)$

5. $y' = (x - 2)e^x/x^3$ **7.** $g'(x) = 5/(2x + 1)^2$

9. $F'(y) = 5 + 14/y^2 + 9/y^4$

11. $y' = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$ **13.** $y' = \dfrac{2t(-t^4 - 4t^2 + 7)}{(t^4 - 3t^2 + 1)^2}$

15. $y' = (r^2 - 2)e^r$ **17.** $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$

19. $f'(t) = \dfrac{4 + t^{1/2}}{(2 + \sqrt{t})^2}$ **21.** $f'(x) = -ACe^x/(B + Ce^x)^2$

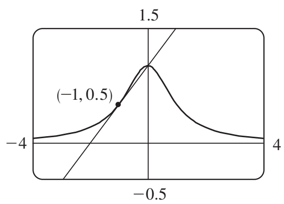
23. $f'(x) = 2cx/(x^2 + c)^2$

25. $(x^4 + 4x^3)e^x$; $(x^4 + 8x^3 + 12x^2)e^x$

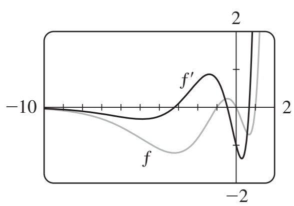
27. $\dfrac{2x^2 + 2x}{(1 + 2x)^2}$; $\dfrac{2}{(1 + 2x)^3}$

29. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ **31.** $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$

33. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)

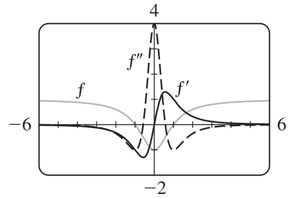


35. (a) $e^x(x^3 + 3x^2 - x - 1)$ (b)



37. (a) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$; $f''(x) = \dfrac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}$

(b)



39. $\frac{1}{4}$ **41.** (a) -16 (b) $-\frac{20}{9}$ (c) 20

43. 7 **45.** (a) 0 (b) $-\frac{2}{3}$

47. (a) $y' = xg'(x) + g(x)$

(b) $y' = \dfrac{g(x) - xg'(x)}{[g(x)]^2}$ (c) $y' = \dfrac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$

49. \$1.627 mil millones/año **51.** $(-3, \infty)$

53. Dos, $\left(-2 \pm \sqrt{3}, \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{3}\right)\right)$ **55.** 1 **57.** (c) $3e^{3x}$

59. $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$,
$f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$, $f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12)e^x$,
$f^{(5)}(x) = (x^2 + 10x + 20)e^x$; $f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n - 1)]e^x$

EJERCICIOS 3.3 ■ PÁGINA 195

1. $f'(x) = 6x + 2 \operatorname{sen} x$ **3.** $f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\csc^2 x$

5. $y' = \sec\theta\,(\sec^2\theta + \tan^2\theta)$

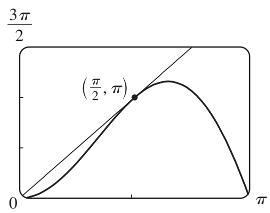
7. $y' = -c \operatorname{sen} t + t(t\cos t + 2\operatorname{sen} t)$

9. $y' = \dfrac{2 - \tan x + x\sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$ **11.** $f'(\theta) = \dfrac{\sec\theta\tan\theta}{(1 + \sec\theta)^2}$

13. $f'(x) = e^x \csc x\,(-x\cot x + x + 1)$

19. $y = 2\sqrt{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi + 2$ **21.** $y = x + 1$

23. (a) $y = 2x$ (b)



25. (a) $\sec x\tan x - 1$

27. $\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$; $2\cos\theta - \theta\operatorname{sen}\theta$

29. (a) $f'(x) = (1 + \tan x)/\sec x$ (b) $f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

31. $(2n + 1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, n un entero **33.** $(\pi/3, 5\pi/3)$

35. (a) $v(t) = 8\cos t$ $a(t) = -8\operatorname{sen} t$

(b) $4\sqrt{3}$, -4, $-4\sqrt{3}$; a la izquierda

37. 5 ft/rad **39.** $-\cos x$

41. $A = -\frac{3}{10}$, $B = -\frac{1}{10}$

43. 3 **45.** $\frac{1}{2}$

47. (a) $\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (b) $\sec x\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

(c) $\cos x - \operatorname{sen} x = \dfrac{\cot x - 1}{\csc x}$

49. 1

EJERCICIOS 3.4 ■ PÁGINA 205

1. $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(1+4x)^2}}$ **3.** $\pi \sec^2 \pi x$ **5.** $e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$

7. $F'(x) = 10x(x^4 + 3x^2 - 2)^4(2x^2 + 3)$

9. $F'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ **11.** $f'(z) = -\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$

13. $y' = -3x^2 \operatorname{sen}(a^3 + x^3)$ **15.** $h'(t) = 3t^2 - 3^t \ln 3$

17. $y' = e^{-kx}(-kx + 1)$

19. $y' = 8(2x-5)^3(8x^2-5)^{-4}(-4x^2 + 30x - 5)$

21. $y' = (\cos x - x \operatorname{sen} x)e^{x \cos x}$ **23.** $y' = \dfrac{-12x(x^2+1)^2}{(x^2-1)^4}$

25. $y' = 4\sec^2 x \tan x$ **27.** $y' = (r^2+1)^{-3/2}$

29. $y' = 2\cos(\tan 2x)\sec^2(2x)$ **31.** $y' = 2^{\operatorname{sen} \pi x}(\pi \ln 2)\cos \pi x$

33. $y' = -2\cos\theta \cot(\operatorname{sen}\theta)\csc^2(\operatorname{sen}\theta)$

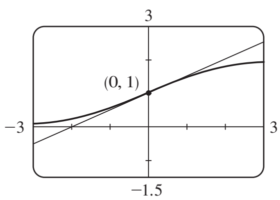
35. $y' = \dfrac{-\pi\cos(\tan \pi x)\sec^2(\pi x)\operatorname{sen}\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}}{2\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}}$

37. $y' = -2x \operatorname{sen}(x^2)$; $y'' = -4x^2\cos(x^2) - 2\operatorname{sen}(x^2)$

39. $e^{\alpha x}(\beta\cos\beta x + \alpha \operatorname{sen}\beta x)$;
$e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\operatorname{sen}\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x]$

41. $y = 20x + 1$ **43.** $y = -x + \pi$

45. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)



47. (a) $f'(x) = \dfrac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$

49. $((\pi/2) + 2n\pi, 3)$, $((3\pi/2) + 2n\pi, -1)$, n un entero

51. 24 **53.** (a) 30 (b) 36

55. (a) $\frac{3}{4}$ (b) No existe (c) -2 **57.** -17.4

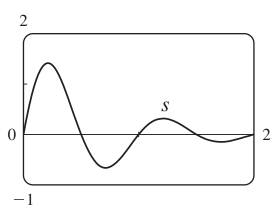
59. (a) $F'(x) = e^x f'(e^x)$ (b) $G'(x) = e^{f(x)}f'(x)$

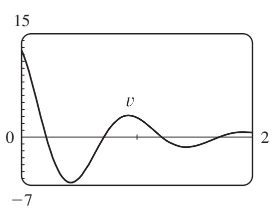
61. 120 **63.** 96

67. $-2^{50}\cos 2x$ **69.** $v(t) = \frac{5}{2}\pi\cos(10\pi t)$ cm/s

71. (a) $\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{7\pi}{54}\cos\dfrac{2\pi t}{5.4}$ (b) 0.16

73. $v(t) = 2e^{-1.5t}(2\pi\cos 2\pi t - 1.5\operatorname{sen} 2\pi t)$





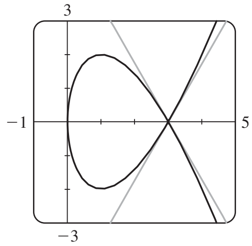
75. dv/dt es la rapidez de cambio de velocidad con respecto al tiempo; dv/ds es la rapidez de cambio de velocidad con respecto al desplazamiento

77. (a) $Q = ab^t$, donde $a \approx 100.012437$, $b \approx 0.0000451459$
(b) -670.63 μA

79. $y = -x$ **81.** $y = -(2/e)x + 3$

83. Horizontal en $(6, \pm 16)$, vertical en $(10, 0)$

85. (a) $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$
(b) Horizontal en $(1, \pm 2)$; vertical en $(0, 0)$
(c)



87. (b) La forma factorizada **89.** (b) $-n\cos^{n-1}x \operatorname{sen}[(n+1)x]$

EJERCICIOS 3.5 ■ PÁGINA 214

1. (a) $y' = -(y + 2 + 6x)/x$
(b) $y = (4/x) - 2 - 3x$, $y' = -(4/x^2) - 3$

3. $y' = -x^2/y^2$ **5.** $y' = \dfrac{2x+y}{2y-x}$

7. $y' = \dfrac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 + 3y^2 - 6xy}$ **9.** $y' = \dfrac{-2xy^2 - \operatorname{sen} y}{2x^2y + x\cos y}$

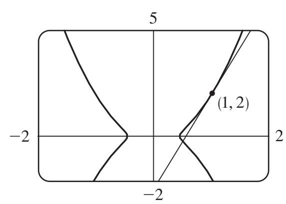
11. $y' = \tan x \tan y$ **13.** $y' = \dfrac{y(y - e^{x/y})}{y^2 - xe^{x/y}}$

15. $y' = \dfrac{e^y \operatorname{sen} x + y\cos(xy)}{e^y\cos x - x\cos(xy)}$ **17.** $-\frac{16}{13}$

19. $x' = \dfrac{-2x^4y + x^3 - 6xy^2}{4x^3y^2 - 3x^2y + 2y^3}$ **21.** $y = \frac{1}{2}x$

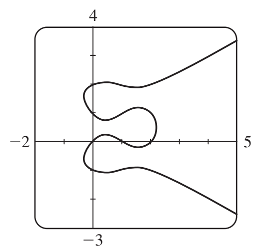
23. $y = -x + 2$ **25.** $y = x + \frac{1}{2}$ **27.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$

29. (a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ (b)



31. $-81/y^3$ **33.** $-2x/y^5$ **35.** $1/e^2$

37. (a)

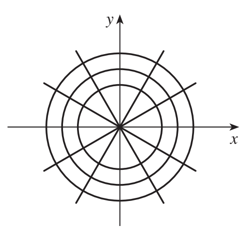


Ocho; $x \approx 0.42$, 1.58

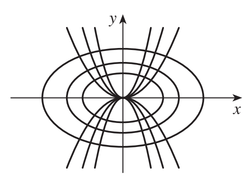
(b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 2$ (c) $1 \mp \frac{1}{3}\sqrt{3}$

39. $\left(\pm\frac{5}{4}\sqrt{3}, \pm\frac{5}{4}\right)$

41.



43.



47. (a) $\dfrac{V^3(nb - V)}{PV^3 - n^2aV + 2n^3ab}$ (b) -4.04 L/atm

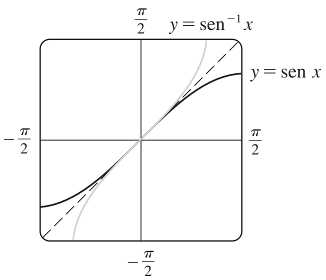
51. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ **53.** $(-1, -1), (1, 1)$ **55.** (a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$

EJERCICIOS 3.6 ■ PÁGINA 220

1. (a) $\pi/3$ (b) π **3.** (a) $\pi/4$ (b) $\pi/4$

5. $2/\sqrt{5}$ **7.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ **11.** $x/\sqrt{1 + x^2}$

13.



La segunda gráfica es la reflexión de la primera gráfica alrededor de la recta $y = x$

17. $y' = \dfrac{2\tan^{-1}x}{1 + x^2}$ **19.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}$

21. $G'(x) = -1 - \dfrac{x \operatorname{arccos} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

23. $y' = -\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}$ **25.** $y' = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos^2\theta}$

27. $y' = \operatorname{sen}^{-1} x$ **29.** $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}$

31. $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - (3 - 2x)^2}}$; $[1, 2], (1, 2)$ **33.** $\pi/6$

35. $1 - \dfrac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$ **37.** $-\pi/2$ **39.** $\pi/2$ **41.** (b) $\frac{3}{2}$

EJERCICIOS 3.7 ■ PÁGINA 226

1. La fórmula de derivación es más sencilla.

3. $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ **5.** $f'(x) = \dfrac{3}{(3x - 1)\ln 2}$

7. $f'(x) = \dfrac{1}{5x\sqrt[5]{(\ln x)^4}}$ **9.** $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln(5x)$

11. $F'(t) = \dfrac{6}{2t + 1} - \dfrac{12}{3t - 1}$ **13.** $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$

15. $y' = \dfrac{10x + 1}{5x^2 + x - 2}$ **17.** $y' = \dfrac{-x}{1 + x}$

19. $y' = \dfrac{1}{\ln 10} + \log_{10} x$

21. $y' = x + 2x\ln(2x)$; $y'' = 3 + 2\ln(2x)$

23. $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - (x - 1)\ln(x - 1)}{(x - 1)[1 - \ln(x - 1)]^2}$;
$(1, 1 + e) \cup (1 + e, \infty)$

25. $y = 3x - 9$ **27.** $y = 3x - 2$

29. (a) $(0, 1/e)$ (b) $(0, \infty)$ **31.** 7

33. $y' = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6\left(\dfrac{10}{2x + 1} + \dfrac{24x^3}{x^4 - 3}\right)$

35. $y' = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \tan^4 x}{(x^2 + 1)^2}\left(2\cot x + \dfrac{4\sec^2 x}{\tan x} - \dfrac{4x}{x^2 + 1}\right)$

37. $y' = x^x(1 + \ln x)$

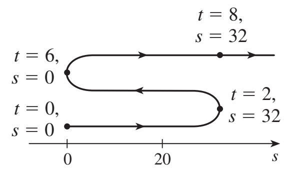
39. $y' = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln\cos x)$

41. $y' = (\tan x)^{1/x}\left(\dfrac{\sec^2 x}{x\tan x} - \dfrac{\ln\tan x}{x^2}\right)$

43. $y' = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$ **45.** $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n - 1)!}{(x - 1)^n}$

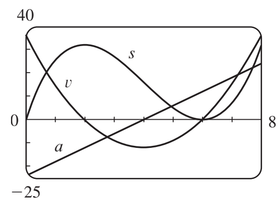
EJERCICIOS 3.8 ■ PÁGINA 237

1. (a) $3t^2 - 24t + 36$ (b) -9 ft/s (c) $t = 2, 6$
(d) $0 \leqslant t < 2, t > 6$ (e) 96 ft
(f)



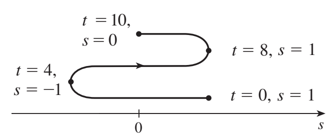
(g) $6t - 24$; -6 ft/s^2

(h)

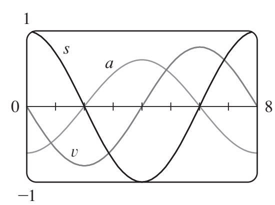


(i) Acelerando cuando $2 < t < 4$ o $t > 6$; reduciendo su velocidad cuando $0 \leqslant t < 2$ o $4 < t < 6$

3. (a) $-\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)$ (b) $-\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$ ft/s (c) $t = 0, 4, 8$
(d) $4 < t < 8$ (e) 4 ft
(f)



(g) $-\frac{1}{16}\pi^2\cos(\pi t/4)$; $\frac{1}{32}\pi^2\sqrt{2}$ ft/s^2
(h)



(i) Acelerando cuando $0 < t < 2$, $4 < t < 6$, $8 < t < 10$; reduciendo su velocidad cuando $2 < t < 4$, $6 < t < 8$

5. (a) Acelerando cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$; reduciendo su velocidad cuando $1 < t < 2$
(b) Acelerando cuando $1 < t < 2$ o $3 < t < 4$; reduciendo su velocidad cuando $0 < t < 1$ o $2 < t < 3$

7. (a) $t = 4$ s
(b) $t = 1.5$ s; la velocidad tiene un mínimo absoluto.

9. (a) 5.02 m/s (b) $\sqrt{17}$ m/s

11. (a) 30 mm^2/mm; la rapidez a la que el área está aumentando con respecto a la longitud de un lado cuando x llega a 15 mm
(b) $\Delta A \approx 2x\,\Delta x$

13. (a) (i) 5π (ii) 4.5π (iii) 4.1π
(b) 4π (c) $\Delta A \approx 2\pi r\,\Delta r$

15. (a) $8\pi\ \text{ft}^2/\text{ft}$ (b) $16\pi\ \text{ft}^2/\text{ft}$ (c) $24\pi\ \text{ft}^2/\text{ft}$
La rapidez aumenta cuando el radio aumenta.

17. (a) 6 kg/m (b) 12 kg/m (c) 18 kg/m
Al extremo derecho; al extremo izquierdo

19. (a) 4.75 A (b) 5 A; $t = \frac{2}{3}$ s

21. (a) $dV/dP = -C/P^2$ (b) Al principio

23. $400(3^t)\ln 3$; $\approx$6850 bacterias/h

25. (a) 16 millones/año; 78.5 millones/año
(b) $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, donde $a \approx 0.00129371$, $b \approx -7.061422$, $c \approx 12{,}822.979$, $d \approx -7{,}743{,}770$
(c) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
(d) 14.48 millones/año; 75.29 millones/año (menor)
(e) 81.62 millones/año

27. (a) 0.926 cm/s; 0.694 cm/s; 0
(b) 0; -92.6 (cm/s)/cm; -185.2 (cm/s)/cm
(c) En el centro; en el borde

29. (a) $C'(x) = 12 - 0.2x + 0.0015x^2$
(b) \$32/yarda; el costo de producir la 201ava yarda
(c) \$32.20

31. (a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; el promedio de productividad aumenta cuando se suman nuevos trabajadores

33. -0.2436 K/min

35. (a) 0 y 0 (b) $C = 0$
(c) (0, 0), (500, 50); es posible que las especies coexistan.

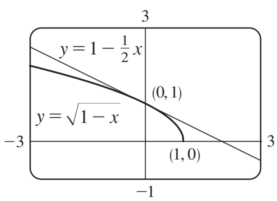
EJERCICIOS 3.9 ■ PÁGINA 245

1. 148°F; subestimación

3. 22.6%, 24.2%; demasiado alto; las rectas tangentes están arriba de la curva

5. $L(x) = -10x - 6$ **7.** $L(x) = -x + \pi/2$

9. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0.9} \approx 0.95$,
$\sqrt{0.99} \approx 0.995$



11. $-1.204 < x < 0.706$ **13.** $-0.045 < x < 0.055$

15. 32.08 **17.** 4.02

23. (a) $dy = -\dfrac{2}{(u-1)^2}\,du$ (b) $dy = -\dfrac{6r^2}{(1+r^3)^3}\,dr$

25. (a) $dy = \frac{1}{10}e^{x/10}\,dx$ (b) 0.01; 0.0101

27. (a) 270 cm^3, 0.01, 1% (b) 36 cm^2, $0.00\overline{6}$, $0.\overline{6}$%

29. (a) $84/\pi \approx 27$ cm^2; $\frac{1}{84} \approx 0.012 = 1.2\%$
(b) $1764/\pi^2 \approx 179$ cm^3; $\frac{1}{56} \approx 0.018 = 1.8\%$

31. (a) $2\pi rh\,\Delta r$ (b) $\pi(\Delta r)^2 h$

33. Un aumento de 5% en el radio corresponde a 20% de aumento en circulación sanguínea

35. (a) 4.8, 5.2 (b) Demasiado grande

REPASO DEL CAPÍTULO 3 ■ PÁGINA 248

Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Verdadero
11. Verdadero

Ejercicios

1. $6x(x^4 - 3x^2 + 5)^2(2x^2 - 3)$ **3.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^7}}$

5. $\dfrac{2(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$ **7.** $2\cos 2\theta\, e^{\text{sen}\,2\theta}$

9. $\dfrac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$ **11.** $-\dfrac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4}$ **13.** $\dfrac{1-y^4-2xy}{4xy^3+x^2-3}$

15. $\dfrac{2\sec 2\theta\,(\tan 2\theta - 1)}{(1+\tan 2\theta)^2}$ **17.** $(1+c^2)e^{cx}\,\text{sen}\,x$

19. $\dfrac{2}{(1+2x)\ln 5}$ **21.** $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy)+1}$

23. $3^{x\ln x}(\ln 3)(1+\ln x)$ **25.** $\cot x - \text{sen}\,x\cos x$

27. $\dfrac{4x}{1+16x^2} + \tan^{-1}(4x)$ **29.** $5\sec 5x$

31. $2\cos\theta\,\tan(\text{sen}\,\theta)\sec^2(\text{sen}\,\theta)$

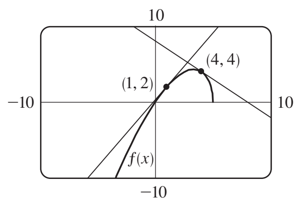
33. $\cos\!\left(\tan\sqrt{1+x^3}\right)\left(\sec^2\sqrt{1+x^3}\right)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

35. $\dfrac{-3\,\text{sen}\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)e^{\sqrt{\tan 3x}}\sec^2(3x)}{2\sqrt{\tan 3x}}$ **37.** $-\frac{4}{27}$

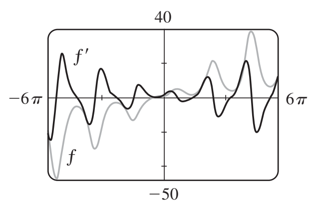
39. $2^x(\ln 2)^n$ **41.** $y = 2\sqrt{3}x + 1 - \pi\sqrt{3}/3$

43. $y = 2x + 2$ **45.** $y = -x + 2$; $y = x + 2$

47. (a) $\dfrac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}$ (b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = -x + 8$
(c)



49. $e^{\text{sen}\,x}(x\cos x + 1)$



Los tamaños de las oscilaciones de f y f' están vinculados.

51. (a) 2 (b) 44 **53.** $2xg(x) + x^2g'(x)$ **55.** $2g(x)g'(x)$

57. $g'(e^x)e^x$ **59.** $g'(x)/g(x)$ **61.** $\dfrac{f'(x)[g(x)]^2 + g'(x)[f(x)]^2}{[f(x)+g(x)]^2}$

63. $(-3, 0)$ **65.** $\left(\pm 2/\sqrt{6}, \mp 1/\sqrt{6}\right)$ **67.** $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$

69. $v(t) = -Ae^{-ct}[c\cos(\omega t + \delta) + \omega\,\text{sen}(\omega t + \delta)]$,
$a(t) = Ae^{-ct}[(c^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \delta) + 2c\omega\,\text{sen}(\omega t + \delta)]$

71. 4 kg/m

73. (a) $C'(x) = 2 - 0.04x + 0.00021x^2$
(b) \$0.10/unidad; el costo aproximado de producir la 101ava unidad
(c) $C(101) - C(100) = 0.10107$
(d) Alrededor de 95.24; en este valor de x el costo marginal se minimiza.

