Cálculo

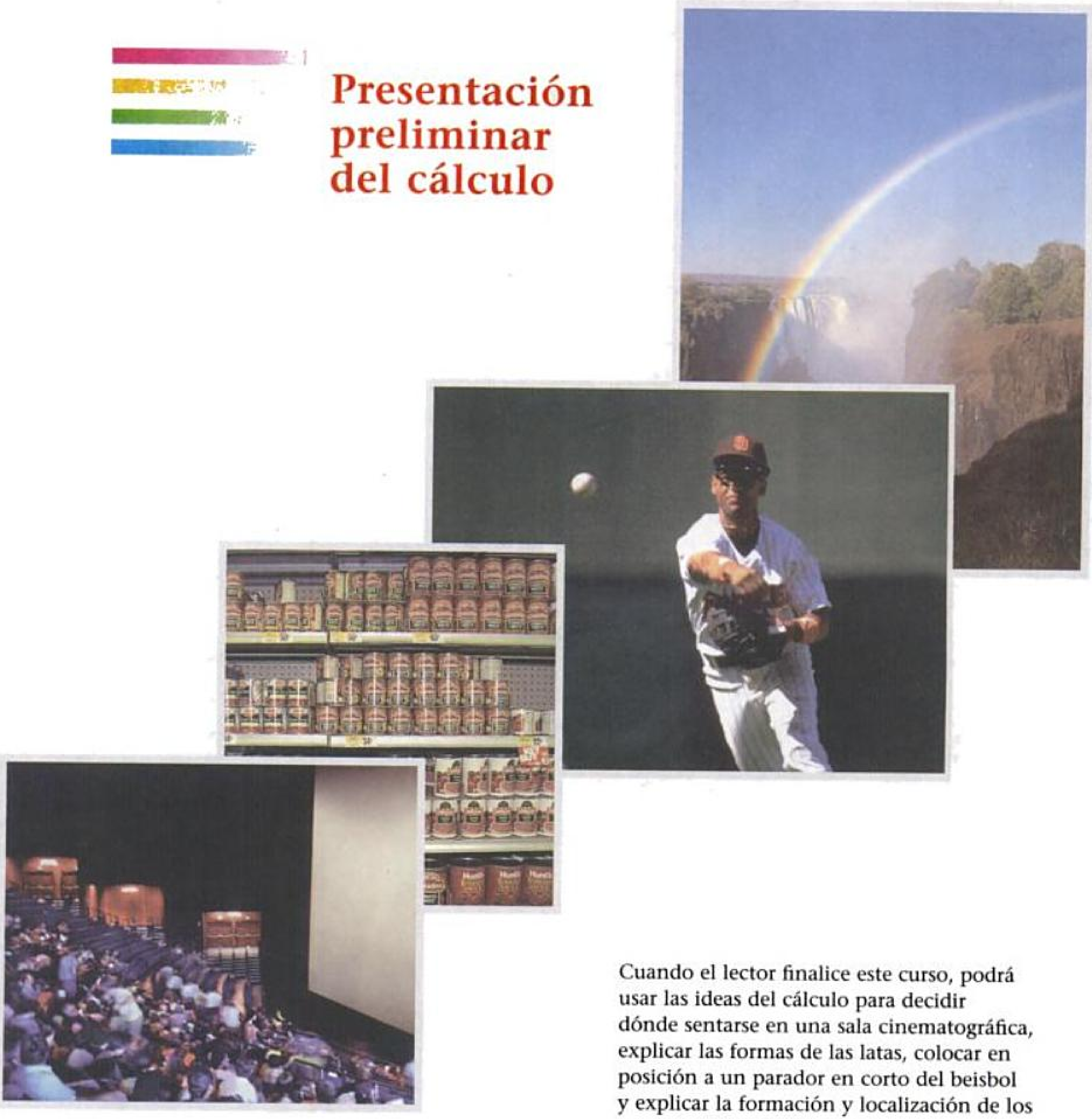
DE UNA VARIABLE

TRASCENDENTES TEMPRANAS

CUARTA EDICIÓN

JAMES STEWART

Presentación preliminar del cálculo



Cuando el lector finalice este curso, podrá usar las ideas del cálculo para decidir dónde sentarse en una sala cinematográfica, explicar las formas de las latas, colocar en posición a un parador en corto del beisbol y explicar la formación y localización de los arco iris. Véase la lista de preguntas en la página 9.

El cálculo es fundamentalmente diferente de las matemáticas que el lector ha estudiado con anterioridad. El cálculo es menos estático y más dinámico. Se interesa en el cambio y en el movimiento; trata cantidades que se aproximan a otras cantidades. Por esa razón, puede resultar útil tener un panorama general de la materia antes de empezar su estudio intensivo. En las páginas siguientes, echaremos un vistazo a algunas de las ideas principales del cálculo, al mostrar cómo surgen los límites cuando intentamos resolver diversos problemas.

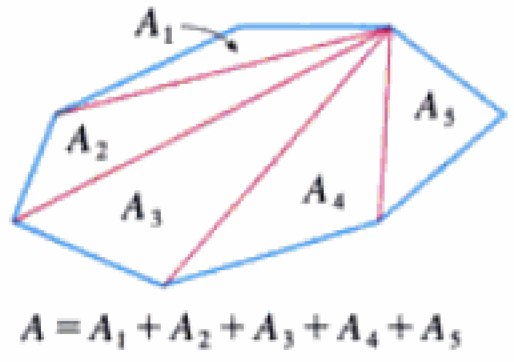


FIGURA 1

Problema del área

Los orígenes del cálculo se remontan unos 2500 años por lo menos, hasta los antiguos griegos, quienes hallaron áreas aplicando el "método del agotamiento". Sabían cómo hallar el área A de cualquier polígono al dividirlo en triángulos, como en la figura 1, y sumar las áreas de estos triángulos.

Es un problema mucho más difícil hallar el área de una figura curva. El método griego del agotamiento consistía en inscribir polígonos en la figura y circunscribir otros polígonos en torno a la misma figura y, a continuación, hacer que el número de lados de los polígonos aumentara. En la figura 2 se ilustra este proceso para el caso especial de un círculo, con polígonos regulares inscritos.

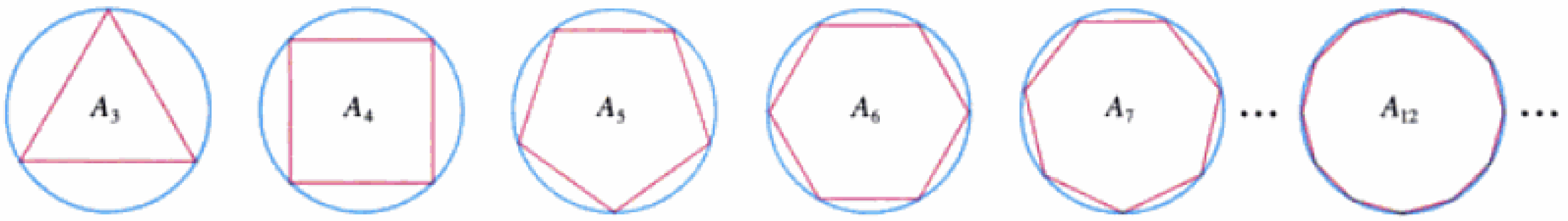


FIGURA 2

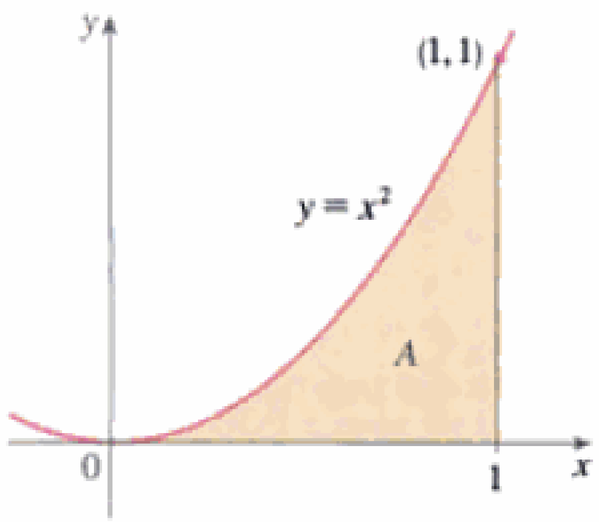


FIGURA 3

Sea A_n el área del polígono inscrito con n lados. Al aumentar n, se ve que A_n se aproxima cada vez más al área del círculo. Decimos que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos y escribimos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Los griegos no aplicaron explícitamente los límites. Sin embargo, por razonamiento indirecto, Eudoxo (siglo V a. C.) utilizó el agotamiento para probar la conocida fórmula del área de un círculo: $A = \pi r^2$.

En el capítulo 5, usamos una idea semejante para hallar las áreas de regiones del tipo que se muestra en la figura 3. Daremos una aproximación del área deseada A por medio de áreas de rectángulos (Fig. 4), haremos que disminuya el ancho de los rectángulos y, en seguida, calcularemos A como el límite de estas sumas de áreas de rectángulos.

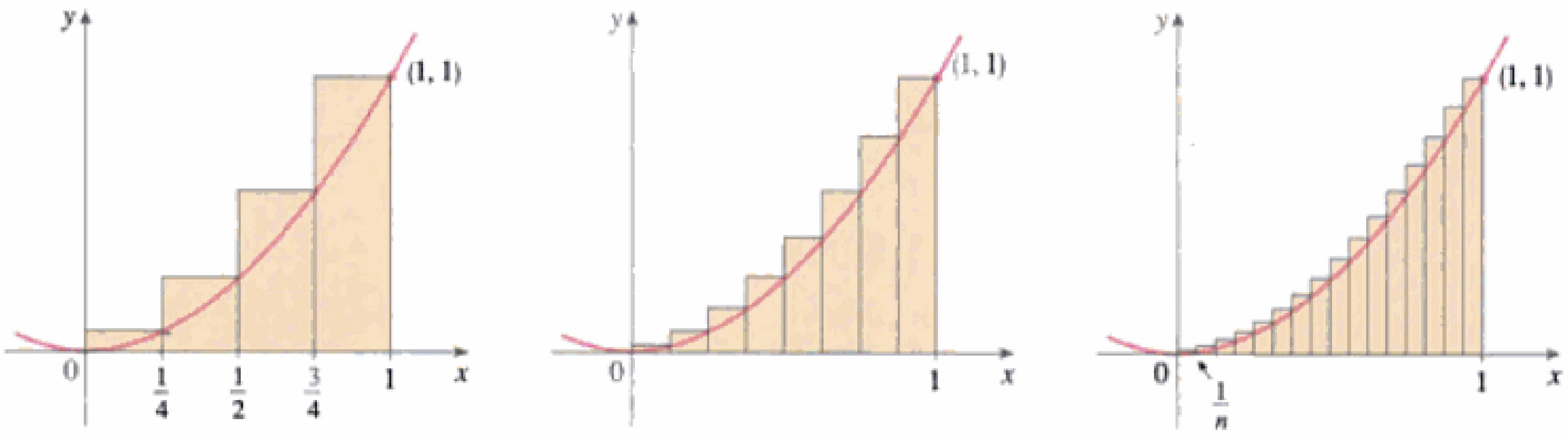


FIGURA 4

El problema del área es el problema central de la rama del cálculo conocida como *cálculo integral*. Las técnicas que desarrollaremos en el capítulo 5 para hallar áreas también nos permitirán calcular el volumen de un sólido, la longitud de una curva, la fuerza del agua contra la cortina de una presa, la masa y el centro de gravedad de una varilla y el trabajo realizado al bombear agua hacia fuera de un tanque.

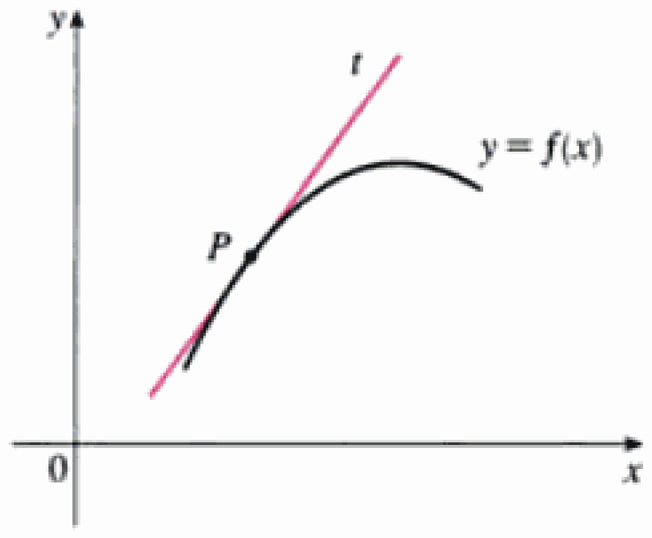


FIGURA 5
La recta tangente de P

Problema de la tangente

Considere el problema de tratar de hallar la ecuación de la recta tangente t a una curva, con ecuación $y = f(x)$, en un punto dado P. (En el capítulo 2, daremos una definición precisa de recta tangente. Por ahora, puede concebirla como una recta que toca la curva en P, como en la Fig. 5.) Como sabemos que el punto P está en la recta tangente, podemos hallar la ecuación de t si conocemos su pendiente m. El problema está en que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente y sólo conocemos un punto, P, de t. Para darle vuelta al problema, primero hallamos una aproximación para m al tomar un punto cercano Q de la curva y calcular la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. En la figura 6, vemos que

$$\boxed{1} \qquad m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

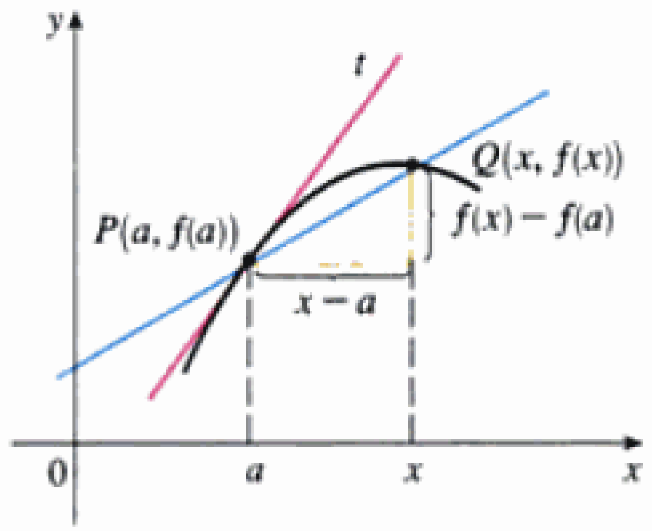


FIGURA 6
La recta secante PQ

Imagine ahora que Q se mueve a lo largo de la curva, hacia P (Fig. 7). Puede ver que la recta secante gira y se aproxima a la recta tangente como su posición límite. Esto significa que la pendiente m_{PQ} de la recta secante se acerca cada vez más a la pendiente m de la recta tangente. Escribimos

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

y decimos que m es el límite de m_{PQ} cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva. Puesto que x se acerca a a cuando Q lo hace a P, podríamos usar también la ecuación 1 para escribir

$$\boxed{2} \qquad m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

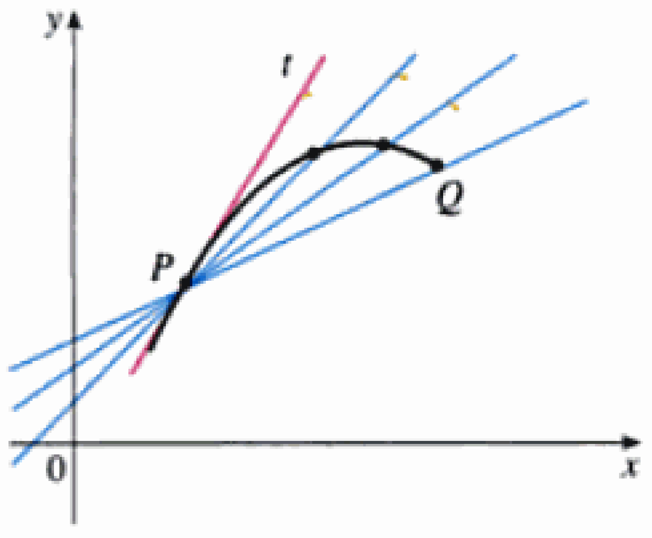


FIGURA 7
Rectas secantes que se aproximan a la recta tangente

En el capítulo 2 se darán ejemplos específicos de este procedimiento.

El problema de la tangente ha dado lugar a la rama del cálculo llamada *cálculo diferencial*, el cual se inventó más de 2000 años después que el cálculo integral. Las ideas principales que se encuentran detrás del cálculo diferencial se deben al matemático francés Pierre Fermat (1601–1665) y fueron desarrolladas por los matemáticos ingleses John Wallis (1616–1703), Isaac Barrow (1630–1677) e Isaac Newton (1642–1727), así como por el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716).

Las dos ramas del cálculo y sus problemas principales, el problema del área y el de la tangente, parecen muy diferentes, pero existe una conexión muy íntima entre ellas. El problema de la tangente y el del área son problemas inversos, en un sentido que se describirá en el capítulo 5.

Velocidad

Cuando miramos el velocímetro de un automóvil y leemos que viaja a 48 mi/h, ¿qué información nos indica? Sabemos que si la velocidad permanece constante, después de una hora habremos recorrido 48 millas. Pero si la velocidad del automóvil varía, ¿qué significa decir que la velocidad en un instante dado es de 48 mi/h?

Para analizar esta cuestión, observemos el movimiento de un automóvil que viaja a lo largo de un camino recto y supongamos que podemos medir la distancia recorrida por el automóvil (en pies), a intervalos de 1 segundo, como en la tabla siguiente:

t = Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distancia (pies)	0	2	10	25	43	78

Como primer paso para hallar la velocidad después de que han transcurrido 2 segundos, hallemos la velocidad promedio durante el intervalo $2 \leq t \leq 4$:

$$\begin{aligned}\text{velocidad promedio} &= \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} \\ &= \frac{43 - 10}{4 - 2} \\ &= 16.5 \text{ pies/s}\end{aligned}$$

De manera análoga, la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $2 \leq t \leq 3$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{25 - 10}{3 - 2} = 15 \text{ pies/s}$$

Tenemos la sensación de que la velocidad en el instante $t = 2$ no puede ser muy diferente de la velocidad promedio durante un intervalo corto que se inicie en $t = 2$. De modo que imaginemos que se ha medido la distancia recorrida a intervalos de 0.1 segundo, como en la tabla siguiente:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	10.00	11.02	12.16	13.45	14.96	16.80

Entonces, por ejemplo, podemos calcular la velocidad promedio sobre el intervalo [2, 2.5]:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{16.80 - 10.00}{2.5 - 2} = 13.6 \text{ pies/s}$$

En la tabla siguiente, se muestran los resultados de esos cálculos:

Intervalo de tiempo	[2, 3]	[2, 2.5]	[2, 2.4]	[2, 2.3]	[2, 2.2]	[2, 2.1]
Velocidad promedio (pies/s)	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

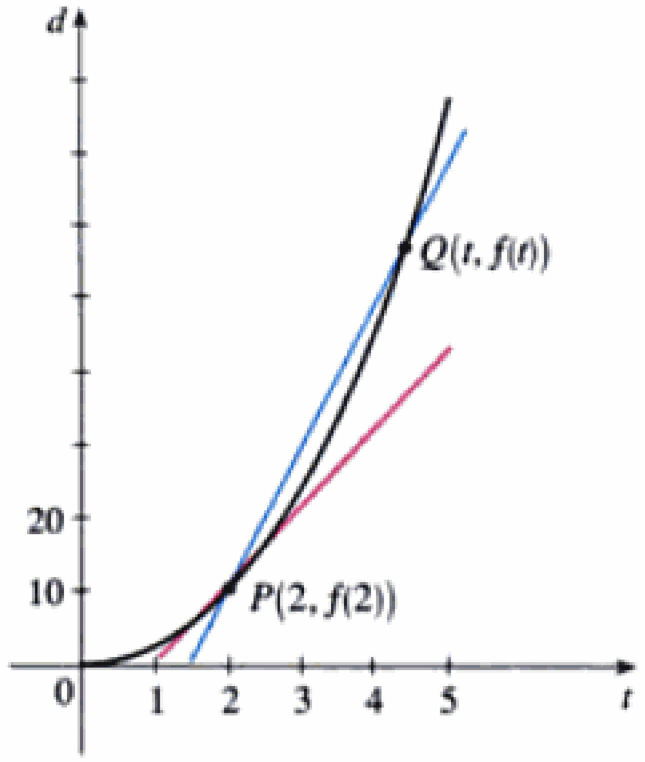


FIGURA 8

Las velocidades promedio sobre intervalos sucesivamente más pequeños parecen aproximarse cada vez más a un número cercano a 10 y, por tanto, esperamos que la velocidad en exactamente $t = 2$ sea alrededor de 10 pies/s. En el capítulo 2, definiremos la velocidad instantánea de un objeto en movimiento como el valor límite de las velocidades promedio sobre intervalos cada vez más pequeños.

En la figura 8 mostramos una representación gráfica del movimiento del automóvil al graficar los puntos correspondientes a la distancia recorrida como función del tiempo. Si escribimos $d = f(t)$, entonces $f(t)$ es el número de pies recorridos después de t segundos. La velocidad promedio en el intervalo $[2, t]$ es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

lo cual es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ de la figura 8. La velocidad v cuando $t = 2$ es el valor límite de esta velocidad promedio cuando t se aproxima a 2; es decir

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

y reconocemos, a partir de la ecuación 2, que esto es lo mismo que la pendiente de la recta tangente a la curva en P.

Por tanto, cuando resolvemos el problema de la tangente en el cálculo diferencial, también estamos resolviendo problemas referentes a velocidades. Las mismas técnicas nos permiten resolver problemas en que intervienen razones de cambio en todas las ciencias naturales y sociales.

Límite de una sucesión

En el siglo V a.C., el filósofo griego Zenón de Elea propuso cuatro problemas, conocidos ahora como las *paradojas de Zenón*, que desafiaban algunas de las ideas referentes al espacio y al tiempo que se sostenían en sus días. La segunda paradoja de Zenón se refiere a una carrera entre el héroe griego Aquiles y una tortuga a la que se ha dado una ventaja inicial. Zenón argumentaba, como se hace ver a continuación, que Aquiles nunca podría rebasarla: Supóngase que Aquiles arranca en la posición a_1 y la tortuga, en la posición t_1 (Fig. 9). Cuando Aquiles llega al punto $a_2 = t_1$, la tortuga se encuentra todavía más adelante, en la posición t_2. Cuando Aquiles llega a $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3. Este proceso continúa indefinidamente y, de este modo, ¡parece que la tortuga siempre estará adelante! Pero esto contraviene el sentido común.

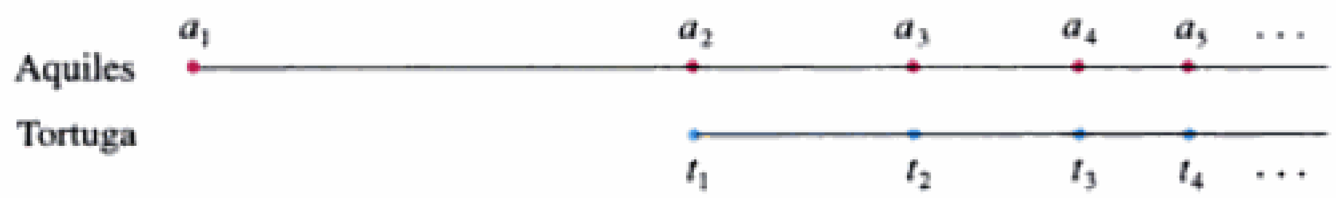


FIGURA 9

Una manera de explicar esta paradoja es con la idea de *sucesión*. Las posiciones sucesivas de Aquiles (a_1, a_2, a_3, ...) o las posiciones sucesivas de la tortuga (t_1, t_2, t_3, ...) forman lo que se conoce como una sucesión.

En general, una sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto de números escritos en un orden definido. Por ejemplo, la sucesión

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

se puede escribir al dar la fórmula siguiente para el n-ésimo término:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

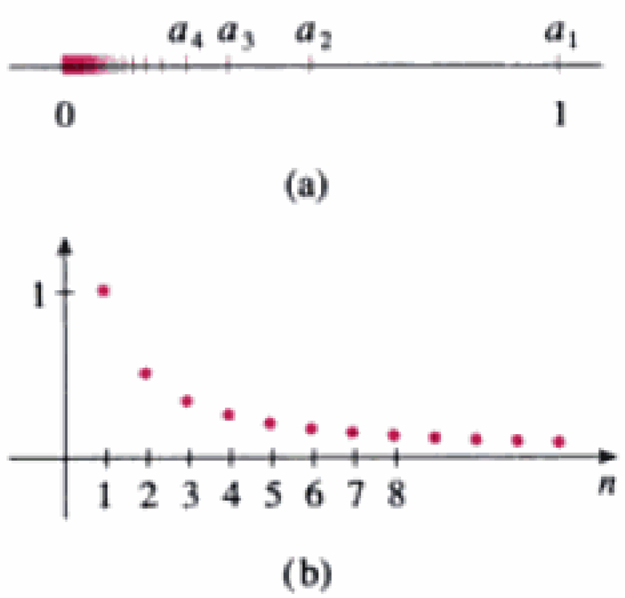


FIGURA 10

Podemos visualizar esta sucesión situando sus términos en una recta numérica [Fig. 10(a)], o trazando su gráfica [Fig. 10(b)]. Observe, a partir de cualquiera de las dos figuras, que los términos de la sucesión $a_n = 1/n$ se aproximan cada vez más a 0 al aumentar n. De hecho, podemos hallar términos tan pequeños como los deseemos, al hacer n suficientemente grande. Decimos que el límite de la sucesión es 0 e indicamos esto al escribir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

En general, se usa la notación

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

si los términos a_n se aproximan al número L, cuando n se hace suficientemente grande. Esto significa que se puede aproximar los números a_n al número L tanto como queramos si se toma una n lo bastante grande.

El concepto de límite de una sucesión se presenta siempre que usamos la representación decimal de un número real. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} a_1 &= 3.1 \\ a_2 &= 3.14 \\ a_3 &= 3.141 \\ a_4 &= 3.1415 \\ a_5 &= 3.14159 \\ a_6 &= 3.141592 \\ a_7 &= 3.1415926 \\ &\vdots \end{aligned}$$

entonces $$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

Los términos de esta sucesión son aproximaciones racionales a π.

Regresemos a la paradoja de Zenón. Las posiciones sucesivas de Aquiles y de la tortuga forman las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{t_n\}$, en donde $a_n < t_n$, para toda n. Se puede demostrar que las dos sucesiones tienen el mismo límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n$$

Es precisamente en este punto p en que Aquiles alcanza a la tortuga.

Suma de una serie

Otra de las paradojas de Zenón, como nos las hizo llegar Aristóteles, es: "Un hombre parado en un cuarto no puede caminar hasta la pared. Para que esto suceda, primero avanzaría la mitad de la distancia, en seguida la mitad de la distancia restante y, a continuación, una vez más la mitad de la que todavía queda. Siempre se puede continuar este proceso y nunca se termina". (Fig. 11.)

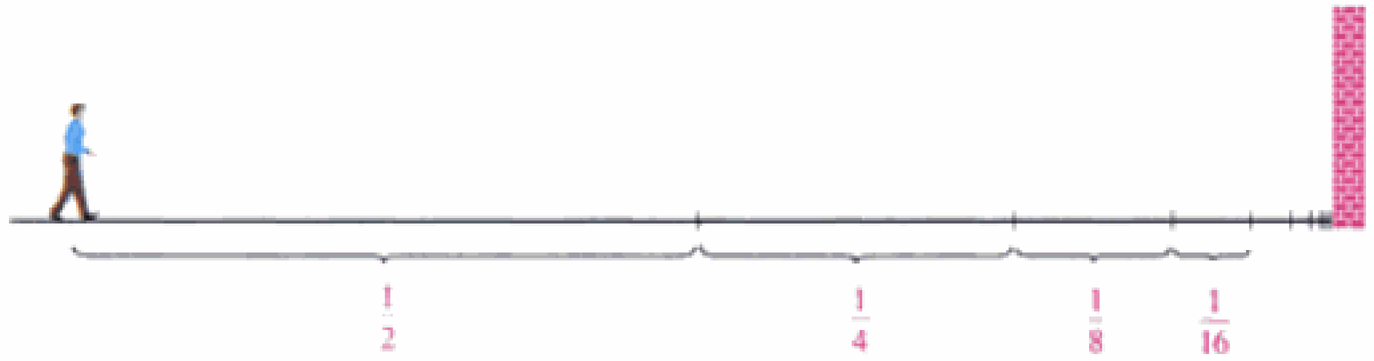


FIGURA 11

Por supuesto, sabemos que el hombre llega a la pared, de modo que esto sugiere que quizá se pueda expresar la distancia total como la suma de una infinidad de distancias más pequeñas, como sigue:

$$\boxed{3} \qquad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenón argumentaba que no tiene sentido sumar una infinidad de números. Pero existen otras situaciones en que, implícitamente usamos sumas infinitas. Por ejemplo, en notación decimal, el símbolo $0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10{,}000} + \cdots$$

y, por tanto, en cierto sentido, debe ser cierto que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10{,}000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

De modo más general, si d_n denota el n-ésimo dígito en la representación decimal de un número, entonces

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Por lo tanto, algunas sumas infinitas, o series infinitas, como se les llama, tienen un significado. Pero debemos definir con cuidado lo que es la suma de una serie infinita.

Regresemos a la serie de la ecuación 3 y denotemos con s_n la suma de los primeros n términos de la serie. De este modo,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0.5 \\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75 \\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875 \\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0.9375 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0.96875 \\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0.984375 \\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0.9921875 \\
&\vdots \\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0.99902344 \\
&\vdots \\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0.99998474
\end{aligned}$$

Observe que, conforme agregamos más y más términos, las sumas parciales se aproximan cada vez más a 1. De hecho, se puede demostrar que, si se toma n suficientemente grande (es decir, si se suman un número suficiente de términos de la serie), podemos aproximar la suma parcial s_n tanto como deseemos al número 1. Por lo tanto, parece razonable decir que la suma de la serie infinita es 1 y escribir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

En otras palabras, la razón de que la suma de la serie sea 1 es que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

En el capítulo 8 analizaremos con más detalle estas ideas. Entonces usaremos la idea de Newton de combinar las series infinitas con el cálculo diferencial e integral.

Resumen

Hemos visto que el concepto de límite surge al tratar de hallar el área de una región, la pendiente de una tangente a una curva, la velocidad de un automóvil o la suma de una serie infinita. En cada caso, el tema común es el cálculo de una cantidad como el límite de otras cantidades calculadas con facilidad. Esta idea básica de límite separa el cálculo de las otras áreas de las matemáticas. De hecho, podríamos definirlo como la parte de las matemáticas que trata con límites.

Sir Isaac Newton inventó su versión del cálculo para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. En la actualidad, se usa para calcular las órbitas de los satélites y de las naves espaciales, predecir los tamaños de poblaciones, estimar la rapidez con que se elevan los precios, pronosticar los cambios meteorológicos, medir el flujo cardiaco, calcular las primas de seguros y en una gran diversidad de otras áreas. En este libro examinaremos algunos de estos usos.

Para dar una idea del poder de la materia, finalizamos este panorama preliminar con una lista de algunas de las preguntas que podría responder aplicando el cálculo:

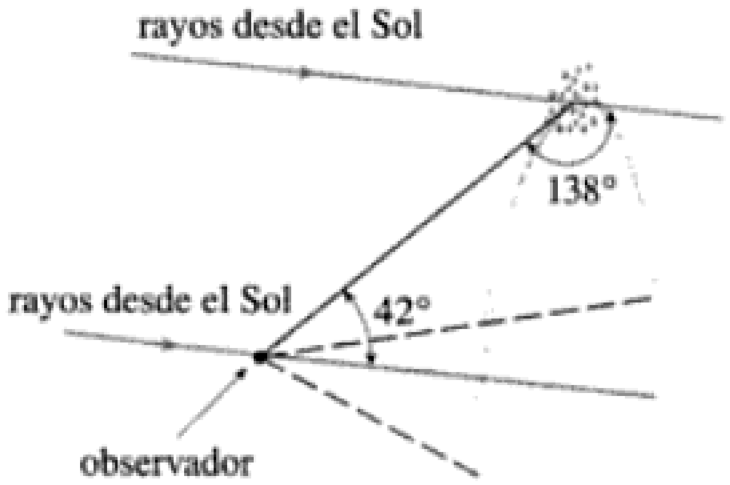
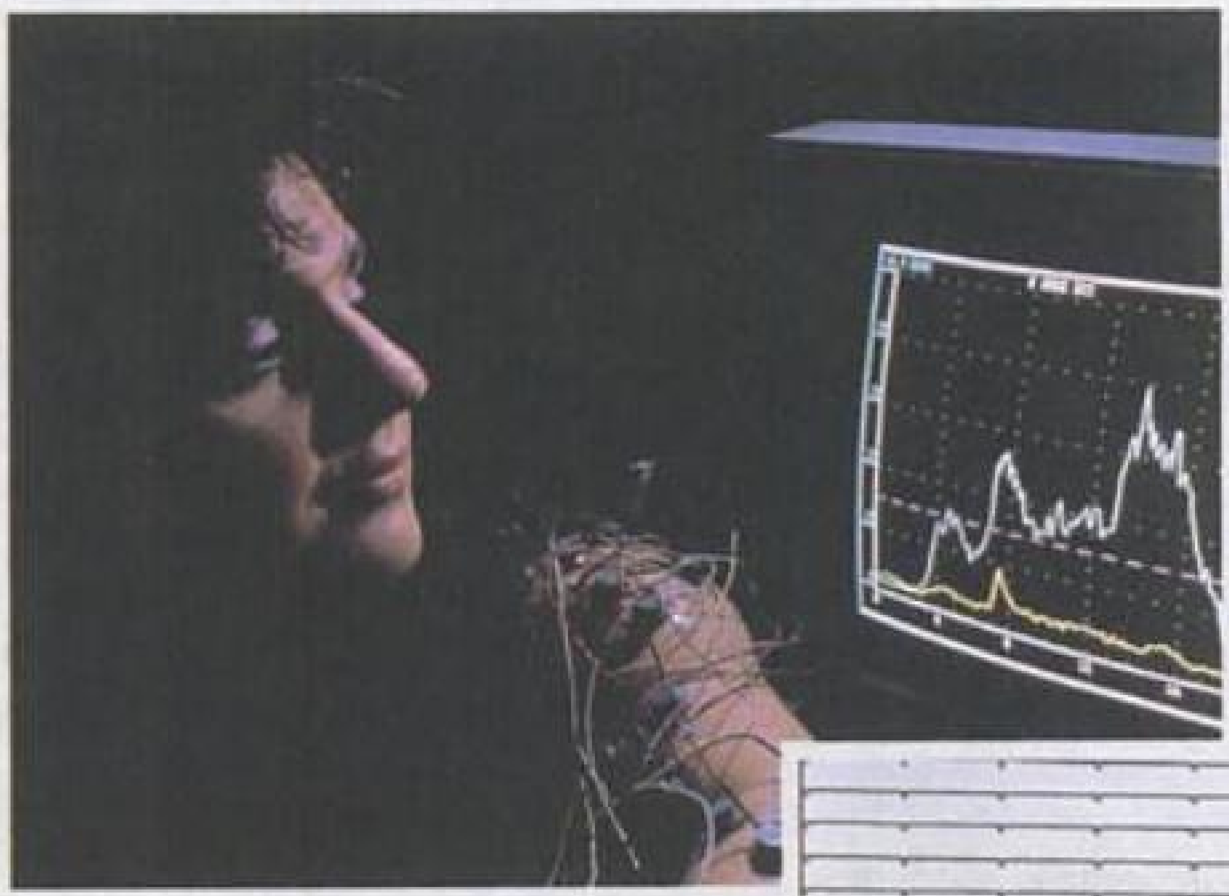
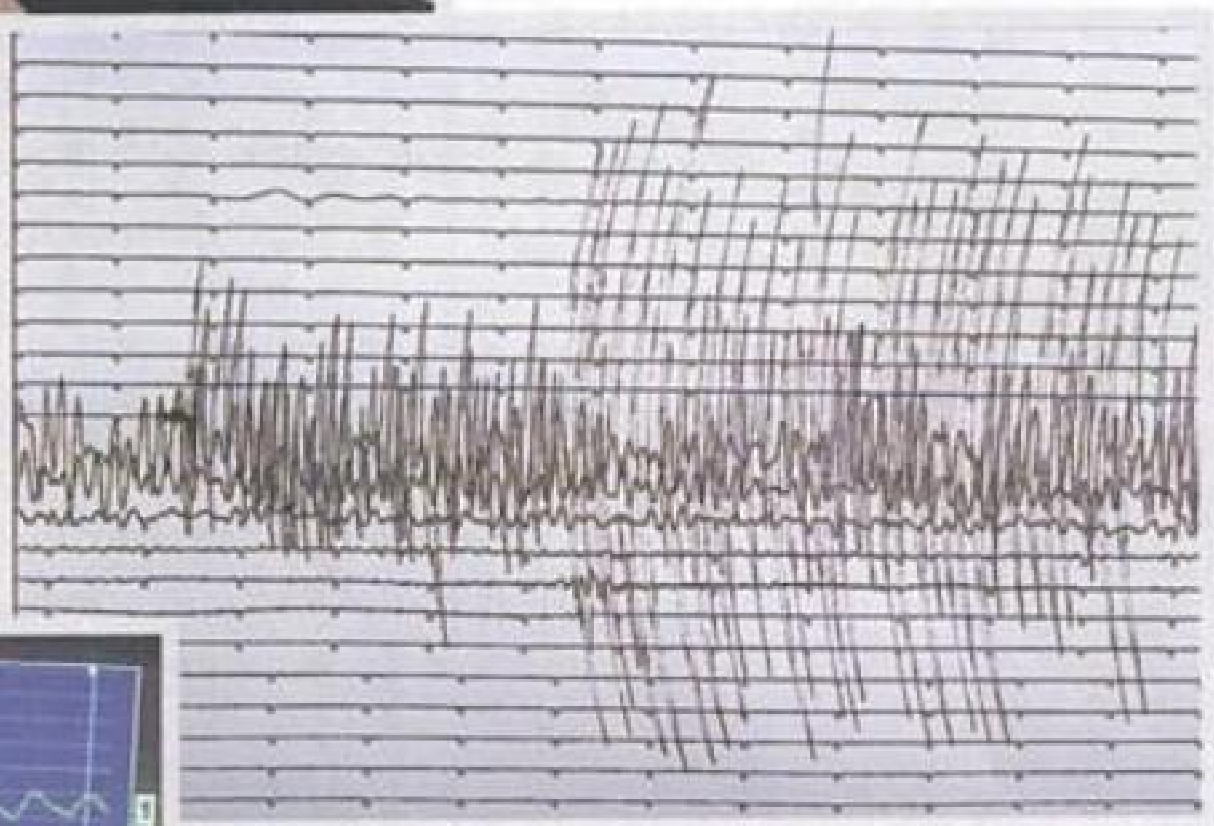


FIGURA 12

1. ¿Cómo podemos explicar el hecho, ilustrado en la figura 12, de que el ángulo de elevación desde un observador hasta el punto más alto de un arco iris sea de 42°? (Véase la página 286.)
2. ¿Cómo podemos explicar las formas de las latas que se encuentran en los anaqueles de un supermercado? (Véase la página 339.)
3. ¿Cuál es el mejor lugar para sentarse en una sala cinematográfica? (Véase la página 463.)
4. ¿A qué distancia de un aeropuerto un piloto debe iniciar el descenso? (Véase la página 240.)
5. ¿En qué posición debe colocarse un jugador del cuadro para capturar una bola lanzada por un jardinero y hacer el relevo para lanzarla al plato? (Véase la página 612.)
6. ¿Una bola lanzada hacia arriba tarda más en llegar a su altura máxima o en regresar a su altura original? (Véase la página 602.)

1 Funciones y modelos





La representación más natural y conveniente de muchas funciones es la gráfica. Aquí se muestran gráficas registradas por instrumentos: un electrocardiograma para los latidos cardiacos, un polígrafo para la detección de mentiras y un sismógrafo para la actividad sísmica (en este caso, el terromoto de Loma Prieta que destruyó el puente de la bahía de San Francisco a Oakland, en 1989.

Los objetos fundamentales con que tratamos en el cálculo son funciones. En este capítulo se prepara el camino para el cálculo al analizar las ideas básicas de las funciones, sus gráficas y las maneras para transformarlas y combinarlas. Haremos hincapié en que una función se puede representar de diferentes modos: mediante una ecuación, en una tabla, con una gráfica o con palabras. Consideraremos los tipos principales de funciones que se presentan en el cálculo y describiremos el proceso de usarlas como modelos matemáticos de fenómenos del mundo real. Expondremos también el uso de las calculadoras graficadoras y del software para trazar gráficas por computadora.

1.1 Cuatro maneras de representar una función

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa con la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r existe asociado un valor de A y decimos que A es *función* de r.

B. La población humana del mundo, P, depende del tiempo t. En la tabla se dan estimaciones de la población del mundo, $P(t)$, en el tiempo t, para ciertos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2{,}520{,}000{,}000$$

Pero para cada valor de tiempo t existe un valor de P correspondiente, y decimos que P es una función de t.

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

C. El costo C para enviar por correo una carta de primera clase depende de su peso w. Aun cuando no existe una fórmula sencilla que relacione w con C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a del suelo, según la mide un sismógrafo durante un terremoto, depende del tiempo t. En la figura 1 se muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un valor dado de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.

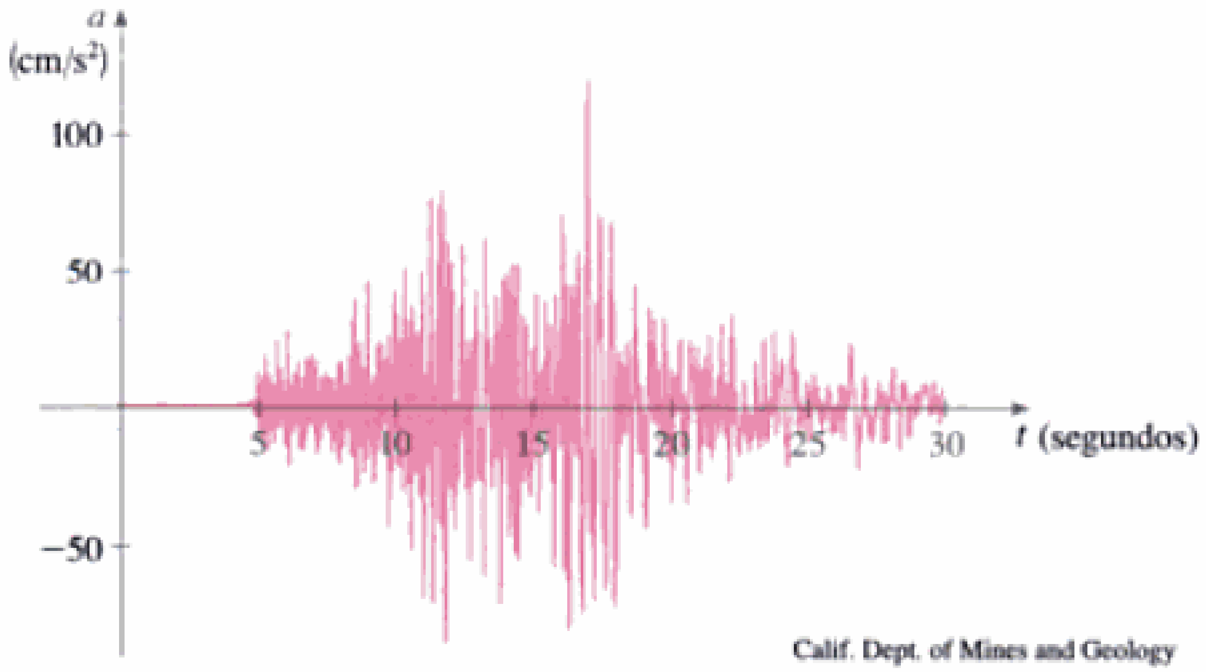


FIGURA 1
Aceleración vertical del suelo durante el terremoto de Northridge

En cada uno de estos ejemplos se describe una regla por la cual, dado un número (r, t, w o t), se asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso, decimos que el segundo número es función del primero.

> Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

Por lo común, consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El conjunto A se llama **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f de x". La imagen de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio A. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en la *imagen** de f se llama **variable dependiente**. En el ejemplo A, r es la variable independiente y A es la dependiente.

FIGURA 2
Diagrama como máquinas para una función f.

Resulta útil concebir una función como una **máquina** (Fig. 2). Si x está en el dominio de la función f, entonces x entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, podemos concebir el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el recorrido o imagen como el conjunto de todas las salidas posibles.

Las funciones preprogramadas de una calculadora son buenos ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$) es una de esas funciones. En primer lugar, usted introduce x en la pantalla. En seguida, oprime la tecla marcada como $\sqrt{x}$. Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, entonces aparecerá una *aproximación* para $\sqrt{x}$ en la pantalla. De este modo, la tecla $\sqrt{x}$ de su calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

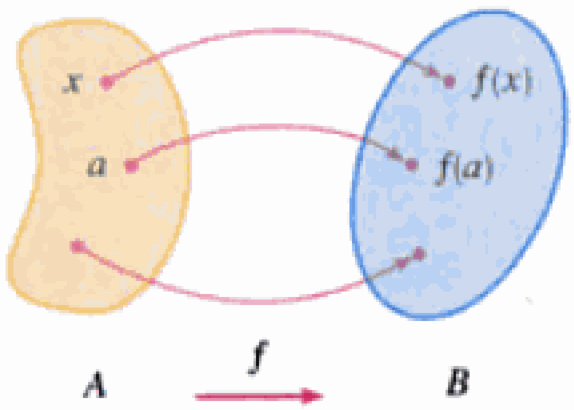


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f.

Otra manera de representar una función es un **diagrama de flechas** (Fig. 3). Cada flecha une un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ con a, etcétera.

(Observe que son parejas entrada-salida.) En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano de coordenadas, tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio A, entonces su **gráfica** es el conjunto de las parejas ordenadas

La gráfica de una función f nos da una imagen útil del comportamiento, o la "historia de la vida", de una función. Como la coordenada y de cualquier punto (x, y) de la gráfica es $y = f(x)$, podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de esta última arriba del punto x (Fig. 4). La gráfica de f también nos permite dominio y del recorrido de f sobre el eje x y el eje y, respectivamente (Fig. 5).

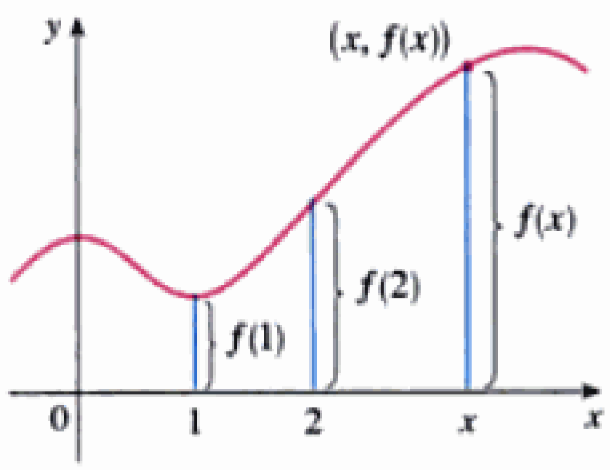


FIGURA 4

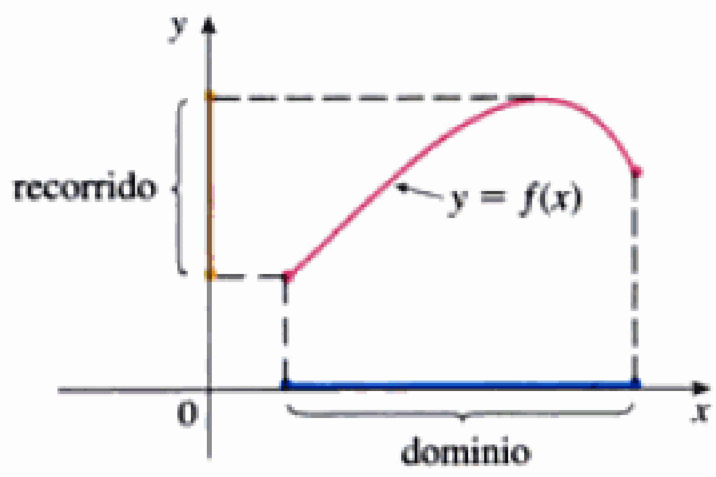


FIGURA 5

Nota del T. El conjunto de valores que alcanza una función se denomina *imagen de la función o recorrido de una función*. Éste es más adecuado para funciones numéricas y aquél para aplicaciones generales o abstractas. En este texto se usarán ambos términos.

EJEMPLO 1 □ En la figura 6 se muestra la gráfica de una función f.
(a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.
(b) ¿Cuáles son el dominio y la imagen de f?

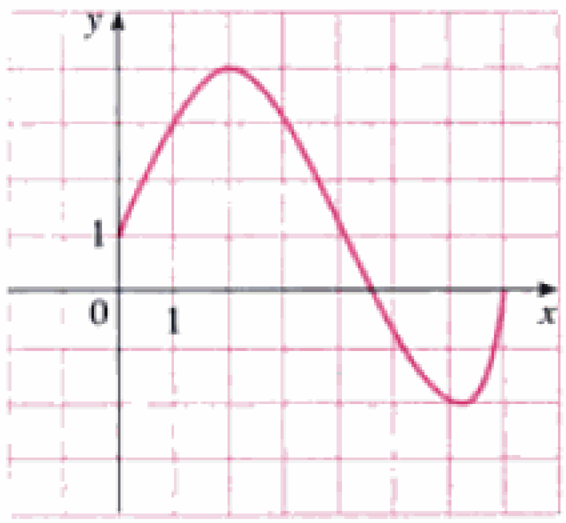


FIGURA 6

SOLUCIÓN
(a) En la figura 6 vemos que el punto $(1, 3)$ se encuentra en la gráfica de f, de modo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto de la gráfica que se encuentra arriba de $x = 1$ está tres unidades arriba del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra alrededor de 0.7 unidades debajo del eje x, por tanto, estimamos que $f(5) \approx -0.7$.

□ En el apéndice A se da la notación para los intervalos.

(b) Vemos que $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$; de modo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores desde -2 hasta 4, de manera que la imagen de f es

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

□

EJEMPLO 2 □ Haga una gráfica y encuentre el dominio y la imagen de cada función.
(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

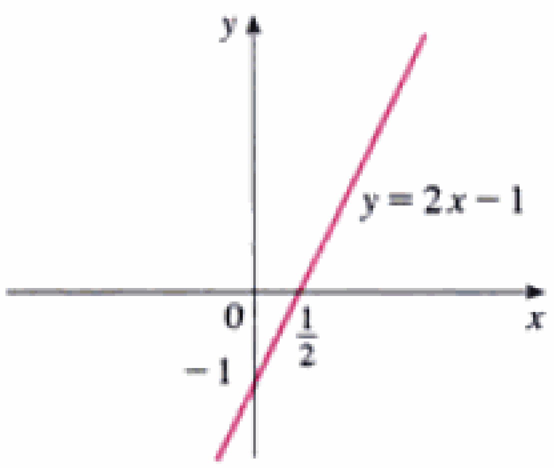


FIGURA 7

SOLUCIÓN
(a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y reconocemos esto como la ecuación de una recta con pendiente 2 y ordenada al origen -1. (Recuerde la forma de pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta: $y = mx + b$. Véase Ap. B.) Esto nos permite trazar la gráfica de f de la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, de modo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, el cual se denota con $\mathbb{R}$. En la gráfica se muestra que el recorrido también es $\mathbb{R}$.

(b) Como $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podríamos graficar los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$ con unos cuantos puntos más de la gráfica y unirlos para producir la (Fig. 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$, lo cual representa una parábola (véase el Ap. B). El dominio de g es $\mathbb{R}$. La imagen de g consta de todos los valores de $g(x)$; es decir, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x y cualquier número positivo y es un cuadrado. Por tanto, la imagen de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto también se ve en la figura 8.

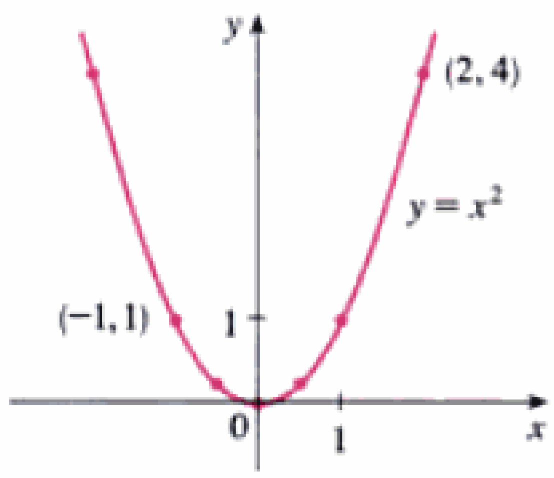


FIGURA 8

□

Representación de las funciones

Se tienen cuatro maneras posibles para representar una función:

- Verbal (con una descripción en palabras)
- Numérica (con una tabla de valores)
- Visual (con una gráfica)
- Algebraica (con una fórmula explícita)

Si una sola función se puede representar de las cuatro maneras, a menudo resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de esa función. (Por ejemplo, en el ejemplo 2 empezamos con fórmulas algebraicas y, a continuación, obtuvimos las gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más natural con uno de los métodos que con otro. Con esto en mente, volvamos a examinar las cuatro situaciones que consideramos al principio de esta sección.

A. Quizá la representación más útil del área de un círculo como función de su radio sea la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores o trazar una gráfica (la mitad de una parábola). Puesto que un círculo debe tener un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, y el recorrido también es $(0, \infty)$

B. Hemos descrito verbalmente la función: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. La tabla de valores de la población mundial de la página 12 da una representación conveniente de esta función. Si situamos estos valores en una gráfica, obtenemos la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) de la figura 9. También es una representación útil; nos permite absorber todos los datos a la vez. ¿Qué hay acerca de una fórmula? Por supuesto, es imposible idear una fórmula explícita que dé la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible hallar una expresión para una función que proporcione una *aproximación de* $P(t)$. De hecho, con la aplicación de métodos que se explican en la sección 1.7, obtenemos la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (0.008306312) \cdot (1.013716)^t$$

y en la figura 10 se ilustra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que da una aproximación para el comportamiento de nuestra función dada. Veremos que las ideas del cálculo se pueden aplicar a una tabla de valores; no se necesita una fórmula explícita.

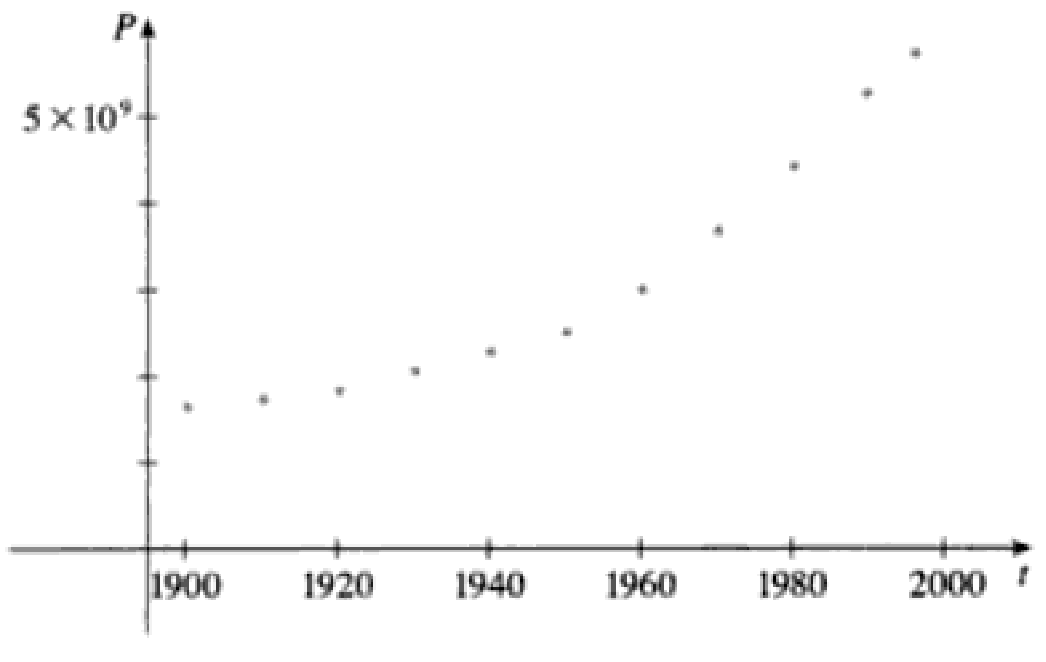


FIGURA 9

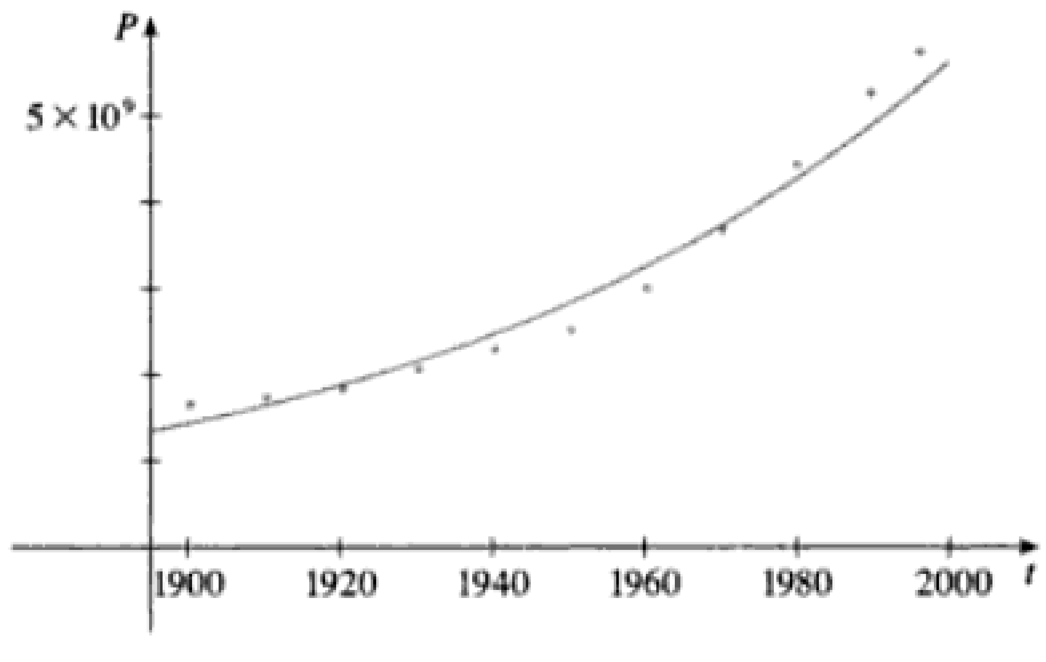


FIGURA 10

□ Una función definida por una tabla de valores se conoce como función *tabular*.

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.32
$1 < w \leq 2$	0.55
$2 < w \leq 3$	0.78
$3 < w \leq 4$	1.01
$4 < w \leq 5$	1.24
⋮	⋮

La función P es típica entre las funciones que surgen siempre que intentamos aplicar el cálculo al mundo real. Empezamos con una descripción verbal de la función. En seguida, es posible que seamos capaces de construir una tabla de valores de la función, quizá a partir de lecturas de instrumentos en un experimento científico. Aun cuando no tengamos el conocimiento completo de los valores de la función, a lo largo de libro veremos que todavía es posible realizar las operaciones del cálculo en una función de ese tipo.

C. Una vez más, la función está descrita en palabras: $C(w)$ es el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w. La regla que en 1996 aplicaba el U. S. Postal Service es la siguiente: el costo es de 32 centavos de dólar hasta por una onza, más 23 centavos por cada onza sucesiva, hasta 11 onzas. La tabla de valores que se muestra en el margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible trazar una gráfica (véase el Ejem. 10).

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que se podría compilar una tabla de valores e incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo —amplitudes y patrones— se puede ver a partir de la gráfica. (Esto es verdad también para los patrones que se ven en los electrocardiogramas de los pacientes cardiacos y en los polígrafos para la detección de mentiras.) En las figuras 11 y 12 se muestran las gráficas de las aceleraciones norte-sur y este-oeste del terremoto de Northridge; cuando se usan con la figura 1, proporcionan gran cantidad de información acerca del terremoto.

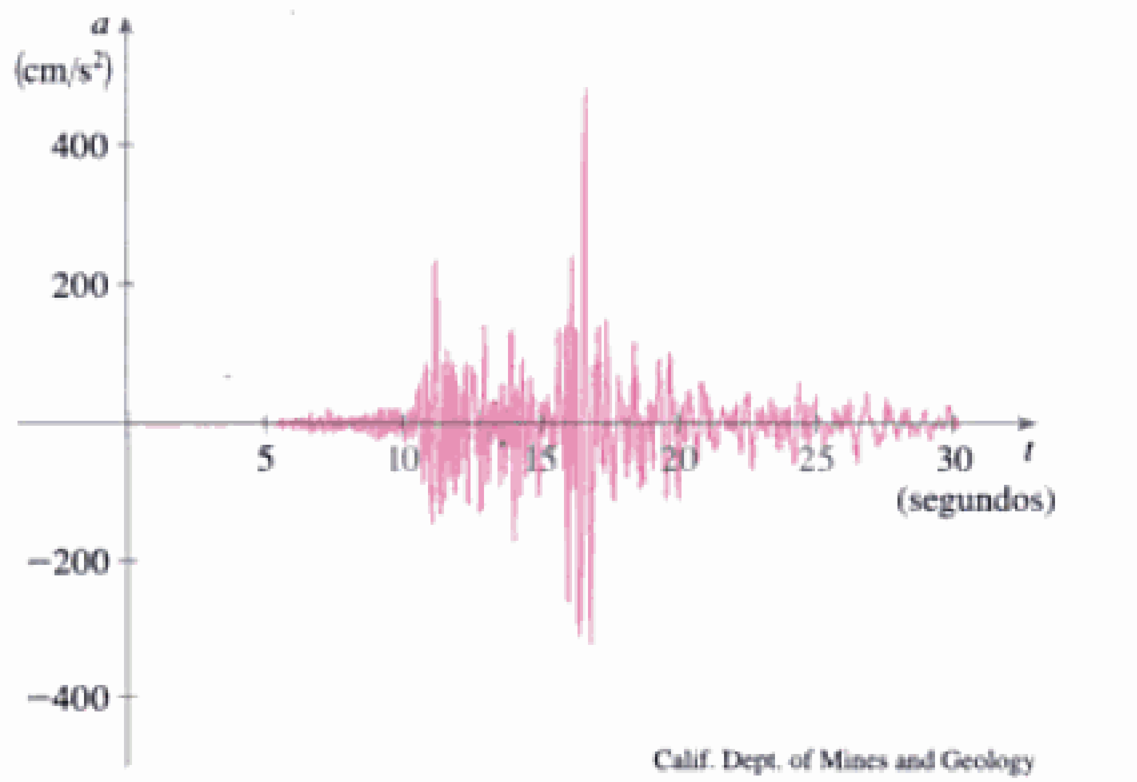


FIGURA 11 Aceleración norte-sur para el terremoto de Northridge.

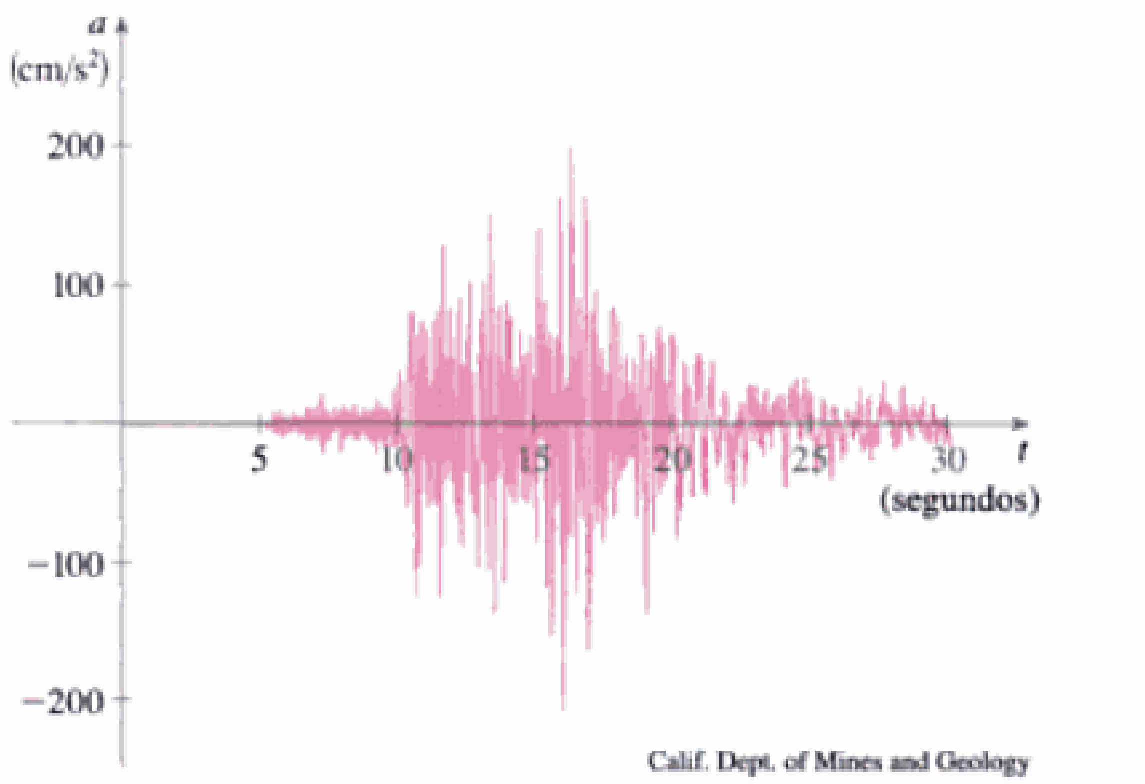


FIGURA 12 Aceleración este-oeste para el terremoto de Northridge.

En el ejemplo siguiente, graficamos una función definida verbalmente.

EJEMPLO 3 □ Cuando abre un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. Trace una gráfica aproximada de T como función del tiempo t que ha transcurrido desde que se abrió el grifo.

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir la que se encuentra en el tanque de agua caliente, T aumenta con rapidez. En la fase siguiente, T es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se drena, T decrece hasta la temperatura de la alimentación de agua. Esto nos permite hacer el esquema aproximado de T, como función de t, de la figura 13 □

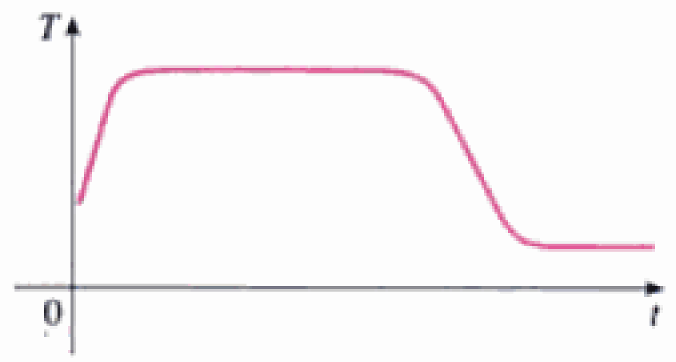


FIGURA 13

Se podría obtener una gráfica más exacta de la función del ejemplo 3 utilizando un termómetro para medir la temperatura del agua a intervalos de 10 segundos. En general, los científicos reúnen datos experimentales y los usan para trazar gráficas de funciones, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

t	$c(t)$
0	0.0800
2	0.0570
4	0.0408
6	0.0295
8	0.0210

EJEMPLO 4 □ Los datos que se muestran en el margen provienen de un experimento sobre la lactonización del ácido hidroxivalérico a 25 °C. Dan la concentración $C(t)$ de este ácido (en moles por litro) después de t minutos. Use estos datos para trazar una aproximación de la gráfica de la función concentración. En seguida, utilice esta gráfica para estimar la concentración después de 5 minutos.

SOLUCIÓN En la figura 14, graficamos los cinco puntos correspondientes a los datos de la tabla. Se podrían aplicar los métodos de ajuste de curvas de la sección 1.2 para elegir un modelo y graficarlo. Pero los puntos correspondientes a los datos muestran un buen comportamiento, de modo que sencillamente trazamos a mano una curva suave que pase por ellos (Fig. 15).

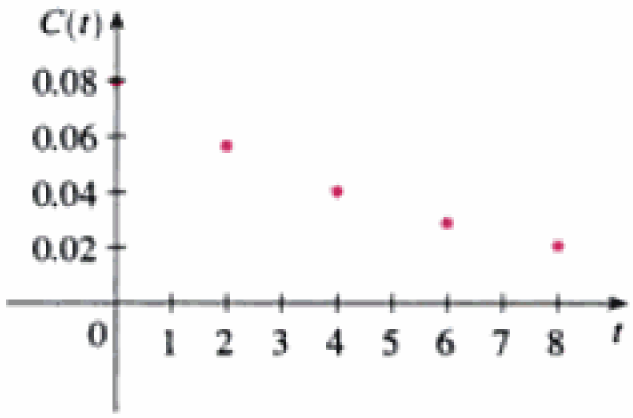


FIGURA 14

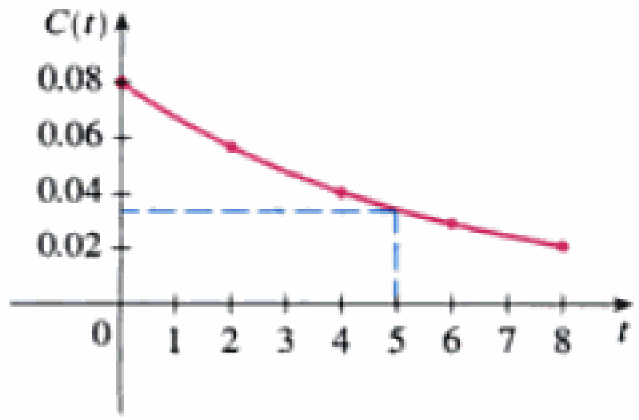


FIGURA 15

A continuación, utilizamos la gráfica para estimar que la concentración después de 5 minutos es

$$C(5) \approx 0.035 \text{ mol/litro}$$ □

En el ejemplo que sigue, partimos de una descripción verbal de una función, en una situación física, y obtenemos una fórmula algebraica explícita. La capacidad para llevar a cabo esto constituye una habilidad útil en los problemas de cálculo en los que se piden los valores máximo y mínimo de cantidades.

EJEMPLO 5 □ Un recipiente rectangular para almacenamiento, con su parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado y el material para los lados, cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Exprese el costo del material como función del ancho de la base.

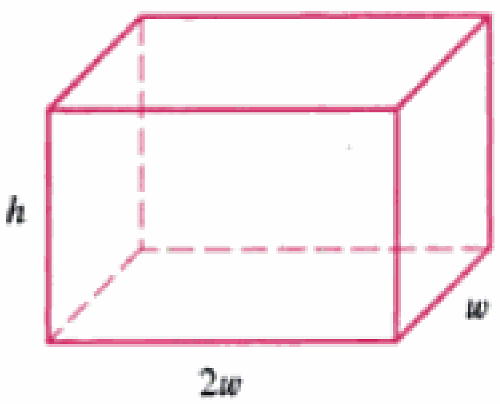


FIGURA 16

SOLUCIÓN Dibujamos un diagrama como el de la figura 16 e introducimos la notación tomando w y $2w$ como el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h como la altura.

El área de la base es $(2w)w = 2w^2$, de modo que el costo, en dólares, del material para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen el área wh y el área de los otros dos es $2wh$; por tanto, el costo del material para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. De modo que el costo total es

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C como función sólo de w, necesitamos eliminar h, y lo hacemos al aplicar el hecho de que el volumen es 10 m^3. De este modo,

$$w(2w)h = 10$$

lo cual da

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

□ Para restablecer funciones de aplicación, como en el ejemplo 5, puede resultar útil repasar los principios de solución de problemas, como se plantean en la página 59, en particular el paso 1: *comprender el problema.*

Si se sustituye esto en la expresión para C, tenemos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por lo tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como función de w. □

EJEMPLO 6 □ Encuentre el dominio de cada función.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

□ Si se da una función mediante una fórmula y no se da el dominio explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

SOLUCIÓN

(a) Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto equivale a $x \geqslant -2$, de modo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Dado que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

y la división entre 0 no está permitida, vemos que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

lo cual también podría escribirse, con la notación de intervalos, como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$ □

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la cuestión: ¿cuáles curvas en el plano xy son gráficas de funciones? La siguiente prueba responde lo anterior:

> **Prueba de la recta vertical** Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna recta vertical se interseca con la curva más de una vez.

En la figura 17, se puede ver la razón de la veracidad de la prueba de la recta vertical. Si cada recta vertical $x = a$ interseca una curva sólo una vez, en (a, b), entonces exactamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ se interseca con la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), entonces la curva no puede representar una función, porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

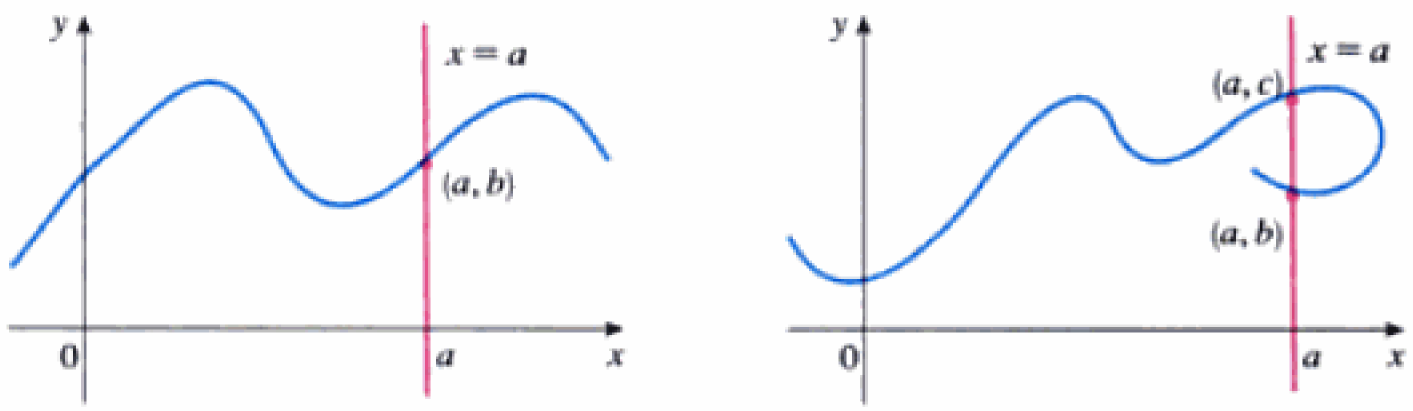


FIGURA 17

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ [Fig. 18a] no es la gráfica de una función de x porque —como el lector puede ver—, existen varias rectas verticales que intersecan dos veces esa parábola. Sin embargo, la parábola en realidad contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Observe que $x = y^2 - 2$ significa $y^2 = x + 2$, por lo que $y = \pm\sqrt{x+2}$. Por tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ [del Ejem. 6a)] y $g(x) = -\sqrt{x+2}$ [véanse las Figs. 18b) y c)]. Observamos que, si invertimos los papeles de x y y, entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como función de y (con y como la variable independiente y x como dependiente) y la parábola aparece como la gráfica de la función h.

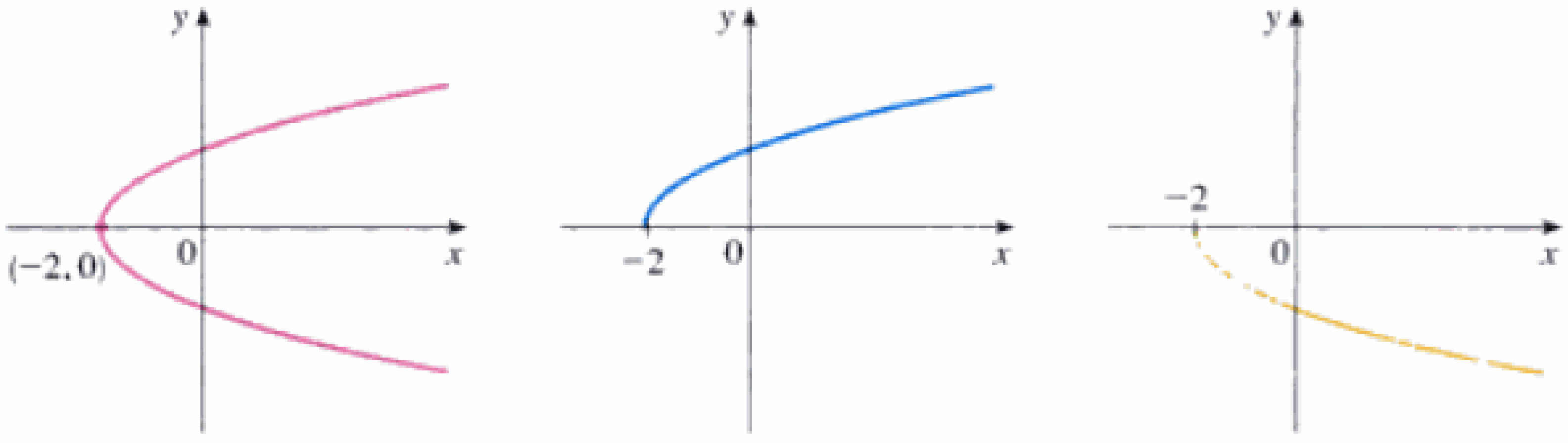


FIGURA 18 (a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

Funciones definidas por secciones

Las funciones de los cuatro ejemplos siguientes están definidas por fórmulas diferentes en diferentes partes de sus dominios.

EJEMPLO 7 □ Una función f se define por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Evalúe $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular, la regla es: primero se considera el valor de la entrada x. Si sucede que $x \leqslant 1$, entonces el valor de $f(x)$ es $1 - x$. Por otra parte, si $x > 1$, entonces el valor de $f(x)$ es x^2.

$$\text{Como } 0 \leqslant 1, \text{ tenemos } f(0) = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Como } 1 \leqslant 1, \text{ tenemos } f(1) = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Como } 2 > 1, \text{ tenemos } f(2) = 2^2 = 4.$$

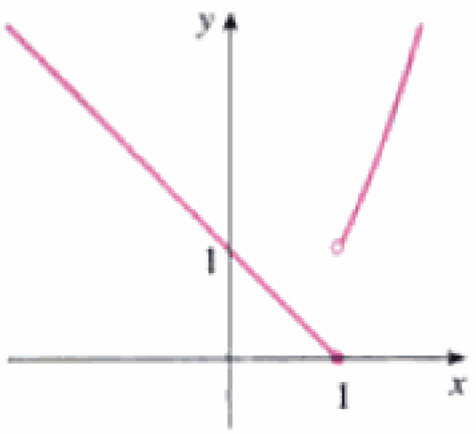


FIGURA 19

¿Cómo dibujamos la gráfica de f? Observamos que, si $x \leqslant 1$, entonces $f(x) = 1 - x$, de modo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la recta vertical $x = 1$ debe coincidir con la recta $y = 1 - x$, la cual tiene la pendiente -1 y 1 como ordenada al origen. Si $x > 1$, entonces $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de f que está a la derecha de la recta $x = 1$ debe coincidir con la gráfica de $y = x^2$, la cual es una parábola. Esto nos permite trazar la gráfica de la figura 19. El punto relleno indica que el punto (1, 0) está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que el punto (1, 1) está fuera de la gráfica. □

El ejemplo siguiente de una función definida por secciones es la función valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, denotado con $|a|$, es la distancia de a hasta 0, sobre la recta de los números reales. Las distancias siempre son positivas o 0; por tanto, tenemos

□ Para un repaso más extenso de los valores absolutos, véase el apéndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general, tenemos

$$\boxed{\begin{array}{ll} |a| = a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{si } a < 0 \end{array}}$$

(Recuerde que si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.)