75. (a) $L(x) = 1 + x$; $\sqrt[3]{1 + 3x} \approx 1 + x$; $\sqrt[3]{1.03} \approx 1.01$
(b) $-0.23 < x < 0.40$

77. $(\cos\theta)'\big|_{\theta=\pi/3} = -\sqrt{3}/2$ **79.** $\frac{1}{4}$

ENFOQUE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 252

1. $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ **5.** $3\sqrt{2}$

7. (a) $4\pi\sqrt{3}/\sqrt{11}$ rad/s (b) $40\left(\cos\theta + \sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm
(c) $-480\pi \operatorname{sen}\theta\left(1 + \cos\theta/\sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm/s

11. $x_T \in (3, \infty)$, $y_T \in (2, \infty)$, $x_N \in \left(0, \frac{5}{3}\right)$, $y_N \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

15. $2\sqrt{e}$ **17.** (b) (i) 53° (o 127°) (ii) 63° (o 117°)

19. R se aproxima al punto medio del radio AO

21. $(1, -2)$, $(-1, 0)$ **23.** $\sqrt{29}/58$

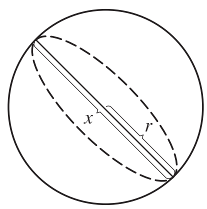
CAPÍTULO 4

EJERCICIOS 4.1 ■ PÁGINA 260

1. $dV/dt = 3x^2\,dx/dt$ **3.** $48\text{ cm}^2/\text{s}$ **5.** $3/(25\pi)$ m/min

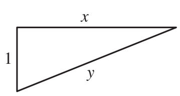
7. (a) 1 (b) 25 **9.** $\pm\frac{46}{13}$

11. (a) La rapidez de disminución del área superficial es $1\text{ cm}^2/\text{min}$
(b) La rapidez de disminución del diámetro cuando el diámetro es 10 cm
(c)



(d) $S = \pi x^2$
(e) $1/(20\pi)$ cm/min

13. (a) La altitud del avión es 1 milla y su rapidez es 500 mi/h
(b) La rapidez a la que la distancia desde el avión a la estación está aumentando cuando el avión está a 2 millas de la estación.
(c)



(d) $y^2 = x^2 + 1$
(e) $250\sqrt{3}$ mi/h

15. 65 mi/h **17.** $837/\sqrt{8674} \approx 8.99$ ft/s

19. -1.6 cm/min **21.** $\frac{720}{13} \approx 55.4$ km/h

23. 5 m **25.** $10/\sqrt{133} \approx 0.87$ ft/s **27.** $\frac{4}{5}$ ft/min

29. $6/(5\pi) \approx 0.38$ ft/min **31.** $0.3\text{ m}^2/\text{s}$ **33.** $80\text{ cm}^3/\text{min}$

35. $\frac{107}{810} \approx 0.132\ \Omega/\text{s}$ **37.** (a) 360 ft/s (b) 0.096 rad/s

39. $\frac{10}{9}\pi$ km/min **41.** $1650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h

43. $\frac{7}{4}\sqrt{15} \approx 6.78$ m/s

EJERCICIOS 4.2 ■ PÁGINA 268

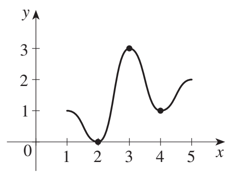
Abreviaturas: abs, absoluto; loc, local; max, máximo; min, mínimo

1. Min abs; valor más pequeño de función en todo el dominio de la función; min loc en c; valor más pequeño de función cuando x está cerca de c

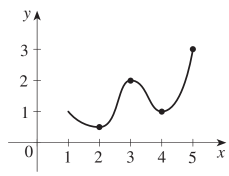
3. Max abs en s, min abs en r, max loc en c, min loc en b y r

5. Max abs $f(4) = 5$, max loc $f(4) = 5$ y $f(6) = 4$, min loc $f(2) = 2$ y $f(1) = f(5) = 3$

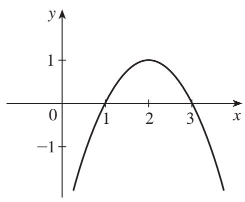
7.



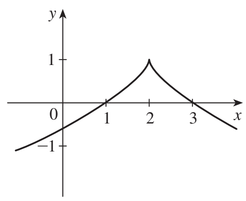
9.



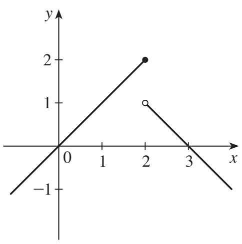
11. (a)



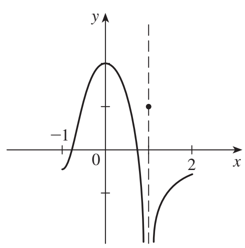
(b)



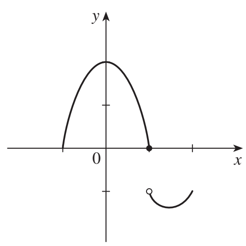
(c)



13. (a)



(b)



15. Max abs $f(3) = 4$

17. Ninguno **19.** Max abs $f(2) = \ln 2$

21. Max abs $f(0) = 1$ **23.** $\frac{1}{3}$

25. $-4, 2$ **27.** $0, \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$ **29.** $0, 2$

31. $0, \frac{4}{9}$ **33.** $0, \frac{8}{7}, 4$ **35.** $n\pi$ (n un entero)

37. $0, \frac{2}{3}$ **39.** 10 **41.** $f(2) = 16, f(5) = 7$

43. $f(-1) = 8$, $f(2) = -19$ **45.** $f(3) = 66$, $f(\pm 1) = 2$

47. $f\left(\sqrt{2}\right) = 2$, $f(-1) = -\sqrt{3}$

49. $f(2) = 2/\sqrt{e}$, $f(-1) = -1/\sqrt[8]{e}$

51. $f(1) = \ln 3$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{4}$

53. $f(\pi/6) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f(\pi/2) = 0$

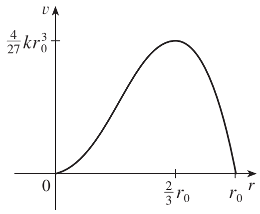
55. $f\left(\dfrac{a}{a + b}\right) = \dfrac{a^a b^b}{(a + b)^{a+b}}$

57. (a) 2.19, 1.81 (b) $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2$, $-\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2$

59. (a) 0.32, 0.00 (b) $\frac{3}{16}\sqrt{3}$, 0 **61.** ≈ 3.9665°C

63. Más barato, $t \approx 0.855$ (junio 1994); más caro, $t \approx 4.618$ (marzo 1998)

65. (a) $r = \frac{2}{3}r_0$ (b) $v = \frac{4}{27}kr_0^3$
(c)



EJERCICIOS 4.3 ■ PÁGINA 279

Abreviaturas: cre, creciente; dec, decreciente; CD, cóncava hacia abajo; CU, cóncava hacia arriba; AH, asíntota horizontal; AV, asíntota vertical; PI, punto(s) de inflexión

1. 0.8, 3.2, 4.4, 6.1

3. (a) Prueba I/D (b) Prueba de concavidad
(c) Encuentre puntos en los que cambie la concavidad.

5. (a) 3, 5 (b) 2, 4, 6 (c) 1, 7

7. (a) Cre en $(-\infty, -3)$, $(2, \infty)$; dec en $(-3, 2)$
(b) Max loc $f(-3) = 81$; min loc $f(2) = -44$
(c) CU en $(-\frac{1}{2}, \infty)$; CD en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$; PI $\left(-\frac{1}{2}, \frac{37}{2}\right)$

9. (a) Cre en $(-1, 0)$, $(1, \infty)$; dec en $(-\infty, -1)$ $(0, 1)$
(b) Max loc $f(0) = 3$; min loc $f(\pm 1) = 2$
(c) CU en $\left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right)$, $\left(\sqrt{3}/3, \infty\right)$;
CD en $\left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$; PI $\left(\pm\sqrt{3}/3, \frac{22}{9}\right)$

11. (a) Cre en $(0, \pi/4)$, $(5\pi/4, 2\pi)$; dec en $(\pi/4, 5\pi/4)$
(b) Max loc $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; min loc $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$
(c) CU en $(3\pi/4, 7\pi/4)$; CD en $(0, 3\pi/4)$, $(7\pi/4, 2\pi)$;
PI $(3\pi/4, 0)$, $(7\pi/4, 0)$

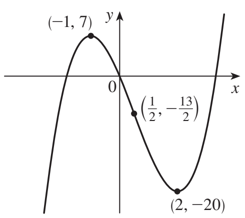
13. (a) Cre en $\left(-\frac{1}{3}\ln 2, \infty\right)$; dec en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\ln 2\right)$
(b) Min loc $f\left(-\frac{1}{3}\ln 2\right) = 2^{-2/3} + 2^{1/3}$ (c) CU en $(-\infty, \infty)$

15. (a) Cre en $(0, e^2)$; dec en (e^2, ∞)
(b) Max loc $f(e^2) = 2/e$
(c) CU en $(e^{8/3}, \infty)$; CD en $(0, e^{8/3})$; PI $\left(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3}\right)$

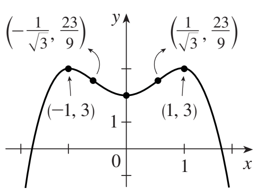
17. Max loc $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$

19. (a) f tiene un máximo local en 2.
(b) f tiene una tangente horizontal en 6.

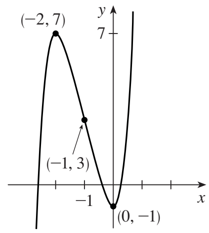
21. (a) Cre en $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$;
dec en $(-1, 2)$
(b) Max loc $f(-1) = 7$;
min loc $f(2) = -20$
(c) CU en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; CD en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$;
PI $\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\right)$
(d) Vea gráfica a la derecha.



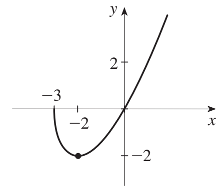
23. (a) Cre en $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$;
dec en $(-1, 0)$, $(1, \infty)$
(b) Max loc $f(-1) = 3$, $f(1) = 3$;
min loc $f(0) = 2$
(c) CU en $\left(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$;
CD en $\left(-\infty, -1/\sqrt{3}\right)$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$;
PI $\left(\pm 1/\sqrt{3}, \frac{23}{9}\right)$
(d) Vea gráfica a la derecha.



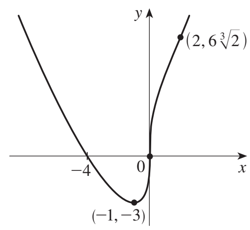
25. (a) Cre en $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$;
dec en $(-2, 0)$
(b) Max loc $h(-2) = 7$;
min loc $h(0) = -1$
(c) CU en $(-1, \infty)$;
CD en $(-\infty, -1)$; PI $(-1, 3)$
(d) Vea gráfica a la derecha.



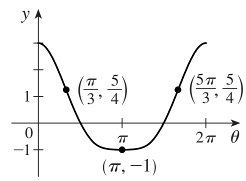
27. (a) Cre en $(-2, \infty)$;
dec en $(-3, -2)$
(b) Min loc $A(-2) = -2$
(c) CU en $(-3, \infty)$
(d) Vea gráfica a la derecha.



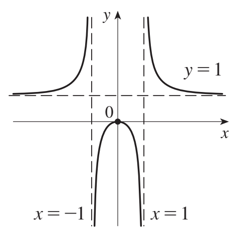
29. (a) Cre en $(-1, \infty)$;
dec en $(-\infty, -1)$
(b) Min loc $C(-1) = -3$
(c) CU en $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$;
CD en $(0, 2)$;
PI $(0, 0)$, $\left(2, 6\sqrt[3]{2}\right)$
(d) Vea gráfica a la derecha.



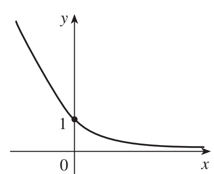
31. (a) Cre en $(\pi, 2\pi)$;
dec en $(0, \pi)$
(b) Min loc $f(\pi) = -1$
(c) CU en $(\pi/3, 5\pi/3)$;
CD en $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$;
PI $\left(\pi/3, \frac{5}{4}\right)$, $\left(5\pi/3, \frac{5}{4}\right)$
(d) Vea gráfica a la derecha.



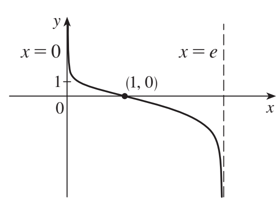
33. (a) AH $y = 1$, AV $x = -1$, $x = 1$
(b) Cre en $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$;
dec en $(0, 1)$, $(1, \infty)$
(c) Max loc $f(0) = 0$
(d) CU en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$;
CD en $(-1, 1)$
(e) Vea gráfica a la derecha.



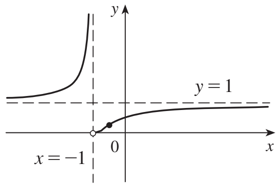
35. (a) AH $y = 0$
(b) Dec en $(-\infty, \infty)$
(c) Ninguno
(d) CU en $(-\infty, \infty)$
(e) Vea gráfica a la derecha



37. (a) AV $x = 0$, $x = e$
(b) Dec en $(0, e)$
(c) Ninguno
(d) CU en $(0, 1)$; CD en $(1, e)$;
PI $(1, 0)$
(e) Vea gráfica a la derecha.



39. (a) AH $y = 1$, AV $x = -1$
(b) Cre en $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$
(c) Ninguno
(d) CU en $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$;
CD en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; PI $\left(-\frac{1}{2}, 1/e^2\right)$
(e) Vea gráfica a la derecha



41. $(3, \infty)$

43. (a) Max abs y loc $f(1) = \sqrt{2}$, no min
(b) $\frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{17}\right)$

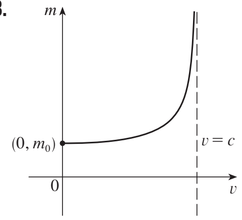
45. (b) CU en $(0.94, 2.57)$, $(3.71, 5.35)$;
CD en $(0, 0.94)$, $(2.57, 3.71)$, $(5.35, 2\pi)$;
PI $(0.94, 0.44)$, $(2.57, -0.63)$, $(3.71, -0.63)$, $(5.35, 0.44)$

47. CU en $(-\infty, -0.6)$, $(0.0, \infty)$; CD en $(-0.6, 0.0)$

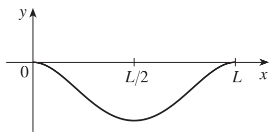
49. (a) Muy incómodo (b) Incómodo (c) Cómodo
(d) Muy incómodo

51. $\dfrac{2t}{3t^2 - 12}, \dfrac{-2(t^2 + 4)}{9(t^2 - 4)^3}, -2 < t < 2$

53.



55.



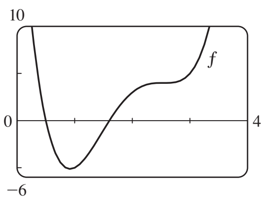
57. 28.57 min, cuando la rapidez de aumento del nivel de medicina en el torrente sanguíneo es máxima; 85.71 min, cuando la rapidez de disminución es máxima

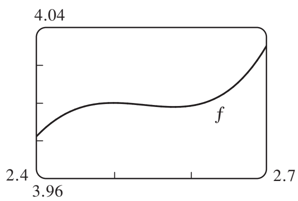
59. $f(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)$ **63.** 17

71. (a) $a = 0, b = -1$ (b) $y = -x$ en $(0, 0)$

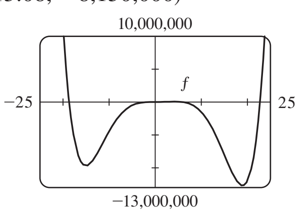
EJERCICIOS 4.4 ■ PÁGINA 288

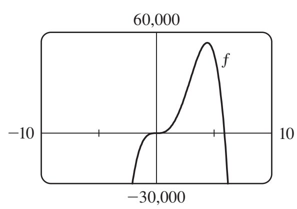
1. Cre en $(0.92, 2.5)$, $(2.58, \infty)$; dec en $(-\infty, 0.92)$, $(2.5, 2.58)$;
max loc $f(2.5) = 4$; min loc $f(0.92) \approx -5.12$, $f(2.58) \approx 3.998$;
CU en $(-\infty, 1.46)$, $(2.54, \infty)$;
CD en $(1.46, 2.54)$; PI $(1.46, -1.40)$, $(2.54, 3.999)$



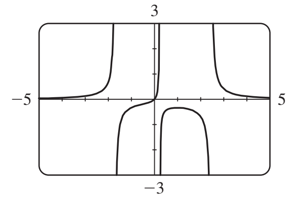


3. Cre en $(-15, 4.40)$, $(18.93, \infty)$;
dec en $(-\infty, -15)$, $(4.40, 18.93)$;
max loc $f(4.40) \approx 53{,}800$; min loc $f(-15) \approx -9{,}700{,}000$,
$f(18.93) \approx -12{,}700{,}000$; CU en $(-\infty, -11.34)$, $(0, 2.92)$,
$(15.08, \infty)$; CD en $(-11.34, 0)$, $(2.92, 15.08)$;
PI $(0, 0)$, $\approx (-11.34, -6{,}250{,}000)$, $(2.92, 31{,}800)$,
$(15.08, -8{,}150{,}000)$

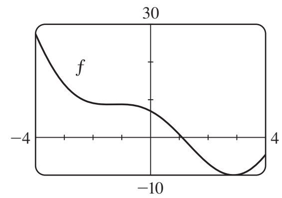


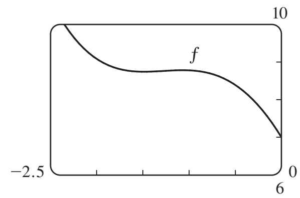


5. Cre en $(-\infty, -1.7)$, $(-1.7, 0.24)$, $(0.24, 1)$;
dec en $(1, 2.46)$, $(2.46, \infty)$; max loc $f(1) = -\frac{1}{3}$;
CU en $(-\infty, -1.7)$, $(-0.506, 0.24)$, $(2.46, \infty)$;
CD en $(-1.7, -0.506)$, $(0.24, 2.46)$; PI $(-0.506, -0.192)$

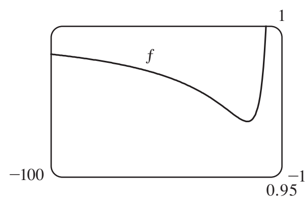


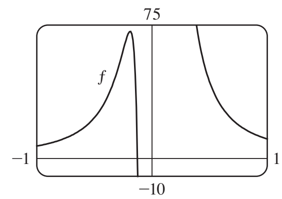
7. Cre en $(-1.49, -1.07)$, $(2.89, 4)$; dec en $(-4, -1.49)$,
$(-1.07, 2.89)$; max loc $f(-1.07) \approx 8.79$;
min loc $f(-1.49) \approx 8.75$, $f(2.89) \approx -9.99$; CU en $(-4, -1.28)$,
$(1.28, 4)$; CD en $(-1.28, 1.28)$; PI $(-1.28, 8.77)$, $(1.28, -1.48)$



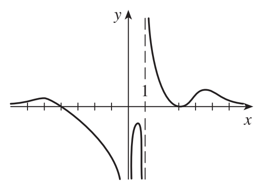


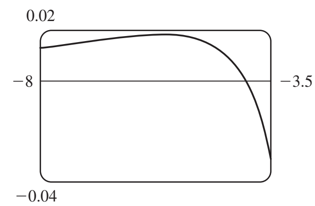
9. Cre en $\left(-8 - \sqrt{61}, -8 + \sqrt{61}\right)$; dec en $\left(-\infty, -8 - \sqrt{61}\right)$,
$\left(-8 + \sqrt{61}, 0\right)$, $(0, \infty)$; CU en $\left(-12 - \sqrt{138}, -12 + \sqrt{138}\right)$,
$(0, \infty)$; CD en $\left(-\infty, -12 - \sqrt{138}\right)$, $\left(-12 + \sqrt{138}, 0\right)$

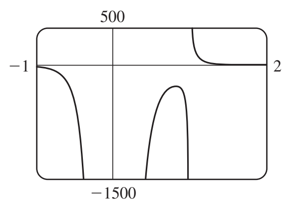


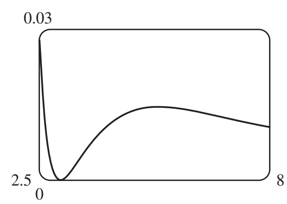


11. Max loc $f(-5.6) \approx 0.018$, $f(0.82) \approx -281.5$,
$f(5.2) \approx 0.0145$; min loc $f(3) = 0$







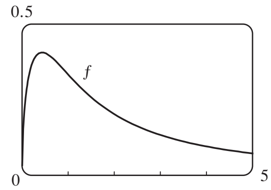


13. $f'(x) = -\dfrac{x(x + 1)^2(x^3 + 18x^2 - 44x - 16)}{(x - 2)^3(x - 4)^5}$

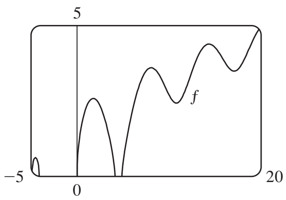
$f''(x) = 2\dfrac{(x + 1)(x^6 + 36x^5 + 6x^4 - 628x^3 + 684x^2 + 672x + 64)}{(x - 2)^4(x - 4)^6}$

CU en $(-35.3, -5.0)$, $(-1, -0.5)$, $(-0.1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$;
CD en $(-\infty, -35.3)$, $(-5.0, -1)$, $(-0.5, -0.1)$;
PI $(-35.3, -0.015)$, $(-5.0, -0.005)$, $(-1, 0)$, $(-0.5, 0.00001)$,
$(-0.1, 0.0000066)$

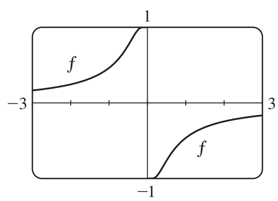
15. Cre en (0, 0.43); dec en (0.43, ∞); max loc $f(0.43) \approx 0.41$; CU en (0.94, ∞); CD en (0, 0.94); PI (0.94, 0.34)



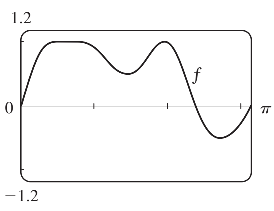
17. Cre en $(-4.91, -4.51)$, (0, 1.77), (4.91, 8.06), (10.79, 14.34), (17.08, 20);
dec en $(-4.51, -4.10)$, (1.77, 4.10), (8.06, 10.79), (14.34, 17.08);
max loc $f(-4.51) \approx 0.62$, $f(1.77) \approx 2.58$, $f(8.06) \approx 3.60$, $f(14.34) \approx 4.39$;
min loc $f(10.79) \approx 2.43$, $f(17.08) \approx 3.49$;
CU en (9.60, 12.25), (15.81, 18.65);
CD en $(-4.91, -4.10)$, (0, 4.10), (4.91, 9.60), (12.25, 15.81), (18.65, 20);
PI en (9.60, 2.95), (12.25, 3.27), (15.81, 3.91), (18.65, 4.20)

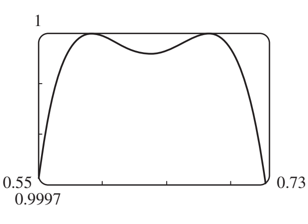


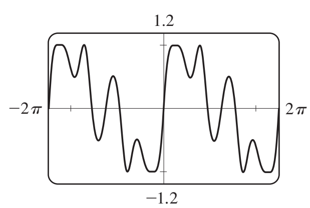
19. Cre en $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$;
CU en $(-\infty, -0.42)$, (0, 0.42);
CD en $(-0.42, 0)$, $(0.42, \infty)$;
PI (∓ 0.42, ± 0.83)



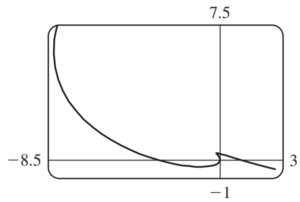
21. Max $f(0.59) \approx 1$, $f(0.68) \approx 1$, $f(1.96) \approx 1$;
min $f(0.64) \approx 0.99996$, $f(1.46) \approx 0.49$, $f(2.73) \approx -0.51$;
PI (0.61, 0.99998), (0.66, 0.99998), (1.17, 0.72), (1.75, 0.77), (2.28, 0.34)





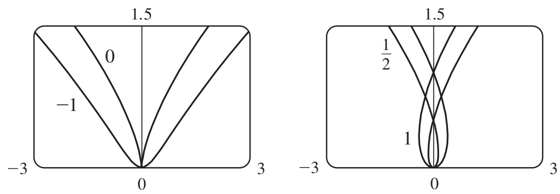


23.

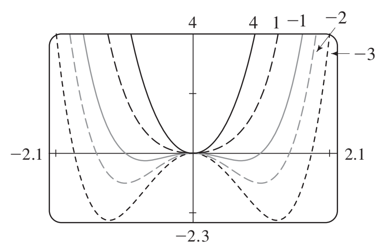


Tangentes verticales en (0, 0), $\left(-\frac{3}{16}, \frac{3}{8}\right)$, $(-8, 6)$; tangentes horizontales en $\left(-(2\sqrt{3} + 5)/9, -2\sqrt{3}/9\right)$, $\left((2\sqrt{3} - 5)/9, 2\sqrt{3}/9\right)$

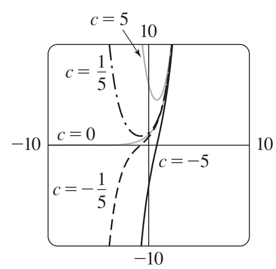
25. Para $c = 0$, hay una cúspide; para $c > 0$, hay un lazo cuyo tamaño aumenta cuando c aumenta y la curva se cruza a sí misma en $(0, c)$; punto de extrema izquierda $\left(-2c\sqrt{3c}/9, c/3\right)$, punto de extrema derecha $\left(2c\sqrt{3c}/9, c/3\right)$



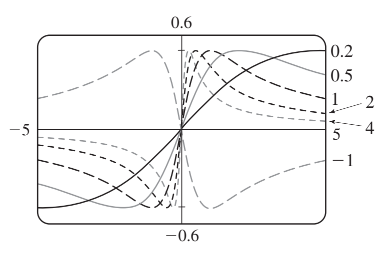
27. Para $c \geqslant 0$, no hay puntos de inflexión y hay sólo un punto extremo, el origen. Para $c < 0$, hay un punto máximo en el origen, dos puntos mínimos y dos puntos de inflexión, que se mueven hacia abajo y se alejan del origen cuando $c \to -\infty$.