EJEMPLO 8 □ Trace la gráfica de la función valor absoluto, $f(x) = |x|$.

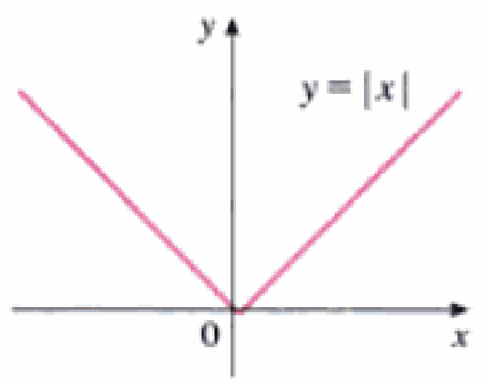


FIGURA 20

SOLUCIÓN Con base en el análisis precedente, sabemos

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Aplicando el método del ejemplo 7, vemos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$, a la derecha del eje y, y coincide con la recta $y = -x$, a la izquierda del eje y (Fig. 20). □

EJEMPLO 9 □ Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura 21.

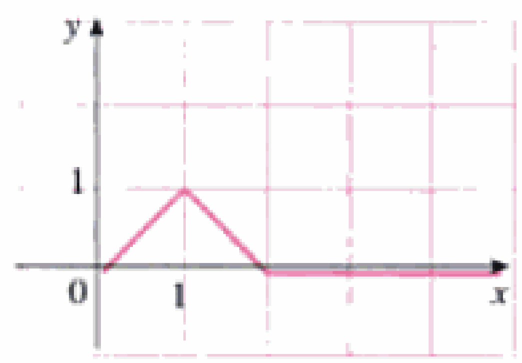


FIGURA 21

SOLUCIÓN La recta que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = 1$ y su ordenada al origen es $b = 0$, de forma que su ecuación es $y = x$. De este modo, para la parte de la gráfica de f que une (0, 0) con (1, 1), tenemos

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

La recta que pasa por (1, 1) y (2, 0) tiene pendiente $m = -1$, de suerte que su ecucación en la forma punto-pendiente es

□ Forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Véase el apéndice B.

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{o} \qquad y = 2 - x$$

Por lo tanto, tenemos

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 < x \leqslant 2$$

Vemos también que, para $x > 2$, la gráfica de f coincide con el eje x. Si reunimos esta información, tenemos la fórmula siguiente para f, en tres secciones:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$ □

EJEMPLO 10 □ En el ejemplo C del principio de esta sección, consideramos el costo $C(w)$ de enviar por correo una carta de primera clase con peso w. En realidad, ésta es una función definida por secciones porque, a partir de la tabla de valores, tenemos

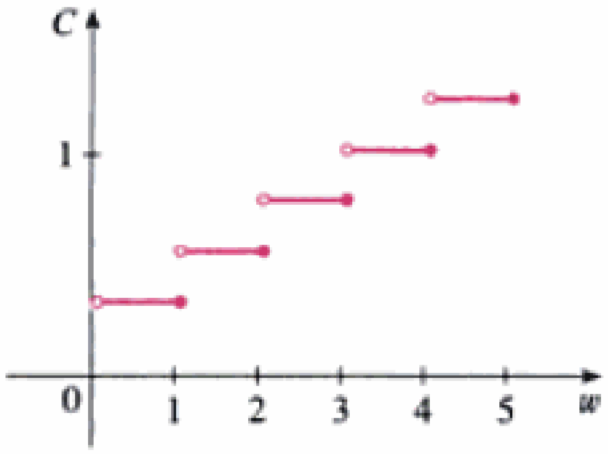


FIGURA 22

$$C(w) = \begin{cases} 0.32 & \text{si } 0 < w \leqslant 1 \\ 0.55 & \text{si } 1 < w \leqslant 2 \\ 0.78 & \text{si } 2 < w \leqslant 3 \\ 1.01 & \text{si } 3 < w \leqslant 4 \end{cases}$$

La gráfica se muestra en la figura 22. Usted puede ver por qué a las funciones semejantes a ésta se les llama **función escalón**: saltan de un valor al siguiente. En el capítulo 2, se estudiarán esas funciones. □

Simetría

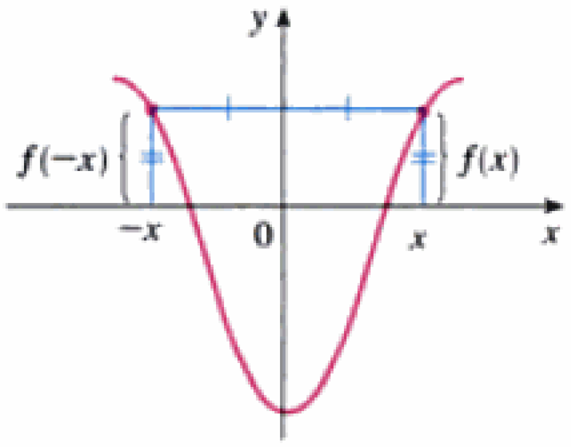


FIGURA 23
Función par.

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$, para todo número x en su dominio, entonces f se denomina **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (Fig. 23). Esto significa que si hemos trazado la gráfica de f para $x \geqslant 0$, obtenemos toda la gráfica con sólo reflejar con respecto al eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$, para todo número x en su dominio, entonces f se conoce como **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

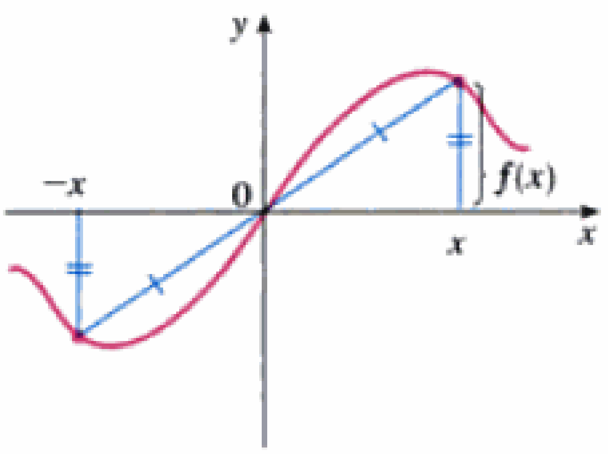


FIGURA 24
Función impar.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen (Fig. 24). Si ya tenemos la gráfica para $x \geqslant 0$, podemos obtener la gráfica entera al hacerla girar 180º alrededor del origen.

EJEMPLO 11 □ Determine si cada una de las funciones siguientes es par, impar o ninguna de las dos cosas.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una función impar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

De modo que g es par.

(c) $$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Dado que $h(-x)$ $h(x)$ y $h(-x)$ $-h(x)$, concluimos que h no es par ni impar. ◻

En la figura 25 se muestran las gráficas de las funciones del ejemplo 11. Note que la gráfica de h no es simétrica respecto al eje y ni respecto al origen.

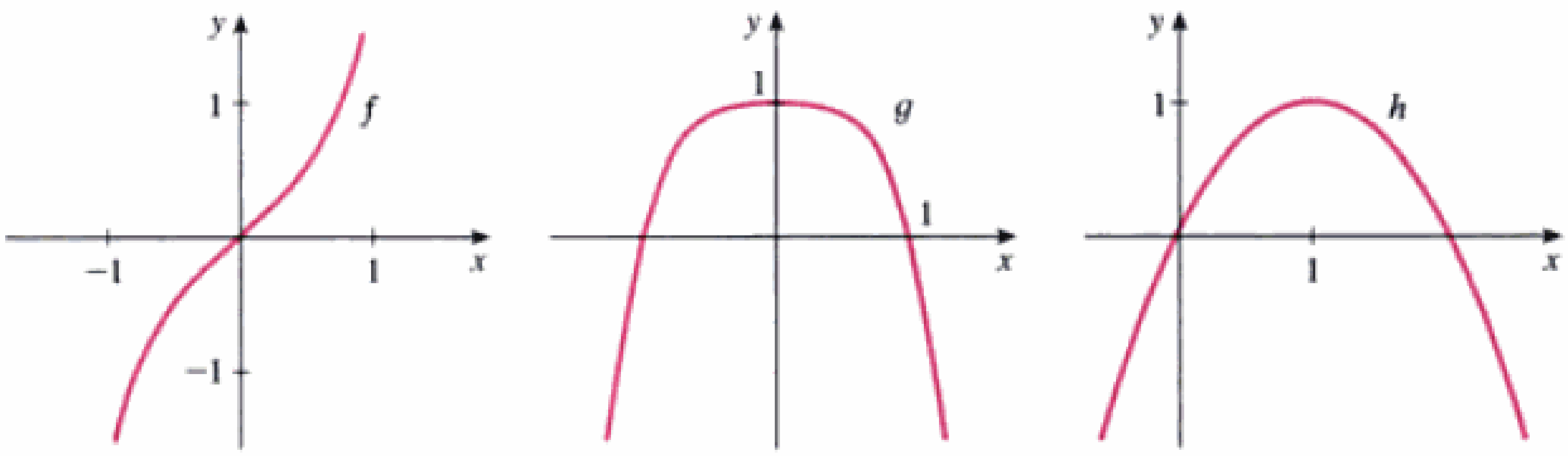


FIGURA 25 (a) (b) (c)

Funciones crecientes y decrecientes

La gráfica que se muestra en la figura 26 sube desde A hasta B, desciende desde B hasta C y vuelve a subir desde C hasta D. Se dice que la función f está creciendo sobre el intervalo $[a, b]$, decreciendo sobre $[b, c]$ y creciendo nuevamente sobre $[c, d]$. Note que, si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera entre a y b, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Usamos esto como la propiedad que define una función creciente.

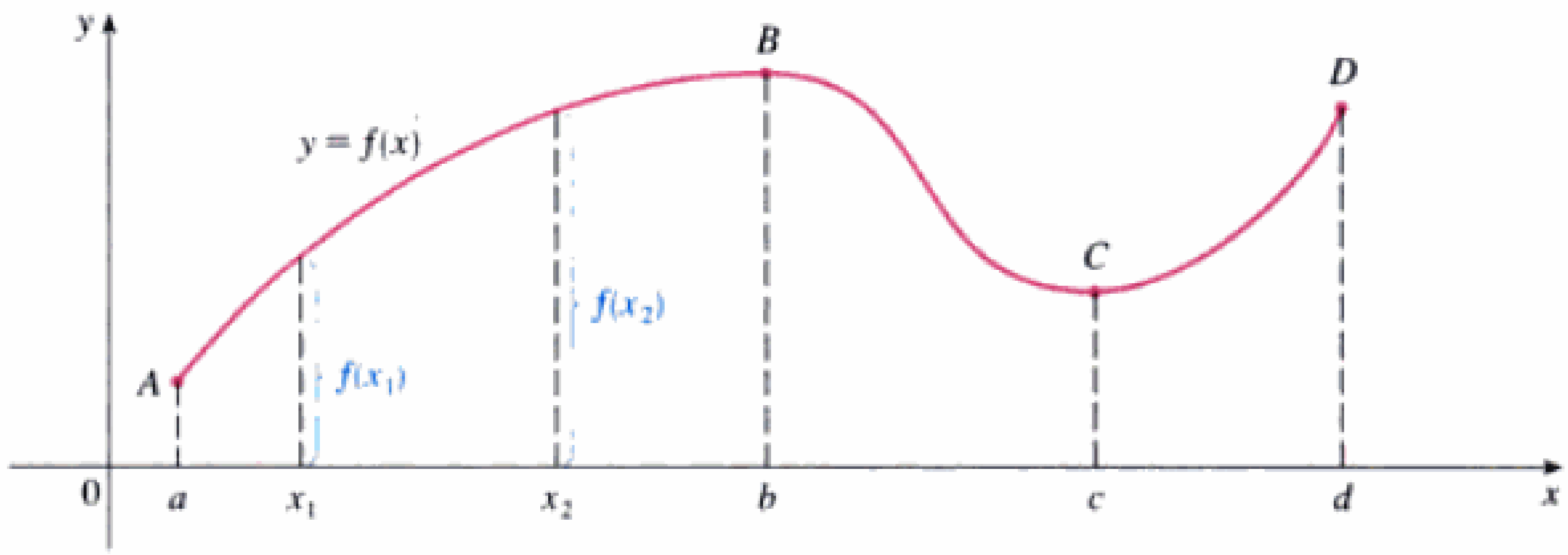


FIGURA 26

Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo I, si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Si dice que es **decreciente** sobre I, si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

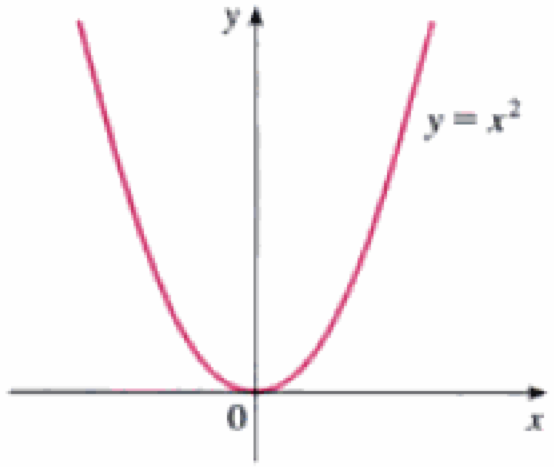


FIGURA 27

En la definición de función creciente es importante darse cuenta de que se debe satisfacer la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ para *toda* pareja de números x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$.

A partir de la figura 27 puede 1ver que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 Ejercicios

1. Se da la gráfica de una función f.

a) Establezca el valor de $f(-1)$.

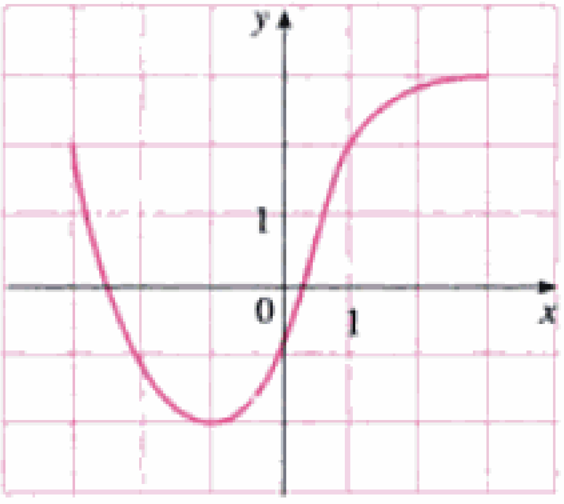
b) Estime el valor de $f(2)$.

c) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = 2$?

d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.

e) Establezca el dominio e imagen de f.

f) ¿En qué intervalo es f creciente?



2. Se proporcionan las gráficas de f y g.

a) Dé los valores de $f(-4)$ y de $g(3)$.

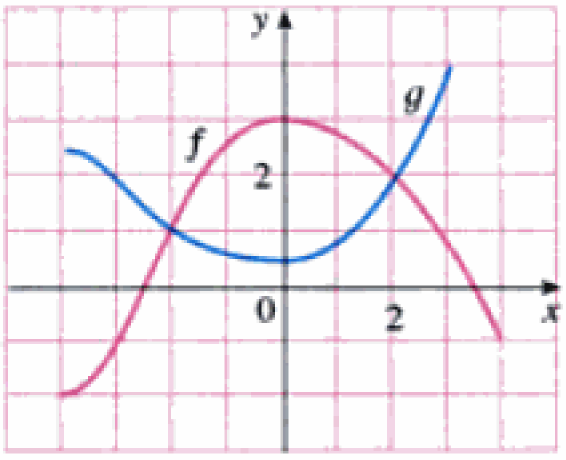
b) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = g(x)$?

c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.

d) ¿En qué intervalo f es decreciente?

e) Dé el dominio y la imagen de f.

f) Dé el dominio y la imagen de g.

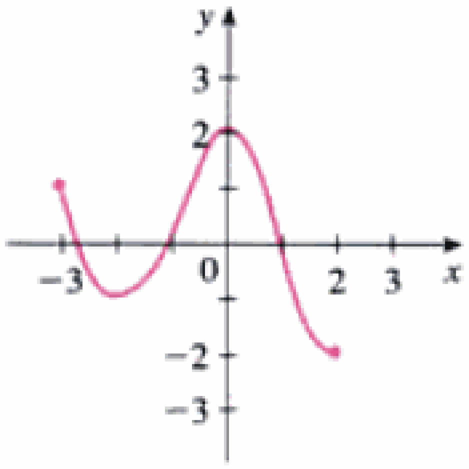


3. Un instrumento operado por el California Department of Mines and Geology en el University Hospital de la University of Southern California en Los Ángeles: registró las figuras 1, 11 y 12. Úselas para estimar los recorridos de las funciones aceleración del suelo, vertical, norte-sur y este-oeste, en la USC durante el terremoto de Northridge.

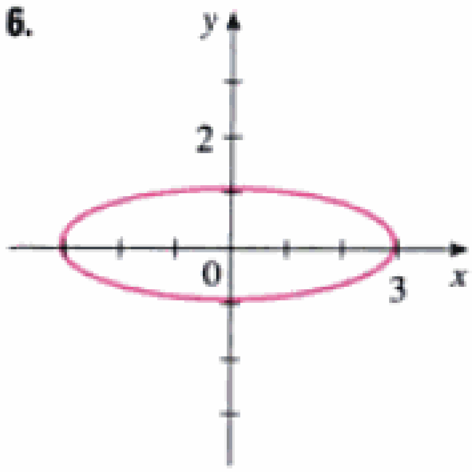
4. En esta sección analizamos ejemplos de funciones, cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo del porte de correos es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dé otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describan verbalmente. ¿Qué puede decir acerca del dominio e imagen de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica aproximada de cada función.

5–8 □ Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, dé el dominio y la imagen de la función.

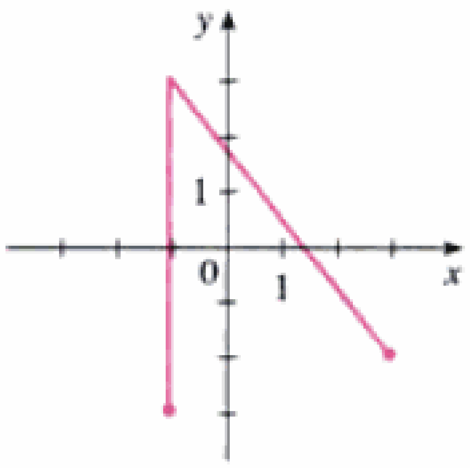
5.



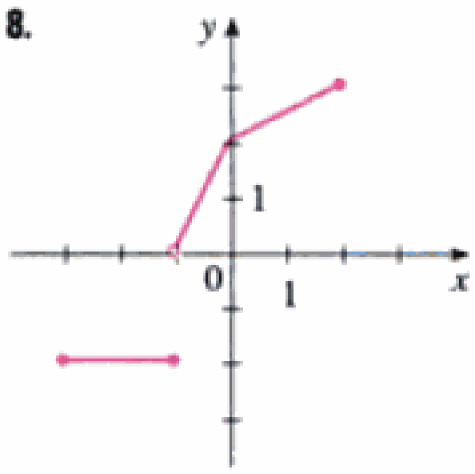
6.



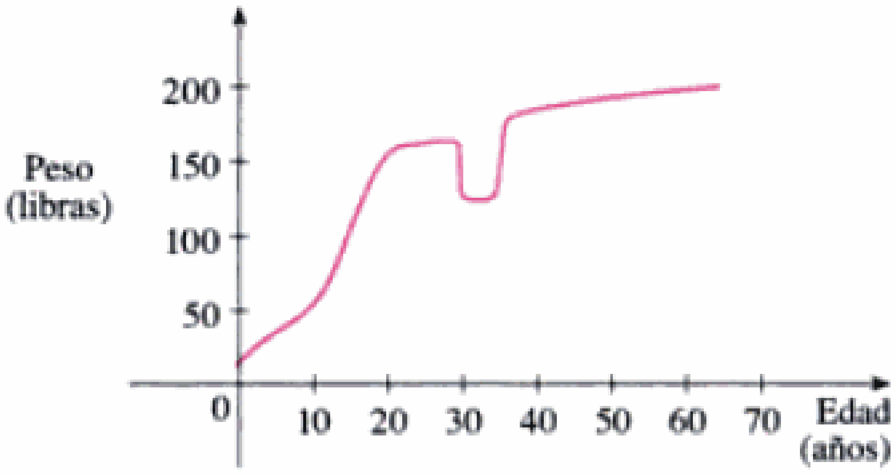
7.



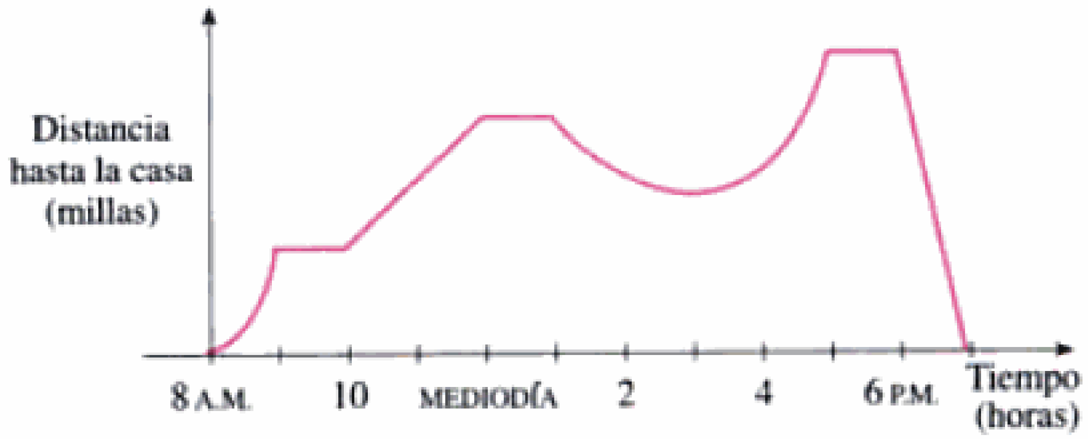
8.



9. La gráfica que se muestra da el peso de cierta persona como función de la edad. Describa con palabras la manera en que varía el peso de esta persona a lo largo del tiempo. ¿Qué piensa el lector que sucedió cuando esta persona tenía 30 años?



10. La gráfica que se muestra da la distancia a la que se encuentra un vendedor de su casa como función del tiempo en cierto día. Describa con palabras lo que la gráfica indica respecto al recorrido del vendedor en este día.



11. Usted pone algunos cubos de hielo en un vaso, lo llena con agua fría y lo deja sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo. A continuación, trace una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

12. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz del día como función del tiempo del año.

13. Trace una gráfica aproximada de la temperatura exterior como función de la época, durante un día típico de primavera.

14. Una persona coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. A continuación, lo saca y lo deja enfriar, antes de comerlo. Describa cómo cambia la temperatura del pastel conforme pasa el tiempo. Después, trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

15. El propietario de una casa corta el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo durante un periodo de cuatro semanas.

16. Un avión sale de un aeropuerto y aterriza, una hora más tarde, en otro aeropuerto que se encuentra a 400 millas de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado la terminal, sea $x(t)$ la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión. Trace.

a) Una gráfica posible de $x(t)$.
b) Una gráfica posible de $y(t)$.
c) Una gráfica posible de la velocidad horizontal.
d) Una gráfica posible de la velocidad vertical.

17. El 18 de marzo de 1996, en Atlanta, Georgia, se registraron las lecturas T de la temperatura, cada dos horas, desde la media noche hasta medio día. El tiempo t se midió en horas a partir de la media noche.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	58	57	53	50	51	57	61

(a) Use las lecturas para trazar una gráfica aproximada de T como función de t.
(b) Utilice la gráfica para estimar la temperatura a las 11 A.M.

18. En la tabla, se muestra la población P (en miles) de San José, California, desde 1984 hasta 1994. (Se dan las estimaciones correspondientes a la mitad del año.)

t	1984	1986	1988	1990	1992	1994
P	695	716	733	782	800	817

(a) Dibuje una gráfica de P como función del tiempo.
(b) Use la gráfica para estimar la población en 1991.

19. Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, encuentre $f(0)$, $f(2)$, $f(\sqrt{2})$, $f(1 + \sqrt{2})$, $f(-x)$, $f(x + 1)$, $2f(x)$, y $f(2x)$.

20. Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene el volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire requerido para inflarlo desde un radio de r pulgadas hasta otro de $r + 1$ pulgadas.

21–22 □ Encuentre $f(2 + h)$, $f(x + h)$, y $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$, donde $h \neq 0$.

21. $f(x) = x - x^2$ **22.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

23–27 □ Encuentre el dominio de la función.

23. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$ **24.** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + x - 6}$

25. $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$ **26.** $h(x) = \sqrt[4]{7 - 3x}$

27. $f(t) = \sqrt[3]{t - 1}$

28. Encuentre el dominio, la imagen y trace la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

29–40 □ Encuentre el dominio y trace la gráfica de la función.

29. $f(x) = 3 - 2x$ **30.** $f(x) = x^2 + 2x - 1$

31. $g(x) = \sqrt{x - 5}$ **32.** $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$

33. $G(x) = |x| + x$ **34.** $H(x) = |2x|$

35. $f(x) = x/|x|$ **36.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 3x + 2 & \text{si } |x| < 1 \\ 7 - 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

41–46 □ Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

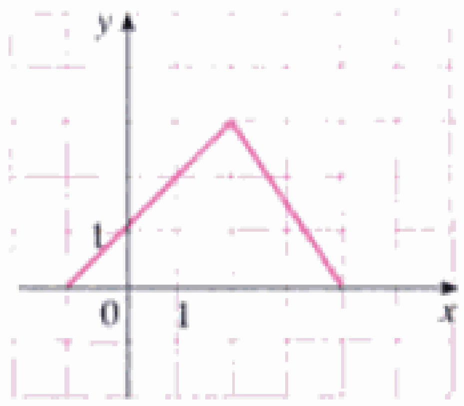
41. El segmento rectilíneo que une los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$

42. El segmento rectilíneo que une los puntos $(-3, -2)$ y $(6, 3)$

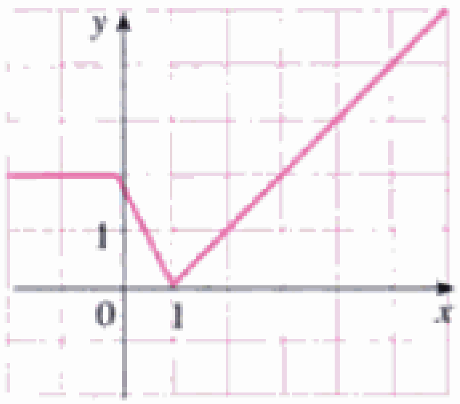
43. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$

44. La mitad superior del círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

45.



46.



47–51 □ Encuentre una fórmula para la función descrita y dé su dominio.

47. Un rectángulo tiene un perímetro de 20 m. Exprese el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

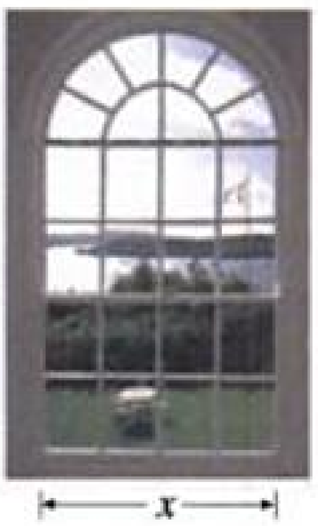
48. Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Exprese su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.

49. Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de los lados.

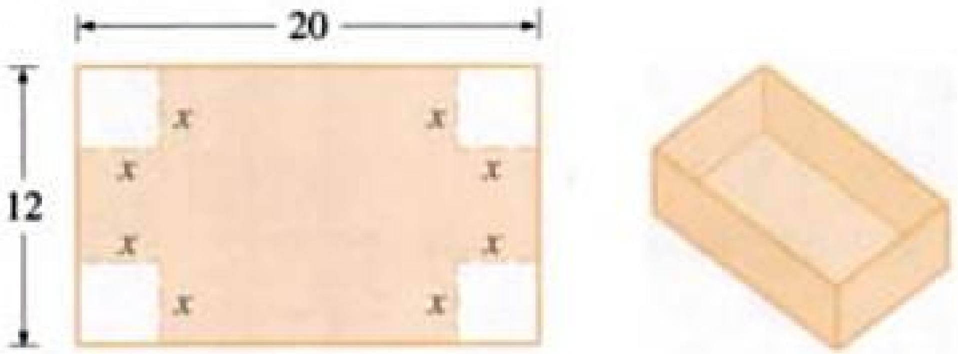
50. Exprese el área superficial de un cubo como función de su volumen.

51. Una caja rectangular abierta, con volumen de 2 m^3, tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja como función de la longitud de uno de los lados de la base.

52. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de ella como función del ancho x de la misma.



53. Debe construirse una caja con su parte superior abierta a partir de un trozo rectangular de cartón que tiene las dimensiones de 12 pulg. por 20 pulg., recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y, a continuación, doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x.



54. Una compañía de taxis cobra dos dólares por la primera milla (o parte de una milla) y 20 centavos de dólar por cada décimo de milla (o parte) subsiguiente. Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como función de la distancia x recorrida (en millas), para $0 < x < 2$ y grafique esta función.

55. En cierto país, el impuesto sobre la renta se evalúa como se indica a continuación. No se paga impuesto sobre ingresos hasta de 10,000 dólares. Cualquier ingreso superior a 10,000 dólares paga un impuesto de 10% del mismo, hasta un ingreso de 20,000 dólares. Cualquier ingreso superior a 20,000 dólares paga impuesto con una tasa de 15%.

(a) Trace la gráfica de la tasa R de impuesto como función del ingreso I.

(b) ¿Cuál impuesto corresponde a un ingreso de 14,000 dólares y a otro de 26,000 dólares?

(c) Trace la gráfica del impuesto total correspondiente T como función del ingreso I.

56. Las funciones del ejemplo 10 y de los ejercicios 54 y 55a) se conocen como *funciones escalón* porque sus gráficas parecen escaleras. Dé otros dos ejemplos de funciones escalón que surjan en la vida cotidiana.

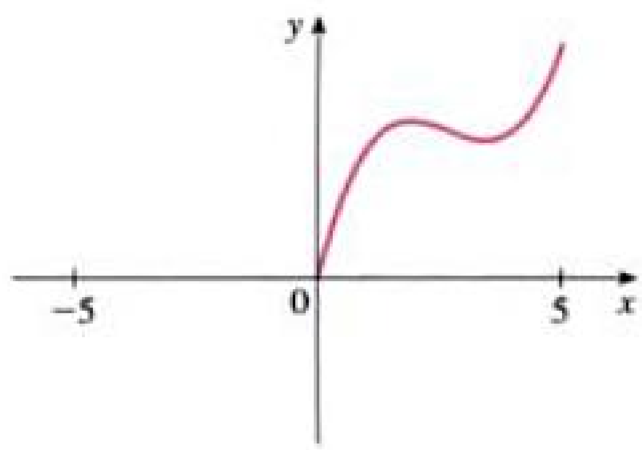
57. (a) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar sobre la gráfica?

(b) Si el punto (5, 3) está en la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar sobre la gráfica?

58. Una función f tiene el dominio $[-5, 5]$ y se muestra una parte de su gráfica.

(a) Complete la gráfica de f si se sabe que ésta es par.

(b) Complete la gráfica de f si se sabe que ésta es impar.



59–64 □ Determine si f es par, impar o ninguna de las dos cosas. Si f es par o impar, aplique la simetría para trazar su gráfica.

59. $f(x) = x^{-2}$

60. $f(x) = x^{-3}$

61. $f(x) = x^2 + x$

62. $f(x) = x^4 - 4x^2$

63. $f(x) = x^3 - x$

64. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

1.2 Modelos matemáticos

Un **modelo matemático** es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o de una ecuación) de un fenómeno del mundo real, como el tamaño de una población, la demanda de un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de un producto en una reacción química, la expectativa de vida de una persona al nacer o el costo de la reducción de las emisiones de gases contaminantes. La finalidad del modelo es comprender el fenómeno y, quizá, hacer predicciones acerca de su comportamiento futuro.

En la figura 1 se ilustra el proceso de modelado matemático. Dado un problema del mundo real, nuestra primera tarea es formular un modelo matemático. Para esto se identifican y nombran las variables independientes y dependientes y se establecen hipótesis que simplifiquen el fenómeno lo suficiente para que pueda tratarse matemáticamente. Usamos nuestro conocimiento de la situación física y nuestras habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En las situaciones en que no existe una ley física que nos guíe, quizá necesitemos reunir datos (sea en una biblioteca, Internet o nuestros experimentos) y examinarlos en forma de una tabla, para distinguir los patrones. Es probable que nos convenga obtener una representación gráfica a partir de la representación numérica de una función, utilizando estos datos. En algunos casos, la gráfica podría sugerir incluso una fórmula algebraica adecuada.

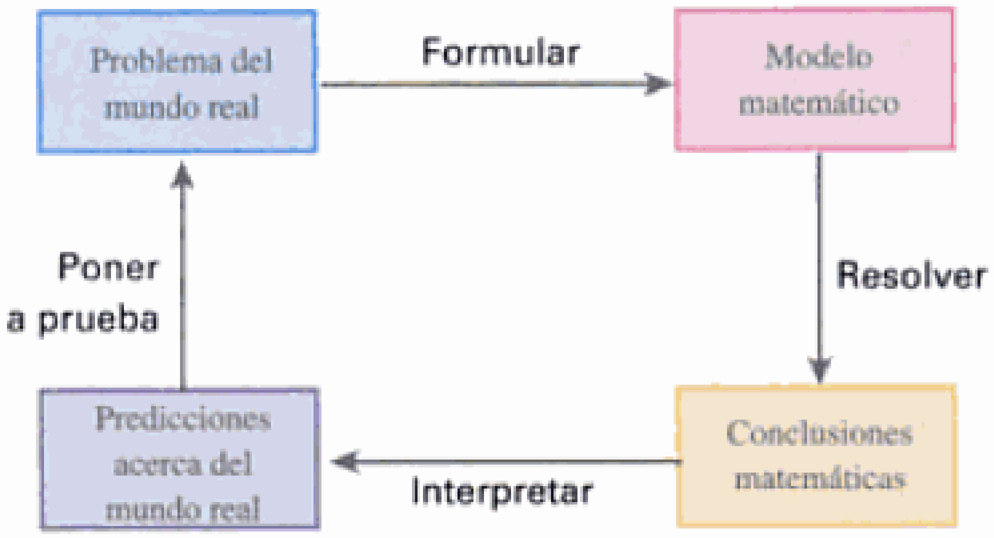


FIGURA 1
Proceso de modelado.

La segunda etapa es aplicar las matemáticas que conocemos (como el cálculo que se desarrollará a lo largo de este libro) al modelo matemático que hemos formulado para llegar a conclusiones matemáticas. En la tercera etapa tomamos esas conclusiones matemáticas y las interpretamos como información acerca del fenómeno original del mundo real, de manera que se ofrezcan explicaciones o se hagan predicciones. El paso final es probar nuestras predicciones comparándolas con nuevos datos reales. Si las predicciones no se ajustan bien con la realidad se redefine el modelo o formula uno nuevo y se reinicia el ciclo.

Un modelo matemático nunca es una representación completamente exacta de una situación física; es una *idealización*. En un buen modelo la realidad se simplifica lo suficiente para permitir los cálculos matemáticos, pero incluso así es bastante exacto para permitir conclusiones valiosas. Es importante darse cuenta de las limitaciones del modelo. Al final, la Madre Naturaleza tiene la última palabra.

Existen numerosos tipos de funciones utilizables para modelar relaciones observadas en el mundo real, en lo que sigue discutimos el comportamiento y las gráficas de estas funciones y damos ejemplos de situaciones que se prestan para modelar con tales funciones.

Modelos lineales

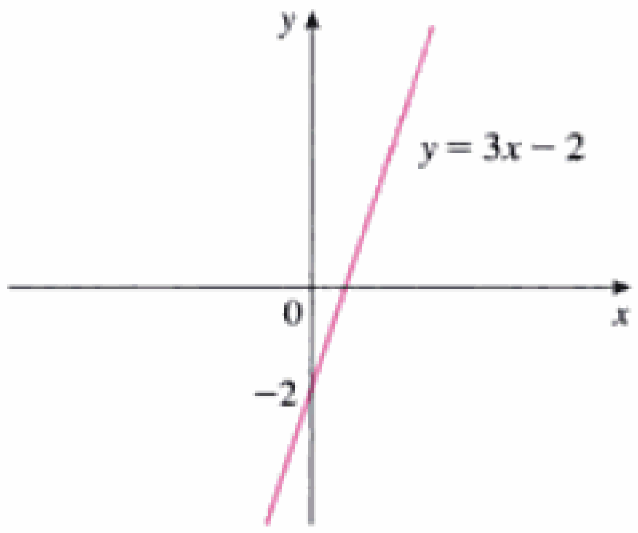
Cuando decimos que y es una **función lineal** de x, queremos decir que la gráfica de la función es una línea recta, de modo que podemos emplear la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta para escribir una fórmula para la función como

□ La geometría analítica de las rectas se revisa en el apéndice B.

$$y = f(x) = mx + b$$

Donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

Una propiedad característica de las funciones lineales es que crecen a tasa constante. Por ejemplo la figura 2 muestra la gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ junto con una tabla de valores de muestra. Obsérvese que cuando x crece en 0.1, la función $f(x)$ crece en 0.3, es decir, $f(x)$ crece tres veces mas rápido que x. Así, la pendiente de la recta, $y = 3x - 2$, que es 3 puede interpretarse como tasa o razón de cambio de y respecto de x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

EJEMPLO 1 □

(a) Cuando al aire seco se eleva, se expande y enfría. Si la temperatura en el suelo es de 20 ºC y la temperatura a un kilómetro de altura es de 10 ºC, exprese la temperatura T en grados centígrados como función de la altitud h en kilómetros suponiendo que un modelo lineal es apropiado.
b) Trace la gráfica de la función de la parte a). ¿Qué representa la pendiente?
(c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

SOLUCIÓN

(a) Dado que suponemos que T es función lineal de h podemos escribir

$$T = mh + b$$

Un dato es que $T = 20$ para $h = 0$, de modo que

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

En otras palabras, la ordenada al origen es b = 20.

Otro dato es que $T = 10$ cuando $h = 1$, de modo que

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

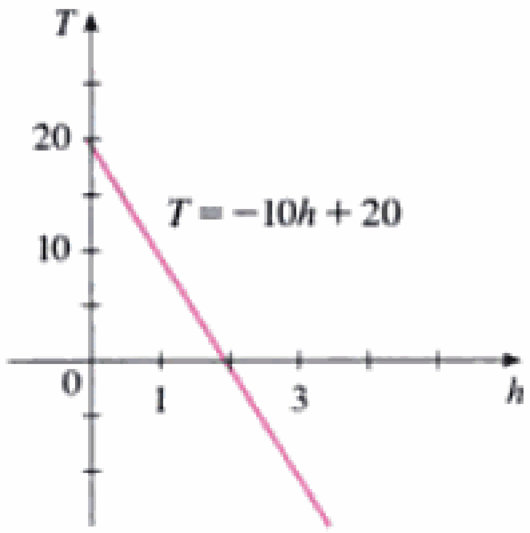


FIGURA 3

La pendiente de la recta es, por tanto $m = 10 - 20 = -10$ y la función lineal pedida es

$$T = -10h + 20$$

(b) La gráfica aparece en la figura 3. La pendiente $m = -10$ ºC/km y esto representa la razón de cambio de la temperatura respecto a la altitud.

(c) A la altitud de $h = 2.5$ km la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -5 \text{ °C}$$ □

Si no existe ley o principio físico que nos ayude a formular un modelo, construimos un **modelo empírico**, el cual se basa por completo en los datos que se reúnen. Buscaremos una curva que "se ajuste" a los datos, en el sentido de que capture la tendencia básica de los puntos dato.

TABLA 1

Año	CO_2 nivel (en ppm)
1972	327.3
1974	330.0
1976	332.0
1978	335.3
1980	338.5
1982	341.0
1984	344.3
1986	347.0
1988	351.3
1990	354.0

EJEMPLO 2 □ En la tabla 1 se lista el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el observatorio del Mauna Loa, desde 1972 hasta 1990.

SOLUCIÓN Usamos estos datos para obtener la gráfica de dispersión de la figura 4, donde t representa el tiempo (en años) y C representa el nivel de CO_2 (en partes por millón, ppm)

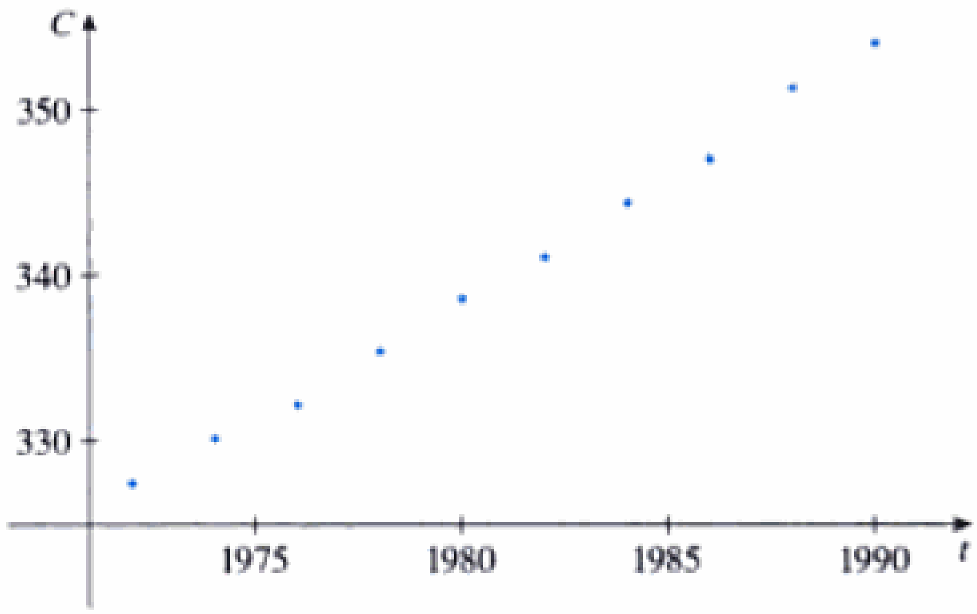


FIGURA 4
Gráfica de dispersión para el nivel promedio de CO_2

Note que los puntos dato parecen estar en casi una recta, de modo que resulta natural elegir un modelo lineal. Pero existen muchas rectas posibles que se pueden aproximar a estos puntos dato, de modo que, ¿cuál debemos de usar? Una posibilidad es elegir una recta que pase por los puntos dato primero y último. La pendiente de esta recta es

$$\frac{354.0 - 327.3}{1990 - 1972} = \frac{26.7}{18} \approx 1.48333$$

y su ecuación es

$$C - 327.3 = 1.48333(t - 1972)$$

o bien,

$$C = 1.48333t - 2597.83 \tag{1}$$

La ecuación 1 da un modelo lineal posible para el nivel de dióxido de carbono. Se le grafica en la figura 5.

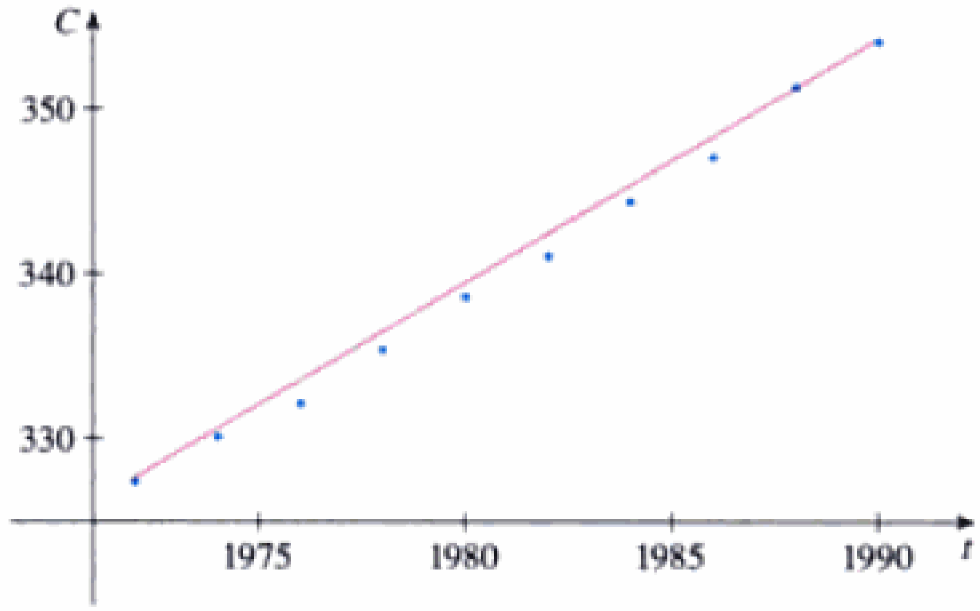


FIGURA 5
Modelo lineal que pasa por los puntos datos primero y último.

Aun cuando nuestro modelo se ajusta razonablemente a los datos, está dando valores más elevados que la mayoría de los niveles reales de CO_2. La ciencia estadística propor-

□ Una computadora o calculadora graficadora halla la línea de regresión por el método de **cuadrados mínimos** que consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los datos y la línea.

ciona un mejor modelo lineal con un proceso denominado *regresión lineal*. Si usamos una calculadora graficadora, introducimos los datos de la tabla 1 en el editor de datos y escogemos el comando de regresión lineal. [Con Maple, el comando fit(leastsquare) del paquete statistics; con Mathematical, el comando Fit.] La máquina de la pendiente y la ordenada al origen de la recta de regresión como

$$m = 1.496667 \qquad b = -2624.826667$$

De modo que nuestro modelo para el nivel de CO_2 es

$$\boxed{2} \qquad C = 1.496667t - 2624.826667$$

En la figura 6 trazamos la recta de regresión, así como los puntos datos. Si la comparamos con la figura 5 vemos que da un ajuste mejor que el modelo lineal anterior.

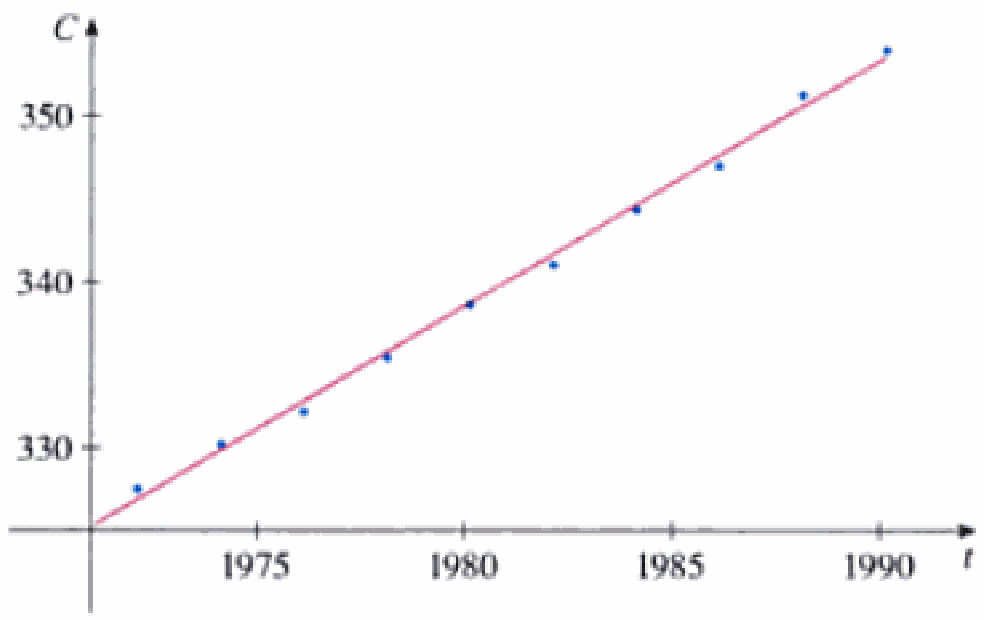


FIGURA 6
Recta de regresión.

EJEMPLO 3 □ Use el modelo lineal dado por la ecuación 2 para estimar el nivel promedio de CO_2 para 1987 y predecir el nivel para el año 2005. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo excederá 400 partes por millón el nivel de CO_2?

SOLUCIÓN Usamos la ecuación con $t = 1987$, estimamos que el promedio del nivel de CO_2 en 1987 fue

$$C(1987) = (1.496667)(1987) - 2624.826667 \approx 349.05$$

Éste es un ejemplo de *interpolación*, porque hemos estimado un valor entre valores observados. (De hecho, el observatorio del Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue de 348.8 ppm, de suerte que nuestra estimación es bastante exacta.)

Con $t = 2005$, obtenemos

$$C(2005) = (1.496667)(2005) - 2624.826667 \approx 375.99$$

Así pues, predecimos que el nivel de CO_2 en el año 2000 será de 376.0 ppm. Éste es un ejemplo de extrapolación, porque hemos predicho un valor fuera de la región de las observaciones. Como consecuencia, tenemos bastante menos certeza acerca de la exactitud del pronóstico.

Si se usa la ecuación 2, vemos que el nivel de CO_2 es mayor que 400 ppm cuando

$$1.496667t - 2624.826667 > 400$$

Si se resuelve esta desigualdad se obtiene

$$t > \frac{3024.826667}{1.496667} \approx 2021.04$$

Por lo tanto, predecimos que el nivel de CO_2, será mayor que 400 ppm por el año 2021. Este pronóstico implica cierto riesgo porque concierne a una época muy alejada de la de nuestras observaciones.

Polinomios

Una función P recibe el nombre de **polinomio** si

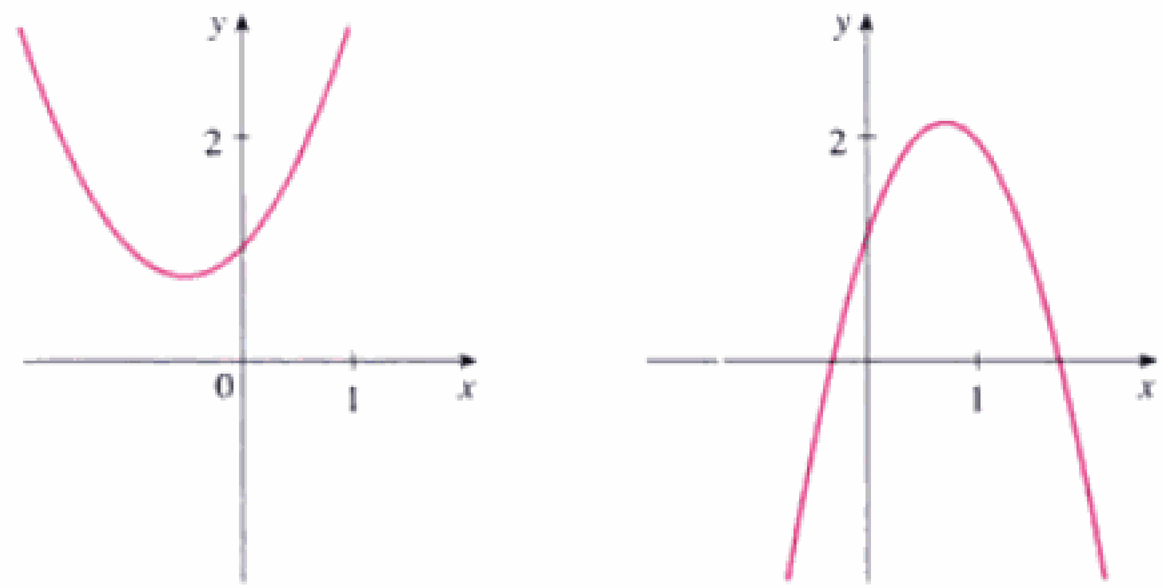
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas **coeficientes** del polinomio. El dominio de cualquier polinomio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el primer coeficiente $a_n \neq 0$, entonces el **grado** del polinomio es n. Por ejemplo, la función

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

es un polinomio de grado 6 (o sexto grado).

Un polinomio de primer grado es de la forma $P(x) = ax + b$ y por tanto es una **función lineal.** Un polinomio de segundo grado es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ y se llama **función cuadrática**. La gráfica de P siempre es la parábola que se obtiene desplazando la parábola $y = ax^2$. como se verá en la siguiente sección. La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$ (Fig. 7).



(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

FIGURA 7
Las gráficas de las funciones cuadráticas son parábolas.

Un polinomio de tercer grado es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y se llama **función cúbica**. En la figura 8 se muestra la gráfica de una función cúbica, en la parte a), y las gráficas de polinomios de cuarto y quinto grado en las partes b) y c). Más adelante veremos por qué las gráficas tienen estas formas.

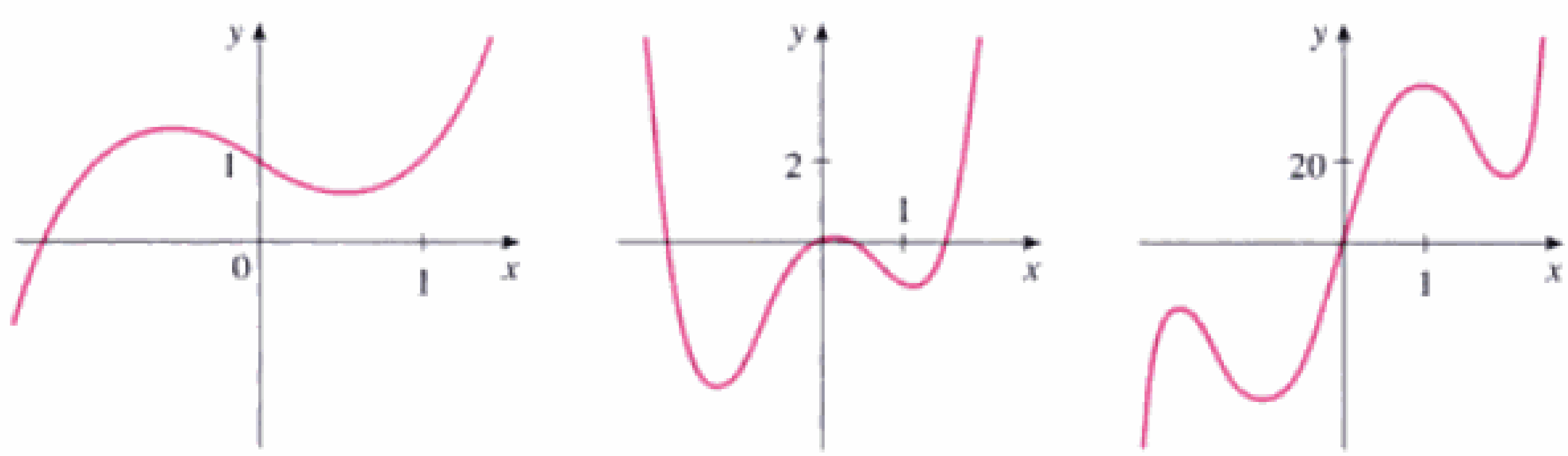


FIGURA 8 (a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

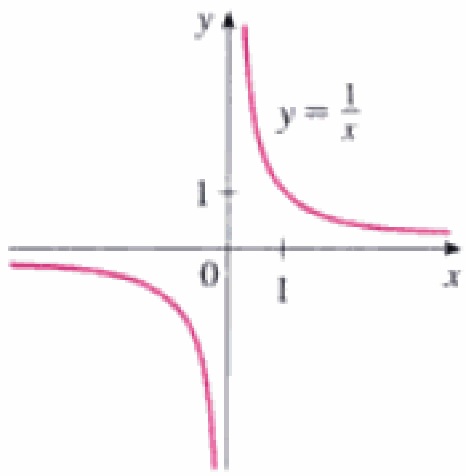


FIGURA 14
Función recíproca.

(iii) $a = -1$
La gráfica de la "función recíproca" $f(x) = x^{-1} - 1/x$ aparece en la figura14. La ecuación correspondiente es $y = 1/x$ o $xy = 1$, y es una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.

Esta función surge en la física y la química en relación con la ley de Boyle, que estipula que a temperatura constante, el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión

$$V = \frac{C}{P}$$

Donde C es una constante. Por tanto la gráfica de V como función de P (Fig. 15) tiene la misa forma general que la parte derecha de la figura 14.

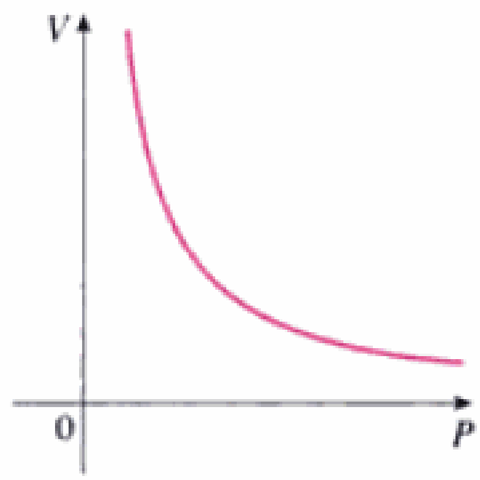


FIGURA 15
Volumen como función de la presión a temperatura constante.

En el ejercicio 20 se discute otra situación en que se usa una función potencia para modelar un fenómeno físico.

Funciones racionales

Una **función racional** f es una razón de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio consta de todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo simple de una función racional es la función $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$; se trata de la función recíproca graficada en la figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. En la figura 16 se muestra su gráfica.

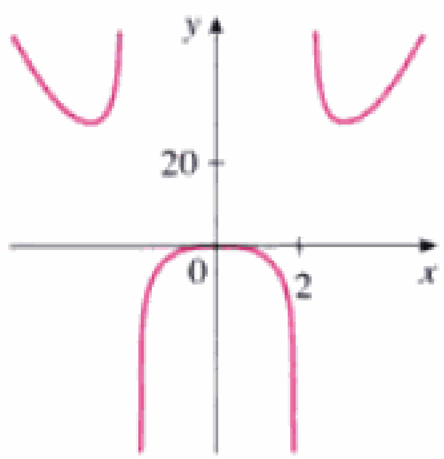


FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Funciones algebraicas

Una función f recibe el nombre de **función algebraica** si puede construirse usando operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíz) a partir de polinomios. Automáticamente, cualquier función racional es una función algebraica. Aquí se tienen dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Cuando tracemos las gráficas de las funciones algebraicas en el capitulo 4, veremos que estas gráficas pueden tomar diversas formas. En la figura 17 se ilustran algunas de las posibilidades.

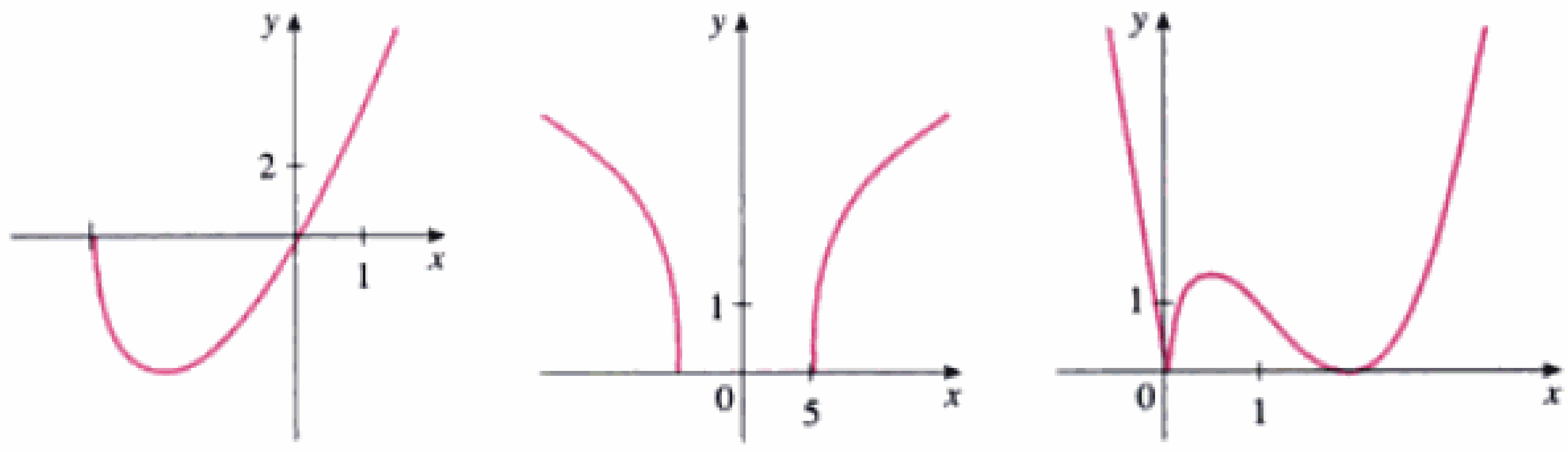


FIGURA 17 (a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

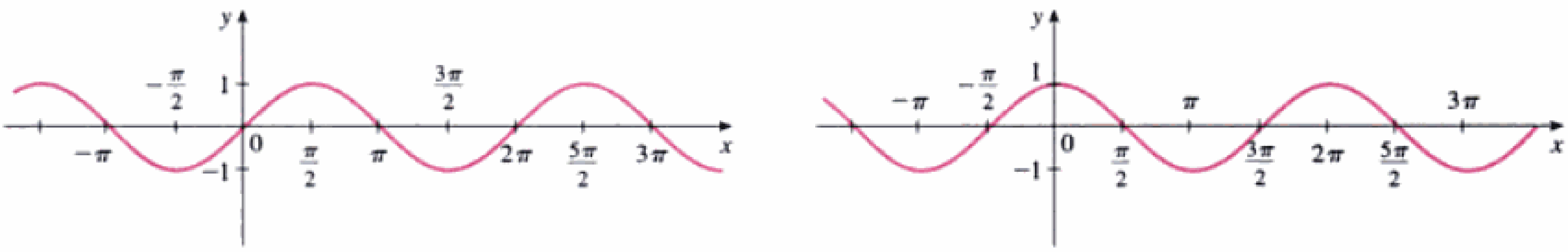
En la teoría de la relatividad tenemos un ejemplo de una función algebraica. La masa de una partícula con velocidad v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3 \times 10^5$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío.

Funciones trigonométricas

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en las guardas interiores y en el apéndice D. En cálculo, la convención es usar la medida radián (excepto cuando se indica lo contrario). Por ejemplo, cuando utilizamos la función $f(x) = \text{sen } x$, se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es x. De este modo, las gráficas de las funciones seno y coseno son como las que se muestran en la figura 18.



(a) $f(x) = \text{sen } x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Note que tanto para la función seno como para la coseno, el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por tanto, para todos los valores de x, tenemos

$$\boxed{-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1}$$

o, en términos de valores absolutos,

$$|\text{sen } x| \leq 1 \qquad |\cos x| \leq 1$$

Asimismo, los ceros de la función seno se tienen en los múltiplos enteros de π; es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{cuando} \qquad x = n\pi \qquad n \text{ un entero}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son periódicas y tienen periodo 2π. Esto significa que, para todos los valores de x,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

La naturaleza periódica de estas funciones las hace apropiadas para modelar fenómenos repetitivos como son las mareas, los resortes en vibración y las ondas sonoras. Así, por ejemplo, en el ejemplo 4 de la sección 1.3 veremos que un modelo aceptable para el número de horas de luz en la ciudad de Filadelfia t días después del primer día de enero está dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

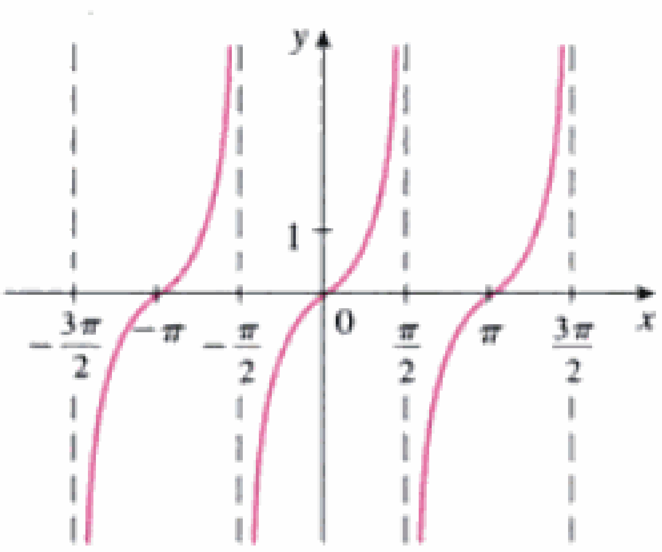


FIGURA 19
$y = \tan x$

La función tangente está relacionada con las funciones seno y coseno por la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y su gráfica aparece en la figura 19. No está definida cuando $\cos x = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ Su recorrido es $(-\infty, \infty)$. Note que la función tangente tiene periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son las recíprocas de las funciones seno, coseno y tangente. En el apéndice C se ilustran sus gráficas..

Funciones exponenciales

Son las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. En la figura 20 se presentan las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0.5)^x$. En los dos casos, el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $(0, \infty)$.

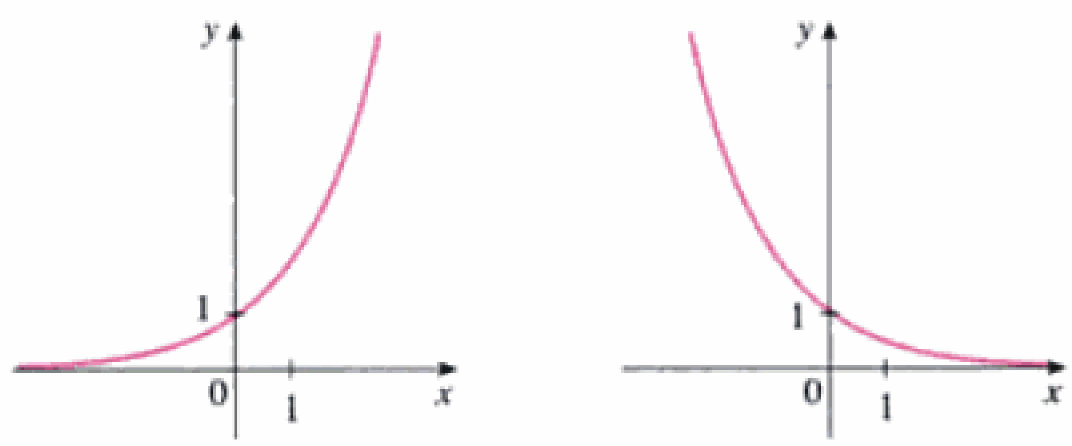


FIGURA 20

(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

En la sección 1.5 se estudia con detalle las funciones exponenciales, y veremos que son útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como el crecimiento de la población (si $a > 1$) y la desintegración radiactiva (si $a < 1$).

Funciones logarítmicas

Son las funciones $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva. Son las funciones inversas de las funciones exponenciales y se estudiarán en la sección 1.6. En la figura 21 se encuentran las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con distintas bases. En cada caso, el dominio es $(0, \infty)$, la imagen es $(-\infty, \infty)$ y la función crece con lentitud cuando $x > 1$.

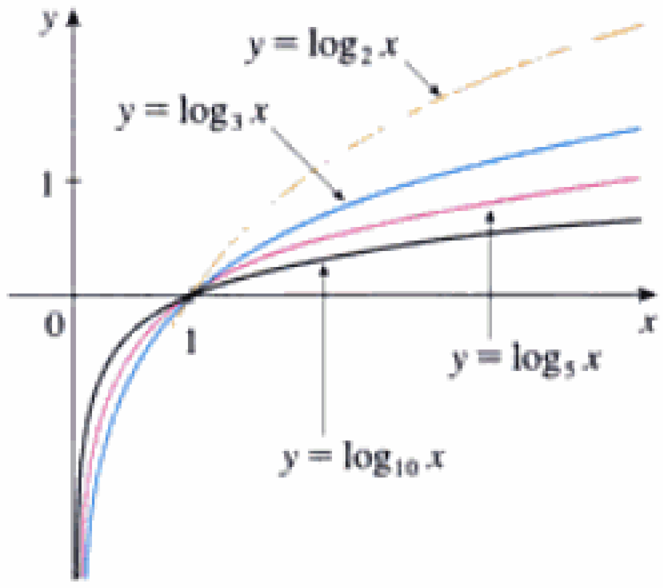


FIGURA 21

Funciones trascendentes

Se trata de las funciones que no son algebraicas. El conjunto de las funciones trascendentes incluye las trigonométricas, las trigonométricas inversas, las exponenciales y las logarítmicas, así como un vasto número de otras funciones que nunca han sido nombradas. En el capítulo 11 estudiaremos las funciones trascendentes que se definen como sumas de series infinitas.

EJEMPLO 5 □ Clasifique las funciones siguientes en uno de los tipos de funciones analizados.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUCIÓN

(a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

(b) $g(x) = x^5$ es una función potencia. (El número x es la base.)

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es un polinomio de cuarto grado. □

1.2 Ejercicios

1–2 □ Clasifique cada una de las funciones como función potencia, función, raíz, polinomio (dé el grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. (a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $h(x) = x^9 + x^4$ (d) $r(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x}$

(e) $s(x) = \tan 2x$ (f) $t(x) = \log_{10} x$

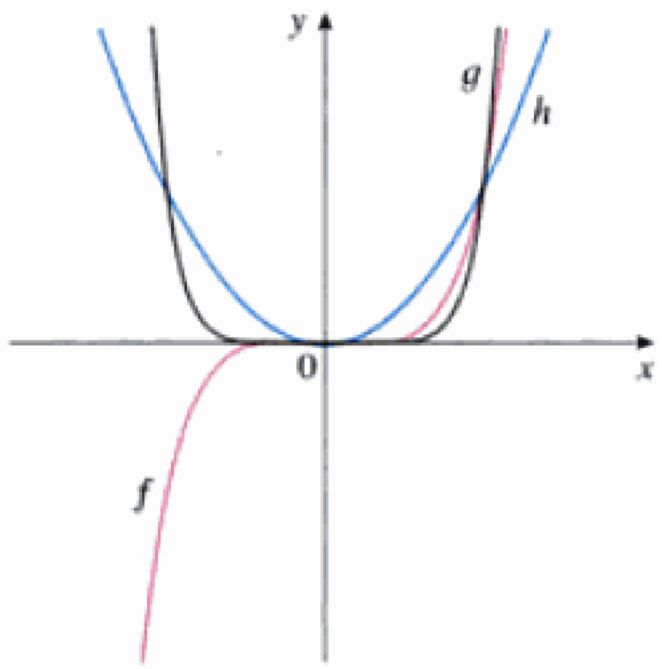
2. (a) $y = \dfrac{x - 6}{x + 6}$ (b) $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$

(c) $y = 10^x$ (d) $y = x^{10}$

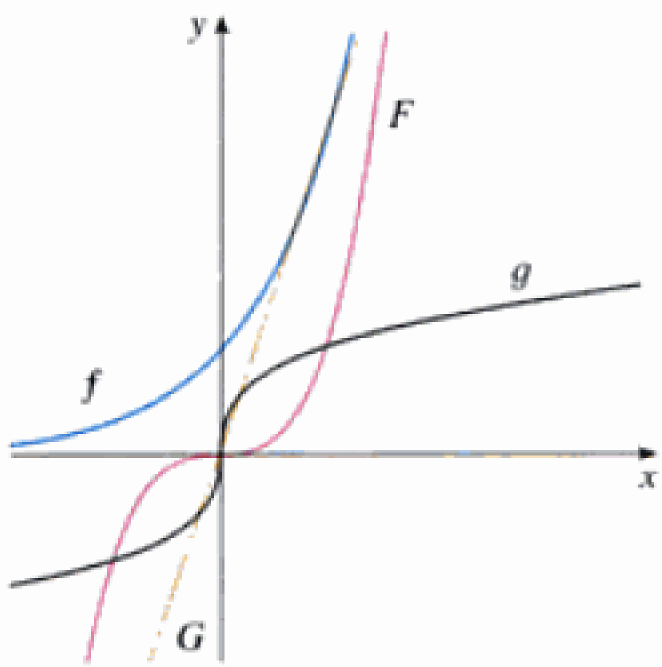
(e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ (f) $y = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

3–4 □ Coteje gráficas y funciones. Explique su decisión en cada caso (no utilice calculadora ni graficadora).

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$
(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5. (a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales de pendiente 2 y bosqueje las gráficas de varios miembros de la familia.
(b) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales tales que $f(2) = 1$ y bosqueje algunas gráficas.
(c) ¿Cuál es la función que pertenece a ambas familias?

6. El gerente de una mercado de fin de semana sabe que si cobra x dólares por un lugar entonces el número de puestos que puede rentar está dado por la función $y = 200 - 4x$.
(a) Trace la gráfica de esta función lineal (recuerde que ni el costo de la renta ni el número de espacios puede ser un número negativo).
(b) ¿Qué representan la pendiente, la ordenada al origen y la abscisa al origen?

7. La relación entre las escalas Fahrenheit y Celsius de temperatura está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Trace la gráfica de esta función.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuánto vale el segmento desde el origen hasta el corte de la gráfica en el eje F y qué representa?

8. Jason sale de Detroit a las 2 PM manejando a una velocidad constante con dirección oeste por la autopista 190. Pasa por Ann Arbor a 40 millas de Detroit a las 2:50 PM.
(a) Exprese la distancia que ha viajado en términos del tiempo transcurrido.
(b) Trace la gráfica que corresponde al inciso a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta recta y qué representa?

9. Los biólogos han observado que los chirridos de los grillos de un especie está en relación con la temperatura y ésta resulta casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos cada minuto si la temperatura es de 70 °C y 173 si la temperatura es de 80 °F.
(a) Encuentre la ecuación lineal que modela la temperatura T como función del número de chirridos por minuto.
(b) ¿Qué pendiente tiene la gráfica y qué representa?
(c) Si los grillos emiten 150 chirridos por minuto, ¿cuál es la temperatura estimada?

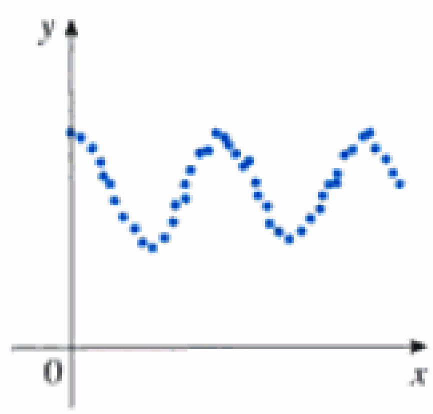
10. El gerente de una fábrica de muebles encuentra que cuesta 2200 dls. fabricar 110 sillas en un día y 4800 dls. por manufacturar 300 sillas diarias.
(a) Exprese el costo como función de 1 número de sillas producidas bajo el supuesto de que es lineal. Trace la gráfica.
(b) ¿Qué valor tiene la pendiente y qué representa?
(c) ¿Cuál es la ordenada al origen de la gráfica y qué representa?

11. En la superficie del océano la presión del agua es la misma que la del aire colindante, 15 lb/pulg^2. Bajo la superficie la presión aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies que aumenta la profundidad.
(a) Exprese la presión como función de la profundidad dentro del océano.
(b) ¿A qué profundidad la presión será de 100 lb/pulg^2?

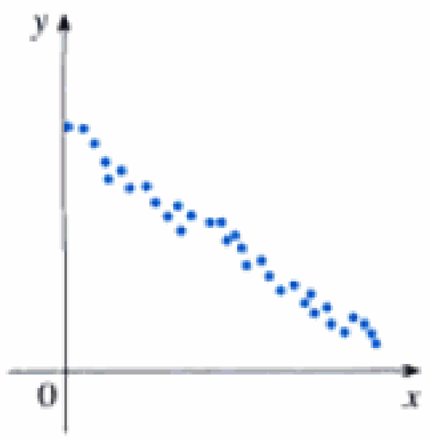
12. El costo mensual de rentar un automóvil depende del número de millas recorridas. Lynn tuvo que pagar en mayo 380 dls. por 480 millas y en junio pagó 460 dls. por 800 millas.
(a) Exprese el costo mensual C como función de la distancia recorrida suponiendo que una relación lineal viene a ser un modelo adecuado.
(b) Use el inciso a) para predecir el costo de recorrer 1500 millas en un mes.
(c) Trace la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?
(d) ¿Que representa la ordenada al origen?
(e) ¿Por qué razón resulta adecuada una función lineal como modelo en esta situación?

13–14 □ Para cada diagrama de dispersión decida qué tipo de función podría elegir para modelar los datos. Explique su selección.

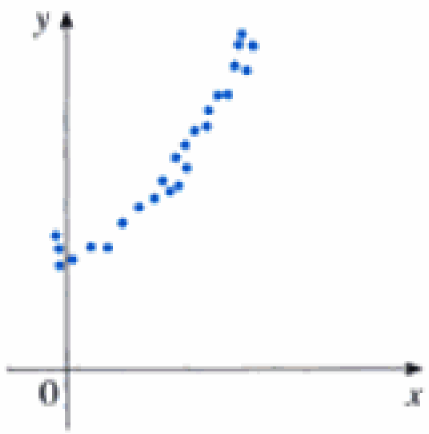
13. (a)



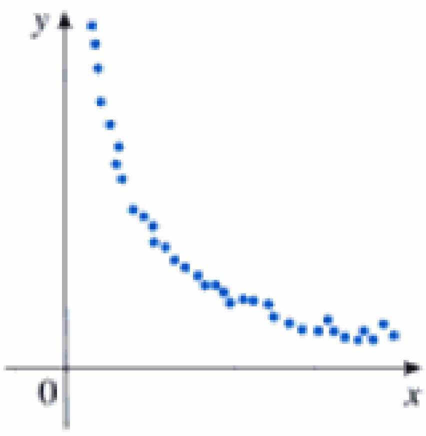
(b)



14. (a)



(b)



15. La tabla muestra tasas (en toda la vida) de incidencia de úlcera péptica (por cada 100 personas de la población) para varios niveles de ingreso familiar, según reporta la National Health Interview Survey.

Ingreso	Tasa de úlcera (por 100 personas)
\$4,000	14.1
\$6,000	13.0
\$8,000	13.4
\$12,000	12.5
\$16,000	12.0
\$20,000	12.4
\$30,000	10.5
\$45,000	9.4
\$60,000	8.2

(a) Haga un diagrama de dispersión de estos datos y decida si es adecuado un modelo lineal.
(b) Encuentre y grafique un modelo lineal usando los puntos correspondientes al primero y último par de datos.
(c) Encuentre y grafique la línea de regresión de mínimos cuadrados.
(d) Utilice el modelo lineal de la parte e) para estimar la incidencia de úlcera en el nivel de ingresos de \$25,000.
(e) De acuerdo con el modelo, ¿qué probabilidad tiene una persona con ingresos de 80,000 dls. de que le dé úlcera péptica?
(f) ¿Piensa que sería razonable aplicar el modelo para el caso de una persona con percepciones de 20,000?

16. Los biólogos han observado que la cantidad de chirridos por minuto de los grillos de una especie, está relacionada con la temperatura ambiente. La tabla muestra el número de chirridos por minuto para varias temperaturas.