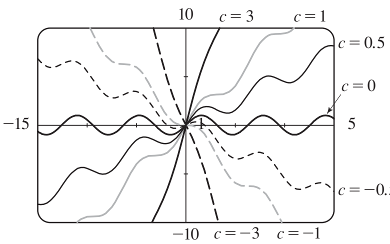
29. Para $c < 0$, no hay punto extremo y un PI, que disminuye a lo largo del eje x. Para $c > 0$, no hay PI, y hay un punto mínimo.



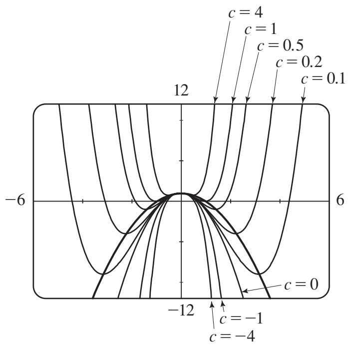
31. Para $c > 0$, los valores máximo y mínimo son siempre $\pm\frac{1}{2}$, pero los puntos extremos y puntos de inflexión se acercan al eje y cuando c aumenta, $c = 0$ es un valor de transición: cuando c es sustituido por $-c$, la curva se refleja en el eje x.



33. Para $|c| < 1$, la gráfica tiene valores de max y min loc; para $|c| \geqslant 1$ no los tiene. La función aumenta para $c \geqslant 1$ y disminuye para $c \leqslant -1$. Cuando c cambia, los puntos de inflexión se mueven en forma vertical pero no horizontal.



35. (a) Positivo (b)



EJERCICIOS 4.5 ■ PÁGINA 296

1. (a) Indeterminado (b) 0 (c) 0
(d) ∞, $-\infty$, o no existe (e) Indeterminado

3. (a) $-\infty$ (b) Indeterminado (c) ∞

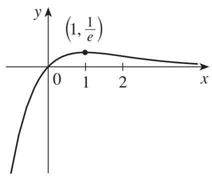
5. 2 **7.** $-\infty$ **9.** ∞ **11.** 0 **13.** $-\infty$

15. 3 **17.** $\ln\frac{5}{3}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $-1/\pi^2$ **23.** $\frac{1}{2}a(a-1)$

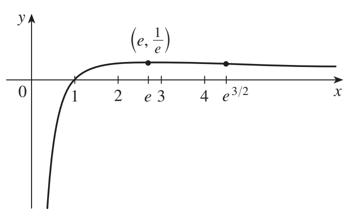
25. $\frac{1}{24}$ **27.** π **29.** 3 **31.** 0 **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** $\frac{1}{2}$ **37.** ∞

39. 1 **41.** e^{-2} **43.** 1 **45.** e^4 **47.** e^2 **49.** $\frac{1}{4}$

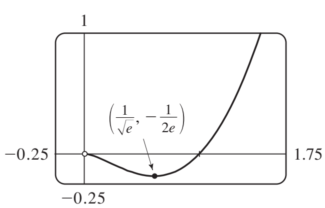
51. AH $y = 0$



53. AH $y = 0$, AV $= 0$



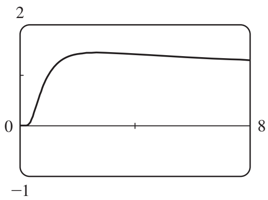
55. (a)



(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

(c) Min loc $f(1/\sqrt{e}) = -1/(2e)$; CD en $(0, e^{-3/2})$; CU en $(e^{-3/2}, \infty)$

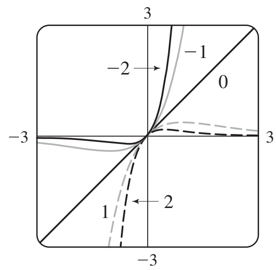
57. (a)



(b) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$

(c) Max loc $f(e) = e^{1/e}$ (d) PI en $x \approx 0.58, 4.37$

59.



Para $c > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Para $c < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Cuando $|c|$ aumenta, los puntos max y min y los PI se acercan al origen.

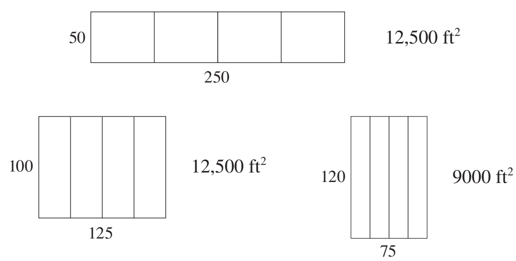
61. 1 **69.** $\frac{16}{9}a$ **71.** $\frac{1}{2}$ **73.** 56

EJERCICIOS 4.6 ■ PÁGINA 305

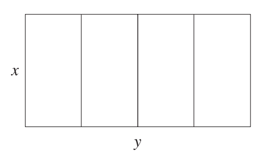
1. (a) 11, 12 (b) 11.5, 11.5 **3.** 10, 10

5. 25 m por 25 m **7.** $N = 1$

9. (a)



(b)



(c) $A = xy$ (d) $5x + 2y = 750$ (e) $A(x) = 375x - \frac{5}{2}x^2$

(f) 14,062.5 ft^2

11. 4000 cm^3 **15.** $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ **17.** $L/2$, $\sqrt{3}\,L/4$

19. $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$ **21.** Base $\sqrt{3}r$, altura $3r/2$

23. Ancho $60/(4 + \pi)$ ft; altura del rectángulo $30/(4 + \pi)$ ft

25. (a) Use todo el alambre para el cuadrado
(b) $40\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ m para el cuadrado

27. $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$ **31.** $E^2/(4r)$

33. (a) $\frac{3}{2}s^2\csc\theta\,(\csc\theta - \sqrt{3}\cot\theta)$ (b) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$
(c) $6s\left[h + s/(2\sqrt{2})\right]$

35. ≈ 4.85 km al este de la refinería

37. $10\sqrt[3]{3}/(1 + \sqrt[3]{3})$ de la fuente más fuerte

39. $y = -\frac{5}{3}x + 10$ **41.** $2\sqrt{6}$

43. (b) (i) \$342,491; \$342/unidad; \$390/unidad (ii) 400 (iii) \$320/unidad

45. (a) $p(x) = 19 - \frac{1}{3000}x$ (b) \$9.50

47. (a) $p(x) = 550 - \frac{1}{10}x$ (b) \$175 (c) \$100

49. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ **53.** $x = 6$ in **55.** $\frac{1}{2}(L + W)^2$

57. A una distancia de $5 - 2\sqrt{5}$ de A

59. (a) Alrededor de 5.1 km de B (b) C está cerca de B; C está cerca de D; $W/L = \sqrt{25 + x^2}/x$, donde $x = |BC|$ (c) ≈ 1.07; no hay tal valor (d) $\sqrt{41}/4 \approx 1.6$

61. (a) $T_1 = D/c_1$, $T_2 = (2h \sec\theta)/c_1 + (D - 2h\tan\theta)/c_2$, $T_3 = \sqrt{4h^2 + D^2}/c_1$
(c) $c_1 \approx 3.85$ km/s, $c_2 \approx 7.66$ km/s, $h \approx 0.42$ km

EJERCICIOS 4.7 ■ PÁGINA 315

1. (a) $x_2 \approx 2.3$, $x_3 \approx 3$ (b) No **3.** $\frac{4}{5}$ **5.** 1.1797

7. 1.1785 **9.** -1.25 **11.** 1.82056420

13. -0.724492, 1.220744 **15.** 1.412391, 3.057104

17. -1.93822883, -1.21997997, 1.13929375, 2.98984102

19. -1.97806681, -0.82646233

21. 0.21916368, 1.08422462 **23.** (b) 31.622777

29. (0.904557, 1.855277) **31.** (0.410245, 0.347810)

33. 0.76286%

EJERCICIOS 4.8 ■ PÁGINA 321

1. $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4 + C$

3. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ **5.** $F(x) = 4x^{5/4} - 4x^{7/4} + C$

7. $F(x) = 4x^{3/2} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C$

9. $F(x) = \begin{cases} -5/(4x^8) + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -5/(4x^8) + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

11. $F(u) = \frac{1}{3}u^3 - 6u^{-1/2} + C$

13. $G(\theta) = \operatorname{sen}\theta + 5\cos\theta + C$

15. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - 1/x^2 + C$

17. $F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 4$ **19.** $x^3 + x^4 + Cx + D$

21. $\frac{3}{20}x^{8/3} + Cx + D$ **23.** $x - 3x^2 + 8$

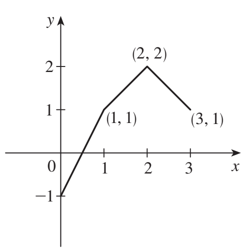
25. $4x^{3/2} + 2x^{5/2} + 4$ **27.** $2\operatorname{sen} t + \tan t + 4 - 2\sqrt{3}$

29. $-x^2 + 2x^3 - x^4 + 12x + 4$

31. $-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 5\theta + 4$ **33.** $x^2 - 2x^3 + 9x + 9$

35. $x^2 - \cos x - \frac{1}{2}\pi x$ **37.** 10

39.



41. $s(t) = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t$

43. (a) $s(t) = 450 - 4.9t^2$ (b) $\sqrt{450/4.9} \approx 9.58$ s
(c) $-9.8\sqrt{450/4.9} \approx -93.9$ m/s (d) Cerca de 9.09 s

47. \$742.08 **49.** 225 ft **51.** $\frac{88}{15} \approx 5.87$ ft/s^2

53. 62,500 km/h^2 ≈ 4.82 m/s^2

57. (a) 22.9125 mi (b) 21.675 mi (c) 30 min 33 s (d) 55.425 mi

REPASO DEL CAPÍTULO 4 ■ PÁGINA 323

Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero
11. Verdadero **13.** Falso **15.** Verdadero **17.** Verdadero
19. Verdadero

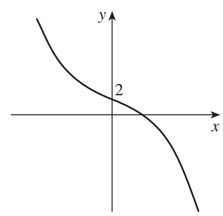
Ejercicios

1. Max abs $f(4) = 5$, min abs y loc $f(3) = 1$

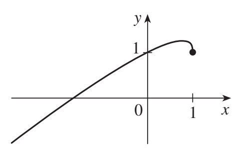
3. Max abs $f(2) = \frac{2}{5}$, min abs y loc $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{9}{2}$

5. Max abs $f(\pi) = \pi$; min abs $f(0) = 0$;
max loc $f(\pi/3) = (\pi/3) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
min loc $f(2\pi/3) = (2\pi/3) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

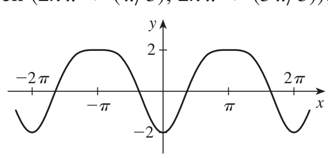
7. (a) Ninguno
(b) Dec en $(-\infty, \infty)$
(c) Ninguno
(d) CU en $(-\infty, 0)$; CD en $(0, \infty)$; PI $(0, 2)$
(e) Vea gráfica a la derecha.



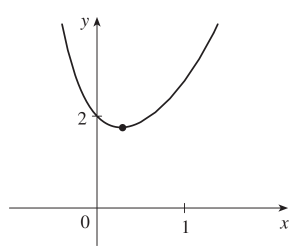
9. (a) Ninguno
(b) Cre en $(-\infty, \frac{3}{4})$, dec en $(\frac{3}{4}, 1)$
(c) Max loc $f(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$
(d) CD en $(-\infty, 1)$
(e) Vea gráfica a la derecha.



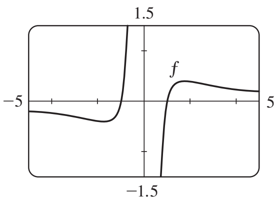
11. (a) Ninguno
(b) Cre en $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$, n un entero; dec en $((2n + 1)\pi, (2n + 2)\pi)$
(c) Max loc $f((2n + 1)\pi) = 2$; min loc $f(2n\pi) = -2$
(d) CU en $(2n\pi - (\pi/3), 2n\pi + (\pi/3))$; CD en $(2n\pi + (\pi/3), 2n\pi + (5\pi/3))$; PI $(2n\pi \pm (\pi/3), -\frac{1}{4})$
(e)



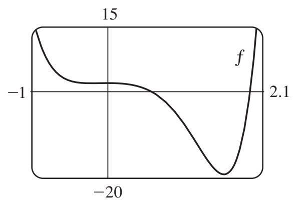
13. (a) Ninguno
(b) Cre en $(\frac{1}{4}\ln 3, \infty)$, dec en $(-\infty, \frac{1}{4}\ln 3)$
(c) Min loc $f(\frac{1}{4}\ln 3) = 3^{1/4} + 3^{-3/4}$
(d) CU en $(-\infty, \infty)$
(e) Vea gráfica a la derecha.

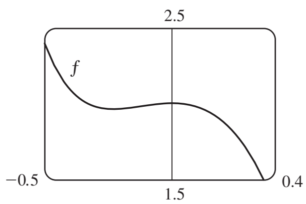


15. Cre en $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$;
dec en $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$;
max loc $f(\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$,
min loc $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$;
CU en $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, \infty)$;
CD en $(-\infty, -\sqrt{6})$, $(0, \sqrt{6})$;
PI $\left(\sqrt{6}, \frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{36}\sqrt{6}\right)$

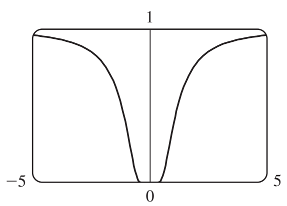


17. Cre en $(-0.23, 0)$, $(1.62, \infty)$; dec en $(-\infty, -0.23)$, $(0, 1.62)$;
max loc $f(0) = 2$; min loc $f(-0.23) \approx 1.96$, $f(1.62) \approx -19.2$;
CU en $(-\infty, -0.12)$, $(1.24, \infty)$;
CD en $(-0.12, 1.24)$; PI $(-0.12, 1.98)$, $(1.24, -12.1)$





19.



$(\pm 0.82, 0.22)$; $\left(\pm\sqrt{2/3}, e^{-3/2}\right)$

21. $-2.96, -0.18, 3.01; -1.57, 1.57; -2.16, -0.75, 0.46, 2.21$

23. Para $C > -1$, f es periódica con periodo 2π y tiene máximos locales en $2n\pi + \pi/2$, n un entero. Para $C \leqslant -1$, f no tiene gráfica. Para $-1 < C \leqslant 1$, f tiene asíntotas verticales. Para $C > 1$, f es continua en $\mathbb{R}$. Cuando C aumenta, f se mueve hacia arriba y sus oscilaciones se hacen menos pronunciadas.

25. $a = -3, b = 7$ **27.** π **29.** 8 **31.** 0 **33.** $\frac{1}{2}$

35. 400 ft/h **37.** 13 ft/s **39.** 500 y 125

41. $3\sqrt{3}r^2$ **43.** $4/\sqrt{3}$ cm desde D en C

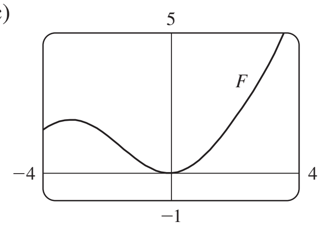
45. $L = C$ **47.** \$11.50 **49.** 1.16718557

51. $F(x) = e^x - 4\sqrt{x} + C$ **53.** $f(t) = t^2 + 3\cos t + 2$

55. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 4x^4 + 2x + 1$

57. $s(t) = t^2 - \tan^{-1}t + 1$

59. (b) $0.1e^x - \cos x + 0.9$ (c)



61. No

63. (b) Unas 8.5 in por 2 in (c) $20/\sqrt{3}$ in, $20\sqrt{2/3}$ in

65. (a) $20\sqrt{2} \approx 28$ ft

(b) $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{-480k(h-4)}{[(h-4)^2 + 1600]^{5/2}}$, donde k es la constante de proporcionalidad

ENFOQUE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 328

5. Max abs $f(-5) = e^{45}$, no hay min abs

7. $(-2, 4)$, $(2, -4)$ **9.** 24 **11.** $-3.5 < a < -2.5$

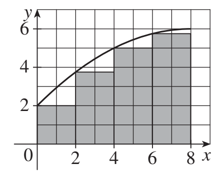
13. $c > 0$ (un PI) y $c < -e/6$ (dos PI) **17.** $(m/2, m^2/4)$

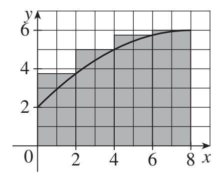
23. $2 + \frac{375}{128}\pi \approx 11.204\ \text{cm}^3/\text{min}$

CAPÍTULO 5

EJERCICIOS 5.1 ■ PÁGINA 341

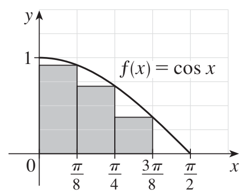
1. (a) $L_4 = 33$, $R_4 = 41$

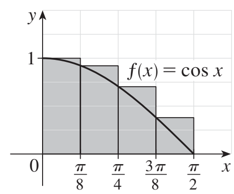




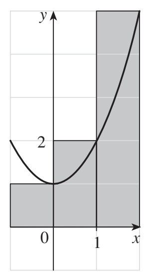
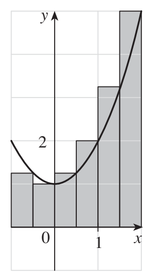
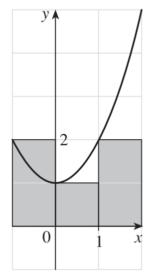
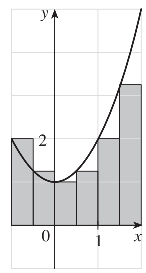
(b) $L_8 \approx 35.1$, $R_8 \approx 39.1$

3. (a) 0.7908, subestimado (b) 1.1835, sobrestimado

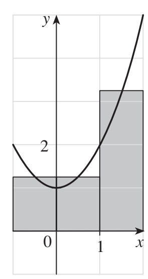
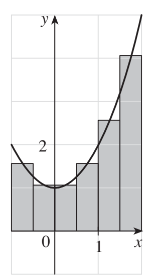




5. (a) 8, 6.875 (b) 5, 5.375

(c) 5.75, 5.9375

(d) M_6

7. 0.2533, 0.2170, 0.2101, 0.2050; 0.2

9. (a) Izquierda: 0.8100, 0.7937, 0.7904;
derecha : 0.7600, 0.7770, 0.7804

11. 34.7 ft, 44.8 ft **13.** 63.2 L, 70 L **15.** 155 ft

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{2(1 + 2i/n)}{(1 + 2i/n)^2 + 1} \cdot \dfrac{2}{n}$ **19.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i\pi}{2n} \cos \dfrac{i\pi}{2n}\right) \dfrac{\pi}{2n}$

21. La región bajo la gráfica de $y = \tan x$ de 0 a $\pi/4$

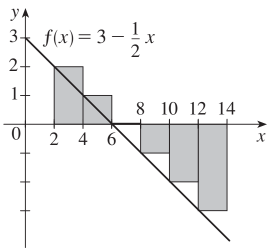
23. (a) $L_n < A < R_n$

25. (a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{64}{n^6} \sum_{i=1}^{n} i^5$ (b) $\dfrac{n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$ (c) $\frac{32}{3}$

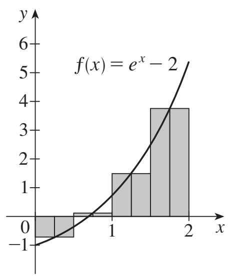
27. sen b. 1

EJERCICIOS 5.2 ■ PÁGINA 353

1. -6
La suma de Riemann representa la suma de las áreas de los dos rectángulos arriba del eje x menos la suma de las áreas de los tres rectángulos abajo del eje x; esto es, el área neta de los rectángulos con respecto al eje x.



3. 2.322986
La suma de Riemann representa la suma de las áreas de los tres rectángulos arriba del eje x menos el área del rectángulo abajo del eje x.



5. (a) 4 (b) 6 (c) 10

7. Inferior, $L_5 = -64$; superior, $R_5 = 16$

9. 124.1644 **11.** 0.3084

13. 0.30843908, 0.30981629, 0.31015563

15.

n	R_n
5	1.933766
10	1.983524
50	1.999342
100	1.999836

Los valores de R_n parecen aproximarse a 2.

17. $\int_2^6 x \ln(1 + x^2)\, dx$ **19.** $\int_1^8 \sqrt{2x + x^2}\, dx$ **21.** 42

23. $\frac{4}{3}$ **25.** 3.75 **27.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{2 + 4i/n}{1 + (2 + 4i/n)^5} \cdot \dfrac{4}{n}$

29. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{sen} \dfrac{5\pi i}{n}\right) \dfrac{\pi}{n} = \dfrac{2}{5}$

31. (a) 4 (b) 10 (c) -3 (d) 2 **33.** $-\frac{3}{4}$

35. $3 + \frac{9}{4}\pi$ **37.** 2.5 **39.** 0

41. $\int_{-1}^{5} f(x)\, dx$ **43.** 122 **45.** $e^5 - e^3$

47. B < E < A < D < C **49.** 15 **53.** $\int_0^1 x^4\, dx$

EJERCICIOS 5.3 ■ PÁGINA 363

1. $-\frac{10}{3}$ **3.** $\frac{56}{15}$ **5.** $\frac{5}{9}$ **7.** $-2 + 1/e$ **9.** $\frac{49}{3}$ **11.** $\frac{40}{3}$

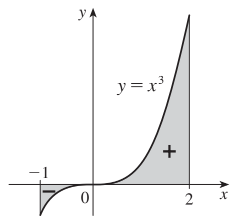
13. $\frac{55}{63}$ **15.** 1 **17.** ln 3 **19.** π **21.** $e^2 - 1$

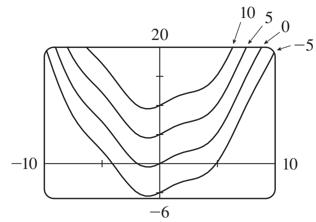
23. $\ln 2 + 7$ **25.** $1 + \pi/4$ **27.** $\pi/6$ **29.** -3.5

31. La función $f(x) = 1/x^2$ no es continua en el intervalo $[-1, 3]$, por lo que no puede aplicarse el Teorema de Evaluación.

33. 2 **35.** ≈ 1.36

37. 3.75 **41.** sen $x + \frac{1}{4}x^2 + C$





43. $2t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C$ **45.** $\tan \alpha + C$

47. $\sec x + C$ **49.** $\frac{4}{3}$

51. El aumento en el peso del niño (en libras) entre edades de 5 y 10 años

53. Número de galones de petróleo que se fugan en las primeras 2 horas

55. Aumento en ingresos cuando aumenta la producción de 1000 a 5000 unidades

57. Newton-metros **59.** (a) $-\frac{3}{2}$ m (b) $\frac{41}{6}$ m

61. (a) $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s (b) $416\frac{2}{3}$ m

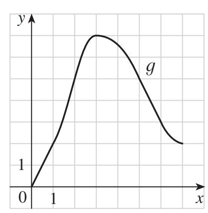
63. $46\frac{2}{3}$ kg **65.** 1.4 mi **67.** $58,000

69. (b) A lo sumo 40%; $\frac{5}{36}$ **73.** 3 **75.** $\frac{1}{4}$

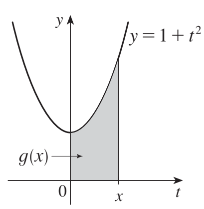
EJERCICIOS 5.4 ■ PÁGINA 372

1. Un proceso experimenta lo que experimenta el otro. Vea el Teorema Fundamental de Cálculo, página 371.

3. (a) 0, 2, 5, 7, 3 (d)
(b) (0, 3)
(c) $x = 3$



5.



$g'(x) = 1 + x^2$

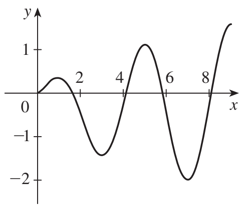
7. $g'(x) = 1/(x^3 + 1)$

9. $g'(y) = y^2 \operatorname{sen} y$ **11.** $F'(x) = -\sqrt{1 + \sec x}$

13. $h'(x) = -\dfrac{\arctan(1/x)}{x^2}$ **15.** $y' = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x}}\, \sec^2 x$

17. $g'(x) = \dfrac{-2(4x^2 - 1)}{4x^2 + 1} + \dfrac{3(9x^2 - 1)}{9x^2 + 1}$

19. (a) Max loc en 1 y 5; min loc en 3 y 7
(b) $x = 9$
(c) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $(4, 6)$, $(8, 9)$
(d) Vea gráfica a la derecha.



21. $(-1, 1)$ **23.** $(-4, 0)$ **25.** 29

27. (a) $-2\sqrt{n}$, $\sqrt{4n-2}$, n un entero > 0
(b) $(0, 1)$, $\left(-\sqrt{4n-1}, -\sqrt{4n-3}\right)$, y $\left(\sqrt{4n-1}, \sqrt{4n+1}\right)$, n un entero > 0 (c) 0.74

29. $f(x) = \int_1^x (2^t/t)\,dt$ **31.** $f(x) = x^{3/2}$, $a = 9$

33. (b) Promedie gasto de más de $[0, t]$; minimice gasto promedio

EJERCICIOS 5.5 ■ PÁGINA 381

1. $-e^{-x} + C$ **3.** $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$ **5.** $-\frac{1}{4}\cos^4\theta + C$

7. $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$ **9.** $\frac{1}{63}(3x-2)^{21} + C$

11. $-(1/\pi)\cos \pi t + C$ **13.** $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

15. $-\frac{1}{3}\ln|5-3x| + C$ **17.** $\frac{2}{3}\sqrt{3ax+bx^3} + C$

19. $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$ **21.** $-1/(\operatorname{sen} x) + C$

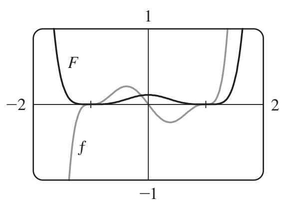
23. $\frac{1}{15}(x^3+3x)^5 + C$ **25.** $-\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2} + C$

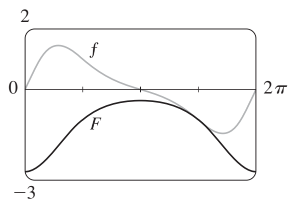
27. $\ln|\operatorname{sen}^{-1} x| + C$ **29.** $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$

31. $\frac{1}{40}(2x+5)^{10} - \frac{5}{36}(2x+5)^9 + C$

33. $-\ln(1+\cos^2 x) + C$ **35.** $\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

37. $\frac{1}{8}(x^2-1)^4 + C$ **39.** $-e^{\cos x} + C$





41. $2/\pi$ **43.** $\frac{45}{28}$ **45.** $\frac{182}{9}$ **47.** $2(e^2 - e)$

49. 0 **51.** $\frac{16}{15}$ **53.** $\ln(e+1)$ **55.** 2 **57.** $\frac{1}{6}$

59. 6π **61.** Las tres áreas son iguales. **63.** ≈ 4512 L

65. $\dfrac{5}{4\pi}\left(1 - \cos\dfrac{2\pi t}{5}\right)$ L **67.** 5

EJERCICIOS 5.6 ■ PÁGINA 387

1. $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$ **3.** $\frac{1}{5}x\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$

5. $2(r-2)e^{r/2} + C$

7. $-\dfrac{1}{\pi}x^2\cos \pi x + \dfrac{2}{\pi^2}x\operatorname{sen}\pi x + \dfrac{2}{\pi^3}\cos \pi x + C$

9. $x\ln\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x + C$ **11.** $t\arctan 4t - \frac{1}{8}\ln(1+16t^2) + C$

13. $\frac{1}{13}e^{2\theta}(2\operatorname{sen} 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$ **15.** $\pi/3$ **17.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

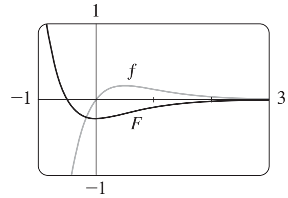
19. $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$ **21.** $\frac{1}{6}\left(\pi + 6 - 3\sqrt{3}\right)$

23. $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$

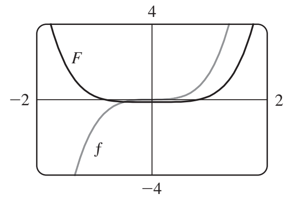
25. $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$ **27.** $-\frac{1}{2} - \pi/4$

29. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C$

31. $-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$



33. $\frac{1}{3}x^2(1+x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1+x^2)^{5/2} + C$



35. (b) $-\frac{1}{4}\cos x\operatorname{sen}^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x + C$

37. (b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$

41. $x[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 6] + C$

43. $2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ m **45.** 2

EJERCICIOS 5.7 ■ PÁGINA 393

1. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **3.** $-\frac{11}{384}$ **5.** π

7. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$ **9.** $\frac{8}{15}$

11. $-\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right) + C$

13. $-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$ **15.** $\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{4}$

17. $-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$

19. (a) $\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{3x+1}$ (b) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$

21. $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + 2\ln|x-1| + C$

23. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ **25.** $\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\tan^{-1}(x/3) + C$

27. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \left(1/\sqrt{2}\right)\tan^{-1}\left(x/\sqrt{2}\right) + C$

29. $x + 6\ln|x-6| + C$

31. $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}(x/2) + C$

33. $2 + \ln\frac{25}{9}$ **35.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

EJERCICIOS 5.8 ■ PÁGINA 399

1. $\dfrac{1}{2\pi}\tan^2(\pi x) + \dfrac{1}{\pi}\ln|\cos(\pi x)| + C$

3. $-\sqrt{4x^2+9}/(9x) + C$ **5.** $\frac{1}{2}(e^{2x}+1)\arctan(e^x) - \frac{1}{2}e^x + C$

7. $\pi^3 - 6\pi$ **9.** $-\frac{1}{2}\tan^2(1/z) - \ln|\cos(1/z)| + C$

11. $\dfrac{2y-1}{8}\sqrt{6+4y-4y^2} + \dfrac{7}{8}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2y-1}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{12}(6+4y-4y^2)^{3/2} + C$

13. $\frac{1}{9}\,\text{sen}^3 x\,[3\ln(\text{sen}\,x) - 1] + C$ **15.** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{e^x+\sqrt{3}}{e^x-\sqrt{3}}\right| + C$

17. $\frac{1}{5}\ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10}-2}\right| + C$

19. $\frac{1}{2}(\ln x)\sqrt{4+(\ln x)^2} + 2\ln\left[\ln x + \sqrt{4+(\ln x)^2}\right] + C$

21. $\sqrt{e^{2x}-1} - \cos^{-1}(e^{-x}) + C$

25. $\frac{1}{3}\tan x\sec^2 x + \frac{2}{3}\tan x + C$

27. $\frac{1}{4}x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left(\sqrt{x^2+4} + x\right) + C$

29. $\frac{1}{10}(1+2x)^{5/2} - \frac{1}{6}(1+2x)^{3/2} + C$

31. $-\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{4}\tan^4 x + C$

33. (a) $-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$;
ambas tienen dominio $(-1, 0) \cup (0, 1)$

EJERCICIOS 5.9 ■ PÁGINA 411

1. (a) $L_2 = 6, R_2 = 12, M_2 \approx 9.6$
(b) L_2 es subestimación, R_2 y M_2 son sobrestimaciones.
(c) $T_2 = 9 < I$ (d) $L_n < T_n < I < M_n < R_n$

3. (a) $T_4 \approx 0.895759$ (subestimación)
(b) $M_4 \approx 0.908907$ (sobrestimación)
$T_4 < I < M_4$

5. (a) $M_{10} \approx 0.806598, E_M \approx -0.001879$
(b) $S_{10} \approx 0.804779, E_S \approx -0.000060$

7. (a) 2.413790 (b) 2.411453 (c) 2.412232

9. (a) 0.146879 (b) 0.147391 (c) 0.147219

11. (a) 0.451948 (b) 0.451991 (c) 0.451976

13. (a) 4.513618 (b) 4.748256 (c) 4.675111

15. (a) −0.495333 (b) −0.543321 (c) −0.526123

17. (a) $T_8 \approx 0.902333, M_8 \approx 0.905620$
(b) $|E_T| \leqslant 0.0078, |E_M| \leqslant 0.0039$
(c) $n = 71$ para T_n, $n = 50$ para M_n

19. (a) $T_{10} \approx 1.983524, E_T \approx 0.016476$;
$M_{10} \approx 2.008248, E_M \approx -0.008248$;
$S_{10} \approx 2.000110, E_S \approx -0.000110$
(b) $|E_T| \leqslant 0.025839, |E_M| \leqslant 0.012919, |E_S| \leqslant 0.000170$
(c) $n = 509$ para T_n, $n = 360$ para M_n, $n = 22$ para S_n

21. (a) 2.8 (b) 7.954926518 (c) 0.2894
(d) 7.954926521 (e) El error real es mucho menor.
(f) 10.9 (g) 7.953789422 (h) 0.0593
(i) El error real es mucho menor (j) $n \geqslant 50$

23.

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.742943	1.286599	1.014771	0.992621
10	0.867782	1.139610	1.003696	0.998152
20	0.932967	1.068881	1.000924	0.999538

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	0.257057	−0.286599	−0.014771	0.007379
10	0.132218	−0.139610	−0.003696	0.001848
20	0.067033	−0.068881	−0.000924	0.000462

Las observaciones son iguales que después del Ejemplo 1.

25.

n	T_n	M_n	S_n
6	6.695473	6.252572	6.403292
12	6.474023	6.363008	6.400206

n	E_T	E_M	E_S
6	−0.295473	0.147428	−0.003292
12	−0.074023	0.036992	−0.000206

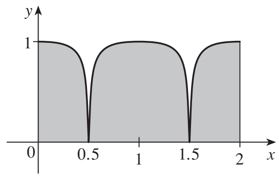
Las observaciones son iguales que después del Ejemplo 1.

27. (a) 19.8 (b) 20.6 (c) $20.5\overline{3}$

29. $37.7\overline{3}$ ft/s **31.** 10,177 megawatt-horas

33. (a) 23.44 (b) $0.341\overline{3}$ **35.** 59.4

37.



EJERCICIOS 5.10 ■ PÁGINA 421

Abreviaturas: C convergente; D, divergente

1. (a) Intervalo infinito (b) Discontinuidad infinita
(c) Discontinuidad infinita (d) Intervalo infinito

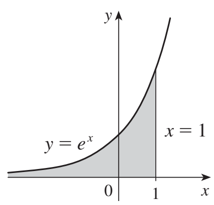
3. $\frac{1}{2} - 1/(2t^2)$; 0.495, 0.49995, 0.4999995; 0.5

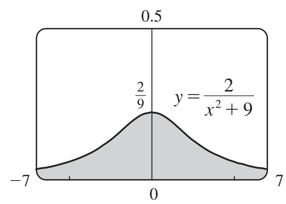
5. 2 **7.** D **9.** $2e^{-2}$ **11.** D **13.** 0 **15.** D

17. $\frac{1}{25}$ **19.** D **21.** $\pi/9$ **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** D

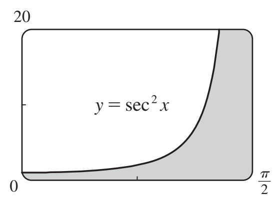
27. $\frac{32}{3}$ **29.** $\frac{75}{4}$ **31.** D **33.** $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$

35. e **37.** $2\pi/3$





39. Área infinita

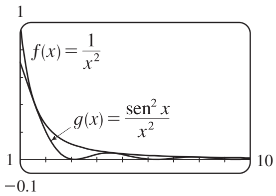


41. (a)

t	$\int_1^t [(\text{sen}^2 x)/x^2]\,dx$
2	0.447453
5	0.577101
10	0.621306
100	0.668479
1,000	0.672957
10,000	0.673407

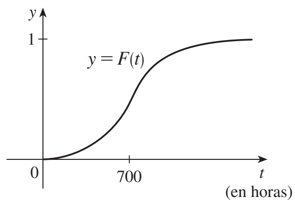
Parece que la integral es convergente.

(c)



43. C **45.** D **47.** D **49.** π **51.** $p < 1$, $1/(1 - p)$

55. (a)



(b) La rapidez a la que aumenta la fracción $F(t)$ cuando t aumenta

(c) 1; todos los focos se funden finalmente

57. 8264.5 años **59.** 1000 **63.** $C = 1$; ln 2 **65.** No

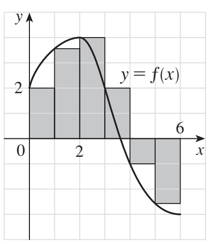
REPASO DEL CAPÍTULO 5 ■ PÁGINA 424

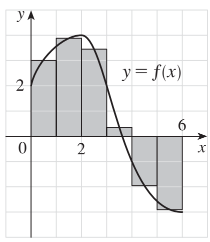
Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero
9. Verdadero **11.** Falso **13.** Falso **15.** Falso
17. Falso **19.** Falso **21.** Falso **23.** Falso

Ejercicios

1. (a) 8 (b) 5.7





3. $\frac{1}{2} + \pi/4$ **5.** 3 **7.** f es c, f' es b, $\int_0^x f(t)\,dt$ es a

9. 37 **11.** $\frac{9}{10}$ **13.** $-(1/x) - 2\ln|x| + x + C$

15. $\frac{1}{2}\ln 2$ **17.** $\frac{1}{3}$ sen 1 **19.** $(1/\pi)(e^{\pi} - 1)$

21. $\sqrt{x^2 + 4x} + C$ **23.** $5 + 10\ln\frac{2}{3}$ **25.** 0

27. $\frac{64}{5}\ln 4 - \frac{124}{25}$ **29.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+2}{t+4}\right| + C$

31. $3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{2/3} - 2x^{1/3} + 2) + C$ **33.** $\ln|1 + \sec\theta| + C$

35. $2\sqrt{1 + \text{sen}\, x} + C$ **37.** $\frac{64}{5}$ **39.** $F'(x) = x^2/(1 + x^3)$

41. $y' = (2e^x - e^{\sqrt{x}})/(2x)$ **43.** $\frac{1}{2}\left[e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + \text{sen}^{-1}(e^x)\right] + C$

45. $\frac{1}{4}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C$

47. (a) 1.090608 (sobrestimación)
(b) 1.088840 (subestimación) (c) 1.089429 (desconocida)

49. (a) $0.00\overline{6}$, $n \geqslant 259$ (b) $0.00\overline{3}$, $n \geqslant 183$

51. (a) 3.8 (b) 1.7867, 0.000646 (c) $n \geqslant 30$

53. $4 \leqslant \int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx \leqslant 4\sqrt{3}$ **55.** $\frac{1}{36}$ **57.** D **59.** 2

61. C **63.** (a) $29.1\overline{6}$ m (b) 29.5 m

65. Número de barriles de petróleo consumido del 1 de enero, 2000, al 1 de enero de 2008

67. $Ce^{-x^2/(4kt)}/\sqrt{4\pi kt}$ **69.** $e^{2x}(1 + 2x)/(1 - e^{-x})$

ENFOQUE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 429

1. Unas 1.85 in del centro **3.** $\pi/2$ **5.** $f(x) = \frac{1}{2}x$

7. e^{-2} **9.** $2k$ **11.** No existe **13.** $[-1, 2]$

15. $\sqrt{1 + \text{sen}^4 x}\cos x$ **17.** $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{12}$ **19.** 0

23. (b) $y = -\sqrt{L^2 - x^2} - L\ln\left(\dfrac{L - \sqrt{L^2 - x^2}}{x}\right)$

CAPÍTULO 6

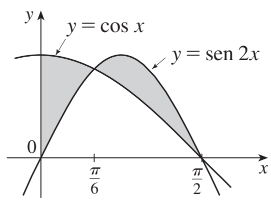
EJERCICIOS 6.1 ■ PÁGINA 436

1. $\frac{32}{3}$ **3.** $e - (1/e) + \frac{10}{3}$ **5.** $e - (1/e) + \frac{4}{3}$ **7.** $\frac{1}{3}$

9. $\frac{8}{3}$ **11.** $\frac{32}{3}$ **13.** 72 **15.** $e - 2$ **17.** ln 2

19. 0, 0.90; 0.04 **21.** 1, 1.38; 0.05

23. $\frac{1}{2}$



25. 118 ft **27.** 84 m^2 **29.** 8868; aumento en población en un periodo de 10 años

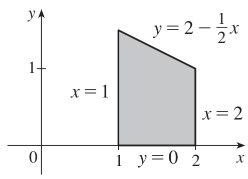
31. $r\sqrt{R^2 - r^2} + \pi r^2/2 - R^2 \operatorname{arcsen}(r/R)$

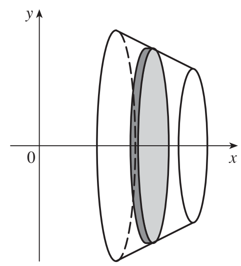
33. πab **35.** $3 - e$ **37.** $24\sqrt{3}/5$ **39.** ± 6

41. $4^{2/3}$ **43.** $f(t) = 3t^2$ **45.** $0 < m < 1$; $m - \ln m - 1$

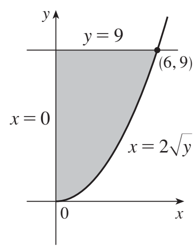
EJERCICIOS 6.2 ■ PÁGINA 446

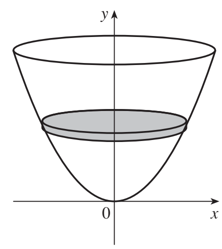
1. $19\pi/12$



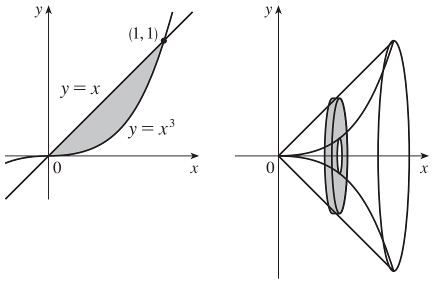


3. 162π

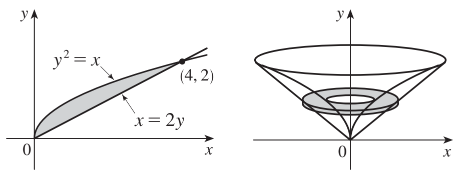




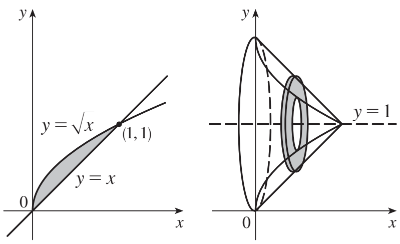
5. $4\pi/21$



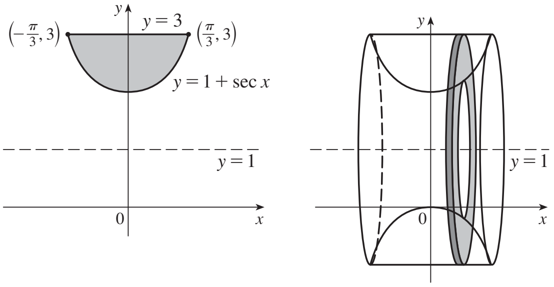
7. $64\pi/15$



9. $\pi/6$



11. $2\pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$



13. $\pi/2$ **15.** $108\pi/5$ **17.** $13\pi/30$

19. $\pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left[5^2 - \left(\sqrt{1 + y^2} + 2\right)^2\right] dy$

21. -1.288, 0.884; 23.780 **23.** $\frac{11}{8}\pi^2$

25. (a) Sólido obtenido al girar la región $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ alrededor del eje x
(b) Sólido obtenido al girar la región arriba del eje x limitada por $x = y^2$ y $x = y^4$ alrededor del eje y

27. 1110 cm^3 **29.** (a) 190 (b) 823

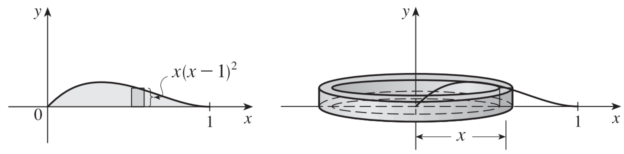
31. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ **33.** $\pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)$ **35.** $\frac{2}{3}b^2 h$ **37.** 10 cm^3

39. 24 **41.** $\frac{1}{3}$ **43.** $\frac{8}{15}$ **45.** (a) $8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$
(b) $2\pi^2 r^2 R$ **47.** (b) $\pi r^2 h$ **49.** $\frac{5}{12}\pi r^3$

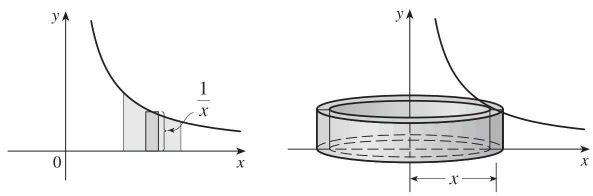
51. $8 \int_0^r \sqrt{R^2 - y^2}\sqrt{r^2 - y^2}\, dy$

EJERCICIOS 6.3 ■ PÁGINA 453

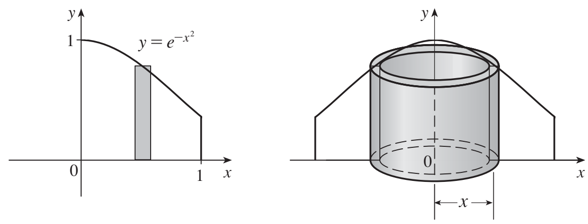
1. Circunferencia $= 2\pi x$, altura $= x(x - 1)^2$; $\pi/15$



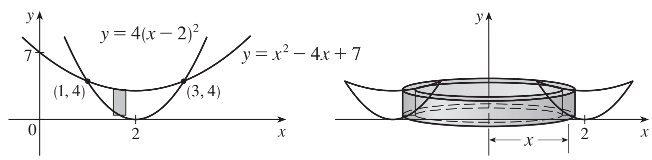
3. 2π



5. $\pi(1 - 1/e)$



7. 16π



9. $21\pi/2$ **11.** $16\pi/3$ **13.** $7\pi/15$ **15.** $8\pi/3$

17. $5\pi/14$ **19.** $\int_0^{\pi} 2\pi(4 - y)\sqrt{\operatorname{sen} y}\, dy$ **21.** 3.70

23. (a) Sólido obtenido al girar la región $0 \leqslant y \leqslant x^4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$ alrededor del eje y
(b) Sólido obtenido al girar la región limitada por (i) $x = 1 - y^2$, $x = 0$, y $y = 0$, o (ii) $x = y^2$, $x = 1$, y $y = 0$ alrededor de la recta $y = 3$

25. 0.13 **27.** $\frac{1}{32}\pi^3$ **29.** 8π **31.** $\frac{4}{3}\pi$

33. $2\pi(12 - 4 \ln 4)$ **35.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **37.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

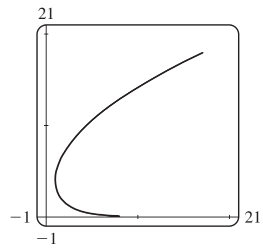
EJERCICIOS 6.4 ■ PÁGINA 458

1. $4\sqrt{5}$ **3.** 3.8202

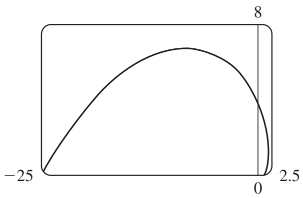
5. $\int_0^{2\pi} \sqrt{3 - 2 \operatorname{sen} t - 2 \cos t}\, dt \approx 10.0367$ **7.** $4\sqrt{2} - 2$

9. $\left(13\sqrt{13} - 8\right)/27$ **11.** $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

13. $e^3 + 11 - e^{-8}$

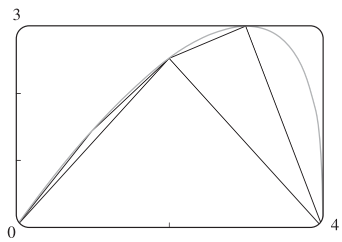


15. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$



17. 5.115840 **19.** 40.056222

21. (a), (b)



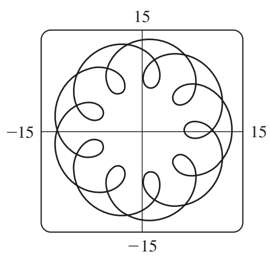
$L_1 = 4$,
$L_2 \approx 6.43$,
$L_4 \approx 7.50$

(c) $\int_0^4 \sqrt{1 + [4(3 - x)/(3(4 - x)^{2/3})]^2}\,dx$ (d) 7.7988

23. $\frac{205}{128} - \frac{81}{512}\ln 3$ **25.** $\ln(\sqrt{2} + 1)$ **27.** 209.1 m

29. 29.36 in.