Temperatura (°F)	Chirridos por minuto
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

(a) Haga un diagrama de dispersión de los datos.
(b) Determine y grafique la línea de regresión.
(c) Use el modelo lineal de la parte b) para estimar el número de chirridos a los 100 °F.

17. En la tabla se registran alturas ganadoras en el salto con garrocha en olimpiadas del siglo XX.

Año	Altura (pies)	Año	Altura (pies)
1900	10.83	1956	14.96
1904	11.48	1960	15.42
1908	12.17	1964	16.73
1912	12.96	1968	17.71
1920	13.42	1972	18.04
1924	12.96	1976	18.04
1928	13.77	1980	18.96
1932	14.15	1984	18.85
1936	14.27	1988	19.77
1948	14.10	1992	19.02
1952	14.92	1996	19.42

(a) Haga un diagrama de dispersión y decida si es apropiado un modelo lineal.
(b) Encuentre y grafique la línea de regresión.
(c) Use el modelo lineal para predecir la altura del salto vencedor en la Olimpiada de 2000.
(d) ¿Es razonable usar el modelo para predecir el salto con el que se obtendrá la medalla de oro en la Olimpiada de 2100?

18. Un estudio de la Office of Science and Technology de 1972 estimaba el costo (en dólares de 1972) de reducir las emisiones de automotores en varios porcentajes:

Reducción de emisiones (%)	Costo por automóvil (en \$)	Reducción de emisiones (%)	Costo por automóvil (en \$)
50	45	75	90
55	55	80	100
60	62	85	200
65	70	90	375
70	80	95	600

Halle un modelo que capte la tendencia de "beneficios decrecientes" de estos datos.

19. Use los datos de la tabla para modelar la población mundial en el siglo XX con una función cúbica. Use entonces el modelo para estimar la población en 1925.

Año	Población (en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

20. La tabla muestra las distancias promedio de los planetas desde el sol (tomando como unidad a la distancia de la tierra al sol) y sus periodos T (tiempo de revolución en años).

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784
Plutón	39.507	248.350

(a) Ajuste el modelo de función potencia al conjunto de datos.

(b) La ley de Kepler del movimiento planetario enuncia: "el cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al sol". El modelo construido ¿corrobora la tercera ley de Kepler?

1.3 Nuevas funciones a partir de funciones ya conocidas

En esta sección iniciamos con las funciones básicas discutidas en la sección 1.2 y obtenemos nuevas funciones por traslación, estiramiento y reflexión de las gráficas correspondientes. También veremos cómo se combinan parejas de funciones mediante las operaciones aritméticas comunes, y por composición.

Transformaciones de funciones

Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de ciertas funciones relacionadas. Esto nos permitirá trazar gráficas de numerosas funciones rápido y manualmente. En primer lugar, consideraremos las **traslaciones**. Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es precisamente la de $y = f(x)$ desplazada hacia arriba a una distancia de c unidades (debido a que cada coordenada y se incrementa el mismo número c). Del mismo modo, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Por lo tanto, la gráfica de $y = f(x - c)$ es precisamente la de $y = f(x)$ desplazada c unidades a la derecha (Fig. 1).

Desplazamientos verticales y horizontales Supóngase que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo
$y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha
$y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda

Consideremos ahora las transformaciones de **estiramiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la de $y = f(x)$ estirando el factor c en la dirección vertical (porque cada coordenada y se multiplica por el mismo número c). La gráfica de $y = f(x)$ es la de $y = f(x)$ reflejada respecto al eje x, porque el punto (x, y) reemplaza al punto (x, y).

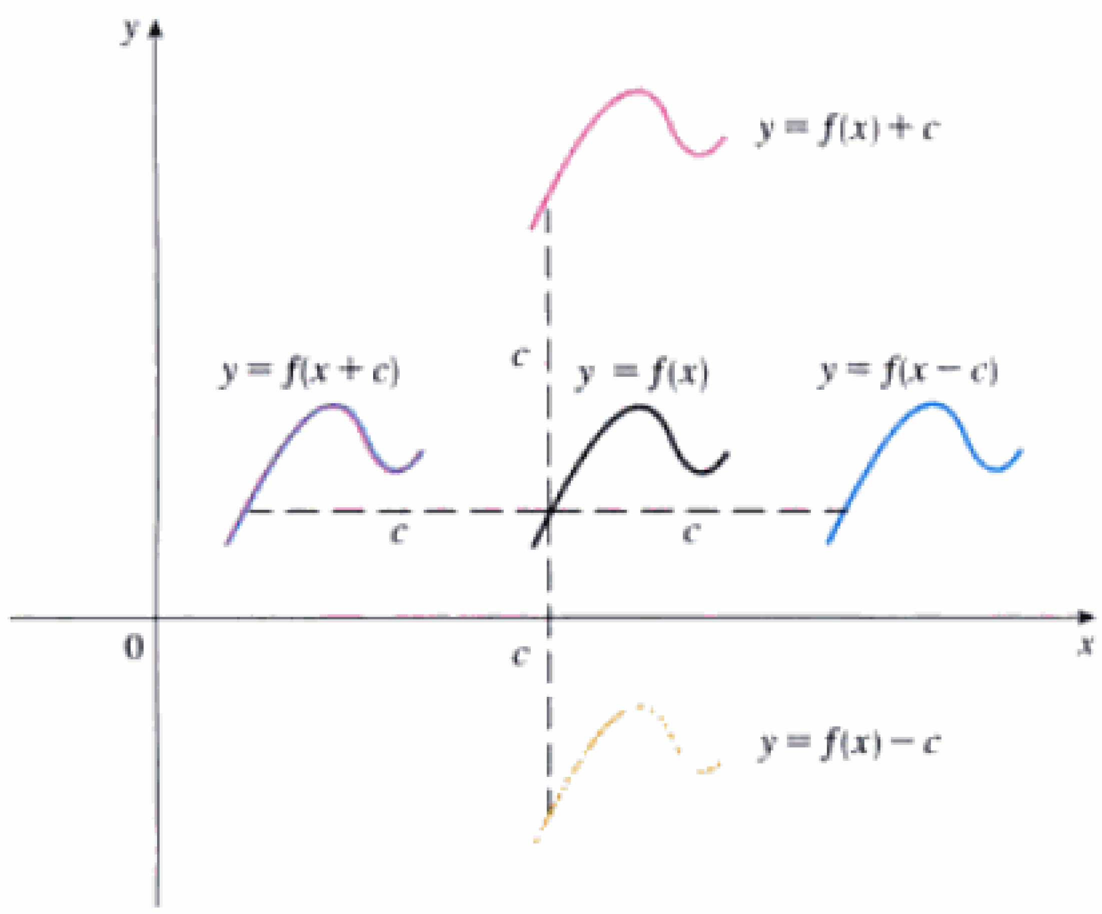


FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f.

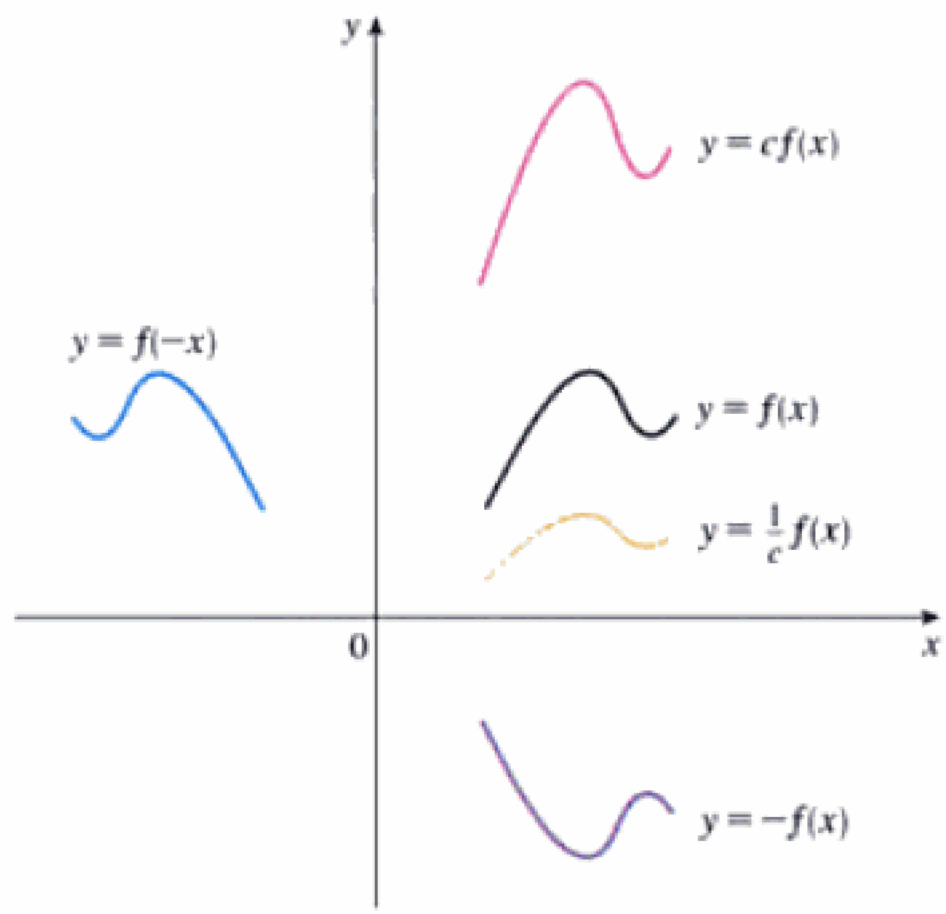


FIGURA 2
Estiramiento y reflexión de la gráfica de f.

(Fig. 2 y la tabla a continuación, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de estiramiento, compresión y reflexión.)

> **Estiramiento y reflexiones verticales y horizontales** Supóngase que $c > 1$. Para obtener la gráfica de
>
> $y = cf(x)$, estírese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c
>
> $y = (1/c)f(x)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c
>
> $y = f(cx)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c
>
> $y = f(x/c)$), estírese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c
>
> $y = -f(x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje x
>
> $y = f(-x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje y

En la figura 3 se ilustran tres transformaciones de estiramiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$.

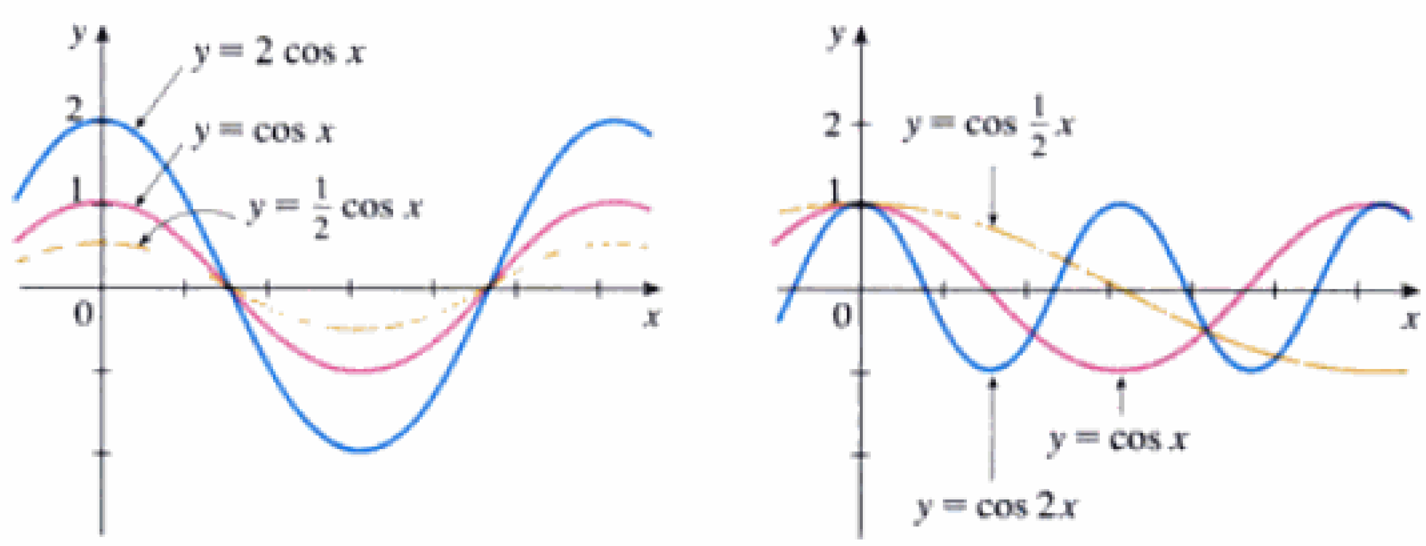
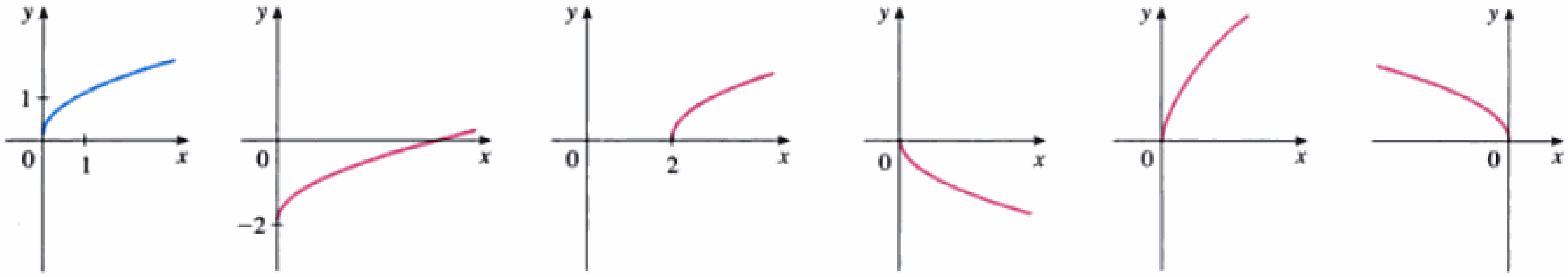


FIGURA 3

EJEMPLO 1 □ Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use las transformaciones para graficar $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN En la figura 4a) aparece la gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, obtenida de la figura 13 de la sección 1.2. En las otras partes de la figura, trazamos $y = \sqrt{x} - 2$ al desplazarla 2 unidades hacia abajo, $y = \sqrt{x-2}$ al desplazarla 2 unidades hacia la derecha, $y = -\sqrt{x}$ al reflejarla respecto al eje x, $y = 2\sqrt{x}$ al alargarla verticalmente un factor de 2, y $y = \sqrt{-x}$ al reflejarla respecto al eje x.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x-2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURA 4

□

EJEMPLO 2 □ Grafique la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Al completar el cuadrado, escribimos la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto quiere decir que obtenemos la gráfica deseada si partimos de la parábola $y = x^2$ y la desplazamos 3 unidades a la izquierda y, a continuación, 1 unidad hacia arriba (Fig. 5).

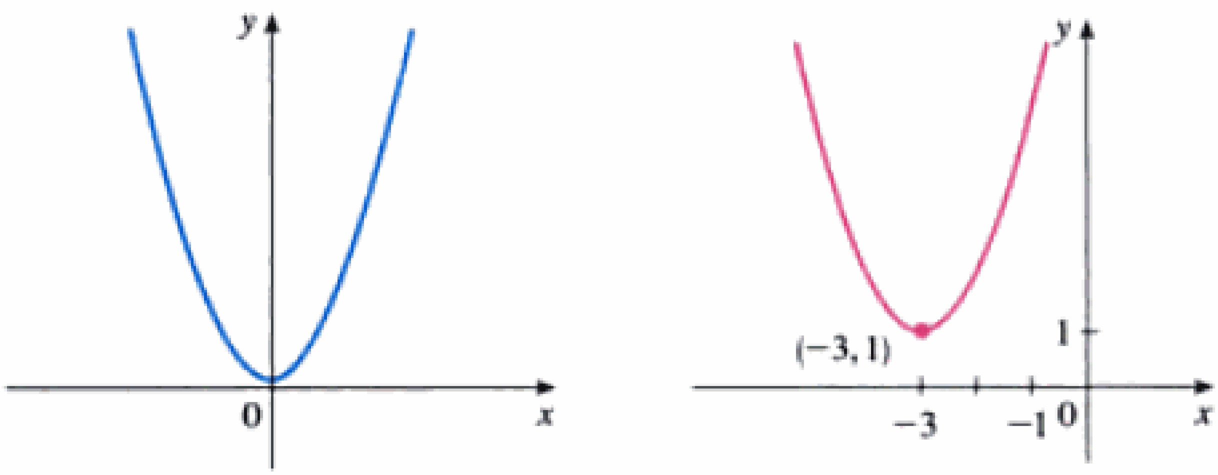


FIGURA 5 (a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

□

EJEMPLO 3 □ Trace las gráficas de las funciones siguientes:

(a) $y = \text{sen } 2x$ (b) $y = 1 - \text{sen } x$

SOLUCIÓN

(a) Obtenemos la gráfica de $y = \text{sen } 2x$ a partir de la de $y = \text{sen } x$, si la comprimimos horizontalmente un factor de 2 (Figs. 6 y 7). Es decir, mientras que el periodo de $y = \text{sen } x$ es 2π, el periodo de $y = \text{sen } 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

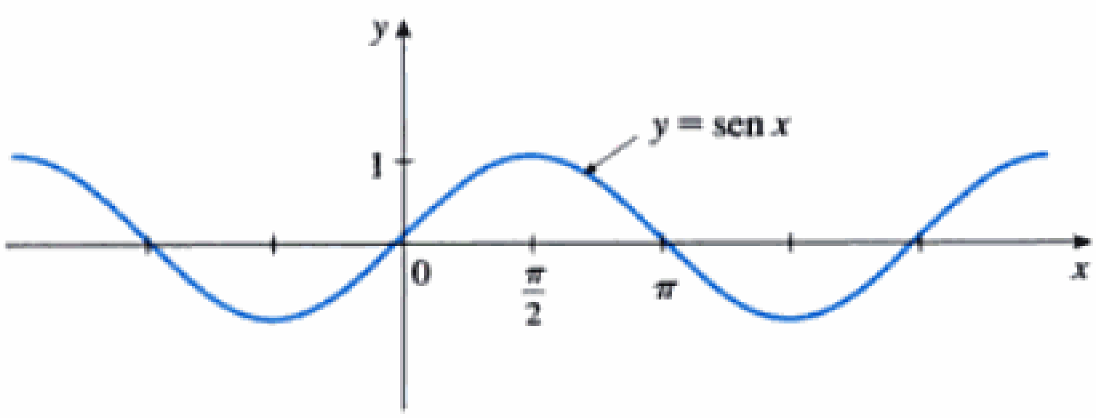


FIGURA 6

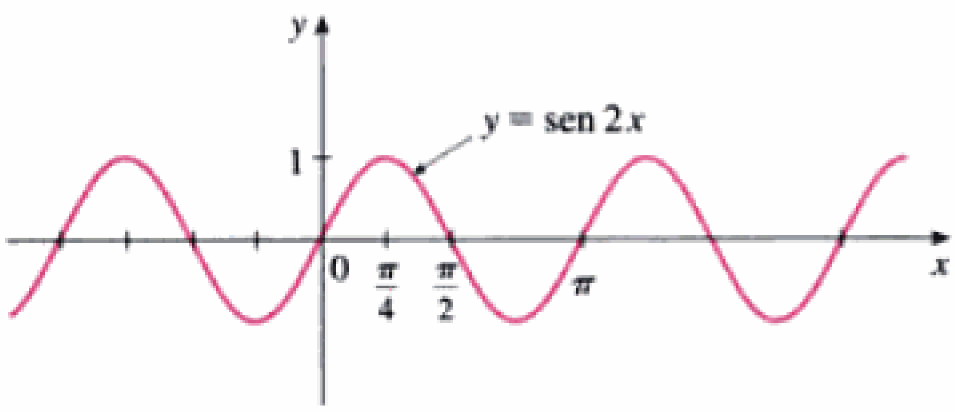


FIGURA 7

(b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \operatorname{sen} x$ una vez más empezamos con $y = \operatorname{sen} x$. La reflejamos con respecto al eje x, para obtener la gráfica de $y = -\operatorname{sen} x$ y, a continuación, la desplazamos 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \operatorname{sen} x$ (Fig. 8).

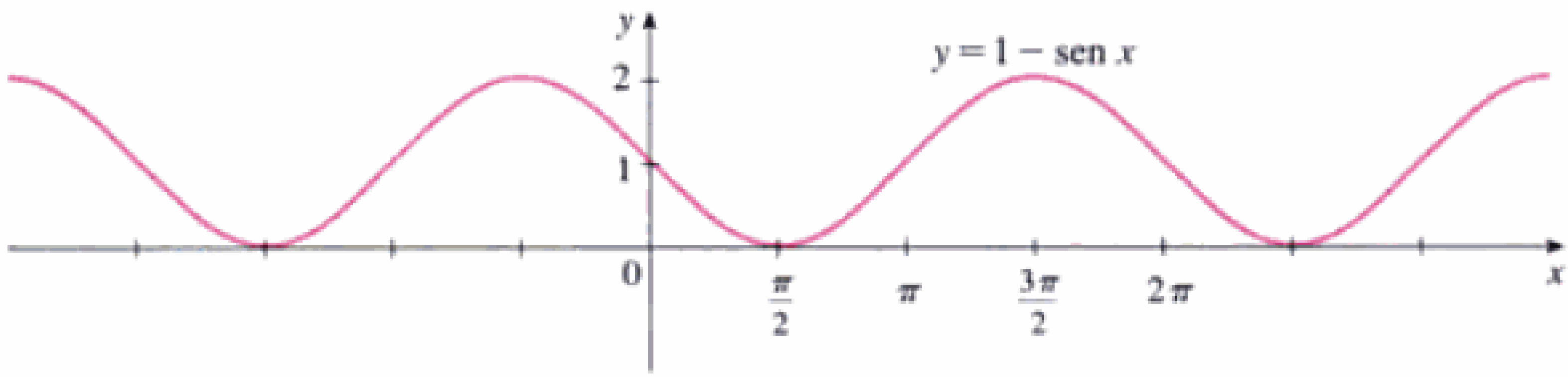
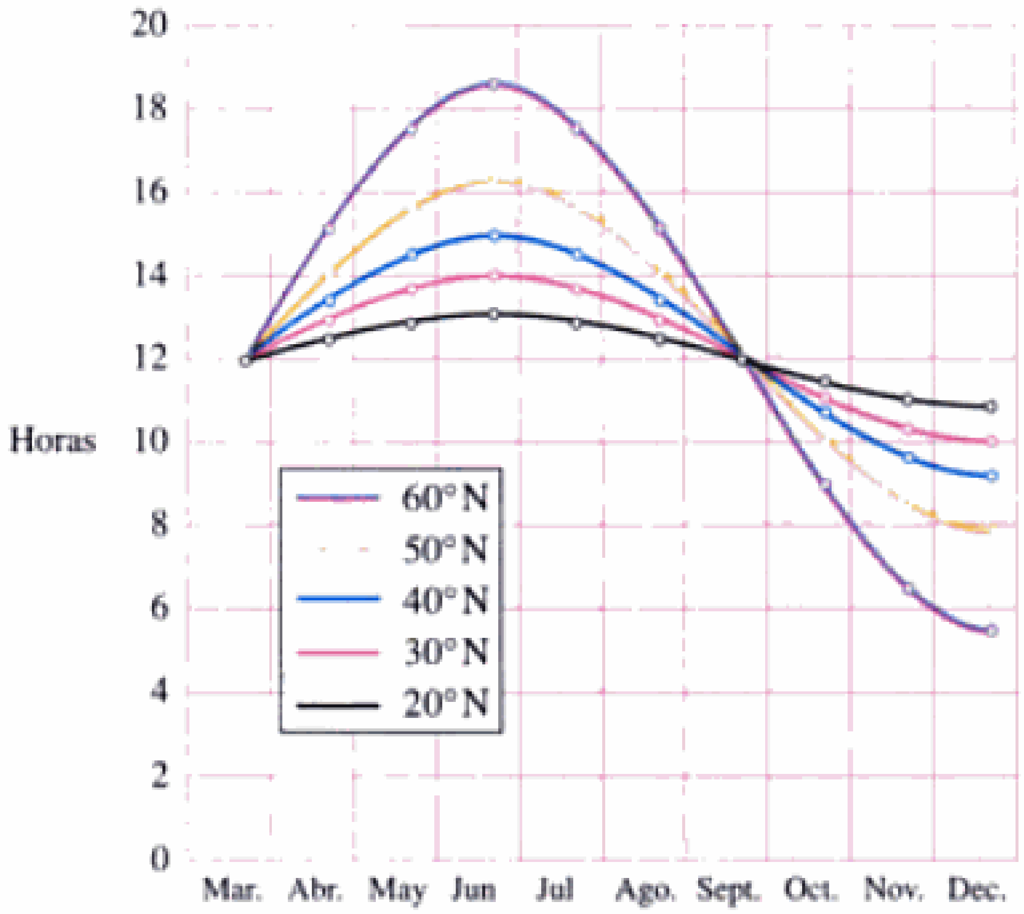


FIGURA 8

□

EJEMPLO 4 □ La figura 9 muestra gráficas del número de horas de luz solar, como funciones del tiempo transcurrido desde la última semana de marzo, siendo cada gráfica correspondiente a una latitud distinta. Puesto que Filadelfia está situada como a 40° de latitud Norte encuéntrese una función para modelar el número de horas de luz natural en Filadelfia.



Fuente: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nueva York: Silver, Burdett, 1935), p. 40.

FIGURA 9

Gráfica del número de horas de luz natural desde el 21 de marzo hasta el 21 de diciembre en distintas latitudes.

SOLUCIÓN Hay que observar que cada una de las curvas tiene el aspecto de una gráfica senoidal trasladada y comprimida. En la curva de color azul vemos que en la latitud de Filadelfia la luz del día tiene una duración de 14.8 horas el 21 de junio y 9.2 el 21 de diciembre, de modo que la amplitud de la curva (es decir el factor por el que hay que multiplicar para estirar verticalmente la curva senoide) es $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

¿Cuál es el factor necesario para estirar horizontalmente la curva si se mide el tiempo en días? Como el año dura 365 días aproximadamente el periodo de $y = \operatorname{sen} t$ es 2π, de modo que el factor de estiramiento horizontal es $c = 2\pi/365$.

También observamos que la curva inicia su ciclo el 21 de marzo, el día ochenta del año, de modo que debemos trasladar la curva ochenta unidades a la derecha. Además la movemos 12 unidades hacia arriba. Por lo tanto, vamos a modelar la duración de la luz natural en Filadelfia en el día t-ésimo del año por medio de la función.

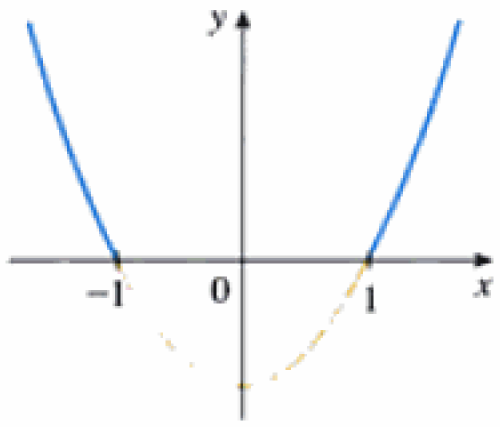
$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

□

Otra transformación de cierto interés es tomar el valor absoluto de una función. Si $y = |f(x)|$, entonces, según la definición de valor absoluto, $y = f(x)$, cuando $f(x) \geq 0$ y $y = -f(x)$, cuando $f(x) < 0$. Esto nos dice cómo obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. La parte de la gráfica que se encuentra arriba del eje x sigue siendo la misma; la sección inferior del eje x se refleja respecto a este eje.

EJEMPLO 5 □ Grafique la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN En primer lugar, graficamos la parábola $y = x^2 - 1$ de la figura 10a) desplazando la parábola $y = x^2$ hacia abajo 1 unidad. Vemos que la gráfica se encuentra debajo del eje x cuando $-1 < x < 1$, de modo que reflejamos esa parte de la gráfica respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ de la figura 10b).



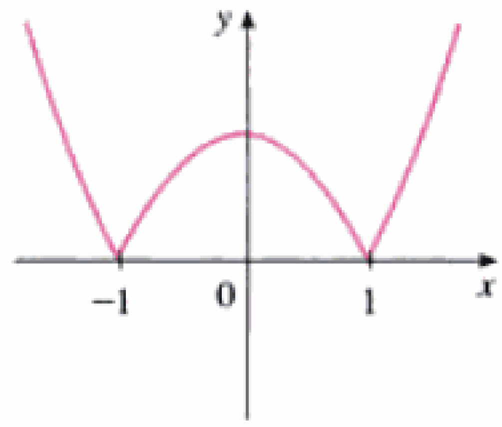


FIGURA 10 (a) $y = x^2 - 1$ (b) $y = |x^2 - 1|$ □

Combinaciones de funciones

Se pueden combinar las dos funciones f y g para formar las nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g, de manera semejante a la que aplicamos para sumar, restar, multiplicar y dividir números reales.

Si definimos la suma $f + g$ por la ecuación

1 $$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

entonces el segundo miembro de la ecuación 1 tiene sentido si tanto $f(x)$ como $g(x)$ están definidas; es decir, si x pertenece al dominio de f y también al de g. Si el dominio de f es A y el de g es B, entonces el dominio de $f + g$ es la intersección de ambos, es decir, $A \cap B$.

Note que el signo + del primer miembro de la ecuación 1 representa la operación de adición de *funciones*, pero el signo + del segundo miembro de la misma ecuación representa la adición de los *números* $f(x)$ y $g(x)$.

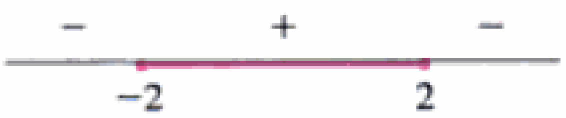
De manera análoga, podemos definir la diferencia $f - g$ y el producto fg, y sus dominios también son $A \cap B$. Pero al definir el cociente f/g, debemos recordar no dividir entre 0.

Álgebra de funciones Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{dominio} = A \cap B$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{dominio} = A \cap B$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{dominio} = A \cap B$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{dominio} = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

La manera de resolver $4 - x^2 \geqslant 0$:

$$(2 - x)(2 + x) \geqslant 0$$



EJEMPLO 6 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, encuentre las funciones $f + g$, $f - g$, fg, y f/g.

SOLUCIÓN El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$. El dominio de $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ consta de todos los números x tales que $4 - x^2 \geqslant 0$; es decir, $x^2 \leqslant 4$. Si se extrae raíz cuadrada de ambos miembros, obtenemos $|x| \leqslant 2$, o $-2 \leqslant x \leqslant 2$, de modo que el dominio de g es el intervalo $[-2, 2]$. La intersección de los dominios de f y g es

$$[0, \infty) \cap [-2, 2] = [0, 2]$$

Por tanto, según las definiciones, tenemos

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$(fg)(x) = \sqrt{x}\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4x - x^3} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4 - x^2}} \qquad 0 \leqslant x < 2$$

Note que el dominio de f/g es el intervalo $[0, 2)$, porque debemos excluir los puntos en donde $g(x) = 0$; es decir, $x = \pm 2$. □

La gráfica de la función $f + g$ se obtiene de las gráficas de f y g por **adición gráfica**. Esto significa que sumamos las coordenadas y correspondientes, como en la figura 11. En la figura 12 se muestra el resultado de usar este procedimiento para graficar la función $f + g$ del ejemplo 6.

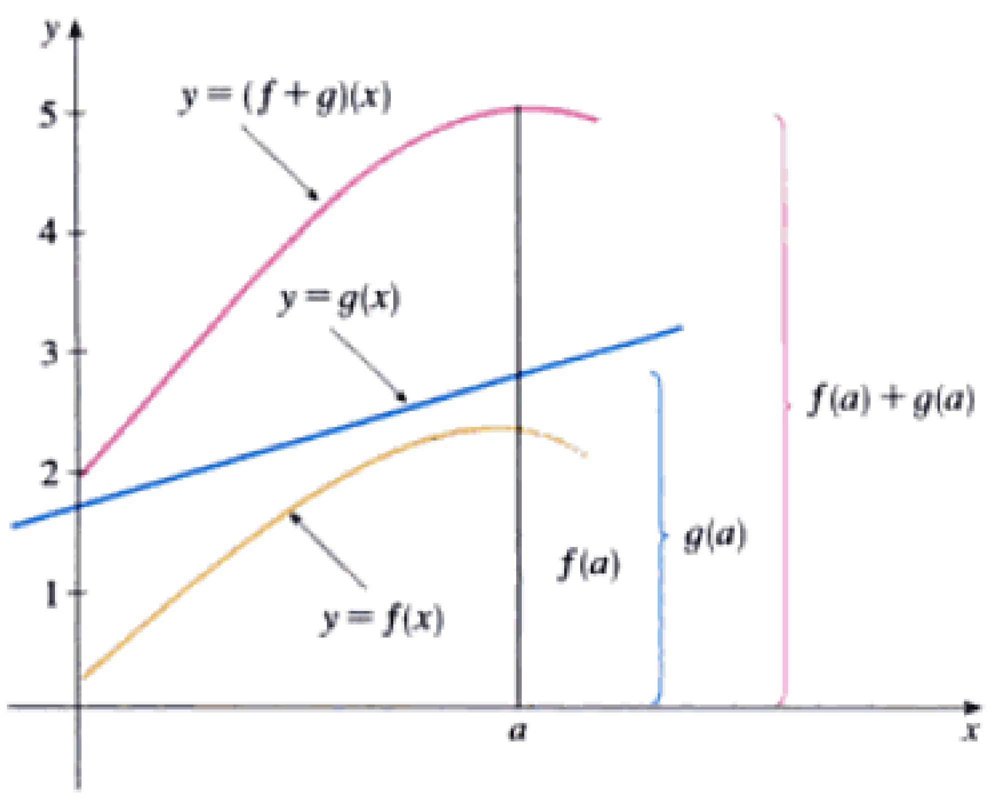


FIGURA 11

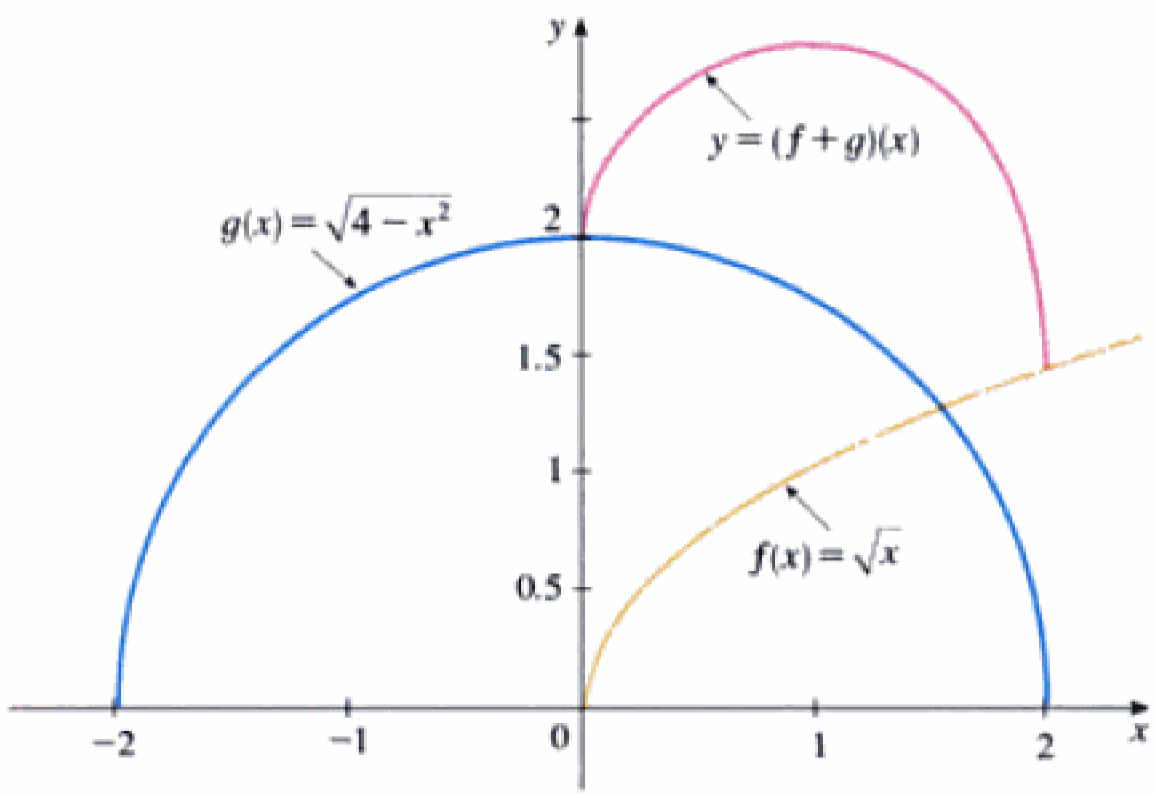


FIGURA 12

Composición de funciones

Existe otra manera de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Por ejemplo, suponga que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y es una función de u y, a su vez, u es una función de x, se concluye que, finalmente, y es una función de x. Calculamos esto por sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

El procedimiento se llama *composición* porque la nueva función se *compone* de las dos funciones dadas, f y g.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, partimos de un número x en el dominio de g y encontramos su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida al sustituir g en f. Ésta se conoce como la *composición* (o la *compuesta*) de f y g y se denota con $f \circ g$ ("f círculo g").

Definición Dadas dos funciones f y g, la función **compuesta** $f \circ g$ (también llamada la **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

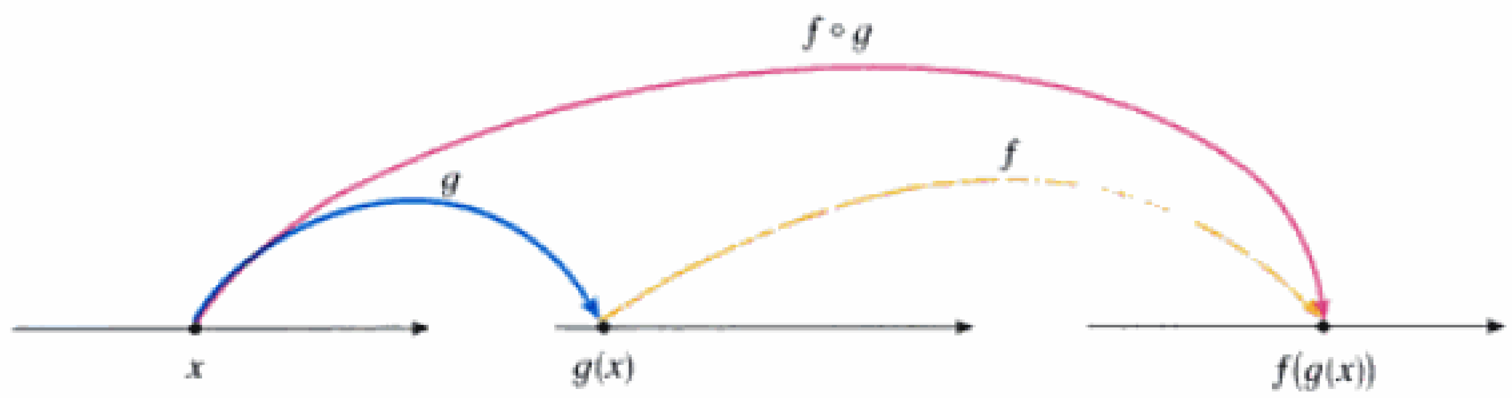
El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ lo están. La mejor manera de representar $f \circ g$ es con un diagrama de máquinas (Fig. 13) o un diagrama sagital (de flechas) (Fig. 14).

FIGURA 13

La máquina $f \circ g$ está compuesta por la máquina g (primera) y luego la máquina f.

FIGURA 14

Diagramas sagitales para $f \circ g$



EJEMPLO 7 □ Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$ □

NOTA □ Con base en el ejemplo 7 puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que primero se aplica la función g y luego f. En el ejemplo 7, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y *a continuación* eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *primero* eleva al cuadrado y *luego* resta 3.

EJEMPLO 8 □ Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, hallar cada función y su dominio.

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Si $0 \leq a \leq b$, entonces $a^2 \leq b^2$.

Para que $\sqrt{x}$ esté definido deber ser $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definido debe ser $2 - \sqrt{x} \geq 0$, o sea, $\sqrt{x} \leq 2$, o $x \leq 4$. Así pues $0 \leq x \leq 4$, de modo que el dominio $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Esta expresión está definida cuando $2 - x \geq 0$, o sea, $x \leq 2$, y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. Esta última desigualdad es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, o $2 - x \leq 4$, es decir, $x \geq -2$. Luego, $-2 \leq x \leq 2$, de manera que el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$. □

Suponiendo que no tenemos fórmulas explícitas para f y g pero tenemos tablas de valores o gráficas de funciones. Aún así podemos graficar la función compuesta $f \circ g$, como lo muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 □ Las gráficas de f y g son como las que se ilustran en la figura 15 y $h = f \circ g$. Estime el valor de $h(0.5)$; luego grafique h.

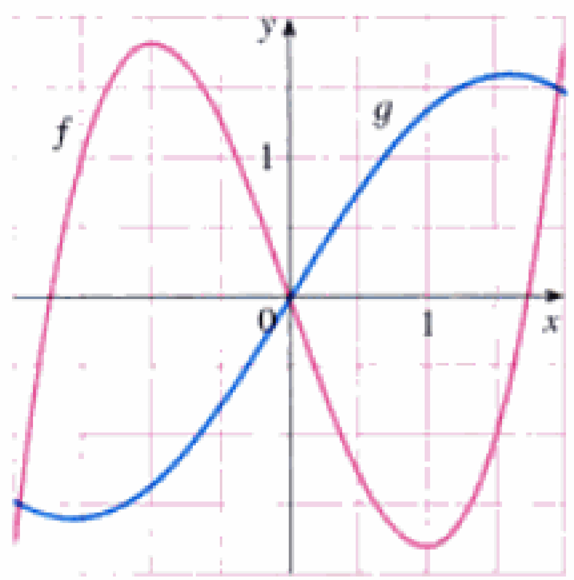


FIGURA 15

□ Un método más geométrico para graficar funciones compuestas se explica en el ejercicio 65.

SOLUCIÓN A partir de la gráfica de g, estimamos que $g(0.5) \approx 0.8$. Entonces, de la gráfica de f, vemos que $f(0.8) \approx -1.7$. De este modo,

$$h(0.5) = f(g(0.5)) \approx f(0.8) \approx -1.7$$

De manera semejante, estimamos los valores de h en la tabla siguiente:

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$g(x)$	-1.5	-1.6	-1.3	-0.8	0.0	0.8	1.3	1.6	1.5
$h(x) = f(g(x))$	1.0	0.7	1.5	1.7	0.0	-1.7	-1.5	-0.7	-1.0

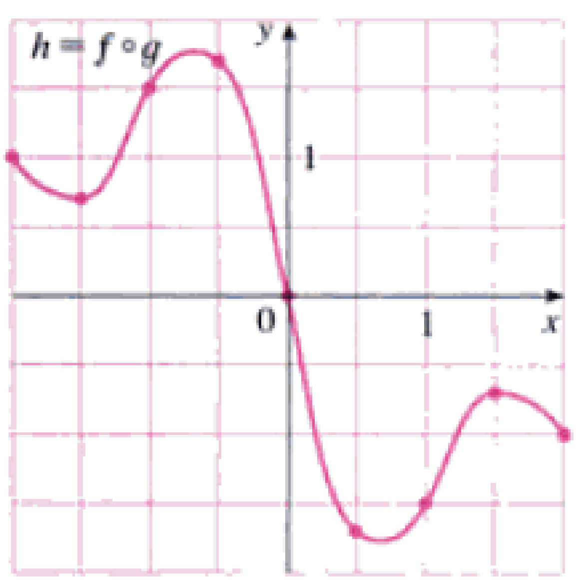


FIGURA 16

Usamos estos valores para trazar la gráfica de la función compuesta h de la figura 16. Si deseamos una gráfica más exacta, podríamos aplicar este procedimiento a más valores de x. □

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar primero h, a continuación g y, luego, f, como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 10 □ Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$, y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$ □

Hasta ahora, hemos usado la composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en cálculo a menudo resulta útil descomponer una función complicada en otras más sencillas, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 11 □ Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la fórmula dada para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, por último, eleve al cuadrado. De modo que hacemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Entonces

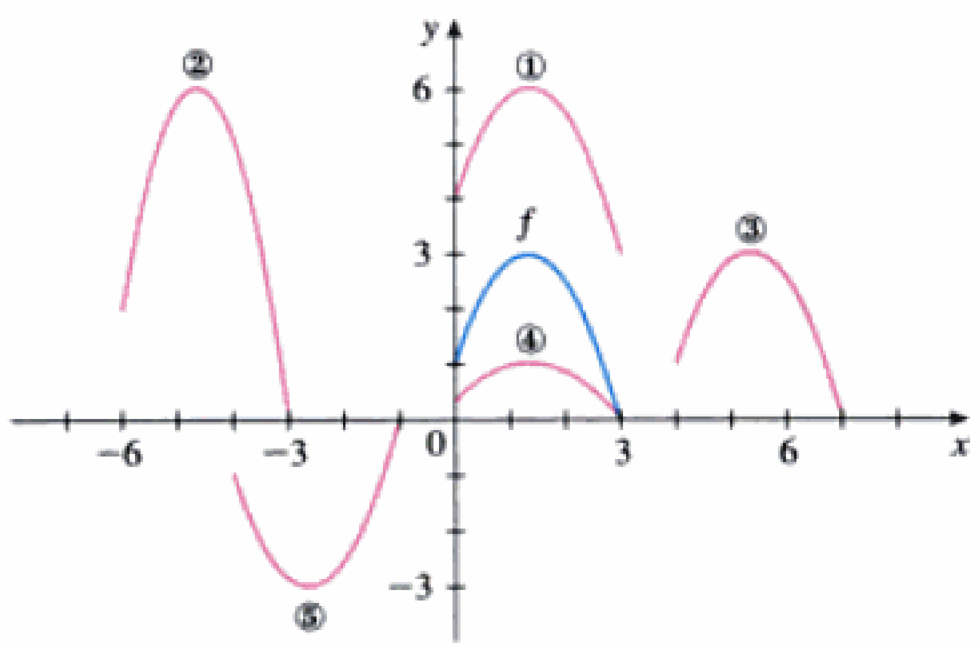
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$ □

1.3 Ejercicios

1. Suponga que se da la gráfica de f. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f, como se indica.
   (a) Desplácela 3 unidades hacia arriba.
   (b) Desplácela 3 unidades hacia abajo.
   (c) Desplácela 3 unidades a la derecha.
   (d) Desplácela 3 unidades a la izquierda.
   (e) Refléjela respecto al eje x.
   (f) Refléjela respecto al eje y.
   (g) Alárguela verticalmente un factor de 3.
   (h) Contraígala verticalmente un factor de 3.

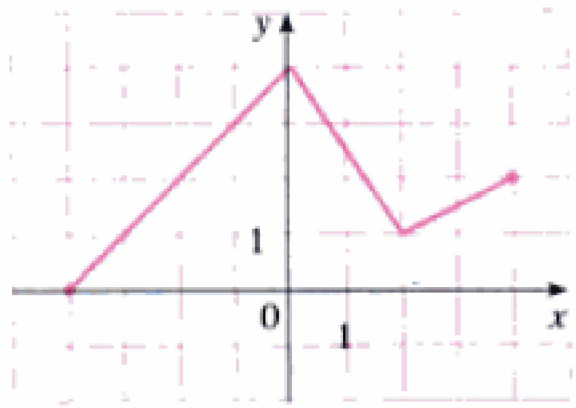
2. Explique cómo se obtienen las gráficas siguientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$.
   (a) $y = 5f(x)$ (b) $y = f(x - 5)$
   (c) $y = -f(x)$ (d) $y = -5f(x)$
   (e) $y = f(5x)$ (f) $y = 5f(x) - 3$

3. La gráfica de $y = f(x)$ está dada. Cotejar cada ecuación con su gráfica y dar razones apropiadas para hacerlo.
   (a) $y = f(x - 4)$ (b) $y = f(x) + 3$
   (c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x + 4)$
   (e) $y = 2f(x + 6)$

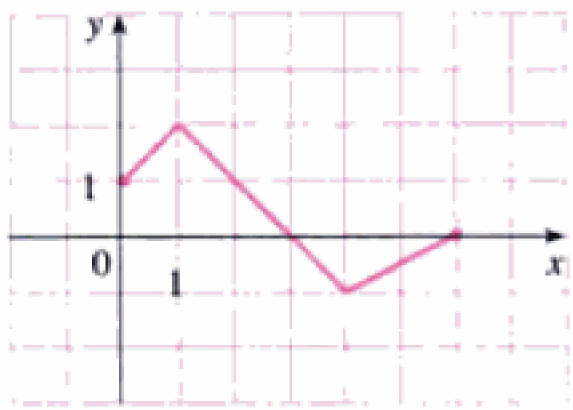


4. Se da la gráfica de f. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.
   (a) $y = f(x + 4)$ (b) $y = f(x) + 4$

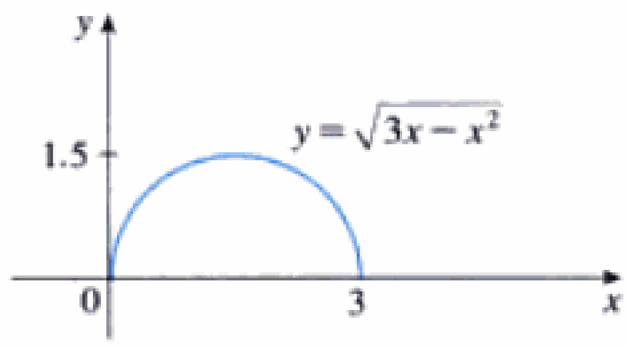
(c) $y = 2f(x)$ (d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$



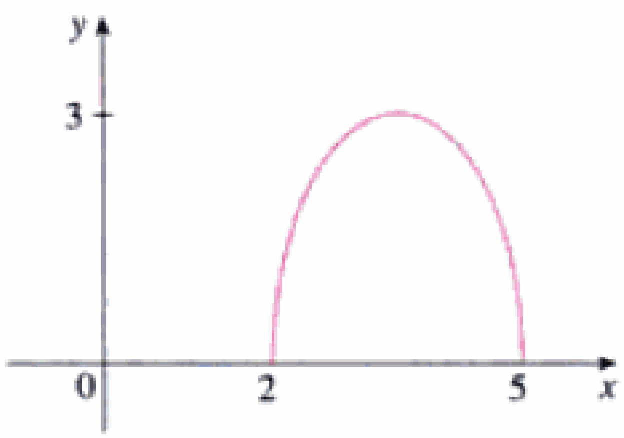
5. Se da la gráfica de f. Úsela para trazar la gráfica de las funciones siguientes:
(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



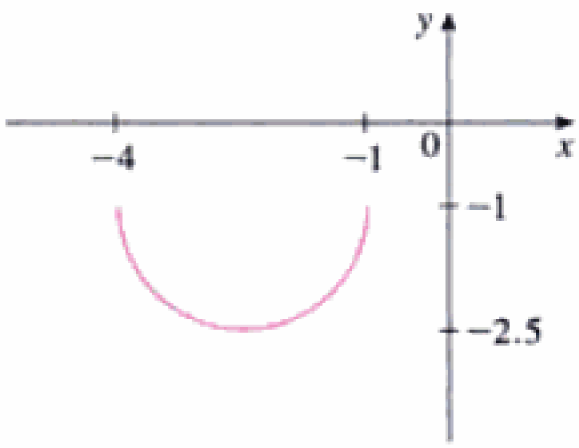
6–7 □ Se da gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$. Utilice las transformaciones necesarias para crear las funciones cuyas gráficas se dan.



6.



7.



8. (a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$? Use su respuesta y la figura 6) para graficar $y = 2 \operatorname{sen} x$.
(b) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Use su respuesta y la figura 4a) para graficar $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 □ Grafique cada función, no por la colocación de puntos, sino a partir de la gráfica de una de las funciones estándares dadas en esta sección y, a continuación, aplicando las transformaciones apropiadas.

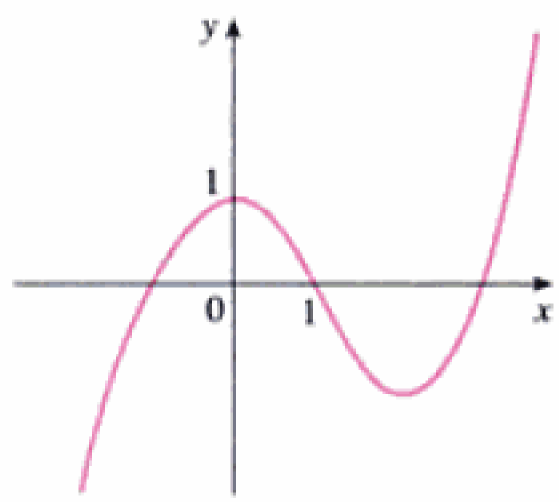
9. $y = -1/x$
10. $y = 2 - \cos x$
11. $y = \tan 2x$
12. $y = \sqrt[3]{x + 2}$
13. $y = \cos(x/2)$
14. $y = x^2 + 2x + 3$
15. $y = \dfrac{1}{x - 3}$
16. $y = -2 \operatorname{sen} \pi x$
17. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
18. $y = 2 + \dfrac{1}{x + 1}$
19. $y = 1 + 2x - x^2$
20. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$
21. $y = 2 - \sqrt{x + 1}$
22. $y = (x - 1)^3 + 2$
23. $y = \left||x| - 1\right|$
24. $y = |\cos x|$

25. La ciudad de Nueva Orleans se encuentra a 30 ºN. Utilice la figura 9 para encontrar una función que modele el número de horas de luz natural en Nueva Orleans como función del tiempo. Use el hecho de que el 21 de marzo el Sol sale a las 5:51 de la mañana y la puesta del Sol es a las 6:18 de la tarde en Nueva Orleans para verificar la exactitud de su modelo.

26. Una estrella variable es una cuyo brillo crece y decrece alternadamente. Para el caso de una estrella variable el brillo es de 5.4 días, el brillo (o magnitud) promedio para esta estrella es 4.0 y su brillo varía en ±0.35. Halle una función que modele el brillo de Delta Cefei como función del tiempo.

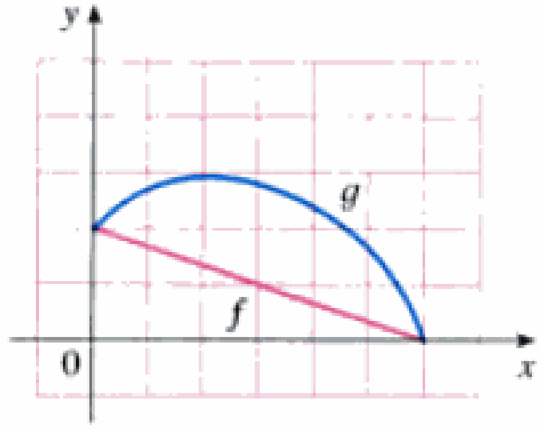
27. (a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(|x|)$ con la gráfica de f?
(b) Grafique $y = \operatorname{sen} |x|$.
(c) Grafique $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use la gráfica de f dada para graficar $y = 1/f(x)$. ¿Cuáles características de f son las más importantes para trazar la gráfica de $y = 1/f(x)$? Explique cómo se usan.

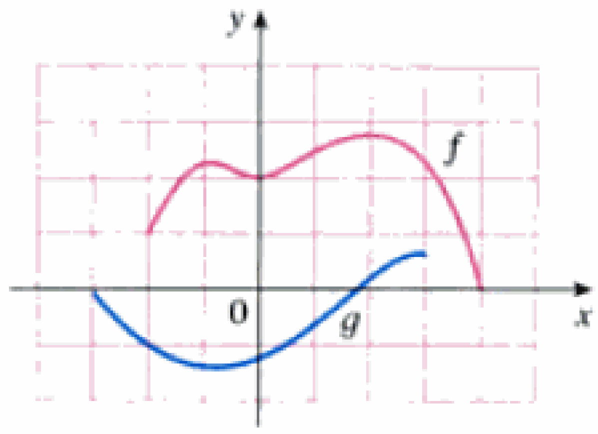


29–30 □ Bosqueje la gráfica de $f + g$ por adición gráfica.

29.



30.



31–32 □ Encuentre $f + g$, $f - g$, fg, y f/g y dé sus dominios.

31. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{1 + x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

33–34 □ Con las gráficas de f y g y el método de adición gráfica, grafique $f + g$.

33. $f(x) = x$, $g(x) = 1/x$

34. $f(x) = x^3$, $g(x) = -x^2$

35–40 □ Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, y $g \circ g$ así como sus dominios.

35. $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = x^2$

37. $f(x) = 1/x$, $g(x) = x^3 + 2x$

38. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, $g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

39. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

40. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

41–44 □ Encuentre $f \circ g \circ h$.

41. $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x - 1$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2 + 2$

43. $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x - 5$, $h(x) = \sqrt{x}$

44. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$

45–50 □ Exprese la función en la forma $f \circ g$.

45. $F(x) = (x - 9)^5$

46. $F(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$

47. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

48. $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

49. $u(t) = \sqrt{\cos t}$

50. $u(t) = \tan \pi t$

51–53 □ Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

51. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$

52. $H(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

53. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

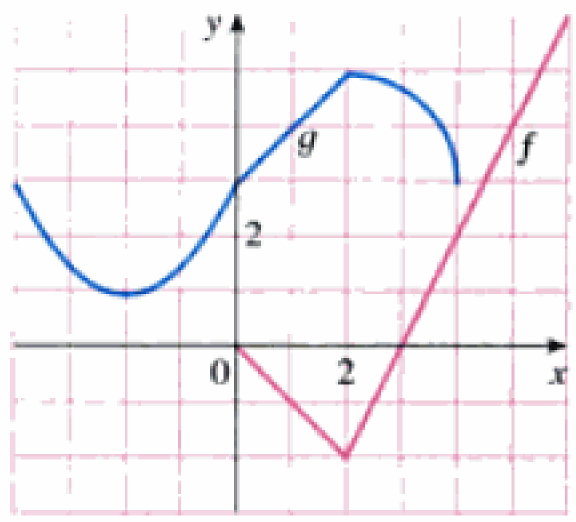
54. Use la tabla para evaluar cada expresión.

(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

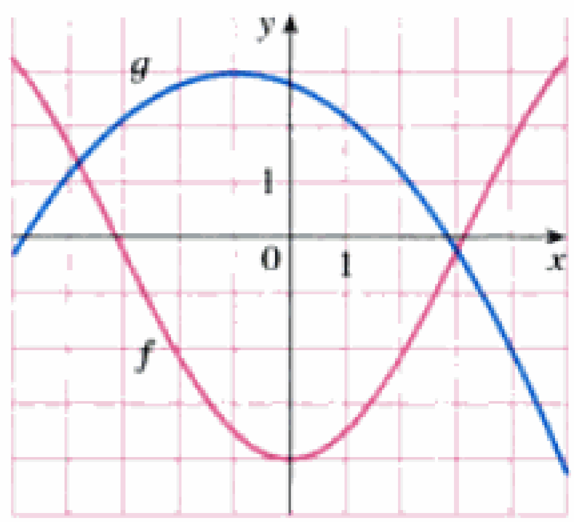
x	1	2	3	4	5	6
	3	1	4	2	2	5
	6	3	2	1	2	3

55. Use las gráficas dadas de f y g para evaluar cada expresión, o bien, explique por qué no está definida.

(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



56. Use las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Use estas estimaciones para trazar una gráfica aproximada de $f \circ g$



57. Se deja caer una piedra en un lago, que crea una onda circular que viaja hacia afuera a una velocidad de 60 cm/s.

(a) Exprese el radio r de este círculo como función del tiempo t (en segundos).

(b) Si A es el área de este círculo como función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprételo.

58. Un avión vuela a una velocidad de 350 mi/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el instante $t = 0$..

(a) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado como función de t.

(b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d.

(c) Aplique la composición para expresar s como función de t.

59. La **función de Heaviside** H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Se usa en el estudio de los circuitos eléctricos para representar la onda repentina de corriente eléctrica, o de voltaje, cuando un interruptor se cierra instantáneamente.

(a) Grafique la función de Heaviside.

(b) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$ y se aplican instantáneamente 120 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$.

(c) Grafique el voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 5$ segundos y se aplican instantáneamente 240 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$. (Note que partir de $t = 5$ corresponde a una traslación.)

60. También se puede usar la función de Heaviside definida en el ejercicio 59 para definir la **función rampa** $y = ctH(t)$, la cual representa un aumento gradual del voltaje o la corriente en un circuito.

(a) Grafique la función rampa $y = tH(t)$.

(b) Grafique el voltaje $V(t)$ en un circuito si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$ y el voltaje se incrementa gradualmente hasta 120 volts durante un intervalo de 60 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$, para $t \leqslant 60$.

(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 7$ segundos y el voltaje se incrementa gradualmente hasta 100 volts durante un periodo de 25 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$, para $t \leqslant 32$.

61. (a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense en qué operaciones tendrá que realizar en la fórmula g, para llegar a la fórmula de h.)

(b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.

62. Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$ encuentre una función g tal que $g \circ f = h$.

63. Suponga que g es una función par y su $h = f \circ g$. ¿Será siempre función par, h?

64. Suponga que g es una función impar y sea $h = f \circ g$. ¿h siempre es una función impar? ¿Qué pasa si f es impar?

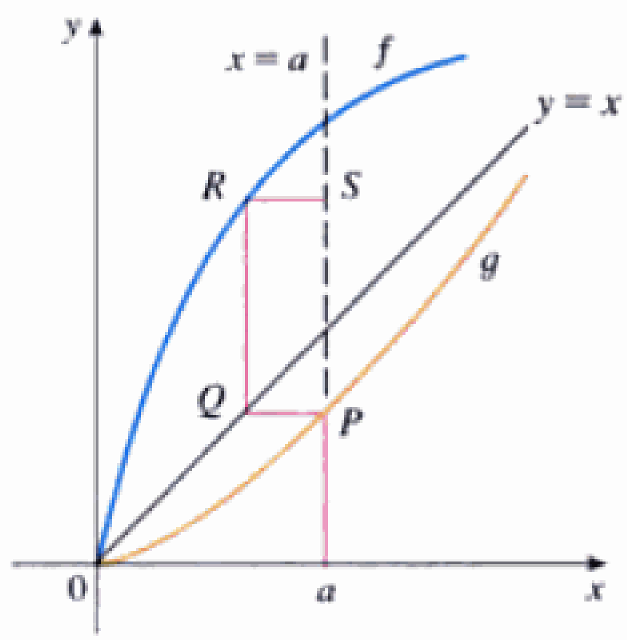
65. Suponga que se nos dan las gráficas de f y g, como en la figura, y deseamos hallar el punto de la gráfica de $h = f \circ g$ que corresponda a $x = a$. Partimos del punto $(a, 0)$ y trazamos una recta vertical que interseque la gráfica de g en el punto P. En seguida dibujamos una recta horizontal desde P hasta el punto Q de la recta $y = x$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P y de Q?

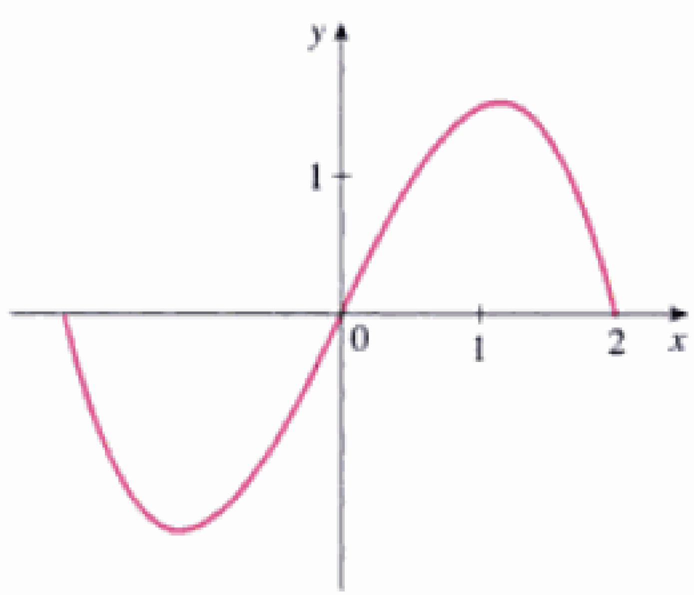
(b) Si ahora dibujamos una recta vertical desde Q hasta el punto R de la gráfica de f, ¿cuáles son las coordenadas R?

(c) Si ahora dibujamos una recta horizontal desde R hasta el punto S de la recta $x = a$, demuestre que S se encuentra en la gráfica de h.

(d) Trace la gráfica de h construyendo la trayectoria $PQRS$ para varios valores de a.



66. Si f es la función cuya gráfica se muestra, aplique el método del ejercicio 65 para trazar la gráfica de $f \circ f$. Empiece con la construcción para $a = 0, 0.5, 1, 1.5$ y 2. Trace una gráfica aproximada para $0 \leqslant x \leqslant 2$. A continuación, use el resultado del ejercicio 52 para completar la gráfica.



1.4 Calculadoras graficadoras y computadoras

En esta sección supondremos que tiene acceso a una calculadora graficadora o a una computadora con software para trazar gráficas. Veremos que el uso de uno de esos aparatos nos da capacidad para trazar gráficas de funciones más complicadas y resolver problemas más complejos de lo que sería posible de otra forma. También señalaremos algunas de las dificultades que se pueden presentar con estas máquinas.

Ambos dispositivos pueden dar gráficas muy exactas de las funciones. Pero, en el capítulo 4, veremos que sólo usando el cálculo podemos estar seguros de haber descubierto todos los aspectos interesantes de una gráfica.

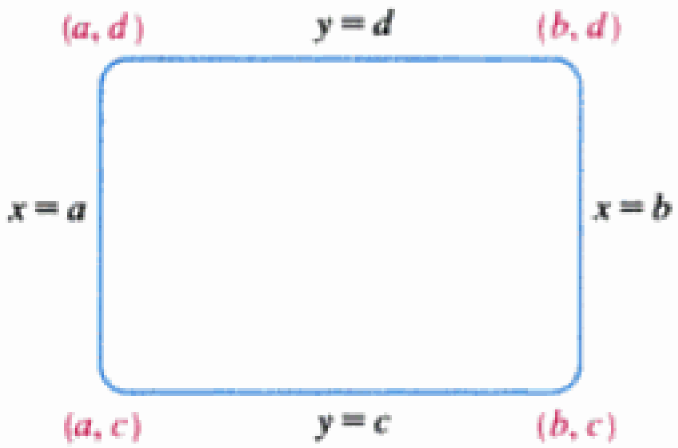


FIGURA 1
Pantalla $[a, b]$ por $[c, d]$

Una calculadora graficadora o una computadora presentan una parte rectangular de la gráfica de una función en un **rectángulo de visualización,** o **pantalla para visualización,** a los cuales nos referiremos simplemente como **pantalla**. La pantalla predeterminada a menudo da una imagen incompleta o engañosa, de modo que es importante elegirla con cuidado. Si elegimos que los valores x varíen desde un valor mínimo de *Xmín* $= a$ hasta un valor máximo de *Xmáx* $= b$ y que los valores y varíen desde uno mínimo de *Ymín* $= c$ hasta uno máximo de *Ymáx* $= d$, entonces la parte de la gráfica se encuentra en la pantalla

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

de la figura 1. Nos referiremos a este espacio como la *pantalla* de $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

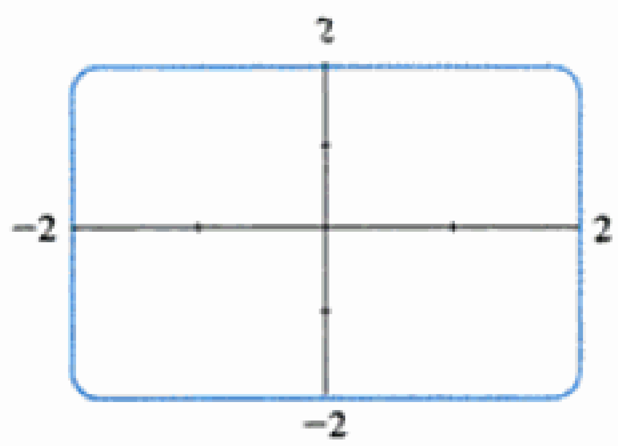
La máquina dibuja la gráfica de una función f de modo muy semejante a como usted lo haría. Sitúa los puntos de la forma $(x, f(x))$ para cierto número de valores de x entre a y b. Si un valor x no está en el dominio de f o si $f(x)$ queda fuera la pantalla, la máquina pasa al valor x siguiente. Une cada punto con el anterior para formar una representación de la gráfica de f.

EJEMPLO 1 □ Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en cada una de las siguientes pantallas.

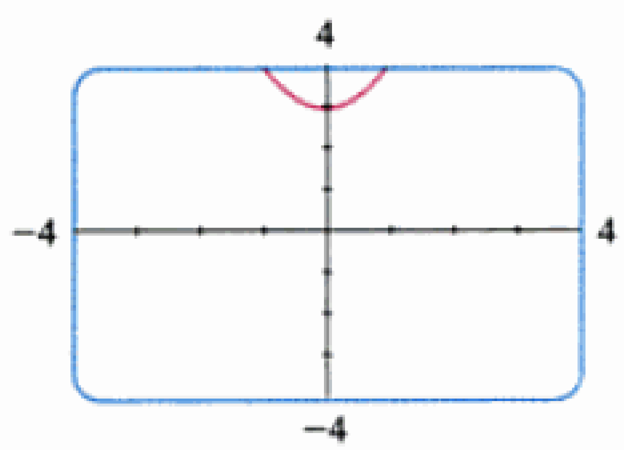
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ (d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

SOLUCIÓN Para el inciso a), seleccionamos el intervalo al establecer *Xmín* $= -2$, *Xmáx* $= 2$, *Ymín* $= -2$ y *Ymáx* $= 2$. En la figura 2a), está la gráfica resultante. ¡La pantalla está en blanco! Un momento de reflexión nos da la explicación: note que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, de modo que $x^2 + 3 \geqslant 3$ para toda x. Por tanto, la imagen de la función $f(x) = x^2 + 3$ es $[3, \infty)$. Esto significa que la gráfica de f está por completo fuera de la pantalla $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

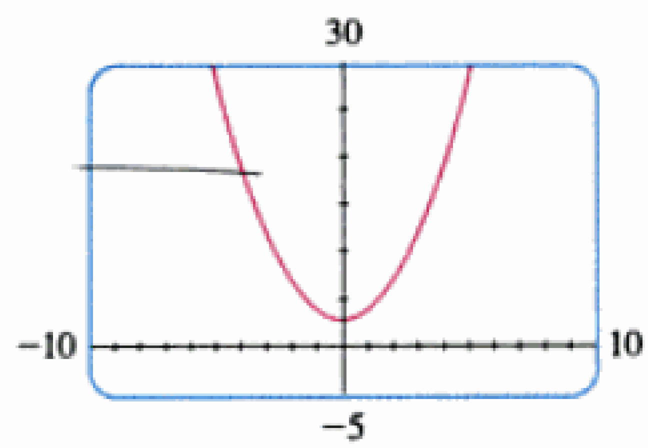
En la figura 2, también se muestran las gráficas para las pantallas b), c) y d). Observe que obtenemos una imagen más completa en c) y d), pero en d) no se ve con claridad que la intersección con el eje y es 3. □



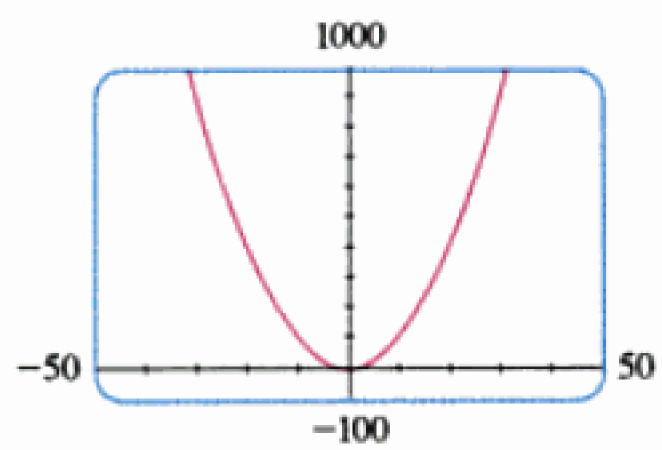
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$



(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$



(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$



(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

FIGURA 2 Gráficas de $f(x) = x^2 + 3$

Con base en el ejemplo 1, vemos que la elección de una pantalla puede dar lugar a una gran diferencia en el aspecto de una gráfica. A veces es necesario cambiar a una pantalla más grande para obtener una figura más global de la gráfica. Pero una pantalla demasiado grande también puede ser engañosa. En el ejemplo siguiente, vemos que el conocimiento del dominio y de la imagen de una función a veces nos proporciona información suficiente para seleccionar una buena pantalla.

EJEMPLO 2 □ Determine una pantalla de visualización apropiada para la función $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ y úsela para trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN La expresión para $f(x)$ está definida cuando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

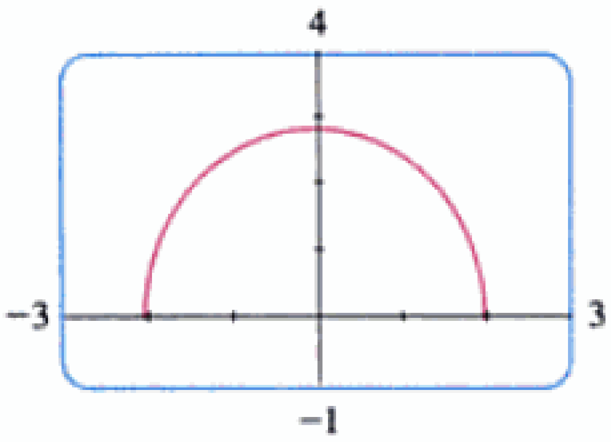


FIGURA 3

Por lo tanto, el dominio de f es el intervalo $[-2, 2]$. Asimismo,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

de modo que el recorrido de f es el intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Elegimos la pantalla de modo que el intervalo x sea algo mayor que el dominio y que el intervalo y sea mayor que la imagen. Si la definimos en $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 3. □

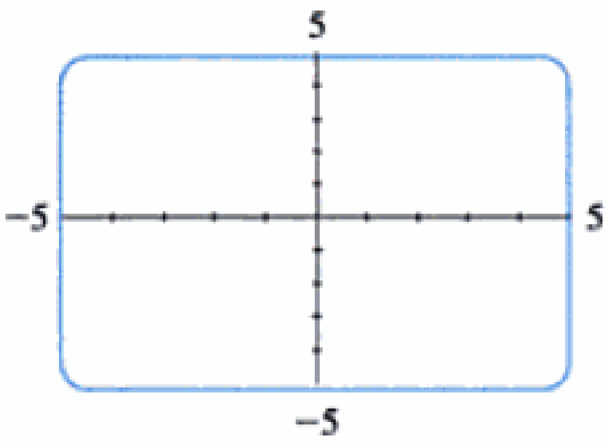


FIGURA 4

EJEMPLO 3 □ Grafique la función $y = x^3 - 49x$.

SOLUCIÓN En este caso, el dominio es $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales. Eso no nos ayuda a seleccionar una pantalla. Experimentemos. Si empezamos con la pantalla $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obtenemos la gráfica de la figura 4, la cual está casi en blanco. La razón es que para todos los valores de x que la calculadora elige entre -5 y 5, excepto 0, los valores de $f(x)$ son mayores que 5 o menores que -5, de modo que los puntos correspondientes de la gráfica quedan fuera de la pantalla.

Si usamos la característica de zoom de una calculadora graficadora para cambiar la pantalla a $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$, obtenemos la imagen de muestra de la figura 5a). La gráfica parece consistir en rectas verticales, pero sabemos que no es correcto. Si miramos con cuidado mientras se traza la gráfica, vemos que ésta sale de la pantalla y vuelve a aparecer durante el proceso. Esto indica que necesitamos ver más en dirección vertical, de modo que cambiamos la pantalla a $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$. En la figura 5b) aparece la gráfica resultante. Todavía no revela todas las características principales de la función, de modo que probamos con $[-10, 10]$ por $[-200, 200]$ [Fig. 5c)]. Ahora tenemos más confianza de contar con una pantalla apropiada. En el capítulo 4 seremos capaces de ver que la gráfica mostrada en la figura 5c) sí revela todas las características principales de la función.

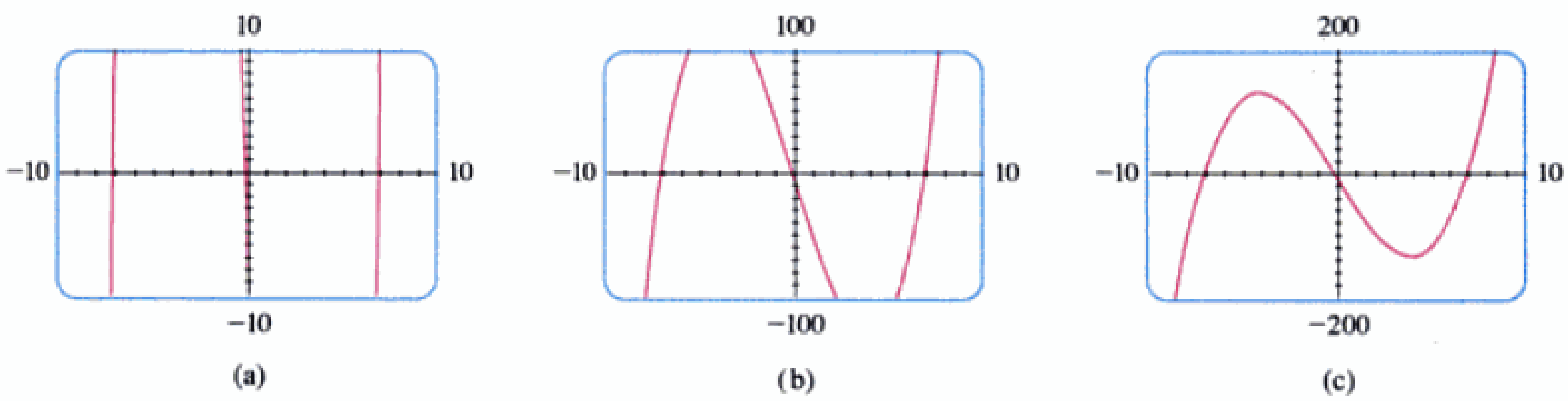


FIGURA 5
$f(x) = x^3 - 49x$

□

EJEMPLO 4 ▫ Trace la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en una pantalla apropiada.

SOLUCIÓN En la figura 6a) se ilustra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora usando una pantalla $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista, la gráfica parece ser razonable. Pero si cambiamos la pantalla a las que se presentan en las siguientes partes de la figura 6, la gráfica se ve muy diferente. Algo extraño está pasando.

▫ El aspecto de las gráficas de la figura 6 depende de la máquina que use. Las gráficas que obtenga en su dispositivo graficador podrían no verse como estas figuras, pero también serán muy inexactas.