33. (a) $t \in [0, 4\pi]$

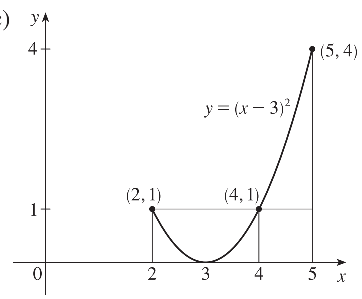


(b) 294

EJERCICIOS 6.5 ■ PÁGINA 463

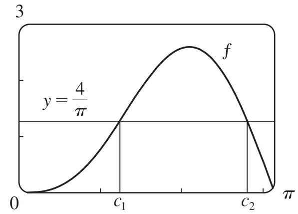
1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{45}{28}$ **5.** $2/(5\pi)$

7. (a) 1 (b) 2, 4 (c)



9. (a) $4/\pi$ (b) $\approx 1.24, 2.81$

(c)



13. 38.6 **15.** $(50 + 28/\pi)°\text{F} \approx 59°\text{F}$

17. 6 kg/m **19.** $5/(4\pi) \approx 0.4$ L

EJERCICIOS 6.6 ■ PÁGINA 472

1. 9 ft-lb **3.** 180 J **5.** $\frac{15}{4}$ ft-lb

7. (a) $\frac{25}{24} \approx 1.04$ J (b) 10.8 cm **9.** $W_2 = 3W_1$

11. (a) 625 ft-lb (b) $\frac{1875}{4}$ ft-lb **13.** 650,000 ft-lb

15. 3857 J **17.** 2450 J **19.** $\approx 1.06 \times 10^6$ J

21. $\approx 1.04 \times 10^5$ ft-lb **23.** 2.0 m

27. (a) $Gm_1m_2\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ (b) $\approx 8.50 \times 10^9$ J

29. (a) 187.5 lb/ft^2 (b) 1875 lb (c) 562.5 lb

31. 6.7×10^4 N **33.** 9.8×10^3 N **35.** 1.2×10^4 lb

37. 5.27×10^5 N

39. (a) 5.63×10^3 lb (b) 5.06×10^4 lb

(c) 4.88×10^4 lb (d) 3.03×10^5 lb

41. 2.5×10^5 N **43.** 10; 1; $\left(\frac{1}{21}, \frac{10}{21}\right)$

45. (0, 1.6) **47.** $\left(\dfrac{1}{e - 1}, \dfrac{e + 1}{4}\right)$ **49.** 60; 160; $\left(\frac{8}{3}, 1\right)$

51. (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

EJERCICIOS 6.7 ■ PÁGINA 479

1. \$38,000 **3.** \$43,866,933.33 **5.** \$407.25

7. \$12,000 **9.** 3727; \$37,753

11. $\frac{2}{3}(16\sqrt{2} - 8) \approx$ \$9.75 millones **13.** $\dfrac{(1 - k)(b^{2-k} - a^{2-k})}{(2 - k)(b^{1-k} - a^{1-k})}$

15. 1.19×10^{-4} cm^3/s **17.** 6.60 L/min **19.** 5.77 L/min

EJERCICIOS 6.8 ■ PÁGINA 486

1. (a) La probabilidad de que una llanta escogida al azar tendrá una vida útil entre 30,000 y 40,000 millas

(b) La probabilidad de que una llanta escogida al azar tendrá una vida útil de al menos 25,000 millas

3. (b) $1 - \frac{3}{8}\sqrt{3} \approx 0.35$

5. (a) $1/\pi$ (b) $\frac{1}{2}$

7. (a) $f(x) \geqslant 0$ para toda x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (b) 5

11. (a) $e^{-4/2.5} \approx 0.20$ (b) $1 - e^{-2/2.5} \approx 0.55$ (c) Si no es atendido antes de 10 minutos, recibe una hamburguesa gratis.

13. $\approx 44\%$

15. (a) 0.0668 (b) $\approx 5.21\%$

17. ≈ 0.9545

REPASO DEL CAPÍTULO 6 ■ PÁGINA 488

1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{7}{12}$ **5.** 9π **7.** (a) 0.38 (b) 0.87

9. (a) $2\pi/15$ (b) $\pi/6$ (c) $8\pi/15$ **11.** $1656\pi/5$

13. $\frac{4}{3}\pi(2ah + h^2)^{3/2}$ **15.** $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\pi(\pi/2 - x)(\cos^2 x - \frac{1}{4})\,dx$

17. (a) Sólido obtenido al girar la región $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ alrededor del eje x

(b) Sólido obtenido al girar la región $2 - \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2 - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ alrededor del eje x

19. 36 **21.** $\frac{125}{3}\sqrt{3}\ \mathrm{m}^3$ **23.** $2(5\sqrt{5} - 1)$ **25.** $\frac{15}{2}$

27. 3.2 J **29.** (a) $8000\pi/3 \approx 8378$ ft-lb (b) 2.1 ft

31. ≈ 458 lb **33.** \$7166.67 **35.** $f(x)$

37. (a) $f(x) \geqslant 0$ para toda x y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(b) ≈ 0.3455 (c) 5, sí

39. (a) $1 - e^{-3/8} \approx 0.31$ (b) $e^{-5/4} \approx 0.29$

(c) $8 \ln 2 \approx 5.55$ min

ENFOQUE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 491

1. $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$ **3.** (b) 0.2261 (c) 0.6736 m

(d) (i) $1/(105\pi) \approx 0.003$ in/s (ii) $370\pi/3$ s ≈ 6.5 min

7. Altura $\sqrt{2}\,b$, volumen $\left(\frac{28}{27}\sqrt{6} - 2\right)\pi b^3$ **9.** $\ln(\pi/2)$

13. 0.14 m **15.** $b = 2a$

CAPÍTULO 7

EJERCICIOS 7.1 ■ PÁGINA 498

3. (a) $\frac{1}{2}, -1$ **5.** (d)

7. (a) Debe ser 0 o decreciente

(c) $y = 0$ (d) $y = 1/(x + 2)$

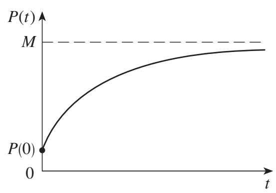
9. (a) $0 < P < 4200$ (b) $P > 4200$

(c) $P = 0$, $P = 4200$

13. (a) III (b) I (c) IV (d) II

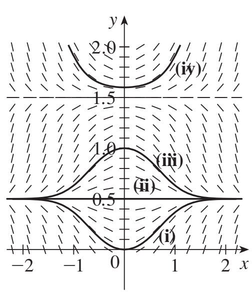
15. (a) Al principio; permanece positivo, pero decrece

(c)



EJERCICIOS 7.2 ■ PÁGINA 506

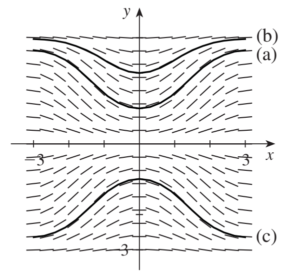
1. (a)



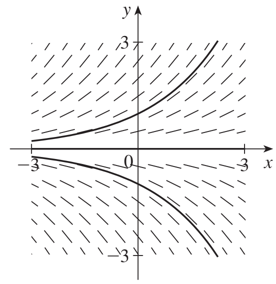
(b) $y = 0.5$, $y = 1.5$

3. III **5.** IV

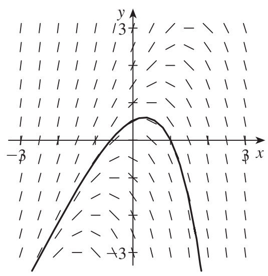
7.



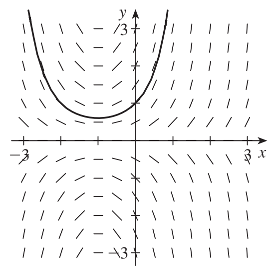
9.



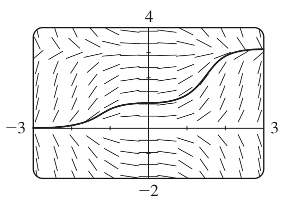
11.



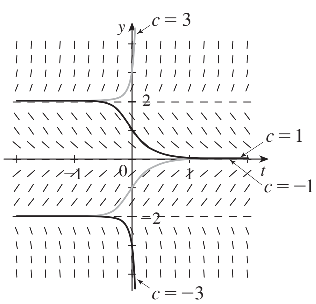
13.



15.



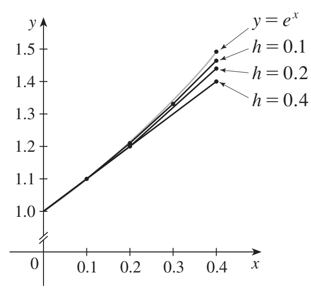
17.



$-2 \leqslant c \leqslant 2$; $-2, 0, 2$

19. (a) (i) 1.4 (ii) 1.44 (iii) 1.4641

(b)



Subestimaciones

(c) (i) 0.0918 (ii) 0.0518 (iii) 0.0277

Parece que el error también se reduce a la mitad (aproximadamente).

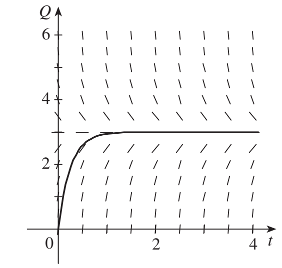
21. $-1, -3, -6.5, -12.25$ **23.** 1.7616

25. (a) (i) 3 (ii) 2.3928 (iii) 2.3701 (iv) 2.3681

(c) (i) -0.6321 (ii) -0.0249 (iii) -0.0022 (iv) -0.0002

Parece que el error también se divide entre 10 (aproximadamente).

27. (a), (d)

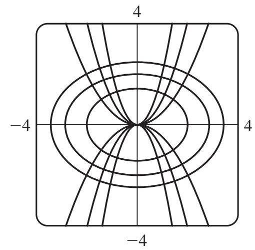


(b) 3

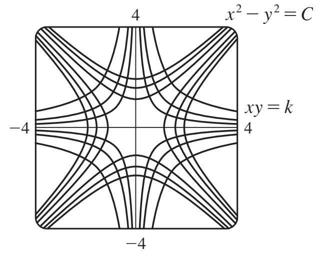
(c) Sí; $Q = 3$

(e) 2.77 C

29. $y = Cx^2$



31. $x^2 - y^2 = C$



33. $y = 1 + e^{2-x^2/2}$ **35.** $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)^2$

37. $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$; 3 **39.** $P(t) = M - Me^{-kt}$; M

41. (a) $x = a - \dfrac{4}{(kt + 2/\sqrt{a})^2}$

(b) $t = \dfrac{2}{k\sqrt{a - b}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b}{a - b}} - \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b - x}{a - b}}\right)$

43. (a) $C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k$

(b) r/k; la concentración se aproxima a r/k cualquiera que sea el valor de C_0

45. (a) $15e^{-t/100}$ kg (b) $15e^{-0.2} \approx 12.3$ kg

47. Alrededor de 4.9% **49.** g/k

51. (a) $L_1 = KL_2^k$ (b) $B = KV^{0.0794}$

53. (a) $dA/dt = k\sqrt{A}\,(M - A)$ (b) $A(t) = M\left(\dfrac{Ce^{\sqrt{M}kt} - 1}{Ce^{\sqrt{M}kt} + 1}\right)^2$, donde $C = \dfrac{\sqrt{M} + \sqrt{A_0}}{\sqrt{M} - \sqrt{A_0}}$ y $A_0 = A(0)$

EJERCICIOS 7.3 ■ PÁGINA 514

1. $y = \dfrac{2}{K - x^2}$, $y = 0$ **3.** $y = K\sqrt{x^2 + 1}$

5. $\frac{1}{2}y^2 - \cos y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C$

7. $y = \pm\sqrt{[3(te^t - e^t + C)]^{2/3} - 1}$ **9.** $u = Ae^{2t + t^2/2} - 1$

11. $y = -\sqrt{x^2 + 9}$ **13.** $u = -\sqrt{t^2 + \tan t + 25}$

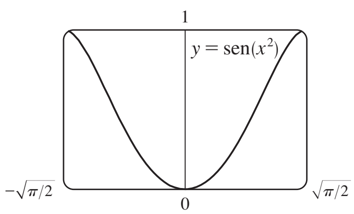
15. $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}(3 + y^2)^{3/2} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{41}{12}$

17. $y = \dfrac{4a}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} x - a$

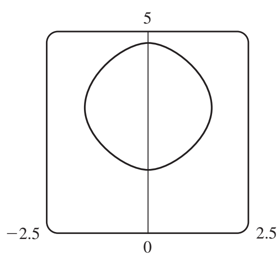
19. $y = e^{x^2/2}$ **21.** $y = Ke^x - x - 1$

23. (a) $\operatorname{sen}^{-1} y = x^2 + C$

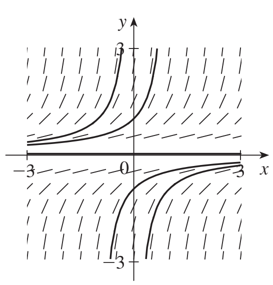
(b) $y = \operatorname{sen}(x^2)$, $-\sqrt{\pi/2} \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi/2}$ (c) No



25. $\cos y = \cos x - 1$



27. (a)



(b) $y = \dfrac{1}{K - x}$

EJERCICIOS 7.4 ■ PÁGINA 527

1. Alrededor de 235

3. (a) $100(4.2)^t$ (b) ≈ 7409 (c) $\approx 10{,}632$ bacterias/h

(d) $(\ln 100)/(\ln 4.2) \approx 3.2$ h

5. (a) 1508 millones, 1871 millones (b) 2161 millones

(c) 3972 millones; guerras en la primera mitad del siglo, mayor expectativa de vida en la segunda mitad

7. (a) $Ce^{-0.0005t}$ (b) $-2000 \ln 0.9 \approx 211$ s

9. (a) $100 \times 2^{-t/30}$ mg (b) ≈ 9.92 mg (c) ≈ 199.3 años

11. ≈ 2500 años **13.** (a) $\approx 137°$F (b) ≈ 116 min

15. (a) $13.\overline{3}°$C (b) ≈ 67.74 min

17. (a) ≈ 64.5 kPa (b) ≈ 39.9 kPa

19. (a) (i) \$3828.84 (ii) \$3840.25 (iii) \$3850.08 (iv) \$3851.61 (v) \$3852.01 (vi) \$3852.08

(b) $dA/dt = 0.05A$, $A(0) = 3000$

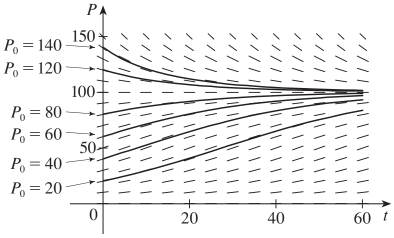
21. (a) $P(t) = \dfrac{m}{k} + \left(P_0 - \dfrac{m}{k}\right)e^{kt}$ (b) $m < kP_0$

(c) $m = kP_0$, $m > kP_0$ (d) A la baja

EJERCICIOS 7.5 ■ PÁGINA 538

1. (a) 100; 0.05 (b) Donde P es cercano a 0 o 100; en la recta $P = 50$; $0 < P_0 < 100$; $P_0 > 100$

(c)



Las soluciones se aproximan a 100; algunas aumentan y otras disminuyen, algunas tienen un punto de inflexión pero otras no lo tienen; las soluciones con $P_0 = 20$ y $P_0 = 40$ tienen puntos de inflexión en $P = 50$

(d) $P = 0$, $P = 100$; otras soluciones se alejan de $P = 0$ y hacia $P = 100$

3. (a) 3.23×10^7 kg (b) ≈ 1.55 años

5. 9000

7. (a) $dP/dt = \frac{1}{265}P(1 - P/100)$, P en miles de millones

(b) 5.49 mil millones (c) En miles de millones: 7.81, 27.72

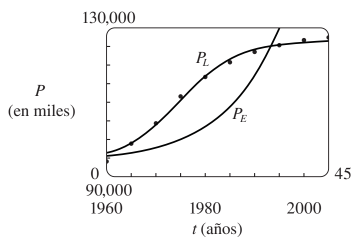
(d) En miles de millones: 5.48, 7.61, 22.41

9. (a) $dy/dt = ky(1 - y)$ (b) $y = \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-kt}}$

(c) 3:36 p.m.

13. $P_E(t) = 1578.3(1.0933)^t + 94{,}000$;

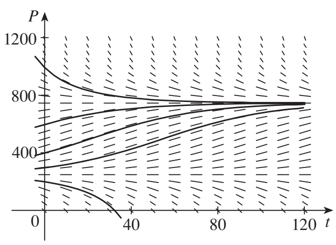
$$P_L(t) = \frac{32{,}658.5}{1 + 12.75e^{-0.1706t}} + 94{,}000$$



15. (a) Se capturan peces a razón de 15 por semana.

(b) Vea el inciso (d). (c) $P = 250$, $P = 750$

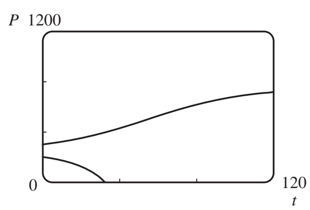
(d)



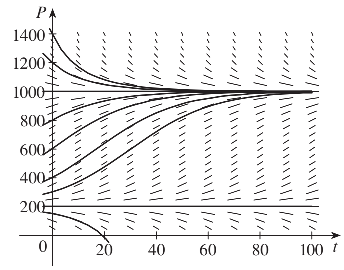
$0 < P_0 < 250$: $P \to 0$;
$P_0 = 250$: $P \to 250$;
$P_0 > 250$: $P \to 750$

(e) $P(t) = \dfrac{250 - 750ke^{t/25}}{1 - ke^{t/25}}$

donde $k = \frac{1}{11}, -\frac{1}{9}$



17. (b)



$0 < P_0 < 200$: $P \to 0$;
$P_0 = 200$: $P \to 200$;
$P_0 > 200$: $P \to 1000$

(c) $P(t) = \dfrac{m(M - P_0) + M(P_0 - m)e^{(M-m)(k/M)t}}{M - P_0 + (P_0 - m)e^{(M-m)(k/M)t}}$

19. (a) $P(t) = P_0 e^{(k/r)[\operatorname{sen}(rt - \phi) + \operatorname{sen}\phi]}$ (b) No existe

EJERCICIOS 7.6 ■ PÁGINA 545

1. (a) x = depredadores, y = presas; el crecimiento está restringido sólo por depredadores, que sólo se alimentan de presas.

(b) x = presas, y = depredadores; el crecimiento está restringido por la capacidad de carga y por depredadores, que sólo se alimentan de presas.

3. (a) Competencia

(b) (i) $x = 0$, $y = 0$: cero poblaciones

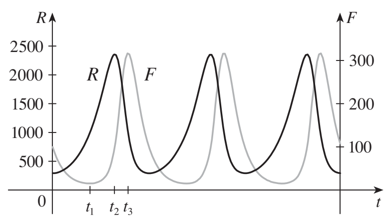
(ii) $x = 0$, $y = 400$: En ausencia de una población x, la población y se estabiliza en 400.

(iii) $x = 125$, $y = 0$: En ausencia de una población y, la población x se estabiliza en 125.

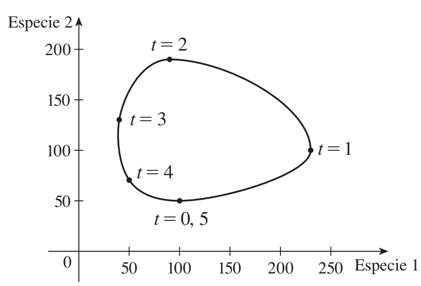
(iv) $x = 50$, $y = 300$: Ambas poblaciones son estables.

5. (a) La población de conejos empieza en unos 300, aumenta a 2400, luego disminuye otra vez a 300. La población de zorros empieza en 100, disminuye a unos 20, aumenta a unos 315, disminuye a 100, y el ciclo empieza de nuevo.

(b)



7.



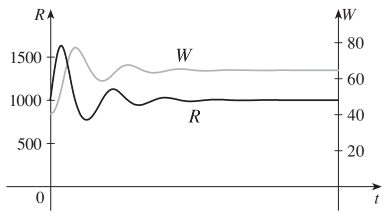
11. (a) La población se estabiliza en 5000.

(b) (i) $W = 0$, $R = 0$: cero poblaciones

(ii) $W = 0$, $R = 5000$: En ausencia de lobos, la población de conejos es siempre 5000.

(iii) $W = 64$, $R = 1000$: Ambas poblaciones son estables.

(c) Las poblaciones se estabilizan en 1000 conejos y 64 lobos.

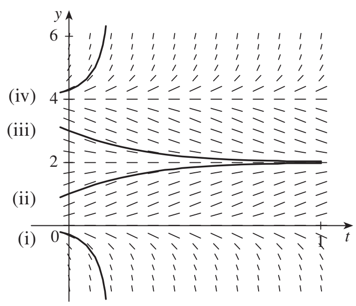
(d)


REPASO DEL CAPÍTULO 7 ■ PÁGINA 547

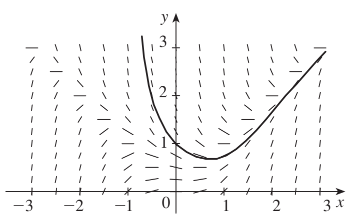
Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Verdadero

Ejercicios

1. (a)


(b) $0 \leqslant c \leqslant 4$; $y = 0$, $y = 2$, $y = 4$

3. (a)


$y(0.3) \approx 0.8$

(b) 0.75676

(c) $y = x$ y $y = -x$; hay un max loc o min loc

5. $y = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 2x^{3/2} + C)}$ **7.** $r(t) = 5e^{t-t^2}$

9. $x = C - \frac{1}{2}y^2$

11. (a) $200(3.24)^t$ (b) $\approx 22{,}040$

(c) $\approx 25{,}910$ bacterias/h (d) $(\ln 50)/(\ln 3.24) \approx 3.33$ h

13. (a) $C_0 e^{-kt}$ (b) ≈ 100 h

15. (a) $P(t) = \dfrac{2000}{1 + 19e^{-0.1t}}$; ≈ 560 (b) $t = -10 \ln \frac{2}{57} \approx 33.5$

17. (a) $L(t) = L_\infty - [L_\infty - L(0)]e^{-kt}$ (b) $L(t) = 53 - 43e^{-0.2t}$

19. 15 días **21.** $k \ln h + h = (-R/V)t + C$

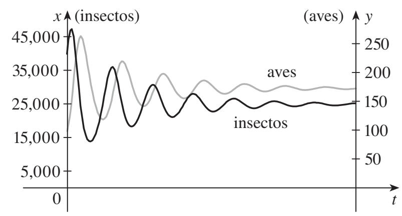
23. (a) Se estabiliza en 200,000

(b) (i) $x = 0$, $y = 0$: Cero poblaciones

(ii) $x = 200{,}000$, $y = 0$: En ausencia de aves, la población de insectos es siempre 200,000.

(iii) $x = 25{,}000$, $y = 175$: Ambas poblaciones son estables.

(c) Las poblaciones se estabilizan en 25,000 insectos y 175 aves.

(d)


ENFOQUE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 551

1. $f(x) = \pm 10e^x$ **5.** $y = x^{1/n}$ **7.** 20°C

9. (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - L^2}{4L} - \frac{1}{2}L \ln\left(\dfrac{x}{L}\right)$ (c) No

11. (a) 9.8 h (b) $31{,}900\pi$ ft^2; 2000π ft^2/h
(c) 5.1 h

13. $x^2 + (y - 6)^2 = 25$

CAPÍTULO 8

EJERCICIOS 8.1 ■ PÁGINA 562

Abreviaturas: C, convergente; D, divergente

1. (a) Una sucesión es una lista ordenada de números. También puede definirse como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.
(b) Los términos a_n se aproximan a 8 cuando n se hace grande.
(c) Los términos a_n se hacen grandes cuando n se hace grande.

3. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}$; sí; $\frac{1}{2}$ **5.** $a_n = 1/(2n - 1)$

7. $a_n = 5n - 3$ **9.** $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **11.** 5

13. 1 **15.** 1 **17.** 1 **19.** 0 **21.** 0 **23.** 0

25. 0 **27.** e^2 **29.** 0 **31.** D **33.** ln 2 **35.** 1

37. $\frac{1}{2}$ **39.** D

41. (a) 1060, 1123.60, 1191.02, 1262.48, 1338.23 (b) D

43. (a) $P_n = 1.08P_{n-1} - 300$ (b) 5734

45. (a) D (b) C **47.** (b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

49. Decreciente; sí **51.** No monotónica; no

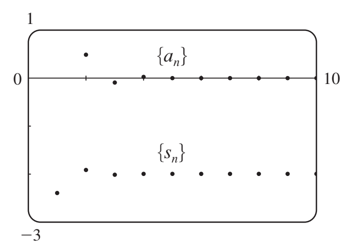
53. Convergente por el Teorema de Sucesión Monotónica; $5 \leqslant L < 8$

55. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ **57.** 62

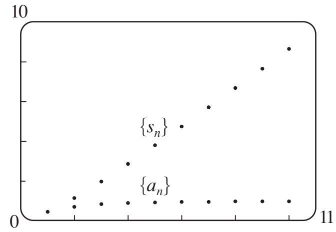
EJERCICIOS 8.2 ■ PÁGINA 572

1. (a) Una sucesión es una lista ordenada de números mientras que una serie es la *suma* de una lista de números.
(b) Una serie es convergente si la sucesión de sumas parciales es una sucesión convergente. Una serie es divergente si no es convergente.