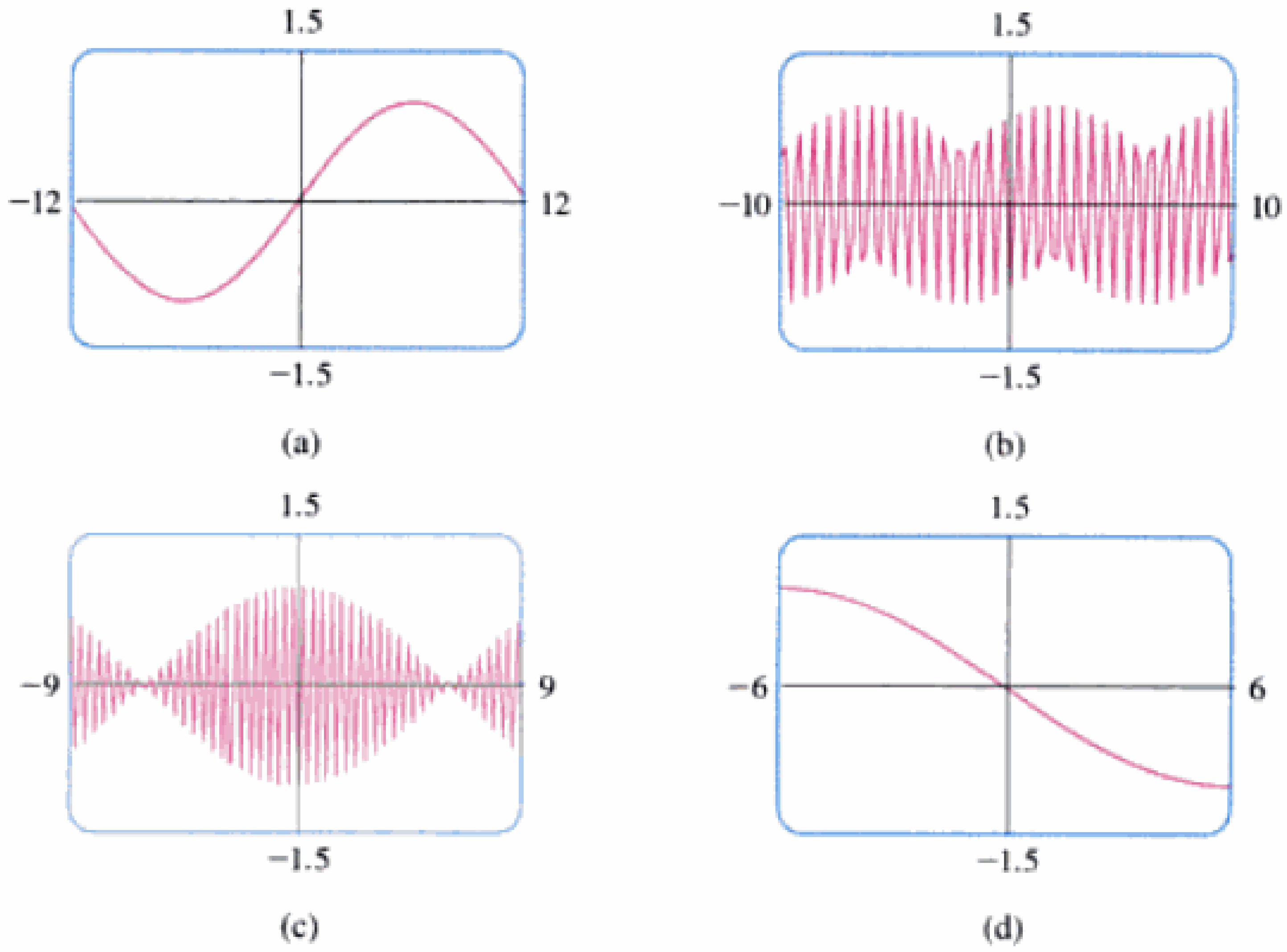


FIGURA 6
Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en cuatro pantallas.

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y hallar una pantalla adecuada, necesitamos encontrar el periodo de la función $y = \text{sen } 50x$. Sabemos que la función $y = \text{sen } x$ tiene el periodo 2π, de modo que el periodo de $y = \text{sen } 50x$ es

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que sólo debemos tratar con valores pequeños de x con el fin de mostrar sólo unas cuantas oscilaciones de la gráfica. Si elegimos la pantalla $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 7.

Ahora vemos en donde estuvo el error en la figura 6. Las oscilaciones de $y = \text{sen } 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora sitúa los puntos y los une, falla en la mayor parte de los puntos máximos y mínimos y, por consiguiente, da una impresión muy engañosa de la gráfica. ▫

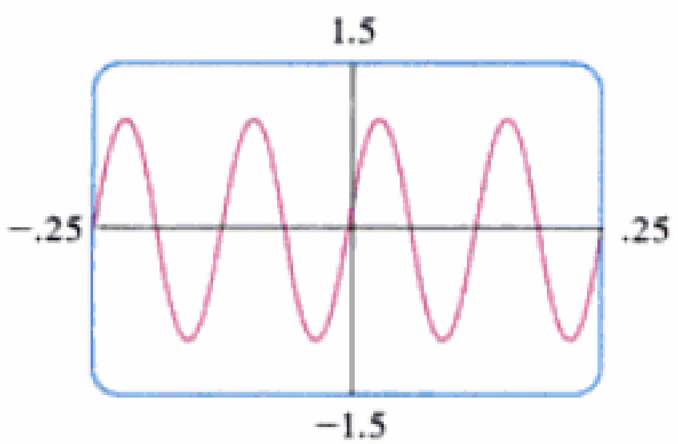


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen } 50x$

Hemos visto que el uso de una pantalla de visualización inadecuado puede proporcionar una impresión engañosa de la gráfica de una función. En los ejemplos 1 y 3, resolvimos el problema al cambiar a una pantalla más grande. En el ejemplo 4, tuvimos que reducirla. En el ejemplo siguiente, veremos una función para la que no existe una pantalla sencilla que revele la verdadera forma de la gráfica.

EJEMPLO 5 ▫ Trace la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x + \frac{1}{100}\cos 100x$.

SOLUCIÓN En la figura 8 aparece la gráfica de f producida por una calculadora graficadora con la pantalla $[-6.5, 6.5]$ por $[-1.5, 1.5]$. Se ve muy semejante a la gráfica de $y = \text{sen } x$, pero con algunas protuberancias. Si amplificamos la gráfica con $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$, podemos ver con mayor claridad la forma de las protuberancias de la figura 9.

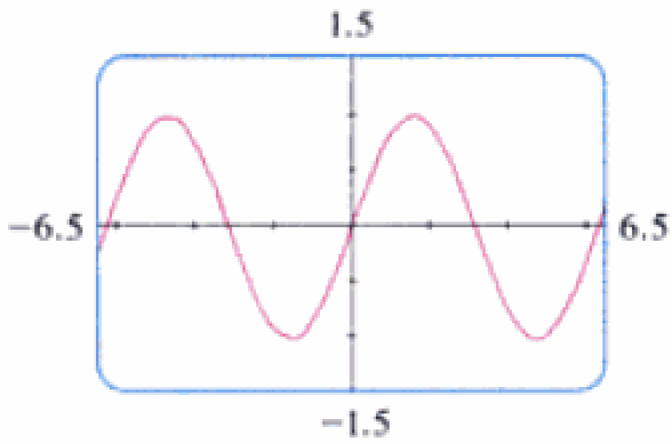


FIGURA 8

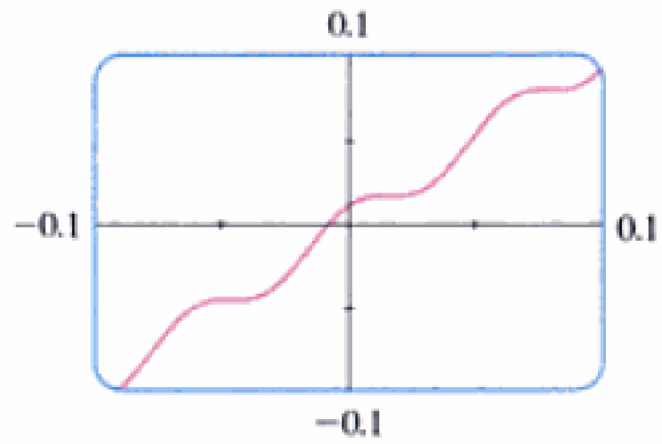


FIGURA 9

La razón de este comportamiento es que el segundo término, $\frac{1}{100}\cos 100x$, es muy pequeño en comparación con el primero, sen x. Por tanto, en realidad necesitamos dos gráficas para ver la verdadera naturaleza de esta función. □

EJEMPLO 6 □ Dibuje la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

SOLUCIÓN En la figura 10a) se ilustra la gráfica producida por una calculadora graficadora con la pantalla $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. Al unir los puntos sucesivos de la gráfica, la calculadora produjo un segmento rectilíneo empinado de la parte superior a la inferior de la pantalla. Ese segmento rectilíneo en verdad no es parte de la gráfica. Note que el dominio de la función $y = 1/(1 - x)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$. Podemos eliminar la extraña recta casi vertical experimentando con un cambio de escala. Cuando cambiamos hacia el rectángulo de visualización más pequeño $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obtenemos la gráfica mucho mejor de la figura 10b).

□ Otra manera de evitar la recta extraña es cambiar el modo de trazar las gráficas en la calculadora, de modo que los puntos no se unan.

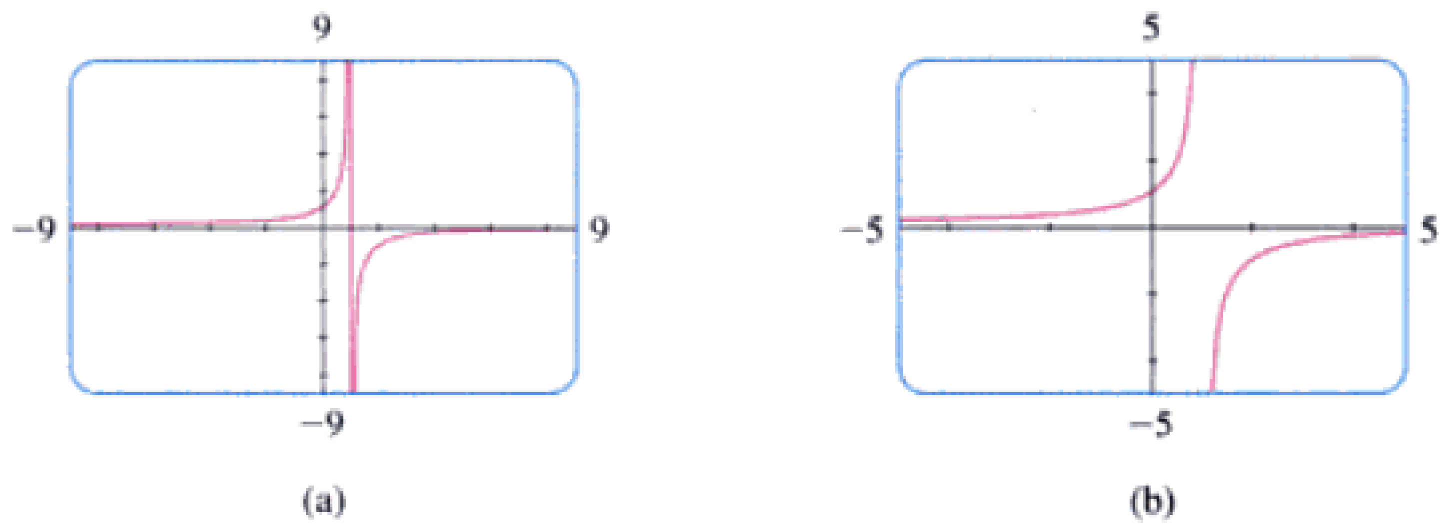


FIGURA 10
$y = \dfrac{1}{1 - x}$

□

EJEMPLO 7 □ Trace la gráfica de la función $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUCIÓN Algunos dispositivos graficadores presentan la gráfica como en la figura 11, en tanto que otros producen una gráfica como la de la figura 12. Por lo visto en la sección 1.2 (Fig. 13), sabemos que la gráfica de la figura 12 es la correcta; por tanto, ¿qué sucedió en la figura 11? La explicación es que, en algunas máquinas, $x^{1/3}$ se calcula como $e^{(1/3)\ln x}$ y ln x no está definido para $x < 0$, de modo que sólo se produce la mitad derecha de la gráfica.

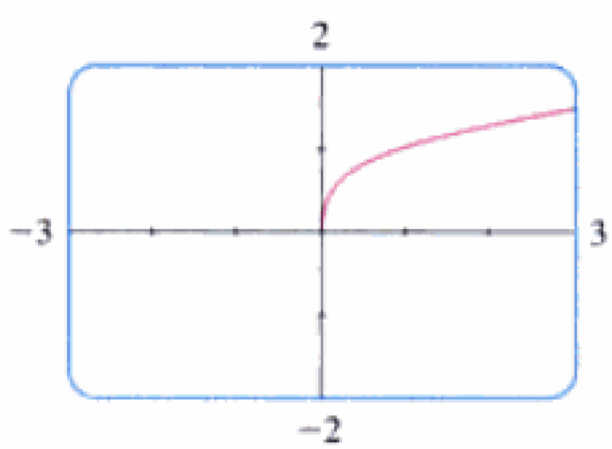


FIGURA 11

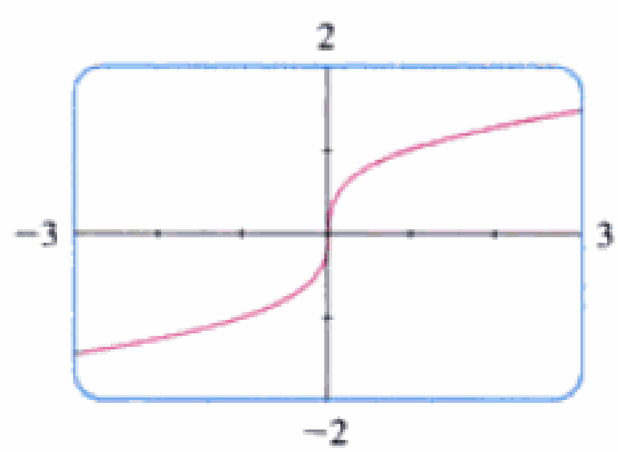


FIGURA 12

Usted debe experimentar con su máquina para ver cuál de estas dos gráficas se produce. Si obtiene la de la figura 11, puede obtener la imagen correcta al trazar la gráfica de la función

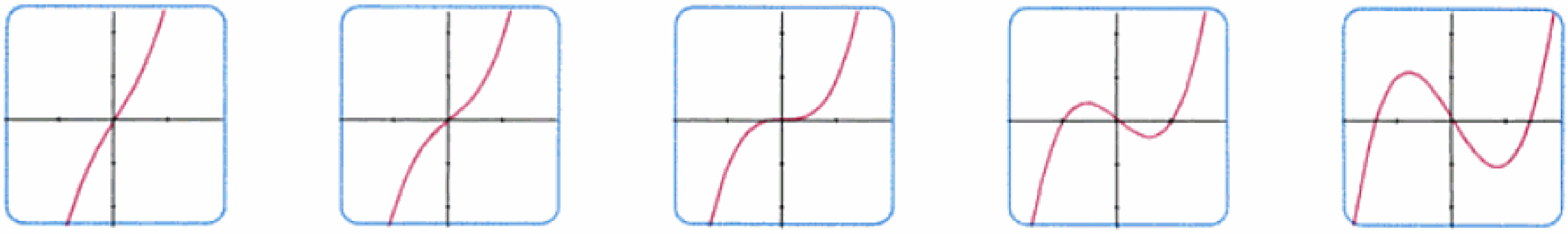
$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

Note que esta función es igual a $\sqrt[3]{x}$ (excepto cuando $x = 0$). ▫

Para comprender cómo se relaciona la expresión de una función con su gráfica, ayuda trazar la gráfica de una **familia de funciones**; es decir, una colección de funciones cuyas ecuaciones están relacionadas. En el ejemplo siguiente, trazaremos las gráficas de los miembros de una familia de polinomios.

EJEMPLO 8 ▫ Grafique $y = x^3 + cx$ para varios valores del número c. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar c?

SOLUCIÓN En la figura 13 se muestran las gráficas de $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ y -2. Vemos que para valores positivos de c, la gráfica crece de izquierda a derecha sin puntos máximos ni mínimos (picos o valles). Cuando $c = 0$, la curva es plana en el origen. Cuando c es negativo, la gráfica tiene un punto máximo y uno mínimo. Conforme c disminuye, el punto máximo se vuelve más alto y el mínimo, más bajo.



(a) $y = x^3 + 2x$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^3 - x$ (e) $y = x^3 - 2x$

FIGURA 13
Varios miembros de la familia de funciones $y = x^3 + cx$, todos con sus gráficos trazadas en la pantalla $[-2, 2]$ por $[-2.5, 2.5]$

▫

EJEMPLO 9 ▫ Encuentre la solución de la ecuación $\cos x = x$ correcta hasta dos decimales.

SOLUCIÓN Las soluciones de la ecuación $\cos x = x$ son las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = \cos x$ y $y = x$. En la figura 14a), vemos que sólo existe una solución y que se encuentra entre 0 y 1. Si se amplifica la gráfica con [0, 1] por [0, 1], en la figura 14b) vemos que la raíz está entre 0.7 y 0.8. De modo que amplificamos más hasta la pantalla [0.7, 0.8] por [0.7, 0.8] de la figura 14c). Si movemos el cursor hasta el punto de intersección de las dos curvas, o por inspección, y con base en que la escala x es 0.01, vemos que la raíz de la ecuación es alrededor de 0.74.

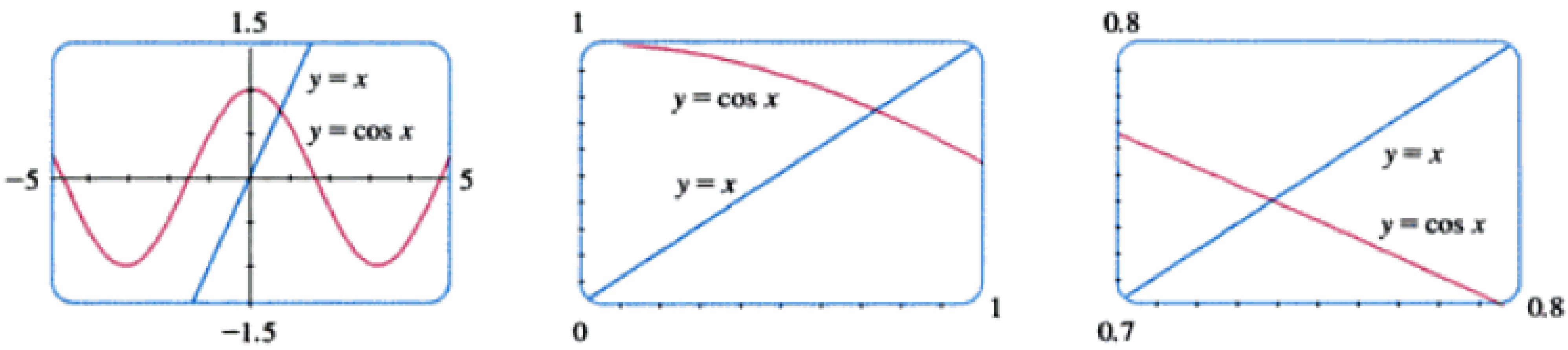


FIGURA 14
Localización de las raíces de $\cos x = x$

(a) $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$ escala $x = 1$
(b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$ escala $x = 0.1$
(c) $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ escala $x = 0.01$

▫

1.4 Ejercicios

1. Use una calculadora graficadora o una computadora para determinar cuál de las pantallas dadas produce la gráfica más apropiada de la función $f(x) = x^4 + 2$.
a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
b) $[0, 4]$ por $[0, 4]$
c) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
d) $[-8, 8]$ por $[-4, 40]$
e) $[-40, 40]$ por $[-80, 800]$

2. Use una calculadora graficadora o una computadora para determinar cuál de las pantallas es la gráfica más apropiada para la función $f(x) = x^2 + 7x + 6$.
a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
b) $[0, 10]$ por $[-20, 100]$
c) $[-15, 8]$ por $[-20, 100]$
d) $[-10, 3]$ por $[-100, 20]$

3. Use una calculadora graficadora o una computadora para determinar cuál de las pantallas dadas produce la gráfica más apropiada de la función $f(x) = 10 + 25x - x^3$.
(a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$
(d) $[-100, 100]$ por $[-200, 200]$

4. Use una calculadora graficadora o una computadora para determinar cuál de las pantallas dadas produce la gráfica más apropiada de la función $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$.
(a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(b) $[-5, 5]$ por $[0, 100]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$
(d) $[-2, 10]$ por $[-2, 6]$

5–22 □ Determine una pantalla apropiada para la función que se da y trace la gráfica en esa pantalla.

5. $f(x) = 5 + 20x - x^2$

6. $f(x) = 0.2x^2 + 3.5x - 5$

7. $f(x) = \sqrt[4]{256 - x^2}$

8. $f(x) = \sqrt{12x - 17}$

9. $f(x) = 0.01x^3 - x^2 + 5$

10. $f(x) = x(x + 6)(x - 9)$

11. $y = \dfrac{1}{x^2 + 25}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2 + 25}$

13. $y = x^4 - 4x^3$

14. $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$

15. $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

16. $y = 2x - |x^2 - 5|$

17. $f(x) = \cos 100x$

18. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 120x$

19. $f(x) = \operatorname{sen}(x/40)$

20. $y = \tan 25x$

21. $y = 3^{\cos(x^2)}$

22. $y = x^2 + 0.02 \operatorname{sen} 50x$

23. Grafique la elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$, al trazar las gráficas de las funciones de las mitades superior e inferior.

24. Trace la gráfica de la hipérbola $y^2 - 9x^2 = 1$, graficando las funciones de las ramas superior e inferior.

25–27 □ Encuentre todas las soluciones de la ecuación, correcta, hasta dos cifras decimales.

25. $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$

26. $x^4 + 8x + 16 = 2x^3 + 8x^2$

27. $2\operatorname{sen} x = x$

28. En el ejemplo 9 se vio que la ecuación $\cos x = x$ tiene una solución.
(a) Use una gráfica para demostrar que la ecuación $\cos x = 0.3x$ tiene tres soluciones y encuentre sus valores correctos hasta dos decimales.
(b) Encuentre un valor aproximado de m tal que la ecuación $\cos x = mx$ tenga exactamente dos soluciones.

29. Use gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = 10x^2$ y $g(x) = x^3/10$ es mayor (es decir, mayor cuando x es muy grande).

30. Use gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = x^4 - 100x^3$ y $g(x) = x^3$ termina por ser mayor.

31. a) Compare las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^5$ por el trazo de sus gráficas en las pantallas que siguen:
(i) $[0, 5]$ por $[0, 20]$ (ii) $[0, 25]$ por $[0, 10^7]$
(iii) $[0, 50]$ por $[0, 10^8]$
¿Cuál función crece más rápido si x es grande?
b) Halle las soluciones correctas de la ecuación $2^x = x^5$ hasta el primer decimal.

32. a) Compare las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^4$ mediante el trazo de sus gráficas en las pantallas que se dan a continuación
(i) $[-4, 4]$ por $[0, 20]$ (ii) $[0, 10]$ por $[0, 5000]$
(iii) $[0, 20]$ por $[0, 10^5]$
¿Cuál de las dos funciones crece más rápido para valores grandes de x?
b) Halle las soluciones de $3^x = x^4$ hasta dos decimales correctos.

33. ¿Para cuáles valores de x se cumple que $|\operatorname{sen} x - x| < 0.1$?

34. Trace las gráficas de los polinomios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ y $Q(x) = 3x^5$ en la misma pantalla, usando en primer lugar el rectángulo $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y luego cambie al $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$. ¿Qué observa a partir de estas gráficas?

35. En este ejercicio, consideremos la familia de funciones $f(x) = \sqrt[n]{x}$, en donde n es un entero positivo.
(a) Trace las gráficas de las funciones raíces $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, y $y = \sqrt[6]{x}$ en la pantalla $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.
(b) Trace las gráficas de las funciones raíces $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$, y $y = \sqrt[5]{x}$ en la pantalla, $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Véase el Ejem. 7.)
(c) Trace las gráficas de las funciones raíces $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, y $y = \sqrt[5]{x}$ en la pantalla $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.
(d) ¿A qué conclusiones puede llegar a partir de estas gráficas?

36. En este ejercicio, consideremos la familia de funciones $f(x) = 1/x^n$, en donde n es un entero positivo.
(a) Trace las gráficas de las funciones $y = 1/x$ y $y = 1/x^3$ en la pantalla $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$..
(b) Trace las gráficas de las funciones $y = 1/x^2$ y $y = 1/x^4$ en la pantalla del inciso a).
(c) Trace la gráfica de todas las funciones de los incisos a) y b) en la pantalla $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.
(d) ¿A qué conclusiones puede llegar a partir de estas gráficas?

37. Grafique la función $f(x) = x^4 + cx + x$, para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar c?

38. Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ para varios valores de c. Describa cómo afecta el cambio del valor de c en la gráfica.

39. Trace la gráfica de la función $y = x^n 2^{-x}$, $x \geq 0$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, y 6. ¿Cómo cambia la gráfica al crecer n?

40. Las curvas con ecuaciones

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

se llaman **curvas de nariz de bala**. Grafique algunas para ver el porqué de este nombre. ¿Qué sucede al crecer c?

41. ¿Qué sucede a la gráfica de la ecuación $y = cx^3 + x^2$ a medida que c varía?

42. En este ejercicio se examina el efecto de la función interior g sobre una función compuesta $y = f(g(x))$.
(a) Trace la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ en la pantalla $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Qué diferencia existe entre esta gráfica y la de la función seno?
(b) Trace la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ en la pantalla $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Qué diferencia existe entre esta gráfica y la de la función seno?

1.5 Funciones exponenciales

La función $f(x) = 2^x$ se llama *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No debe confundirse con la función potencia $g(x) = x^2$, en la cual la variable es la base.

En general, una **función exponencial** es de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva. Recordemos qué significa esto.

Si $x = n$, un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Si $x = 0$, entonces $a^0 = 1$ y, si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son enteros y $q > 0$, entonce

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

¿Pero cuál es el significado de a^x si x es un número irracional? Por ejemplo, ¿qué se quiere dar a entender por $2^{\sqrt{3}}$ o 5^{π}?

Para ayudarnos a responder, miremos primero la gráfica de la función $y = 2^x$, donde x es racional. En la figura 1 se muestra una representación de esta gráfica. Deseamos agrandar el dominio de $y = 2^x$ para incluir tanto los números racionales como los irracionales.

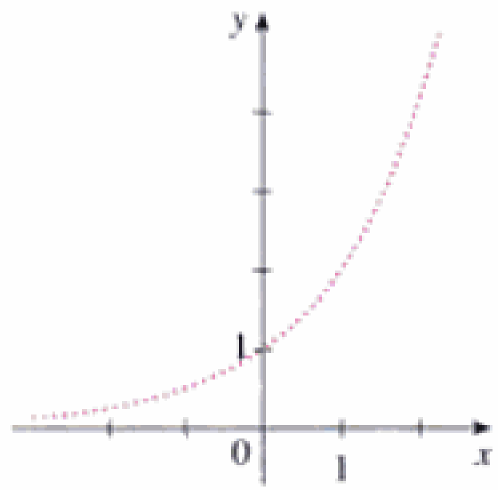


FIGURA 1
Representación de $y = 2^x$, x racional.

Existen agujeros en la gráfica de la figura 1 correspondientes a los valores irracionales de x. Deseamos llenar los agujeros al definir $f(x) = 2^x$, donde $x \in \mathbb{R}$, de modo que f sea una función creciente. En particular, ya que el número irracional satisface

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

debemos tener

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

y sabemos lo que $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$ significan porque 1.7 y 1.8 son números racionales. De manera análoga, utilizando mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, obtenemos mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{array}{rcl}
1.73 < \sqrt{3} < 1.74 & \Rightarrow & 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
1.732 < \sqrt{3} < 1.733 & \Rightarrow & 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\
1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 & \Rightarrow & 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\
1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 & \Rightarrow & 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots
\end{array}$$

Se puede demostrar que existe exactamente un número mayor que todos los números

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

y menor que todos los números

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

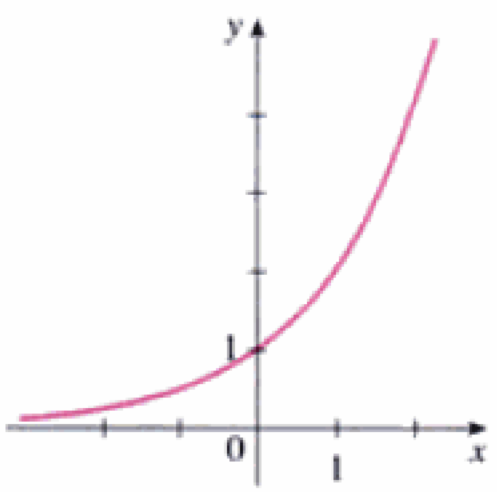


FIGURA 2
$y = 2^x$, x real.

Definimos como $2^{\sqrt{3}}$ a este número. Al aplicar este proceso de aproximación, podemos calcularlo con una exactitud de hasta seis decimales

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

Análogamente, podemos definir 2^x (o a^x, si $a > 0$), donde x es cualquier número irracional. En la figura 2 se muestra cómo se han llenado todos estos agujeros en la figura 1 para completar la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

En la figura 3 se presentan las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = a^x$ para varios valores de la base a. Note que todas estas gráficas pasan por el mismo punto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Note también que a medida que la base a se vuelve más grande, la función exponencial crece con mayor rapidez (para $x > 0$).

□ Si $0 < a < 1$, entonces a^x tiende a 0 conforme x se hace más grande. Si $a > 1$, entonces a^x tiende 0 conforme x decrece recorriendo los valores negativos. En ambos casos, el eje x es una asíntota horizontal. En la sección 2.6 se analizan estos aspectos.

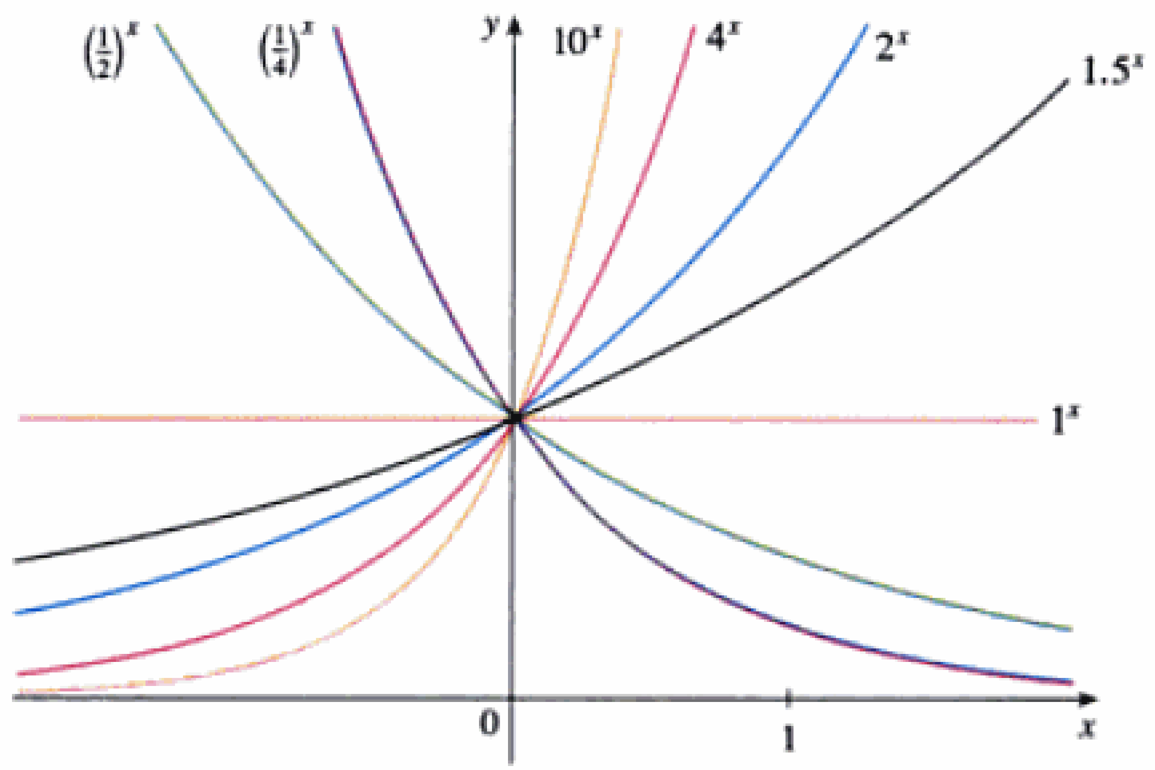


FIGURA 3

En la figura 3, se ve que básicamente existen tres clases de funciones exponenciales $y = a^x$; si $0 < a < 1$, la función exponencial disminuye; si $a = 1$, es una constante, y, si $a > 1$, aumenta. En la figura 4 se ilustran los tres casos. Observe que si $a \neq 1$, entonces la función exponencial $y = a^x$ tiene el dominio $\mathbb{R}$ y la imagen $(0, \infty)$. Note también que, puesto que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, la gráfica de $y = (1/a)^x$ es la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ respecto al eje y.

(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

FIGURA 4

Una razón de la importancia de la función exponencial se basa en las propiedades siguientes. Si x y y son números racionales, entonces estas leyes se conocen bien desde el álgebra elemental. Se puede probar que siguen siendo verdaderas para los números reales arbitrarios x y y.

Leyes de los exponentes Si a y b son números positivos y x y y son cualesquiera números reales, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 □ Grafique la función $y = 3 - 2^x$ y determine su dominio e imagen.

□ Para repasar la reflexión y desplazamiento de las gráficas, véase la sección 1.3.

SOLUCIÓN En primer lugar, reflejamos la gráfica de $y = 2^x$ (Fig. 2) respecto al eje x, para obtener la gráfica de $y = -2^x$ de la figura 5b). Luego, desplacemos la gráfica de $y = -2^x$ tres unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ de la figura 5c). El dominio es $\mathbb{R}$ y la imagen es $(-\infty, 3)$.

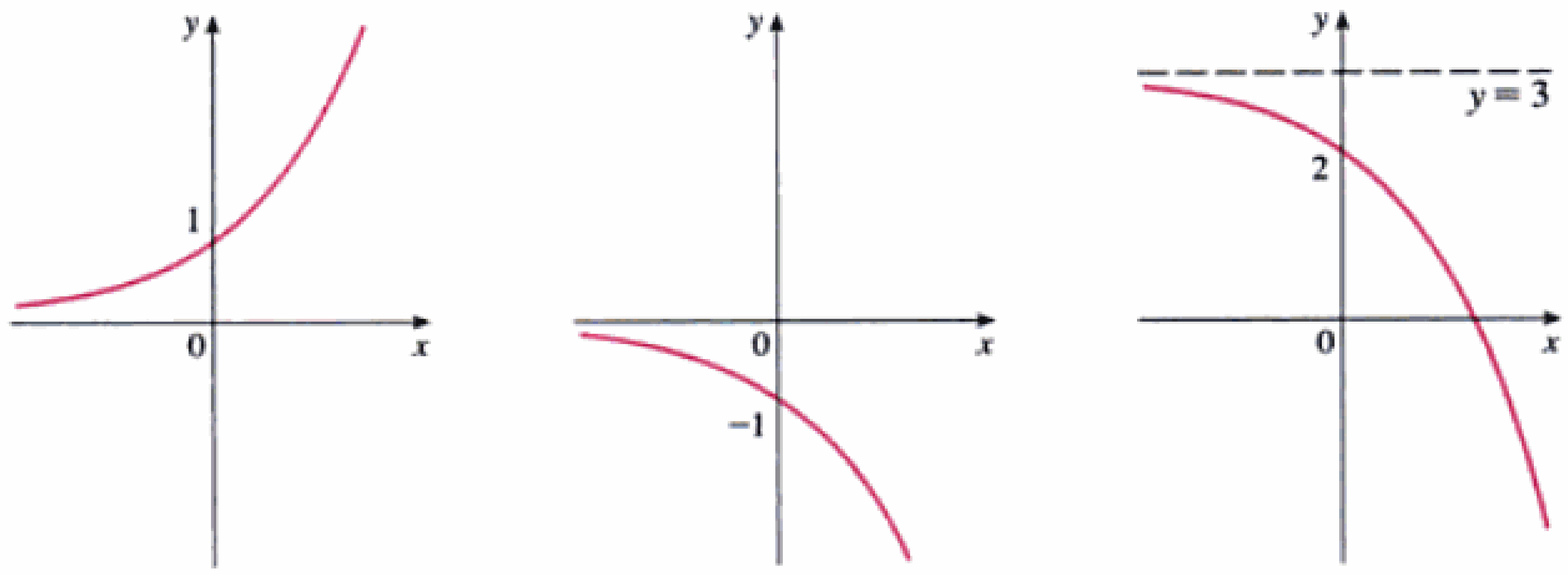


FIGURA 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$ □

EJEMPLO 2 □ Use un dispositivo graficador para comparar la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál de las funciones crece con más rapidez cuando x es grande?

SOLUCIÓN En la figura 6 se muestran las dos funciones con sus gráficas en la pantalla $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que las gráficas se intersecan tres veces pero, para $x > 4$, la gráfica de $f(x) = 2^x$ permanece arriba de la gráfica de $g(x) = x^2$. En la figura 7 se da una vista más global y se muestra que para valores grandes de x, la función exponencial $y = 2^x$ crece con bastante más rapidez que la función potencia $y = x^2$.

□ El ejemplo 2 hace ver que $y = 2^x$ aumenta con mayor rapidez que $y = x^2$. Para demostrar con qué rapidez se incrementa $f(x) = 2^x$ realicemos el siguiente experimento mental. Suponga que empezamos con un trozo de papel con un espesor de una milésima de pulgada y que lo doblamos a la mitad 50 veces. Cada vez que doblamos el papel a la mitad, su espesor se duplica, de modo que el espesor resultante del papel sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿Cuánto piensa que es esto? ¡Resulta ser más de 17 millones de millas!

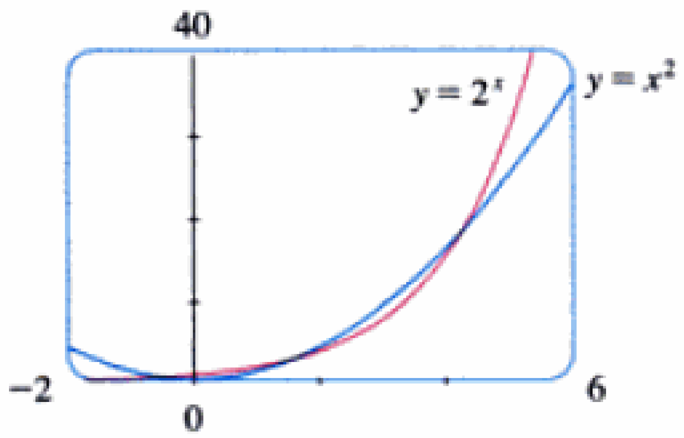


FIGURA 6

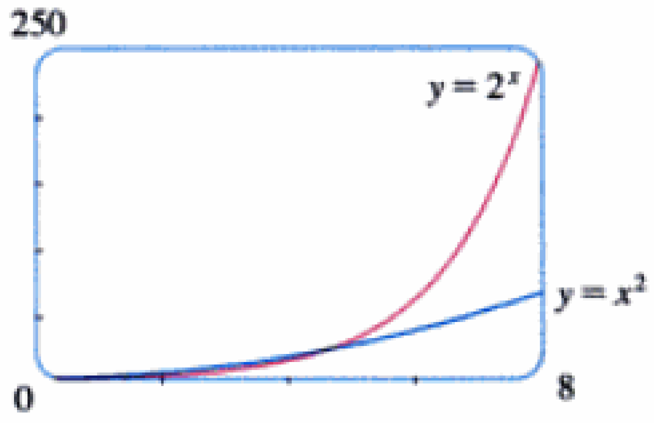


FIGURA 7 □

Aplicaciones de las funciones exponenciales

La función exponencial se presenta con frecuencia en modelos matemáticos de la naturaleza y de la sociedad. En este apartado, indicaremos brevemente cómo surge en la descripción del crecimiento de la población y la desintegración radiactiva. En capítulos posteriores, nos dedicaremos con más detalle a éstas y otras aplicaciones.