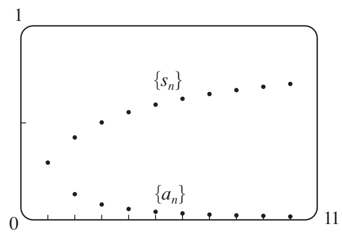
3. -2.40000, -1.92000, -2.01600, -1.99680, -2.00064, -1.99987, -2.00003, -1.99999, -2.00000, -2.00000; convergente, suma $= -2$



5. 0.44721, 1.15432, 1.98637, 2.88080, 3.80927, 4.75796, 5.71948, 6.68962, 7.66581, 8.64639; divergente



7. 0.29289, 0.42265, 0.50000, 0.55279, 0.59175, 0.62204, 0.64645, 0.66667, 0.68377, 0.69849; convergente, suma $= 1$



9. (a) C (b) D **11.** D **13.** $\frac{25}{3}$ **15.** 60 **17.** D **19.** D **21.** D **23.** $\frac{5}{2}$ **25.** D **27.** D **29.** $e/(e-1)$ **31.** $\frac{3}{2}$ **33.** $\frac{11}{6}$

35. (b) 1 (c) 2 (d) Todos los números racionales con una representación decimal finita, excepto 0.

37. $\frac{2}{9}$ **39.** 5063/3300 **41.** $-3 < x < 3$; $\dfrac{x}{3-x}$

43. Toda x; $\dfrac{2}{2-\cos x}$ **45.** 1

47. $a_1 = 0$, $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$ para $n > 1$, suma $= 1$

49. (a) 105.25 mg (b) $\dfrac{100(1-0.05^n)}{1-0.05}$ mg

(c) La cantidad de la medicina se aproxima a $\dfrac{100}{0.95} \approx 105.26$ mg

51. (a) $S_n = \dfrac{D(1-c^n)}{1-c}$ (b) 5 **53.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

57. $\dfrac{1}{n(n+1)}$ **59.** La serie es divergente.

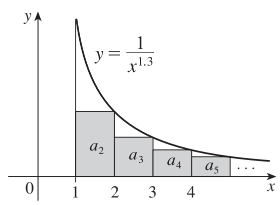
63. $\{s_n\}$ es acotada y creciente.

65. (a) $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$

67. (a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}$; $\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ (c) 1

EJERCICIOS 8.3 ■ PÁGINA 583

1. C



3. (a) Nada (b) C

5. serie p; serie geométrica; $b < -1$; $-1 < b < 1$ **7.** D

9. C **11.** D **13.** C **15.** C **17.** D **19.** C **21.** C **23.** D **25.** D **27.** C **29.** D **31.** $p > 1$

33. (a) 1.54977, error $\leqslant 0.1$ (b) 1.64522, error $\leqslant 0.005$ (c) $n > 1000$

35. 0.00145 **37.** 1.249, error < 0.1 **43.** Sí

EJERCICIOS 8.4 ■ PÁGINA 591

1. (a) Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos (b) $0 < b_{n+1} \leqslant b_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, donde $b_n = |a_n|$ (c) $|R_n| \leqslant b_{n+1}$

3. C **5.** C **7.** D **9.** C

11. Una subestimación **13.** $p > 0$ **15.** 5 **17.** -0.5507

19. 0.0676 **21.** No **23.** Sí **25.** Sí **27.** No

29. Sí **31.** Sí **33.** Sí **35.** D **37.** (a) y (d)

39. AC

EJERCICIOS 8.5 ■ PÁGINA 597

1. Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, donde x es una variable y a y las c_n son constantes

3. 1, $[-1, 1)$ **5.** 1, $[-1, 1]$ **7.** ∞, $(-\infty, \infty)$

9. 2, $(-2, 2)$ **11.** $\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **13.** 1, $[1, 3]$

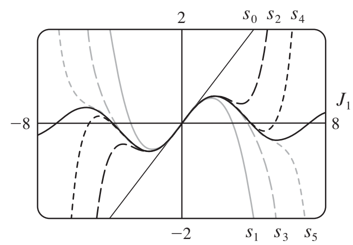
15. $\frac{1}{3}$, $\left[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ **17.** $\frac{1}{4}$, $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ **19.** 0, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

21. b, $(a-b, a+b)$ **23.** ∞, $(-\infty, \infty)$

25. (a) Sí (b) No **27.** k^k

29. (a) $(-\infty, \infty)$

(b), (c)



31. $(-1, 1)$, $f(x) = (1+2x)/(1-x^2)$ **33.** 2 **35.** No

EJERCICIOS 8.6 ■ PÁGINA 603

1. 10 **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $(-1, 1)$ **5.** $2\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n+1}} x^n$, $(-3, 3)$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{9^{n+1}} x^{2n+1}$, $(-3, 3)$ **9.** $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $(-1, 1)$

11. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$, $R = 1$

(b) $\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1) x^n$, $R = 1$

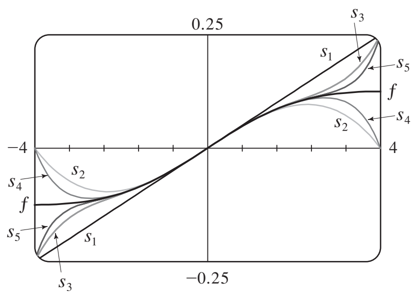
(c) $\dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n$, $R = 1$

13. $\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n5^n}$, $R = 5$

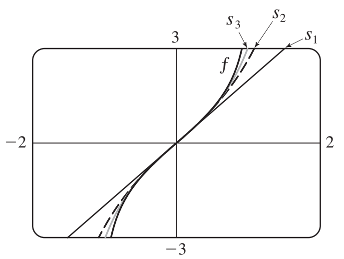
15. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n (n+1) x^{n+1}$, $R = \frac{1}{4}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n$, $R = 1$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{16^{n+1}} x^{2n+1}$, $R = 4$



21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$



23. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n+2}$, $R = 1$

25. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{4n^2 - 1}$, $R = 1$

27. 0.199989 **29.** 0.000983 **31.** 0.19740

33. (b) 0.920 **37.** $[-1, 1]$, $[-1, 1)$, $(-1, 1)$

EJERCICIOS 8.7 ■ PÁGINA 616

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$, $R = 1$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$, $R = 1$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$, $R = \infty$

11. $-1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$, $R = \infty$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!} (x-3)^n$, $R = \infty$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}$, $R = \infty$

17. $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot 3^{2n+1} \cdot n!} (x-9)^n$, $R = 9$

21. $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n$, $R = 1$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} x^n$, $R = 2$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $R = \infty$

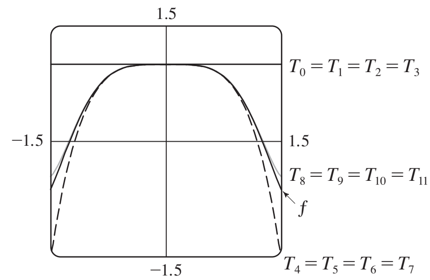
27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!} x^n$, $R = \infty$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(2n)!} x^{4n+1}$, $R = \infty$

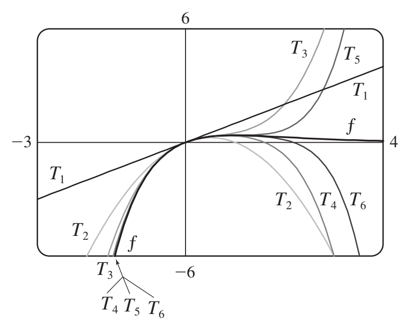
31. $\frac{1}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n! \, 2^{3n+1}} x^{2n+1}$, $R = 2$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, $R = \infty$



37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$, $R = \infty$



39. 0.81873

41. (a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

(b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1) 2^n n!} x^{2n+1}$

43. $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}$, $R = \infty$

45. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n\,(2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$

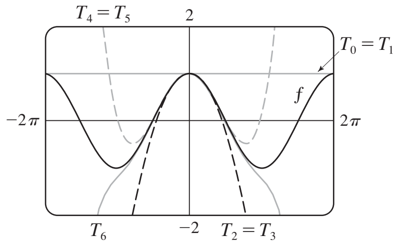
47. 0.440 **49.** 0.40102 **51.** $\frac{1}{2}$ **53.** $\frac{1}{120}$

55. $1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{25}{24} x^4$ **57.** $1 + \frac{1}{6} x^2 + \frac{7}{360} x^4$ **59.** e^{-x^4}

61. $\ln \frac{8}{5}$ **63.** $1/\sqrt{2}$ **65.** $e^3 - 1$

EJERCICIOS 8.8 ■ PÁGINA 625

1. (a) $T_0(x) = 1 = T_1(x)$, $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 = T_3(x)$,
$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = T_5(x)$,
$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$

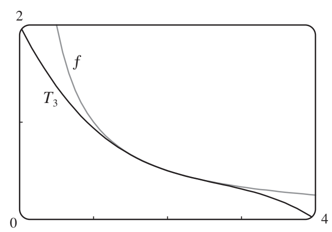


(b)

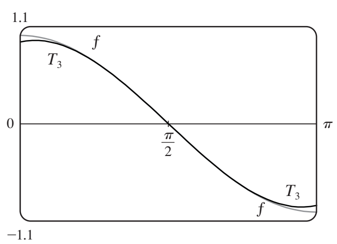
x	f	$T_0 = T_1$	$T_2 = T_3$	$T_4 = T_5$	T_6
$\frac{\pi}{4}$	0.7071	1	0.6916	0.7074	0.7071
$\frac{\pi}{2}$	0	1	-0.2337	0.0200	-0.0009
π	-1	1	-3.9348	0.1239	-1.2114

(c) Cuando n aumenta, $T_n(x)$ es una buena aproximación a $f(x)$ en un intervalo cada vez mayor.

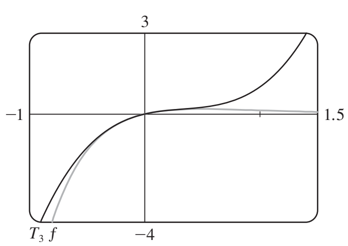
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$



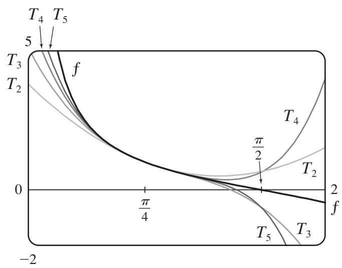
5. $-\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{6}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^3$



7. $x - 2x^2 + 2x^3$



9. $T_5(x) = 1 - 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 - \dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \dfrac{10}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^4 - \dfrac{64}{15}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^5$



11. (a) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$ (b) 1.5625×10^{-5}

13. (a) $1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{4}{81}(x-1)^3$ (b) 0.000097

15. (a) $1 + x^2$ (b) 0.00006 **17.** (a) $x^2 - \frac{1}{6}x^4$ (b) 0.042

19. 0.17365 **21.** Cuatro **23.** $-1.037 < x < 1.037$

25. $-0.86 < x < 0.86$ **27.** 21 m, no

31. (c) Difieren en unos 8×10^{-9} km.

REPASO DEL CAPÍTULO 8 ■ PÁGINA 629

Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Falso
11. Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Verdadero
19. Verdadero

Ejercicios

1. $\frac{1}{2}$ **3.** D **5.** 0 **7.** e^{12} **9.** C **11.** C **13.** D
15. C **17.** C **19.** $\frac{1}{11}$ **21.** $\pi/4$ **23.** $\frac{4111}{3330}$
25. 0.9721 **27.** 0.18976224, error $< 6.4 \times 10^{-7}$
31. 4, $[-6, 2)$ **33.** 0.5, $[2.5, 3.5)$

35. $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right]$

37. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, $R = 1$ **39.** $\ln 4 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$, $R = 4$

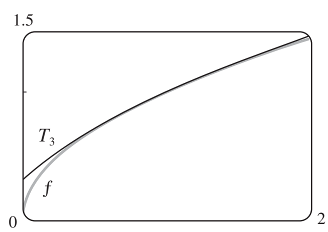
41. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

43. $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{n!\,2^{6n+1}}x^n$, $R = 16$

45. $C + \ln|x| + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n \cdot n!}$

47. (a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

(b)



(c) 0.000006

49. $-\frac{1}{6}$

PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ■ PÁGINA 631

1. $15!/5! = 10{,}897{,}286{,}400$

3. (a) $s_n = 3 \cdot 4^n,\ l_n = 1/3^n,\ p_n = 4^n/3^{n-1}$ (c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

5. $\ln \frac{1}{2}$ **11.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1$

13. $-\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi k\right)^2$ donde k es un entero positivo

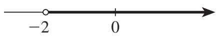
APÉNDICES

EJERCICIOS A ■ PÁGINA A6

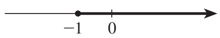
1. 18 **3.** $5 - \sqrt{5}$ **5.** $2 - x$

7. $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x \geqslant -1 \\ -x - 1 & \text{para } x < -1 \end{cases}$ **9.** $x^2 + 1$

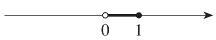
11. $(-2, \infty)$



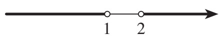
13. $[-1, \infty)$



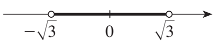
15. $(0, 1]$



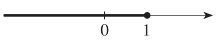
17. $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$



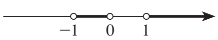
19. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$



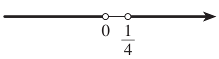
21. $(-\infty, 1]$



23. $(-1, 0) \cup (1, \infty)$



25. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

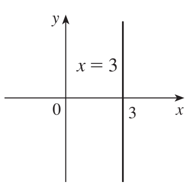


27. $10 \leqslant C \leqslant 35$ **29.** (a) $T = 20 - 10h,\ 0 \leqslant h \leqslant 12$ (b) $-30°\text{C} \leqslant T \leqslant 20°\text{C}$ **31.** $2, -\frac{4}{3}$ **33.** $(-3, 3)$
35. $(3, 5)$ **37.** $(-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$
39. $[1.3, 1.7]$ **41.** $x \geqslant (a + b)c/(ab)$

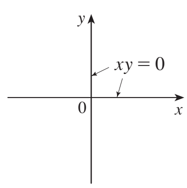
EJERCICIOS B ■ PÁGINA A16

1. 5 **3.** $-\frac{9}{2}$

7.

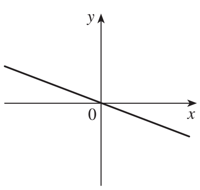


9.

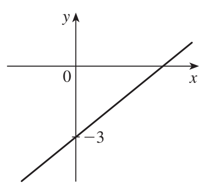


11. $y = 6x - 15$ **13.** $5x + y = 11$ **15.** $y = 3x - 2$
17. $y = 3x - 3$ **19.** $y = 5$ **21.** $x + 2y + 11 = 0$
23. $5x - 2y + 1 = 0$

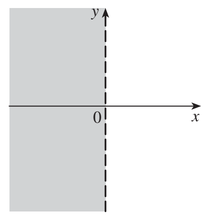
25. $m = -\frac{1}{3}$, $b = 0$



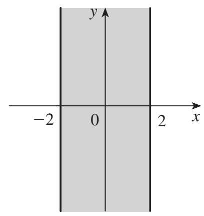
27. $m = \frac{3}{4}$, $b = -3$



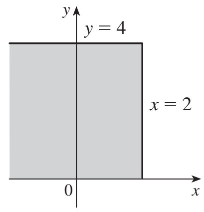
29.



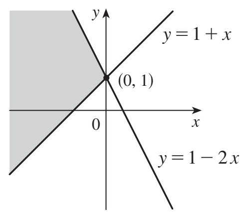
31.



33.



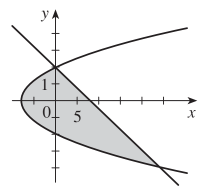
35.



37. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ **39.** $(2, -5), 4$ **41.** $(1, -2)$

45. $y = x - 3$

53.

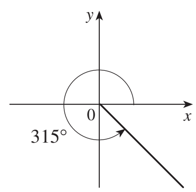


EJERCICIOS C ■ PÁGINA A25

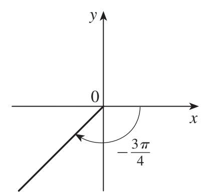
1. (a) $7\pi/6$ (b) $\pi/20$ **3.** (a) $720°$ (b) $-67.5°$

5. 3π cm **7.** $\frac{2}{3}$ rad $= (120/\pi)°$

9. (a)



(b)



11. $\operatorname{sen}(3\pi/4) = 1/\sqrt{2},\ \cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2},\ \tan(3\pi/4) = -1,$ $\csc(3\pi/4) = \sqrt{2},\ \sec(3\pi/4) = -\sqrt{2},\ \cot(3\pi/4) = -1$

13. $\cos\theta = \frac{4}{5},\ \tan\theta = \frac{3}{4},\ \csc\theta = \frac{5}{3},\ \sec\theta = \frac{5}{4},\ \cot\theta = \frac{4}{3}$

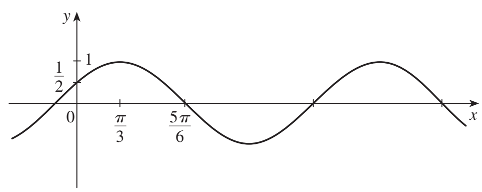
15. 5.73576 cm **17.** 24.62147 cm **27.** $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

29. $\pi/3, 5\pi/3$ **31.** $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 3\pi/2$

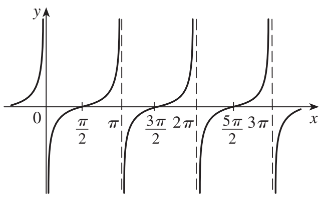
33. $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$ y $5\pi/6 \leqslant x \leqslant 2\pi$

35. $0 \leqslant x < \pi/4,\ 3\pi/4 < x < 5\pi/4,\ 7\pi/4 < x \leqslant 2\pi$

37.



39.



EJERCICIOS D ■ PÁGINA A33

1. $\frac{4}{7}$ (o cualquier número positivo más pequeño)
3. 1.44 (o cualquier número positivo más pequeño)
5. 0.0906 (o cualquier número positivo más pequeño)
7. 0.11, 0.012 (o cualquier número positivo más pequeño)
11. (a) $\sqrt{1000/\pi}$ cm (b) Dentro de aproximadamente 0.0445 cm (c) Radio; área; $\sqrt{1000/\pi}$; 1000; 5; ≈ 0.0445
13. (a) 0.025 (b) 0.0025 **17.**
19. (a) $x > 100$ **21.** (a) 0 (b) 9, 11

EJERCICIOS F ■ PÁGINA A42

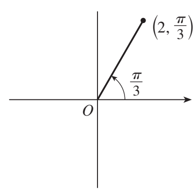
1. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ **3.** $3^4 + 3^5 + 3^6$
5. $-1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9}$ **7.** $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$
9. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1}$ **11.** $\sum_{i=1}^{10} i$
13. $\sum_{i=1}^{19} \frac{i}{i+1}$ **15.** $\sum_{i=1}^{n} 2i$ **17.** $\sum_{i=0}^{5} 2^i$ **19.** $\sum_{i=1}^{n} x^i$
21. 80 **23.** 3276 **25.** 0 **27.** 61 **29.** $n(n+1)$
31. $n(n^2 + 6n + 17)/3$ **33.** $n(n^2 + 6n + 11)/3$
35. $n(n^3 + 2n^2 - n - 10)/4$
41. (a) n^4 (b) $5^{100} - 1$ (c) $\frac{97}{300}$ (d) $a_n - a_0$
43. $\frac{1}{3}$ **45.** 14 **49.** $2^{n+1} + n^2 + n - 2$

EJERCICIOS G ■ PÁGINA A50

1. (a) $\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{3x+1}$ (b) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$
3. (a) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{Dx+E}{x^2+4}$
(b) $\dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{(x+3)^2} + \dfrac{C}{x-3} + \dfrac{D}{(x-3)^2}$
5. (a) $1 + \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$
(b) $\dfrac{At+B}{t^2+1} + \dfrac{Ct+D}{t^2+4} + \dfrac{Et+F}{(t^2+4)^2}$
7. $x + 6\ln|x-6| + C$
9. $2\ln|x+5| - \ln|x-2| + C$ **11.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$
13. $a\ln|x-b| + C$ **15.** $\frac{7}{6} + \ln\frac{2}{3}$
17. $\frac{27}{5}\ln 2 - \frac{9}{5}\ln 3$ $\left(\text{o } \frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}\right)$
19. $-\dfrac{1}{36}\ln|x+5| + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x+5} + \dfrac{1}{36}\ln|x-1| + C$
21. $2\ln|x| + (1/x) + 3\ln|x+2| + C$
23. $\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\tan^{-1}(x/3) + C$
25. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + (1/\sqrt{2})\tan^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$
27. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + C$
29. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$
31. $\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \dfrac{1}{8(x^2+4)} + C$
33. $\dfrac{-1}{2(x^2+2x+4)} - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{2(x+1)}{3(x^2+2x+4)} + C$
35. $2 + \ln\frac{25}{9}$ **37.** $\ln\left[\dfrac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right] + C$
39. $-\frac{1}{2}\ln 3 \approx -0.55$
41. $t = -\ln P - \frac{1}{9}\ln(0.9P + 900) + C$, donde $C \approx 10.23$
43. (a) $\dfrac{24{,}110}{4879}\dfrac{1}{5x+2} - \dfrac{668}{323}\dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{9438}{80{,}155}\dfrac{1}{3x-7} + \dfrac{1}{260{,}015}\dfrac{22{,}098x + 48{,}935}{x^2+x+5}$
(b) $\dfrac{4822}{4879}\ln|5x+2| - \dfrac{334}{323}\ln|2x+1| - \dfrac{3146}{80{,}155}\ln|3x-7| + \dfrac{11{,}049}{260{,}015}\ln(x^2+x+5) + \dfrac{75{,}772}{260{,}015\sqrt{19}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{19}} + C$
El CAS omite signos de valor absoluto y la constante de integración.

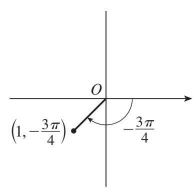
EJERCICIOS H.1 ■ PÁGINA A59

1. (a)



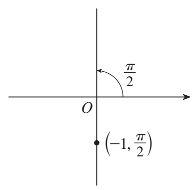
$(2, 7\pi/3), (-2, 4\pi/3)$

(b)



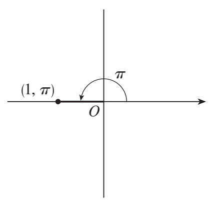
$(1, 5\pi/4), (-1, \pi/4)$

(c)



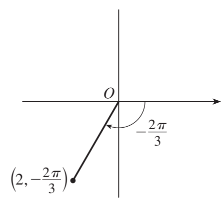
$(1, 3\pi/2), (-1, 5\pi/2)$

3. (a)



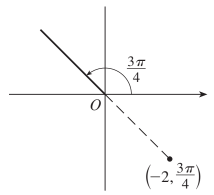
$(-1, 0)$

(b)



$(-1, -\sqrt{3})$

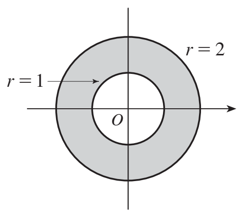
(c)



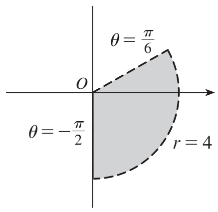
$\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

5. (a) (i) $\left(2\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$ (ii) $\left(-2\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$
(b) (i) $(2, 2\pi/3)$ (ii) $(-2, 5\pi/3)$

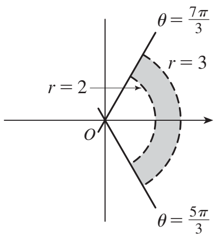
7.



9.

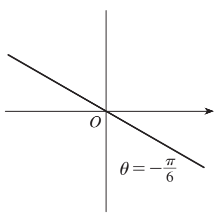


11.

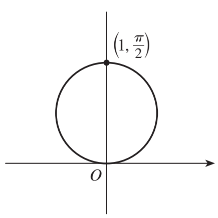


13. Círculo, centro $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, radio $\frac{3}{2}$
15. Recta horizontal, 1 unidad arriba del eje x
17. $r = -\cot\theta \csc\theta$ **19.** $r = 2c \cos\theta$
21. (a) $\theta = \pi/6$ (b) $x = 3$

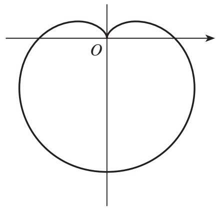
23.



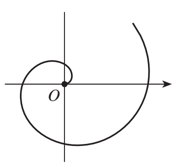
25.



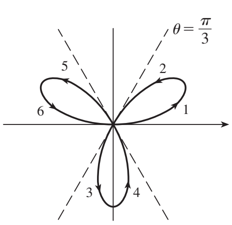
27.



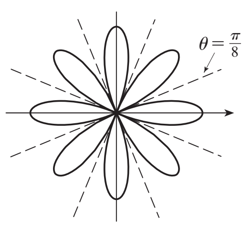
29.



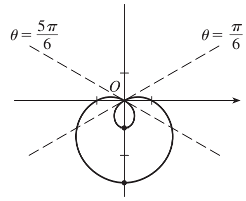
31.



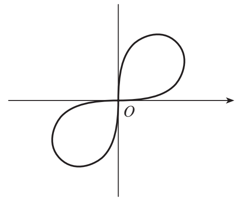
33.



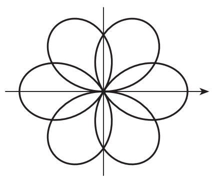
35.



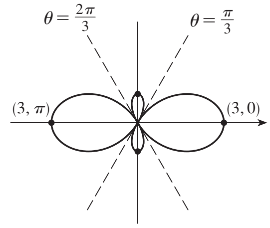
37.



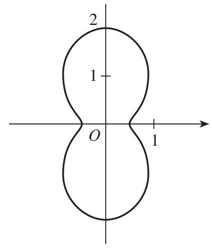
39.



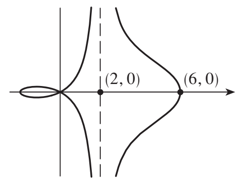
41.



43.

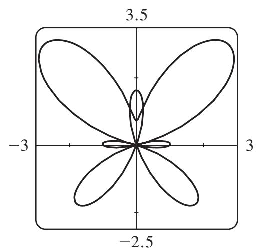


45.

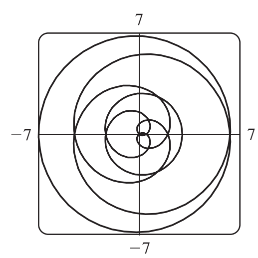


47. (a) Para $c < -1$, el lazo interior empieza en $\theta = \text{sen}^{-1}(-1/c)$ y termina en $\theta = \pi - \text{sen}^{-1}(-1/c)$; para $c > 1$, empieza en $\theta = \pi + \text{sen}^{-1}(1/c)$ y termina en $\theta = 2\pi - \text{sen}^{-1}(1/c)$.
49. $-\pi$ **51.** 1
53. Horizontal en $\left(3/\sqrt{2}, \pi/4\right)$, $\left(-3/\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$; vertical en $(3, 0)$, $(0, \pi/2)$
55. Horizontal en $\left(\frac{3}{2}, \pi/3\right)$, $(0, \pi)$ [el polo], y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/3\right)$; vertical en $(2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$
57. Centro $(b/2, a/2)$, radio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

59.



61.

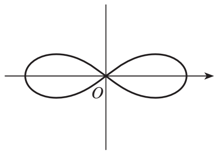


63. Por rotación en sentido contrario al de las manecillas de un reloj todo un ángulo $\pi/6$, $\pi/3$, o α alrededor del origen
65. (a) Una rosa con n lazos si n es impar y $2n$ lazos si n es par
(b) Número de lazos es siempre $2n$
67. Para $0 < a < 1$, la curva es un óvalo, que desarrolla un hoyuelo cuando $a \to 1^-$. Cuando $a > 1$, la curva se divide en dos partes, una de las cuales tiene un lazo.

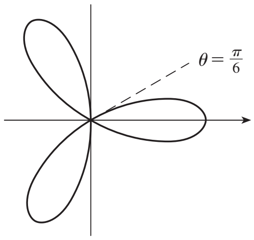
EJERCICIOS H.2 ■ PÁGINA A65

1. $\pi^5/10{,}240$ **3.** $\pi/12 + \frac{1}{8}\sqrt{3}$ **5.** π^2 **7.** $\frac{41}{4}\pi$

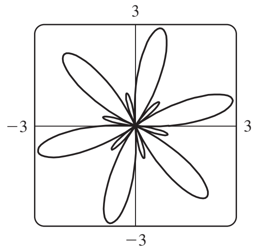
9. 4



11. π



13. 3π



15. $\frac{1}{8}\pi$ **17.** $\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ **19.** $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **21.** π

23. $\frac{5}{24}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ **25.** $\frac{1}{2}\pi - 1$ **27.** $\frac{1}{4}(\pi + 3\sqrt{3})$

29. $(1, \theta)$ donde $\theta = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$
y $(-1, \theta)$ donde $\theta = 7\pi/12, 11\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$

31. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi/3), (\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\pi/3)$, y el polo

33. Intersección en $\theta \approx 0.89, 2.25$; área ≈ 3.46 **35.** π

37. $\frac{8}{3}[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1]$ **39.** 29.0653

EJERCICIOS I ■ PÁGINA A74

1. $8 - 4i$ **3.** $13 + 18i$ **5.** $12 - 7i$ **7.** $\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$

9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$ **15.** $12 + 5i, 13$

17. $4i, 4$ **19.** $\pm\frac{3}{2}i$ **21.** $-1 \pm 2i$

23. $-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$ **25.** $3\sqrt{2}\,[\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)]$

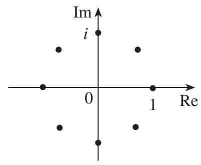
27. $5\{\cos[\tan^{-1}(\frac{4}{3})] + i \operatorname{sen}[\tan^{-1}(\frac{4}{3})]\}$

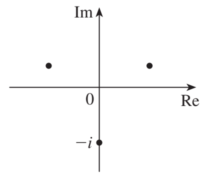
29. $4[\cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2)], \cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)$,
$\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i \operatorname{sen}(-\pi/6)]$

31. $4\sqrt{2}\,[\cos(7\pi/12) + i \operatorname{sen}(7\pi/12)]$,
$(2\sqrt{2})[\cos(13\pi/12) + i \operatorname{sen}(13\pi/12)], \frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6)]$

33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$

37. $\pm 1, \pm i, (1/\sqrt{2})(\pm 1 \pm i)$ **39.** $\pm(\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i, -i$





41. i **43.** $\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ **45.** $-e^2$

47. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$,
$\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$

Índice analítico

PR denota números de páginas de referencia

Abel, Niels, 213
aceleración
    como rapidez de cambio, 153, 228
    gravitacional, 464
afelio, A67
Agnesi, Maria, bruja de, 78, 189
Airy, George, sir, 598
ajuste de curva, 26
alfombra de Sierpinski, 574
álgebra, repaso de, PR1
algebraica, función, 32
ángulo(s)
    curvas entre, 253
    de un arco iris, 270
    de desviación 2,70
    negativo, A18
    posición estándar, A18
    positivo, A18
antiderivada, 160, 317
aproximación
    a *e*, 180
    cuadrática, 247
    lineal, 241
    por desigualdad de Taylor, 620
    por diferenciales, 243
    por el método de Newton, 312
    por la regla
        del punto medio, 349, 402
        del trapecio, 402
        de Simpson, 406
    por polinomios de Taylor, 619
    por sumas de Riemann, 344
    recta tangente, 241
Aquiles y la tortuga, 6
arco iris, formación y ubicación de, 270
arcseno, función 216
área, 4, 332
    bajo una curva, 332, 337
    de un círculo, 390
    de un sector de un círculo, A62
    en coordenadas polares, A62
    encerrada por una curva paramétrica, 435
    entre curvas, 432, 433
    función de, 366
    neta, 344
    por agotamiento, 4, 107
    problema de, 4, 332
argumento de un número complejo, A70
Arquímedes, 374
asientos en un cine, 464
asíntota(s)
    al graficar,
    de una hipérbola, A15
    horizontal, 128
    vertical, 125
astroide, 79

Barrow, Isaac, 4, 107, 145, 367, 374
base
    de un cilindro, 438
    de un logaritmo, 65
        cambio de, 67
béisbol y cálculo, 529
Bernoulli, James, 508
Bernoulli, John, 291, 508, 606
Bessel, Friedrich, 594
    función de, 216, 594, 597
Bézier, Pierre, 208
biunívoca, función, 61
bruja de Maria Agnesi, 78, 189

cable (colgante), 227
calculadora, de gráficas, 46, 74, 282, A58
cálculo, 10
    diferencial, 5
    integral, 5
    invención del, 374
cambio de
    base, fórmula para, 67
    de variables en una integral, 375
campile de Eudoxio, 215
campo
    de dirección, 499, 500, 531
    pendiente, 500
cancelación de ecuaciones
    para funciones inversas, 63
    para logaritmos, 65
Cantor, Georg, 574
capa cilíndrica, 450
capacidad de carga, 160, 240, 530
cardioide, 214, A55
carga, eléctrica, 231
Cassini, Giovanni, A61
catástrofe ultravioleta, 627
catenaria, 227
caudal, 477, 478
Cavalieri, 408

centro de
  de masa, 469, 474
  de una placa, 472
  gravedad, 469
centroide de una región plana, 470
cicloide, 75
cilindro, 438
  circular recto, 438
  de aproximación, 440
circuito eléctrico, 507, 510
circulación sanguínea, 234, 309, 477
círculo, A9
  área de un, 390
  ecuación de, A9
  grueso, 214, 460
cisoide de Diocleciano, 82, A60
coeficiente(s)
  binomial, 612
    descubrimiento por Newton, 618
  de diferencia, 14
  de desigualdad, 365
  de fricción, 196, 269
  de un polinomio, 29
  de una serie de potencias, 592
combinaciones de funciones, 41
comportamiento final de una función, 134
composición
  continua de interés, 298, 526
  de funciones, 42, 197
    continuidad de, 119
    derivada de, 199
compresibilidad isotérmica, 232
computadora, graficar con, 46, 282, A58
concavidad, 159, 274
concentración, 231
concoide, A60
concurso de longitud de arco, 460
condición inicial, 497
conjugado complejo, A68
conjunto Cantor, 574
cono, A12
  truncado, 447
constante
  de eliminación de una droga, 548
  de resorte, 466, 496
consumo de potencia, cálculo de, 362
continuidad
  de un intervalo, 115
  de una función, 113
  desde la derecha, 115
  desde la izquierda, 115
convergencia
  absoluta, 588
  de una integral impropia, 414, 418
  de una serie, 566
  de una sucesión, 556
  intervalo de, 595
  radio de, 595
coordenada *x*, A7
coordenada *y*, A7
coordenadas polares, A52
  área en, A62
  cambio a coordenadas cartesianas, A52
  secciones cónicas en, A66
corriente, 231
  eléctrica a un foco de destello, 91-92, 207
costo marginal, función de, 140, 236, 304, 361
crecimiento
  alométrico, 516
  bacterial, 519, 535
  exponencial, 519, 535
  poblacional, 55, 56, 520
    de bacterias, 519
    modelos de, 494
    mundo *y*, 56, 521
  ley natural del, 520
cruce con eje
  x, A11
  y, A11
cuadrante, A7
cuadrática, función, 29
cúbica, función, 29
cúbico de Tshirnhausen, 215
curva(s)
  de aprendizaje, 499
  de Bézier, 75, 208
  de catástrofe de cola de golondrina, 78
  de copo de nieve, 632
  de demanda, 476
  de Lorenz, 365
  de nariz de bala, 52, 205
  de solución, 500
  del diablo, 215
  espiral de Cornu, 460
  longitud de una, 455
  ortogonales, 215
  paramétricas, 71
    tangente en, 203
  polar, A53
    gráfica de, A53, A58
    longitud de arco de, A64
    recta tangente a, A56
  serpentina, 189
  uniforme, 455

datación por radiocarbono, 528
De Moivre, Abraham, A71
cantidad de movimiento de un objeto, 529
decaimiento
  ley de, natural, 520
  radiactivo, 523
densidad
  de un líquido, 468
  lineal, 230, 361
  masa vs. peso, 468
depredador, 540
derivación, 150
  de una serie de potencia, 599
  fórmulas para, 188, PR5
  implícita, 209, 210
  integración de, 599
  logarítmica, 223
  operadores, 150
  término por término, 600
derivada(s), 135, 138
  como la pendiente de una tangente, 135
  como una función, 146
  de funciones
    exponenciales, 180, 201
    hiperbólicas, 227
    logarítmicas, 221
    trigonométricas, 190, 194
      inversas, 216, 218
  de orden superior, 153
  de un cociente, 186, 187
  de un polinomio, 174
  de un producto, 183, 184
  de una función
    compuesta, 197
    constante, 174
    de potencia, 175
    inversa, 221
  de una integral, 368
  de una rapidez de cambio, 135
  de una serie de potencia, 599
  dominio de, 146
  notación, 150
  segunda, 153
  tercera, 154
Descartes, René, A7
descenso de un avión, determinar inicio del, 209
desigualdad
  de Taylor, 607
  del triángulo, A35
  reglas para la, A2
desintegración
  exponencial, 519
  radiactiva, 523
desplazamiento, 361
  de una función, 38
desviación estándar, 485
diagrama
  de flechas, 13
  de máquina de una función, 13
diferencia indeterminada, 294
diferencial, 243
directriz, A12
discontinuidad, 113
  de salto, 114
  infinita, 114
  removible, 114
dispersión, 271
distancia
  entre números reales, A5
  entre puntos en un plano, A8
distribución normal, 485

divergencia
de una integral impropia, 414, 418
de una serie infinita, 566
de una sucesión, 556
prueba para, 570
división de serie de potencias, 615
dominio de una función, 12

e (el número), 57, 180
como límite, 225
como suma de una serie infinita, 609
ecuación(es)
autónoma, 503
cancelación de, 63
de depredador-presa, 540, 541
de diferencia logística, 564
de Lotka-Volterra, 541
de *n*-ésimo grado, hallar raíces de, 213
de pendiente e intercepción de una recta, A11
de primer orden, 496
de punto y pendiente de una recta, 19, A10
de punto y pendiente, 19, A10
de segundo orden, 496
de un círculo, A9
de una
curva, A9
elipse, A14
gráfica, A9
hipérbola, A15
parábola, A13
recta, A1, A11
de van der Waals, 215
diferencial, 182, 319, 493-494, 496
autónoma, 503
de primer orden, 496
de segundo orden, 496
logística, 495, 531, 532, 564
solución analítica de, 533
separable, 508
familia de soluciones, 494, 497
forma de dos puntos de cruce, A16
integral, 514
logística, 531
orden de, 496
paramétricas, 71
pendiente e intercepción, A11
polar, A53
de una cónica, A66
gráfica de, A53
separable, 508
solución de, 496
solución general de, 497
efecto multiplicador, 573
eje(s)
coordenados, A7
de elipse, A14
de una parábola, A12
polar, A51
x, A7
y, A7
elipse, 214, A14
girada, 216
focos, A14
propiedad de reflexión, A14
energía cinética, 529
epicicloide, 79
epitrocoide, 460
equipo de gráficas. *Véase* sistema computarizado de álgebra
error
en aproximación de Taylor, 620
en integración aproximada, 403, 404
porcentaje, 245
relativo, 244
espiral de Cornu, 460
estereografía estelar, 422
estimación de error para
la regla
de Simpson, 409
del punto medio, 403
del trapecio, 403
serie alterna, 620
estimación de la suma de una serie, 580, 587
estimaciones de residuo
para la prueba
de comparación, 580
integral, 581
para la serie alternante, 587
estiramiento de una función, 38
estrategia para
magnitudes relacionadas, 258
problemas de optimización, 299, 300
resolver problemas, 83
Euclides, 107
Eudoxio, 3, 107, 374
Euler, Leonhard, 58, 503, 609
excedente de
consumidor, 476, 477
productor, 479
excentricidad, A68
expansión de fracción continuada, 564
exponenciales complejas, A73
exponentes, leyes de, 54
extrapolación, 28

familia
de epicicloides e hipocicloides, 79
de funciones, 50, 279, 286
exponenciales, 54
de soluciones, 494, 497
Fermat, Pierre, 265, 374
Fibonacci, 555, 563
figura de Lissajous, 74, 79
flujo de inversión neta, 480
foco, A12
de destello, corrientes a, 91, 92, 207
de una sección cónica, A12, A66
de una parábola, A12
de una elipse, A14
de una hipérbola, A15
folio de Descartes, 210
forma polar de un número complejo, A69
formación de capital, 480
formas indeterminadas de límites, 290
fórmula
cuadrática, PR1
de longitud de arco, 456
de reducción, 386
de antiderivación, 318, PR5
de Euler, A74
de la distancia, A8
de doble ángulo, A22
de la adición para seno y coseno, A22, PR2
de sustracción para seno y coseno, A22
de la mitad de un ángulo, A23
Fourier, Joseph, 237
fracciones, parciales, 391, A43
Fresnel, Augustin, 370
fuerza
de un líquido, 467-468
ejercida por fluido, 467, 468
función(es), 12
algebraica, 32
arcseno, 216
biunívoca, 61
combinaciones de, 41
compuesta, 42
con polinomios 29
continuidad de, 116
concavidad de, 159
constante, 174
continua, 113
coseno, A19
derivada de, 193
gráfica de, 33, A23
serie de potencias para, 610, 611
creciente, 21, 158, 273
cuadrática, 29
cúbica, 29
de abastecimiento, 479
de Airy, 598
de área, 366
de Bessel, 216, 594, 597
de costo, 235, 304
marginal, 140, 236, 304, 361
promedio, 308
de demanda, 304, 476
de densidad de probabilidad, 481
de entero máximo, 109
de error, 373
de Fresnel, 370
de Gompertz, 537, 540
de Heaviside, 45
de ingreso marginal, 304
de intervalo de, 12
de polinomios, 29

de posición, 137
de potencia, 30, PR3
derivada de, 174
de raíz, 31
de utilidad marginal, 304
de valor absoluto, 18
decreciente, 21, 158, 273
definida por partes, 18
demanda, 304, 476
densidad de probabilidad, 481
derivada de una, 138
desplazada, 38
diagrama de
flechas de, 13
máquina de una, 13
diferencial, 150
discontinua, 113
dominio de una, 12
elementales, 398
error, 373
escalón, 19
estirada, 38
exponencial(es), 34, 52, 179, PR4
derivada de, 180, 201
gráficas de, 54, 180
integración de, 348, 357, 377, 613, 614
límites de, 131
natural, 58, 180
serie de potencia para, 606
familia de, 50, 279, 286
gráfica de, 13
hiperbólica, 227
inversa, PR4
impar, 20
implícita, 209, 210
ingreso marginal, 304
integral seno, 374
inversa(s), 61, 62
pasos para hallar una, 64
límite de, 95
lineal, 25
logarítmica(s), 34, 65
con base a, 65
derivadas de, 180, 221
gráficas de, 65, 68, 69, 180
límites de, 126
natural, 34, 65, 66
propiedades de, 65, 66
no derivable, 152
no diferenciable, 152
no integrable, 398
par, 19
posición, 137
potencia, 30, 174
punto fijo de, 170
racional, 32, A43
continuidad de, 116
integración por fracciones parciales, A43
raíz, 31
rampa, 46
recíproca, 32
reflejada, 38
representación como una serie de potencia, 598
representaciones de, 12, 14
secante, A19
derivada de, 194
gráfica de, A24
seno, A19
derivada de, 193, 194
gráfica, 33, A23
serie de potencias para, 610
inversa, 216
integral, 374
simétricas, integrales de, 380
tabular, 15
tangente, A19
derivada de, 194
gráfica, 34, A24
transformación de, 37-38
traslación de, 37
trigonométricas, 33, A19, PR2
derivadas de, 190, 194
integrales de, 358
inversas, 216, 218, A24
límites que involucran, 191, 193
gráficas de, 33, 34, A23
inversas, 216, 218, A24
uniforme, 455
utilidad, 304
marginal, 304
valor de, 12
máximo y mínimo de, 262
promedio de, 460, 461, 482
extremo de, 263

G (constante gravitacional), 239, 473
Galileo, 76, A12
Galois, Evariste, 213
Gause, G. F., 535
Gauss, Kart Friedrich, A39
geometría
analítica, A7
repaso de, PR1
gradiente de velocidad, 235
grado de un polinomio, 29
gráfica(s)
de dispersión, 15
de funciones
de potencia, 31, PR3
exponenciales, 54
logarítmicas, 65, 69
trigonométricas, 33, A23, PR2
de una curva paramétrica, 72
de una ecuación, A9
de una función, 13
de una sucesión, 559
exponencial, 54
polar, A53, A58
Gregory, James, 198, 408, 602, 606

Heaviside, Oliver, 99
Hecht, Eugene, 624
hipérbola, 214, A15
asíntotas, A15
ramas, A15
ecuación, A15
focos, A15
hiperbólica, función, 227
hipocicloide, 79
homeostasis, 516
horizontal, asíntota, 128
Huygens, Christian, 76

i, A67
identidades trigonométricas, A21, PR2
imagen de fase, 543
impulso de una fuerza, 529
incremento, 139
índice de sumatoria, A38
inducción matemática, 84, 87, 561
principio de, 84, 87, A40
ingreso marginal, función de, 304
integración 343
aproximada, 401
definida
por partes, 385
por sustitución, 378
de funciones
exponenciales, 348, 357, 377
racionales, A43
de una serie de potencias, 599
fórmulas de, PR6-10
indefinida, 357
límites de, 343
numérica, 401
adaptable, 410
parcial, 383-385
por fracciones parciales, 391, A43
por partes, 383-385
por sistema computarizado de álgebra, 397
por sustitución, 375-376, 390
trigonométrica, 394
tablas, uso de, 394
término por término, 600
integral definida, 343
propiedades de, 350
regla de sustitución para, 378
integral(es)
aproximaciones a, 349
cambio de variables en, 375
convergencia/divergencia de, 414, 418
de funciones simétricas, 380
definida, 343
derivada de, 369
divergente impropia, 414, 418

evaluación de, 345
impropia, 413
convergente, 413, 414, 418
indefinida, 357-358
tabla de, 358, PR6-10
patrones en, 400
propiedades de comparación de, 352
propiedades de, 350
tabla de, 394, PR6-10
trigonométrica, 389
unidades para, 363
integrando, 343
discontinuo, 417
interés compuesto continuamente, 298, 526
interpolación, 28
intersección de gráficas polares, A63
intervalo, A2
abierto, A2
cerrado, A2
de convergencia, 595
infinito, 414
involuta del círculo, 492

joule, 465

Kondo, Shigeru, 609

l'Hospital, Marqués de, 291
Lagrange, Joseph-Louis, 272
lámina, 470
latas, minimizar manufactura
costo de, 311
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 150, 367, 374, 508, 619
lemniscata, 215
ley
de Boyle, 238
de cosenos, A26, PR2
de Coulomb, 281
de crecimiento natural, 66, 520
derivada de, 221
de crecimiento o desintegración natural, 520
de diferencia de límites, 104
de exponentes, 54
de flujo laminar, 234, 477
de gravitación, 473
de Hooke, 466
de Kirchhoff, 501
de límites, 104
de potencia, 105
para sucesiones, 557
de logaritmos 65, PR4
de múltiplo constante de límites, 104
de Newton
de enfriamiento, 499, 524
de gravitación, 238, 473
de Planck, 628
de Poiseuille, 246, 309, 478
de Rayleigh-Jeans, 627
de senos, PR2
de Snell, 308
de suma de límites, 104, A35
de Torricelli, 238
de un gas perfecto, 240
del cociente de límites, 104
del producto de límites, 104
raíz de límites, 106
libra (unidad de fuerza) 464
limaçon, A59
límite(s), 4, 95
ε, δ, definición, A26, A27, A30, A32
cálculo de, 104
de error, 405, 409
de funciones exponenciales, 131, 132
de integración, 343
de logaritmo natural, 126
de mano derecha, 100
de un lado, 100
de una función, 95
de una función trigonométrica, 192
de una sucesión, 7, 334, 556, A32
definiciones precisas, A26-A34
derecho, 100
e (el número) como, 225
en el infinito, 127, 128, A30
infinito, 124, 132, A30
izquierdo, 100
propiedades de, 104
que comprende funciones seno y coseno, 191, 193
que involucra al infinito, 123
linealización, 241
Lissajous, figura de 74, 79
litotripsia, A14
logarítmica, función, 34, 65
logaritmo(s), 34, 65
leyes de, 65, PR4
naturales, 66
notación para, 66
longitud
de arco, 455, 456
concurso de, 460
de una curva polar, A64
fórmula de, 456
de una curva, 455
polar, A64
de un segmento de recta, A5, A10

Maclaurin, Colin, 606
magnitudes, relacionadas, 256
masa, centro de, 469, 470, 474
máxima función de enteros, 109
máximo y mínimo
absolutos, 262
globales, 263
locales, 159, 263
media de una función de densidad de probabilidad, 483
mediana de una función de densidad de probabilidad, 484
medida de un radián, 190, A17
membrana de caucho, vibración de, 594
método
de agotamiento, 4, 107
de capas
cilíndricas, 450
para calcular volumen, 450
de dilución de tintura, 478
de Euler, 503, 504, 532
de mínimos cuadrados, 28
de Newton, 312
del disco para calcular volumen, 440
del intervalo cerrado, 266
del lavador, 42
mezcla de problemas, 512
modelado
con ecuaciones diferenciales, 494
crecimiento poblacional, 56, 494, 520, 530
movimiento de un resorte, 496
vibración de membrana, 594
modelo
de crecimiento estacional, 540
de von Bertalanffy, 549
depredador-presa, 240, 540-541
empírico, 26
lineal, 25
logístico, 530
matemático, 15, 25
comparación de crecimiento natural vs. logístico, 535
con polinomios 30
de corriente eléctrica, 501
de crecimiento estacional, 540
de fuerza debida a resistencia del aire, 518
de función racional 32
depredador-presa, 540
empírico, 26
exponencial, 34, 55
función de Gompertz, 537, 540
función de potencia, 30
lineal, 25
logarítmico 34
para crecimiento poblacional, 494, 520, 530, 537
trigonométrico, 33, 34
von Bertalanffy, 549
módulo, A68
momento
alrededor de un eje, 469, 470
de un sistema de partículas, 470
de una lámina, 470
de una masa, 469
"montaña rusa", diseño de, 183
movimiento
armónico simple, 206
rectilíneo, 320
multiplicación de series de potencia, 615

- newton (unidad de fuerza) 464
- Newton, Isaac, sir, 5, 10, 107, 145, 367, 374, 618
- notación
  - de Leibniz, 150
  - de sumatoria, A38
  - delta (Δ), 139, 140
  - prima, 138, 177
  - sigma, 337, A37
- número(s)
  - complejo(s), A67
    - adición de, A67
    - igualdad de, A67
    - parte imaginaria de, A67
    - parte real de, A67
    - resta de, A67
    - división de, A68
    - módulo de, A68
    - multiplicación de, A68
    - forma polar, A69
    - raíz cuadrada principal de, A69
    - argumento de, A70
    - potencias de, A71
    - raíces de, A72
  - crítico, 266

- operación de derivación, 150
- óptica
  - de Gauss, 625
  - de primer orden, 625
  - de tercer orden, 625
- orden de una ecuación diferencial, 496
- Oresme, Nicole, 569
- origen, A7
- óvalos de Cassini, A61

- par ordenado, A7
- parábola, A12
  - ecuación de una, A13
  - eje de una, A12
  - directriz, A12
  - foco de una, A12
  - propiedad de reflexión, 254
  - vértice, A12
- paradojas de Zenón, 7
- paralelepípedo, 438
- parámetro, 71
- partes, integración por, 383-385
- pascal (unidad de presión) 468
- patrones en integrales, 400
- pendiente, A10
  - de una curva, 136
- péndulo, cálculo del período de, 243, 246
- perihelio, A67
- peso, 465
- plano
  - coordenado, A7
  - de Argand, A67
  - de fase, 542
- Poiseuille, Jean-Louis-Marie, 234
- polinomio, 29
  - de Taylor de *n*-ésimo grado, 247, 607
    - aplicación de, 619
- polo, A51
- posición estándar de un ángulo, A18
- potencia, 142
  - indeterminada, 295
- presa, 540
- presión
  - ejercida por un fluido, 467, 468
  - y fuerza hidrostáticas, 467, 468
- principio(s)
  - de Arquímedes, 491
  - de Fermat, 308
  - de inducción matemática, 84, 87, A40
  - de simetría, 470
  - de resolución de problemas, 83
    - usos de, 169, 251, 327, 375, 428
- probabilidad, 480
- problema
  - de área, 4, 332
  - de braquistocrono, 76
  - de distancia, 339
  - de tautocronismo, 76
  - de una tangente, 4, 5, 90, 135
  - de velocidad, 92, 137
  - del valor inicial, 497
  - de optimización, 262, 299
  - de Wallis, 389
  - indeterminado, 294
    - promedio, 6, 93, 137, 228
- propensión marginal a consumir o ahorrar, 573
- propiedad
  - de reflexión
    - de cónicas, 254, A14
    - de una elipse, A14
    - de una parábola, 254
  - de sustitución directa, 107
- propiedades de comparación de la integral, 352
- prueba
  - creciente/decreciente, 273
  - de comparación, 589
    - de límite, 580
    - para integrales impropias, 420
    - para series, 579
  - de concavidad, 275
  - de la recta horizontal, 61
  - de la recta vertical, 17
  - de la primera derivada, 274
    - para valores extremos absolutos, 302
  - de la segunda derivada, 275
  - de serie alternante, 585
  - integral, 575, 577
  - para divergencia, 570
  - para convergencia y divergencia de series
    - de comparación, 579, 589
    - de comparación de límite, 580
    - de serie alternante, 585
    - integral, 575, 577
- punto
  - de celosía, 254
  - de equilibrio, 316, 542
  - de inflexión, 160, 275
  - fijo de una función, 170
  - inicial de una curva paramétrica, 72
  - muestral, 337, 343
  - terminal de una curva paramétrica, 72

- radiación
  - de cuerpo negro, 627
  - desde estrellas, 627
- radio de convergencia, 595
- racional, función, 32, A43
- raíces
  - de un número complejo, A72
  - de una ecuación de *n*-ésimo grado, 213
- raíz
  - cuadrada principal de un número complejo, A69
  - de límites, ley de, 106
- ramas de una hipérbola, A15
- ramificación vascular, 309-310
- rampa, función, 46
- rapidez, 140
  - de cambio
    - derivada como, 140
    - instantánea, 92, 140, 228
    - promedio, 140, 228
    - de crecimiento, 233, 361
  - instantánea, 233
  - relativo, 520
  - de reacción, 142, 232, 360
    - instantánea, 232
  - promedio de moléculas, 422
  - total de fertilidad, 167
- rayos paraxiales, 243
- razón común, 566
- reacción química, 231
- recíproca, función, 32
- recta(s)
  - en el plano, 90, A10
    - ecuaciones de, A10-A11
    - horizontal, A11
    - normal, 176
    - paralela, A11
    - pendiente de, A10
    - secante, 90
    - tangente, 90
  - horizontal, ecuación de la, A11
  - normal, 176
  - paralelas, A11
  - perpendiculares, A11
  - secante, 5, 90, 91
  - tangente
    - vertical, 152
    - a una curva, 5, 90, 135
      - paramétrica, 203
      - polar, A56
    - primeros métodos para hallar, 145
    - vertical, 152
- rectángulo de observación, 46

reflexión de una función, 38
región
bajo una gráfica, 332, 337
entre dos gráficas, 432
polar, área de, A62
regla(s)
de l'Hospital, 291, 299
orígenes de, 299
de la cadena, 197, 198, 200
de la diferencia, 178
de la suma, 177
de múltiplo constante, 177
de potencia, 592
coeficientes de, 592
derivación de, 599
división de, 615
integración de, 600
intervalo de convergencia, 595
multiplicación de, 615
para coseno y seno, 610
para función exponencial, 610
radio de convergencia, 595
representaciones de funciones como, 598
de Simpson, 406, 408
límites de error para, 409
de sustitución, 375-376
para integrales definidas, 378
del cociente, 186-187
del producto, 183-184
del punto medio, 349, 402
error al usar, 403
del trapecio, 402
error en el uso de, 403
recíproca, 190
regresión lineal, 27
relativa, 520
representaciones
de funciones, 12, 14, 15
visuales de una función, 12, 14
resto de la serie de Taylor, 607
revolución, sólido de, 443
Riemann, Georg Bernhard, 344
rosa de cuatro hojas, A55
rumores, rapidez de dispersión, 237

salida cardiaca, 478
sección(es)
cónica(s), A12
directriz, A12, A66
excentricidad, A66
foco, A12, A14, A66
ecuaciones polares para, A66
transversal, 438
sector de un círculo, A62
segunda derivada, 153
segunda ley de Newton, 464
seno, función, A19
derivada de, 193, 194
gráfica, 33, A23
serie de potencias para, 610
serie(s), 8, 565
absolutamente convergente, 588
alternante, 585
armónica, 578
alternante, 586
coeficientes de, 592
con binomios, 612, 618
convergente, 566
propiedades de, 570-571
de Gregory, 602
de Maclaurin, 604, 606
tabla de, 613
de potencia, 592
de Taylor, 604, 606
divergente, 566
infinita, 565
p, 578
suma de, 566
parcial de, 566
término de, 565
trigonométrica, 593
serpentina, 189
simetría, 19, 380
en gráficas polares, A56
Simpson, Thomas, 408
síntesis de FM, 286
sistema(s)
computarizado de álgebra, 46, 98, 397
para integración, 397, 602
para graficar una sucesión, 559
de coordenadas, A7
cartesianas, A7
rectangulares, A7
polares, A51
rectangulares, A7
liebre-lince, 569, 578
sobreaceleración, 155
sólido
de revolución, 443
girado en una diagonal, 449
volumen de, 451
volumen de un, 438, 439
solución
de ecuaciones depredador-presa, 541
de equilibrio, 495, 541
de una ecuación diferencial, 496
sucesión, 7, 554
acotada, 561
convergente, 556
creciente, 560
de Fibonacci, 555, 563
decreciente, 560
de sumas parciales, 565, 566
divergente, 556
gráfica de, 559
infinita. *Véase* sucesión
límite de, 7, 334, 556, A32
logística, 564
monotónica, 560
término de, 554
suma(s)
de fracciones parciales, 391, A43
de Riemann, 344
de una serie
geométrica, 567
infinita, 566
extensible, 569, A39
parcial de una serie, 565, 566
de Riemann 344
sustitución trigonométrica en integración, 390

tabla(s)
de fórmulas de derivación, 188, PR5
de integrales, 394, PR6-10
Taylor, Brook, 606
telescopio espacial Hubble, 267
teorema
de cambio neto, 360
de comparación para integrales, 420
de De Moivre, A71
de estimación de serie alternante, 587
de evaluación, 356
de Fermat, 265, A36
de Squeeze, 110, 557
para sucesiones, 557
de sucesión monotónica, 561
del binomio, 175, PR1
del valor
extremo, 264
intermedio, 120
medio, 272
para integrales, 462
fundamental de cálculo, 367, 369, 371
tercera derivada, 154
término
de una serie, 565
de una sucesión, 554
tiempo medio de espera, 483
toro, 448
trabajo, 464-466
transformación
de una función, 37
de una función raíz, 39
traslación
de una función, 37
vertical de una gráfica, 38
trayectoria
de aproximación de un avión, 209
de fase, 542
ortogonal, 215, 511
trigonometría, repaso de, A17, PR2
trigonométrica, función, 33, A19
trocoide 78

uniforme, función, 455
utilidad marginal, función de, 304

valor
absoluto, 18, A4, A68
de una función, 12

extremo, 263
promedio de una función, 460, 461, 482
de densidad de probabilidad, 481
extremos de punto final, 264
máximo y mínimo, 462
absolutos, 262
medio, teorema del, 272
variable(s)
aleatoria continua, 480
cambio de, 375
continua aleatoria, 480
dependiente, 12
independiente, 12
Véase también sistemas computarizados de álgebra
vascular, ramificación, 309-310
velocidad, 5, 92, 137, 228, 361
gradiente de, 235
instantánea, 93, 137, 228
problema de, 92, 137
promedio, 6, 93, 137, 228
terminal, 516
Verhulst, Pierre-François, 495
vértice de una parábola, A12
vibración de una membrana de caucho, 594
vida media, 56, 23
de un átomo, 422
Volterra, Vito, 541
volumen, 439
de un sólido, 438
de revolución, 443
en una diagonal, 449
por capas cilíndricas, 450
por discos, 440, 443
por lavadores, 442, 444
por secciones transversales, 438, 440, 477

Wallis, John, 5
producto de, 389
Wren, Christopher, sir, 458

Zenón, 7

ÁLGEBRA

Operaciones aritméticas

$$a(b+c)=ab+ac \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \qquad \frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Exponentes y radicales

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n}=\sqrt[n]{x} \qquad x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Factorización de polinomios notables

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

Teorema del binomio

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \qquad (x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2$$

$$+\cdots+\binom{n}{k}x^{n-k}y^k+\cdots+nxy^{n-1}+y^n$$

donde $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k}$

Fórmula cuadrática

Si $ax^2+bx+c=0$, entonces $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Desigualdades y valor absoluto

Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.

Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$.

Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ca<cb$.

Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ca>cb$.

Si $a>0$, entonces

$|x|=a$ significa $x=a$ o $x=-a$

$|x|<a$ significa $-a<x<a$

$|x|>a$ significa $x>a$ o $x<-a$

GEOMETRÍA

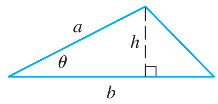
Fórmulas geométricas

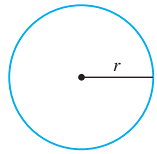
Fórmulas para área A, circunferencia C y volumen V:

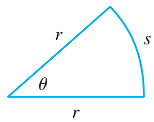
Triángulo
$A=\frac{1}{2}bh$
$=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$

Círculo
$A=\pi r^2$
$C=2\pi r$

Sector de círculo
$A=\frac{1}{2}r^2\theta$
$s=r\theta$ (θ en radianes)



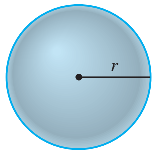


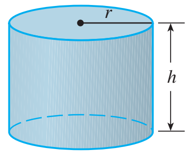


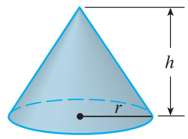
Esfera
$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
$A=4\pi r^2$

Cilindro
$V=\pi r^2 h$

Cono
$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$
$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$







Fórmulas de distancia y de punto medio

Distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

Rectas

Pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ecuación de punto-pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Ecuación de intercepción-pendiente de la recta con pendiente m e intercepción b con el eje y:

$$y=mx+b$$

Círculos

Ecuación del círculo con centro (h, k) y radio r:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

TRIGONOMETRÍA

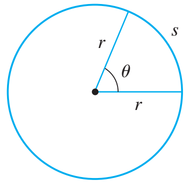
Medida de un ángulo

π radianes $= 180°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $\qquad$ 1 rad $= \dfrac{180°}{\pi}$

$s = r\theta$

(θ en radianes)

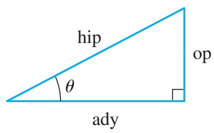


Trigonometría de ángulo recto

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$

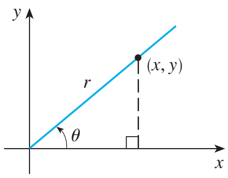


Funciones trigonométricas

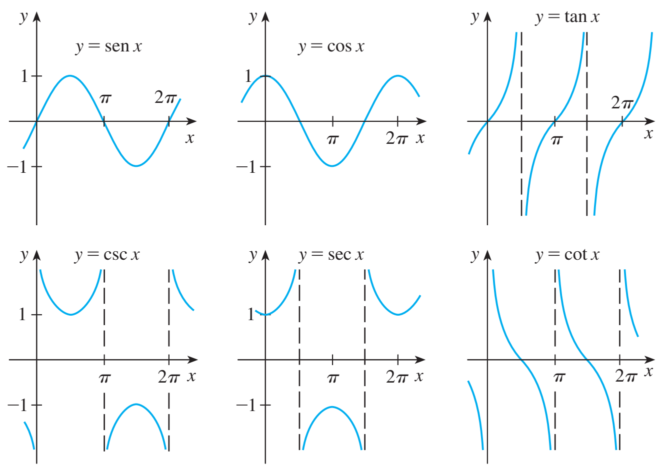
$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} \qquad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r} \qquad \sec\theta = \dfrac{r}{x}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \qquad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$



Gráficas de funciones trigonométricas



Funciones trigonométricas de ángulos importantes

θ	radianes	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—

Identidades fundamentales

$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

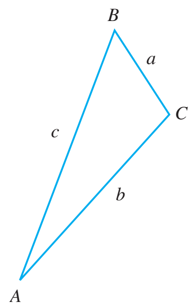
$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

La ley de senos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$



La ley de cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Fórmulas de adición y sustracción

$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x\cos y - \cos x\operatorname{sen} y$

$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

$\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$

Fórmulas de doble ángulo

$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

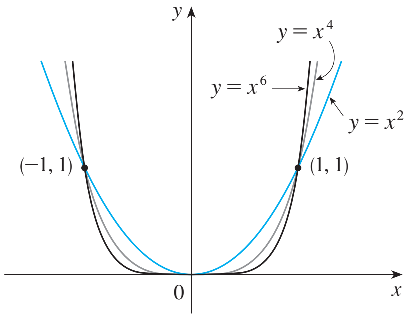
Fórmulas de medio ángulo

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

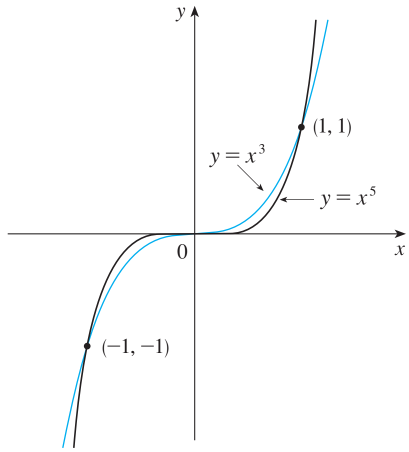
FUNCIONES ESPECIALES

Funciones de potencias $f(x) = x^a$

(i) $f(x) = x^n$, n es entero positivo

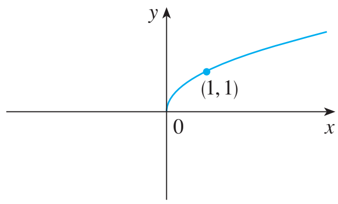


n par

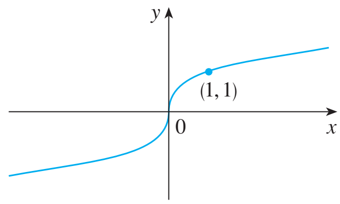


n impar

(ii) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, n es entero positivo

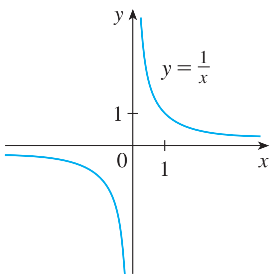


$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

(iii) $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

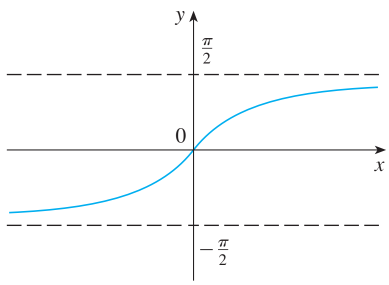


Funciones trigonométricas inversas

$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1} x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos x = \cos^{-1} x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

$$\arctan x = \tan^{-1} x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

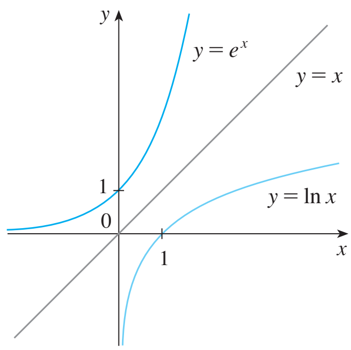
FUNCIONES ESPECIALES

Funciones exponenciales y logarítmicas

$\log_a x = y \iff a^y = x$

$\ln x = \log_e x$, donde $\ln e = 1$

$\ln x = y \iff e^y = x$



Ecuaciones de cancelación

$\log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a x} = x$

$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln x} = x$

Leyes de los logaritmos

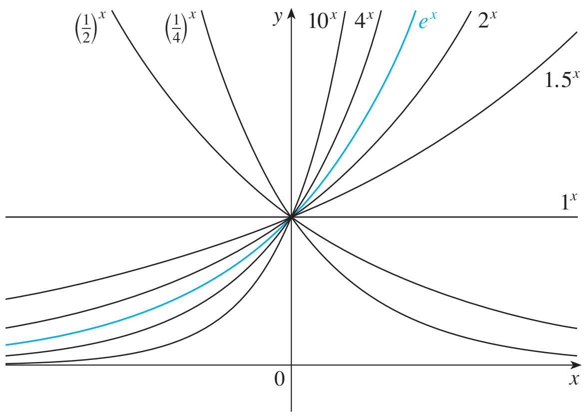
1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

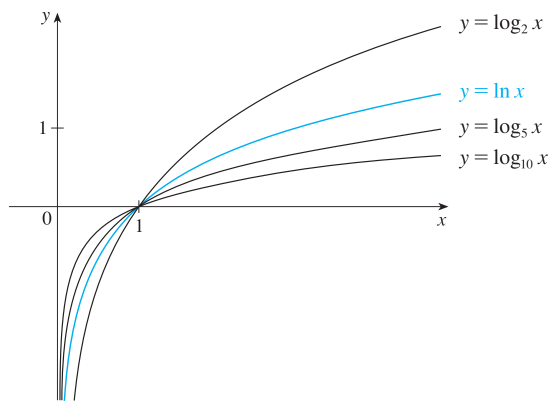
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$



Funciones exponenciales



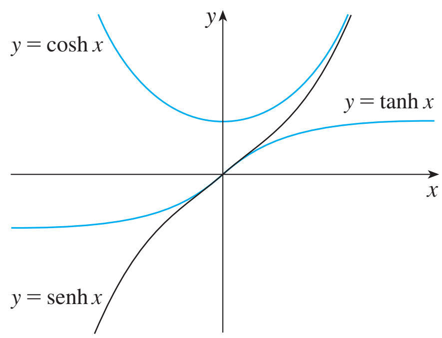
Funciones logarítmicas

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$



Funciones hiperbólicas inversas

$y = \operatorname{senh}^{-1} x \iff \operatorname{senh} y = x \qquad \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$y = \cosh^{-1} x \iff \cosh y = x$ y $y \geqslant 0 \qquad \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$y = \tanh^{-1} x \iff \tanh y = x \qquad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

Fórmulas generales

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regla del producto)

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Regla del cociente)

7. $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regla de la cadena)

8. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regla de potencias)

Funciones exponenciales y logarítmicas

9. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$

12. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

Funciones trigonométricas

13. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

14. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

15. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

16. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

17. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

18. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

Funciones trigonométricas inversas

19. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Funciones hiperbólicas

25. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

26. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

27. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

28. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

29. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

30. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

Funciones hiperbólicas inversas

31. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

32. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

33. $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

34. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

35. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

36. $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

TABLA DE INTEGRALES

Formas básicas

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u\,\tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u\,\cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

18. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas que involucran $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

22. $\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

23. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 + u^2} - a\ln\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

24. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2}\,du = -\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

25. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

26. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

27. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

28. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$

29. $\int \dfrac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \dfrac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$

TABLA DE INTEGRALES

Formas que involucran $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

37. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

Formas que involucran $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

TABLA DE INTEGRALES

Formas que involucran $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a + bu - a\ln|a+bu|\right) + C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu} + C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a+bu} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{si } a > 0$

$\displaystyle\qquad = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \qquad \text{si } a < 0$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

TABLA DE INTEGRALES

Formas trigonométricas

63. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$

66. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$

67. $\int \operatorname{sen}^3 u\, du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\int \cos^3 u\, du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\int \tan^3 u\, du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\int \cot^3 u\, du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

74. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

75. $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$

76. $\int \cot^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

77. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

78. $\int \csc^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$

79. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\, du$

85. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\, du$

86.
$$\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\, du$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\, du$$

Formas trigonométricas inversas

87. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \tan^{-1} u\, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\int u \cos^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\int u \tan^{-1} u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

93. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

94. $\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

95. $\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

TABLA DE INTEGRALES

Formas exponenciales y logarítmicas

96. $\displaystyle\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au - 1)e^{au} + C$

97. $\displaystyle\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

98. $\displaystyle\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

99. $\displaystyle\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

100. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

101. $\displaystyle\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\displaystyle\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Formas hiperbólicas

103. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

104. $\displaystyle\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\displaystyle\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

106. $\displaystyle\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh \tfrac{1}{2}u\right| + C$

109. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

110. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

111. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas que involucran $\sqrt{2au - u^2}$, $a > 0$

113. $\displaystyle\int \sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

114. $\displaystyle\int u\sqrt{2au - u^2}\,du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

115. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

116. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

117. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

118. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

119. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

120. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$

Esta cuarta edición destaca la comprensión conceptual por medio de métodos visuales, verbales, numéricos y algebraicos.

El aspecto principal en que este libro difiere de los libros de texto más tradicionales de cálculo es que es más moderno. Por ejemplo, no hay un capítulo completo sobre técnicas de integración; no se demuestran tantos teoremas y el material sobre funciones trascendentales y sobre ecuaciones paramétricas está entrelazado en todo el libro, en lugar de tratarlo en capítulos separados.

Características

- Ejercicios conceptuales
- Dificultad gradual en conjuntos de ejercicios
- Datos del mundo real
- Proyectos
- Rigor
- Resolución de problemas
- Tecnología
- Herramientas para Enriquecer el Cálculo (TEC)
- WebAssign mejorado

Sitio web: www.stewartcalculus.com
Este sitio web incluye lo siguiente.

- Repaso de álgebra
- Mentiras que mi calculadora y computadora me dijeron
- Historia de las matemáticas, con vínculos a otros sitios web históricos mejores
- Temas adicionales
- Vínculos, para cada capítulo, a recursos web externos
- Problemas archivados (ejercicios de práctica que aparecieron en ediciones previas, junto con sus soluciones)
- Problemas difíciles (algunos de las secciones de Enfoque en la resolución de problemas de ediciones anteriores)

ISBN-13: 978-607481398-2
ISBN-10: 607481398-1
9 786074 813982

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com