En primer lugar, consideremos una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, haciendo un muestreo de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si, en el instante t, la cantidad de bacterias es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1000$, entonces tenemos

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$
$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

Con base en este patrón, parece que, en general,

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

Esta función de población es un múltiplo constante de la función exponencial $y = 2^t$, de modo que exhibe el rápido crecimiento que observamos en las figuras 2 y 7. En condiciones ideales (espacio y nutrición ilimitados e inexistencia de enfermedades), este crecimiento exponencial es característico de lo que en realidad ocurre en la naturaleza.

¿Y qué podemos decir de la población humana? La tabla 1 muestra los datos de la población mundial durante el siglo XX y en la figura 8 vemos la gráfica de dispersión correspondiente.

TABLA 1

Año	Población (millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

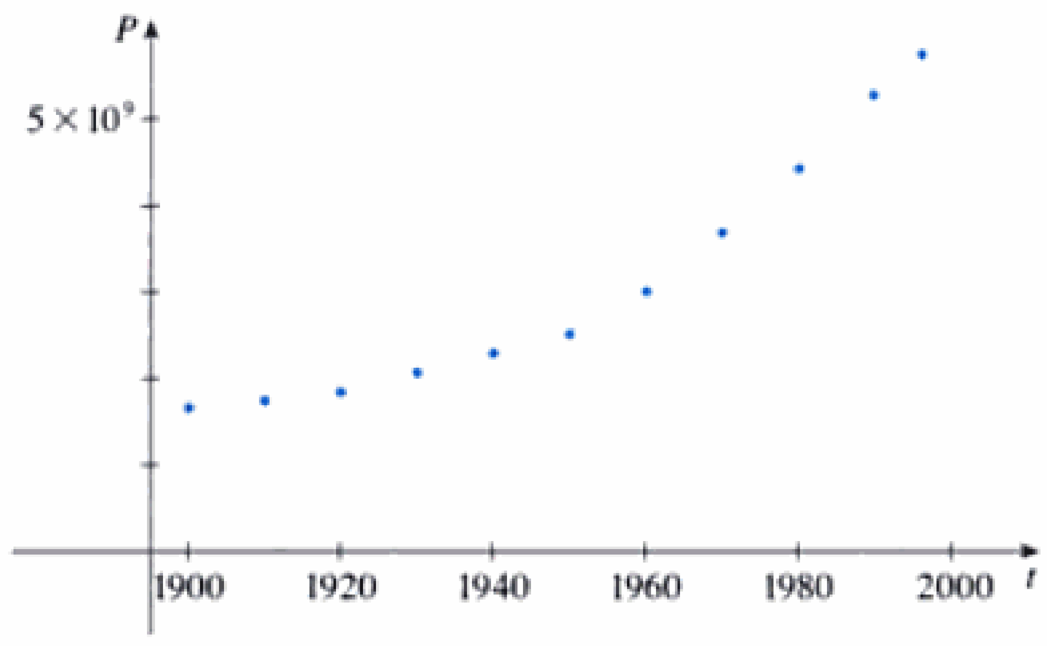


FIGURA 8 Gráfica de dispersión para el crecimiento de la población mundial.

La situación de los puntos dato en la gráfica de dispersión (Fig. 8) sugiere un crecimiento exponencial de manera que usaremos una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para aplicar el método de mínimos cuadrados y obtener el modelo exponencial.

$$P = (0.008306312) \cdot (1.013716)^t$$

La figura 9 muestra la gráfica de esta función exponencial junto con los datos originales; y vemos que la curva exponencial se ajusta bastante bien a los datos. El periodo de crecimiento poblacional relativamente lento se explica por las dos guerras mundiales y la depresión de la década de 1930.

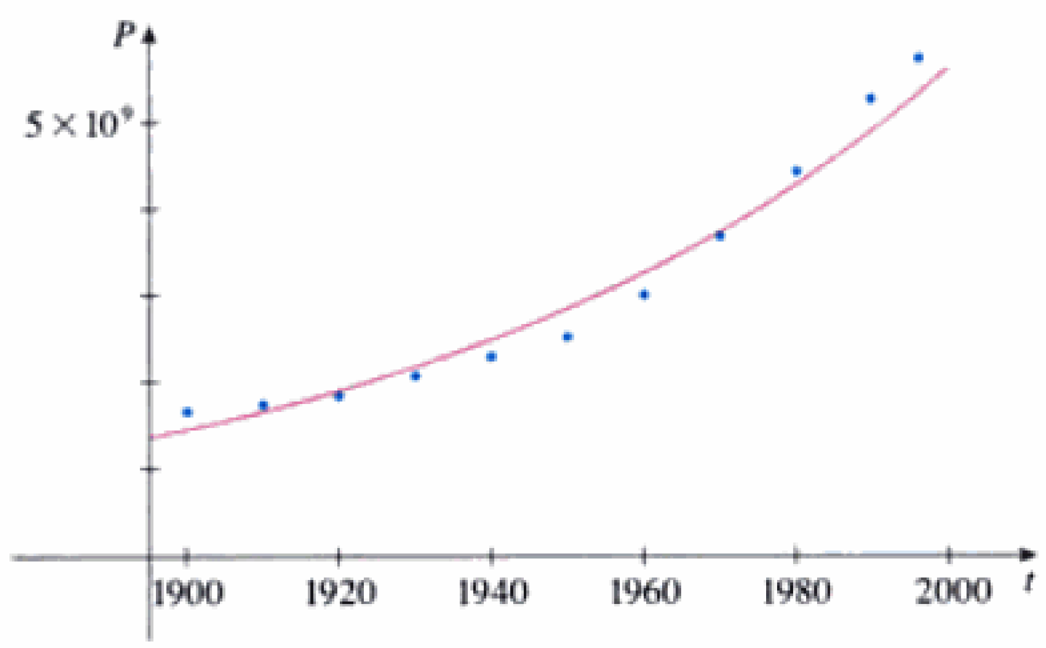


FIGURA 9 Modelo exponencial de crecimiento de población.

EJEMPLO 3 La *vida media* del estroncio 90, ^{90}Sr, es de 25 años. Esto significa que la mitad de cualquier cantidad dada de ^{90}Sr se desintegrará en 25 años.

(a) Si una muestra de ^{90}Sr tiene una masa de 24 mg, encuentre una expresión para la masa $m(t)$ que queda después de t años.

(b) Encuentre la masa restante después de 40 años, correcta hasta el miligramo más cercano.

(c) Use un graficador para trazar la gráfica de $m(t)$ y utilice esta última a fin de estimar el tiempo necesario para que la masa se reduzca hasta 5 mg.

SOLUCIÓN

(a) La masa inicial es de 24 mg y se reduce a la mitad cada 25 años, por tanto

$$m(0) = 24$$

$$m(25) = \frac{1}{2}(24)$$

$$m(50) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24)$$

$$m(75) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24)$$

$$m(100) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24)$$

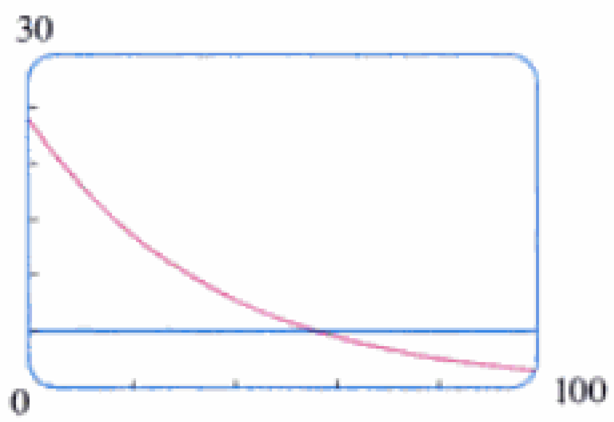


FIGURA 10
$m = 24 \cdot 2^{-t/25}$

Con base en este patrón, resulta que la masa restante después de t años es

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24 \cdot 2^{-t/25}$$

Esto es una función exponencial con base $a = 2^{-1/25} = 1/2^{1/25}$.

(b) La masa que queda después de 40 años es

$$m(40) = 24 \cdot 2^{-40/25} \approx 7.9 \text{ mg}$$

(c) Usamos una calculadora graficadora o una computadora para trazar la gráfica de la función $m(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$ de la figura 10. También trazamos la gráfica de la recta $m = 5$ y utilizamos el cursor para estimar que $m(t) = 5$ cuando $t \approx 57$. Por tanto, la masa de la muestra se reducirá hasta 5 mg después de alrededor de 57 años. ◻

Número e

De todas las bases posibles para una función exponencial existe una que es la más conveniente para los fines del cálculo. La manera en que la gráfica de $y = a^x$ cruza el eje y influye en la selección de una base a. En las figuras 11 y 12 se muestran las rectas tangentes a las

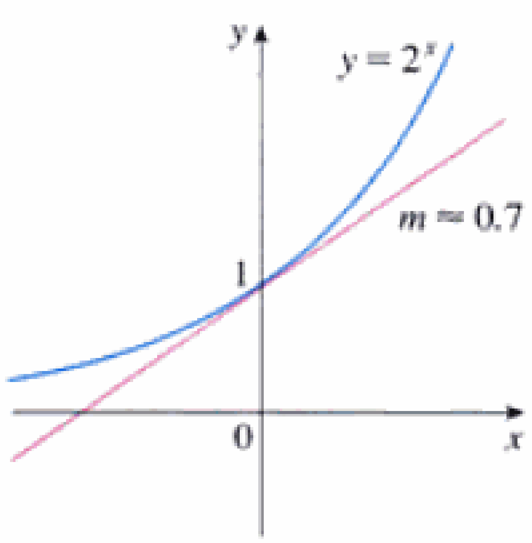


FIGURA 11

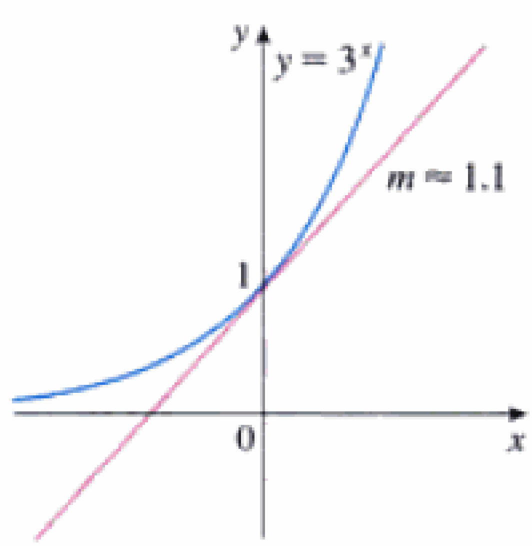


FIGURA 12

gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto (0, 1). (Las rectas tangentes se definirán con precisión en la sección 2.7. Para los fines presentes, la recta tangente a una gráfica exponencial en un punto se puede concebir como la recta que toca la gráfica sólo en ese punto.) Si medimos las pendientes de estas rectas tangentes, encontramos que $m \approx 0.7$, para $y = 2^x$, y $m \approx 1.1$, para $y = 3^x$.

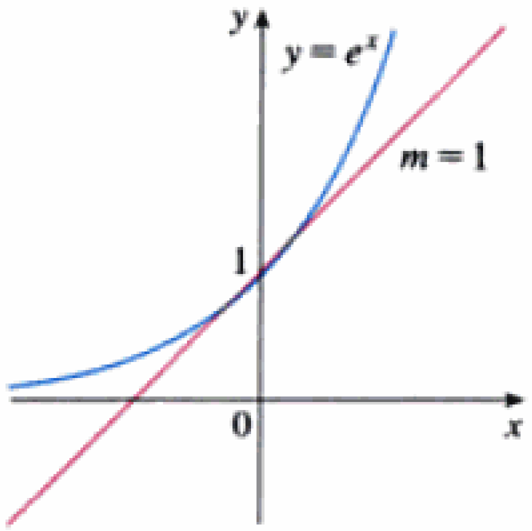


FIGURA 13
La función exponencial natural cruza el eje y con una pendiente de 1.

Resulta que, como veremos en el capítulo 3, algunas de las fórmulas del cálculo se simplifican mucho si se elige la base a de modo que la pendiente de la recta tangente a $y = a^x$, en (0, 1), sea *exactamente* 1 (Fig. 13). De hecho, ese número existe y se denota con la letra e. (Esta notación fue elegida por el matemático suizo Leonhard Euler, en 1727, quizá porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.) Al observar las figuras 11 y 12, no sorprende que el número e se encuentre entre 2 y 3 y que la gráfica de $y = e^x$ quede entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ (Fig. 14). En el capítulo 3 veremos que el valor de e, correcto hasta cinco decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

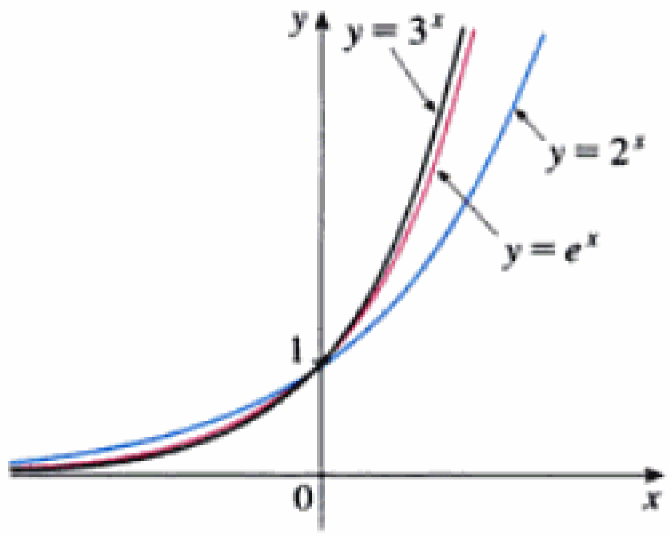
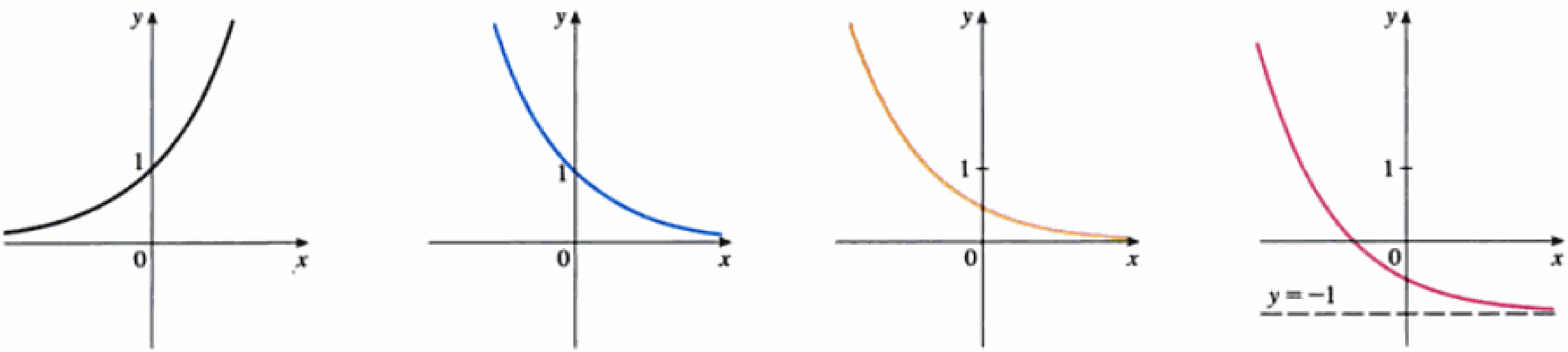


FIGURA 14

EJEMPLO 4 □ Grafique la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y dé el dominio y la imagen.

SOLUCIÓN Partimos de la gráfica de $y = e^x$, de las figuras 13 y 15a), y la reflejamos respecto al eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ de la figura 15b). (Note que la gráfica cruza el eje y con una pendiente de −1.) Luego, comprimimos verticalmente la gráfica un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ de la figura 15(c). Por último, la desplazamos hacia abajo una unidad para lograr la gráfica deseada de la figura 15d). El dominio es $\mathbb{R}$ y la imagen es $(-1, \infty)$.



(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 15 □

¿Cuánto considera que habría que desplazarse a la derecha para que la altura de la gráfica de $y = e^x$ sea mayor que un millón? El ejemplo que sigue demuestra el rápido crecimiento de esta función con una respuesta que podría sorprenderlo.

EJEMPLO 5 □ Utilice un dispositivo graficador para hallar los valores de x para los que $e^x > 1{,}000{,}000$.

SOLUCIÓN En la figura 16 graficamos la función $y = e^x$ y la recta horizontal $y = 1{,}000{,}000$. Vemos que estas curvas se intersecan cuando $x \approx 13.8$. Por tanto, $e^x > 10^6$ cuando $x > 13.8$. Quizá sorprenda que los valores de la función exponencial ya han sobrepasado un millón cuando x sólo es 14.

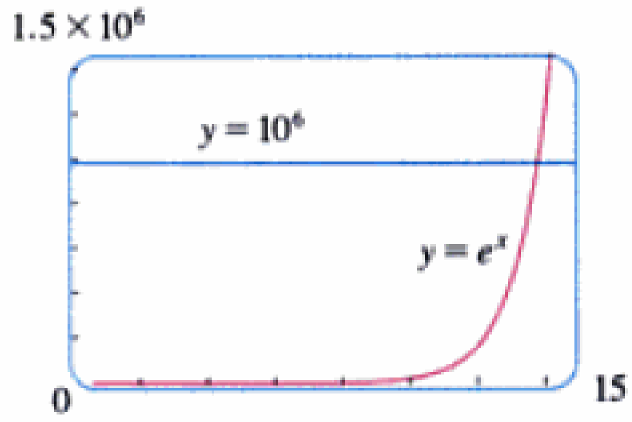


FIGURA 16

□

1.5 Ejercicios

1. (a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $a > 0$.
   (b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
   (c) Si $a \neq 1$, ¿cuál es la imagen de esta función?
   (d) Esquematice la forma general de la gráfica de la funcion exponencial para cada uno de los casos siguientes:
   (i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

2. (a) ¿Cómo se define el número e?
   (b) ¿Cuál es un valor aproximado de e?
   (c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

3–6 □ Grafique las funciones dadas en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

3. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

4. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

5. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

6. $y = 0.9^x$, $y = 0.6^x$, $y = 0.3^x$, $y = 0.1^x$

7–14 □ Haga un bosquejo de la gráfica de cada función. No use una calculadora. Sólo utilice las gráficas dadas en las figuras 3 y 14 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

7. $y = 2^x + 1$

8. $y = 2^{x+1}$

9. $y = 3^{-x}$

10. $y = -3^x$

11. $y = -3^{-x}$

12. $y = 2^{|x|}$

13. $y = 3 - e^x$

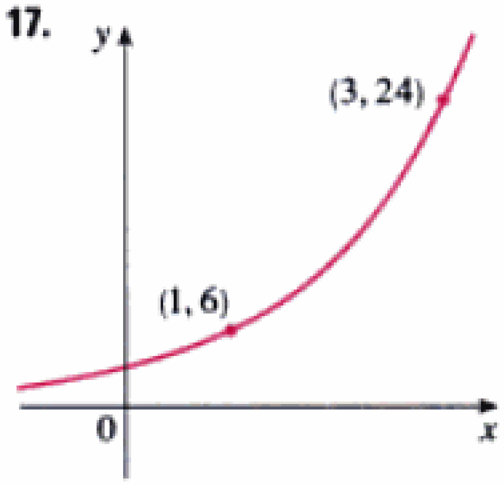
14. $y = 2 + 5(1 - e^{-x})$

15. Con base en la gráfica de $y = e^x$, escriba la ecuación de la gráfica que se obtiene de
   (a) desplazar 2 unidades hacia abajo.
   (b) desplazar 2 unidades a la derecha.
   (c) reflejar respecto al eje x.
   (d) reflejar respecto al eje y.
   (e) reflejar respecto al eje x y, a continuación, respecto al eje y.

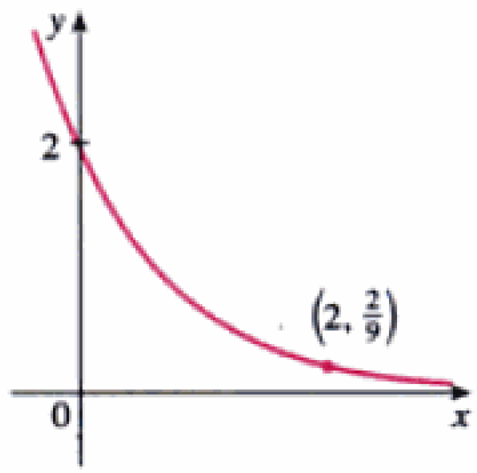
16. A partir de la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica que se obtiene de
   (a) reflejar respecto a la recta $y = 4$.
   (b) reflejar respecto a la recta $x = 2$.

17–18 □ Encuentre la función exponencial $f(x) = Ca^x$ en las siguientes gráficas.

17.



18.



19. Demuestre que si se trazan las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ en una rejilla de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada entonces, a 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica de f es de 48 pies, pero la altura de la gráfica de g es alrededor de 265 mi.

20. Compare las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5^x$ al trazar las gráficas de las funciones en varias pantallas. Encuentre todos los putnso de intersección correctos de las gráficas, hasta una cifra decimal. ¿Cuál de las dos funciones crece con mayor rapidez cuando x es grande?

21. Compare las funciones $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = e^x$ al trazar las gráficas de f y g en varias pantallas. ¿Cuándo finalmente sobrepasa la gráfica de g la gráfica de f?

22. Use una gráfica para estimar los valores de x tales que $e^x > 1{,}000{,}000{,}000$.

23. En condiciones ideales, se sabe que cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Suponga que primero hay 100 bacterias.

(a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
(b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
(c) Estime el tamaño de la población después de 20 horas.
(d) Grafique la función de población y estime el tiempo para que la población llegue hasta 50 000.

24. Un isótopo del sodio, ^{24}Na, tiene una vida media de 15 horas. Una muestra de este isótopo tiene una masa de 2 g.

(a) Encuentre la cantidad que queda después de 60 horas.
(b) Halle cuánto queda después de t horas.
(c) Estime la cantidad que queda después de 4 días.
(d) Use una gráfica para estimar el tiempo requerido para que la masa se reduzca a 0.01 g.

25. Use una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para modelar la población mundial con los datos de 1950–1996 de la tabla 1 de la página 60. Use el modelo para estimar la población en 1993 y para predecir la población en el año 2010.

26. La tabla proporciona la población de los EUA, en millones para los años 1900–1990.

Año	Población	Año	Población
1900	76	1950	150
1910	92	1960	179
1920	106	1970	203
1930	123	1980	227
1940	131	1990	250

Use una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para modelar la población de los EUA desde 1900. Con este modelo estime la población en 1925 y haga un pronóstico de la población en 2010 y 2020.

1.6 Funciones inversas y logarítmicas

En la tabla 1 se dan datos de un experimento en el que un cultivo de bacterias se inició con 100 de éstas en un medio nutritivo limitado; el tamaño de la población de bacterias se registró cada hora. El número de bacterias, N, es función del tiempo t: $N = f(t)$.

Sin embargo, suponga que la bióloga cambia su punto de vista y se interesa en el tiempo necesario para que la población alcance diversos niveles. En otras palabras, está pensando en t como función de N. Esta función se llama *función inversa* de f, denotada con f^{-1} y se lee "inversa de f". Por tanto, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo necesario para que el nivel de la población llegue a N. Se pueden hallar valores de f^{-1} si se lee la tabla 1 hacia atrás o si se consulta la tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$, porque $f(6) = 550$.

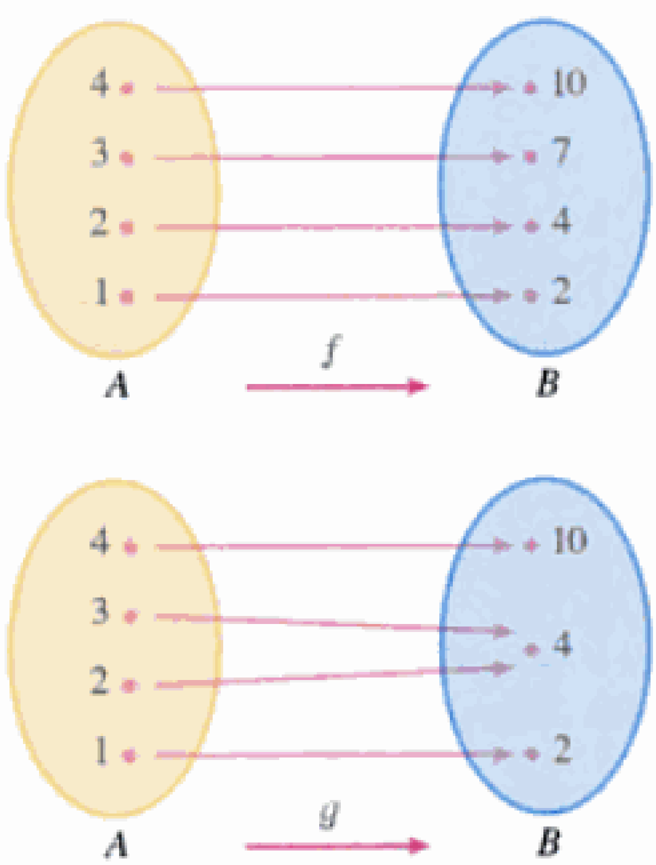


FIGURA 1

TABLA 1 N como función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población en el tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLA 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo para llegar hasta N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

No todas las funciones poseen inversas. Comparemos las funciones f y g cuyos diagramas sagitales se muestran en la figura 1.

Note que f nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquiera dos entradas en A tienen salidas diferentes), en tanto que g toma el mismo valor dos veces (tanto 2 como 3 tienen la misma salida, 4).

En símbolos

$$g(2) = g(3)$$

pero $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Las funciones que tienen esta propiedad se conocen como *funciones biunívocas o uno a uno*.

□ En términos de "entradas" y "salidas" esta definición nos dice que f es uno a uno si cada salida corresponde a solamente una entrada.

1 Definición Se dice que una función f es una **función uno a uno** si nunca toma el mismo valor dos veces; es decir,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

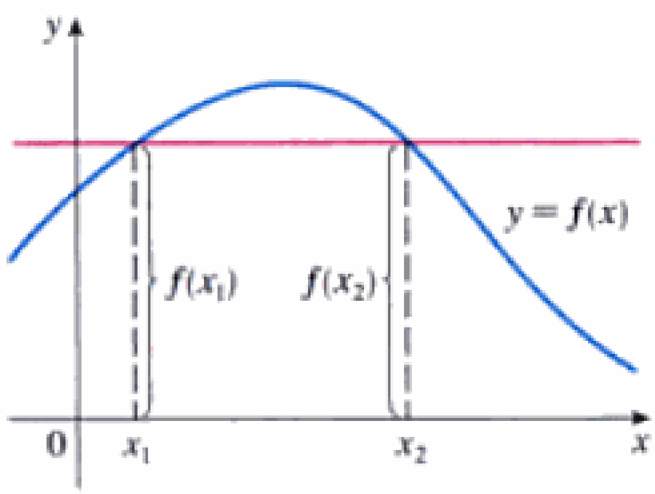


FIGURA 2
Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Si una recta horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, entonces, en la figura 2, vemos que se tienen dos números, x_1 y x_2, tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por lo tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

Prueba de la recta horizontal Una función es uno a uno si y sólo si ninguna recta horizontal interseca su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 □ ¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 En la figura 3 vemos que ninguna recta horizontal interseca la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, por la prueba de la recta horizontal, f es uno a uno. □

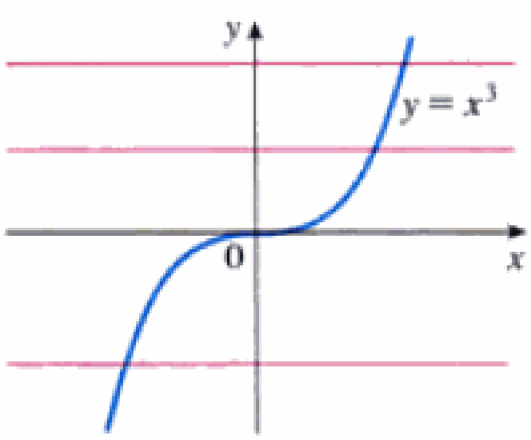


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es uno a uno.

EJEMPLO 2 □ ¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

y, por tanto, 1 y −1 tienen la misma imagen.

SOLUCIÓN 2 En la figura 4, vemos que hay rectas horizontales que intersecan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es uno a uno. □

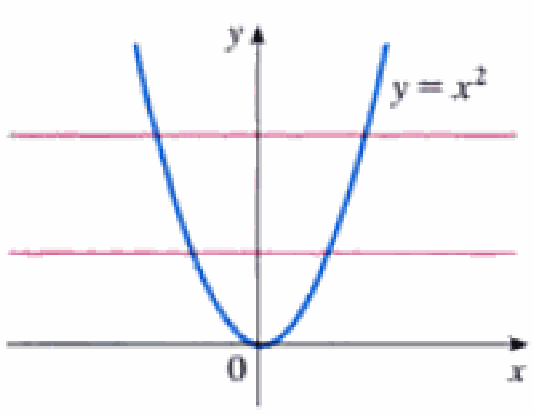


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ no es uno a uno.

Las funciones uno a uno son importantes porque poseen funciones inversas, según la definición siguiente.

2 Definición Sea f una función uno a uno, con dominio A e imagen B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B e imagen A y la define

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

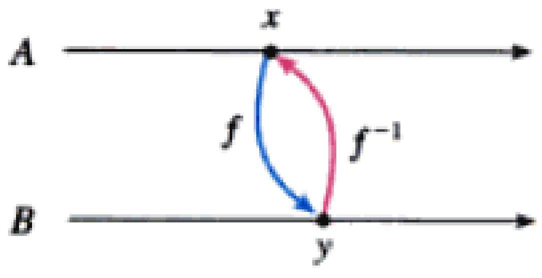


FIGURA 5

Esta definición expresa que si f mapea x en y, entonces f^{-1} mapea y de regreso a x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.) El diagrama sagital de la figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Note que

dominio de f^{-1} = imagen de f

imagen de f^{-1} = dominio de f

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$, porque si $y = x^3$, entonces

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

PRECAUCIÓN ▫ No confunda el -1 de f^{-1} con un exponente. Por tanto,

$$f^{-1}(x) \quad \text{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

Sin embargo, el recíproco $1/f(x)$ puede escribirse $[f(x)]^{-1}$.

EJEMPLO 3 □ Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$, y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$, y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN A partir de la definición de f^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(7) &= 3 \quad &\text{porque}\quad f(3) &= 7 \\ f^{-1}(5) &= 1 \quad &\text{porque}\quad f(1) &= 5 \\ f^{-1}(-10) &= 8 \quad &\text{porque}\quad f(8) &= -10 \end{aligned}$$

En el diagrama de la figura 6 se aclara cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

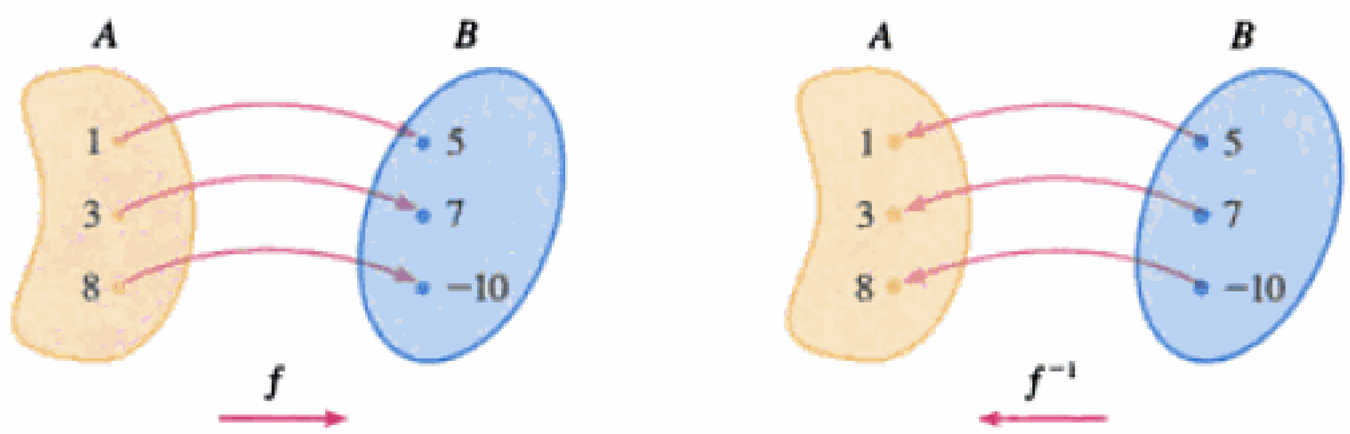


FIGURA 6
La función inversa invierte las entradas y las salidas.

□

Tradicionalmente, la letra x se usa la como variable independiente, de modo que cuando nos concentramos en f^{-1}, en lugar de en f, solemos invertir los papeles de x y y en la definición 2 y escribimos

3 $$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

Si en la definición 2 se sustituye y, así como x en (3), se obtienen las siguientes **ecuaciones de cancelación**:

4

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \text{ en } B$$

La primera ecuación de cancelación dice que si partimos de x, aplicamos f y luego f^{-1}, volvemos a x (véase el diagrama de máquinas de la Fig. 7). De este modo, f^{-1} deshace lo que f hace. La segunda ecuación dice que f deshace lo que f^{-1} hace.

FIGURA 7

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y las ecuaciones de cancelación quedan

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones expresan que la función cúbica y la función raíz cúbica se cancelan mutuamente cuando se aplican en sucesión.

Veamos ahora cómo calcular funciones inversas. Si tenemos una función $y = f(x)$ y somos capaces de resolver esta ecuación para x en términos de y entonces, según la definición 2, debemos tener $x = f^{-1}(y)$. Si deseamos llamar x a la variable independiente, entonces intercambiamos x y y y llegamos a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 Cómo hallar la función inversa de una función f uno a uno

Paso 1 Escribimos $y = f(x)$.

Paso 2 Resolvemos esta ecuación para x en términos de y (si es posible).

Paso 3 Para expresar f^{-1} como función de x, intercambiamos x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 4 □ Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN Según (5) primero escribimos

$$y = x^3 + 2$$

Luego resolvemos esta ecuación para x:

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

□ En el ejemplo 4, note como f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "eleve al cubo, luego sume 2"; f^{-1} es la regla "reste 2 y después extraiga la raíz cúbica."

Por último, intercambiamos x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. □

El principio de intercambiar x y y a fin de hallar la función inversa también nos proporciona el método para obtener la gráfica de f^{-1}, a partir de la de f. Dado que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Pero obtenemos el punto (b, a) a partir del (a, b) por reflexión respecto de la recta $y = x$ (Fig. 8).

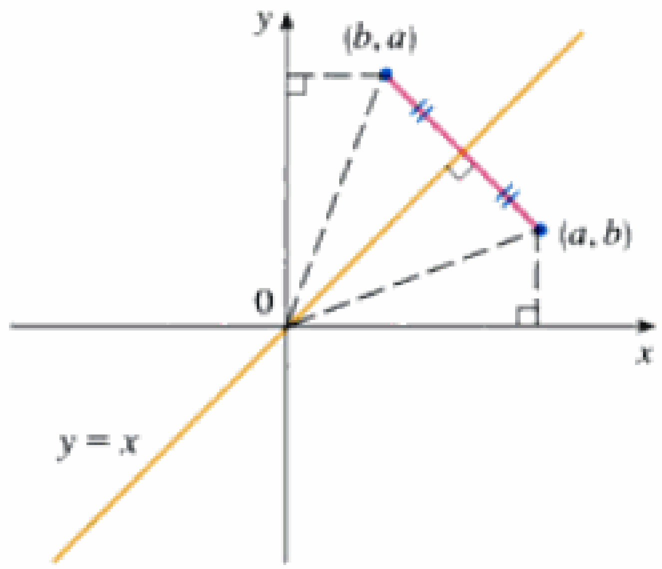


FIGURA 8

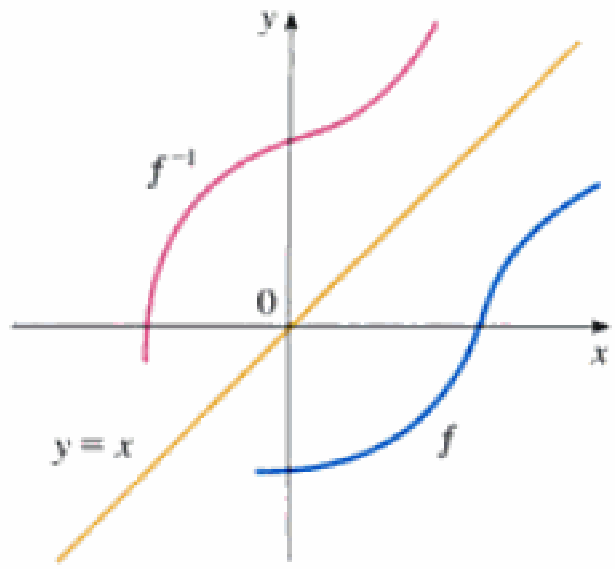


FIGURA 9

Por lo tanto, como se ilustra en la figura 9:

> Se obtiene la gráfica de f^{-1} al reflejar la gráfica de f respecto a la recta $y = x$.

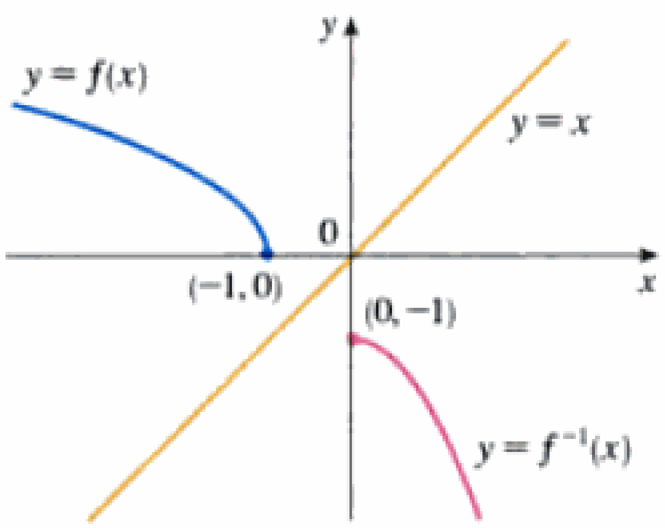


FIGURA 10

EJEMPLO 5 □ Trace las gráficas de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ y de su función inversa, usando los mismos ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN Primero graficamos la curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (la mitad superior de la parábola $y^2 = -1 - x$, o bien, $x = -y^2 - 1$) y luego la reflejamos respecto a la recta $y = x$ para lograr la gráfica de f^{-1} (Fig. 10). Como comprobación de la gráfica, note que la expresión para f^{-1} es $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $x \geqslant 0$. De modo que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = -x^2 - 1$ y, a partir de la figura 10, esto parece razonable. □

Funciones logarítmicas

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función exponencial $f(x) = a^x$ es creciente o decreciente y por tanto es una función uno a uno en virtud de la "prueba de la recta horizontal". En consecuencia, tiene una función inversa f^{-1}, la cual se denomina la *función logarítmica con base a* y se denota con $\log_a$. Si usamos la formulación de función inversa que da (3),

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

entonces tenemos

6 $$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

Por tanto, si $x > 0$, entonces $\log_a x$ es el exponente al que debe elevarse la base a para dar x. Por ejemplo, $\log_{10} 0.001 = -3$, porque $10^{-3} = 0.001$.

Cuando las ecuaciones de cancelación (4) se aplican a $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, quedan como

7 $$\boxed{\begin{gathered}\log_a(a^x) = x \text{ para toda } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} = x \text{ para toda } x > 0\end{gathered}}$$

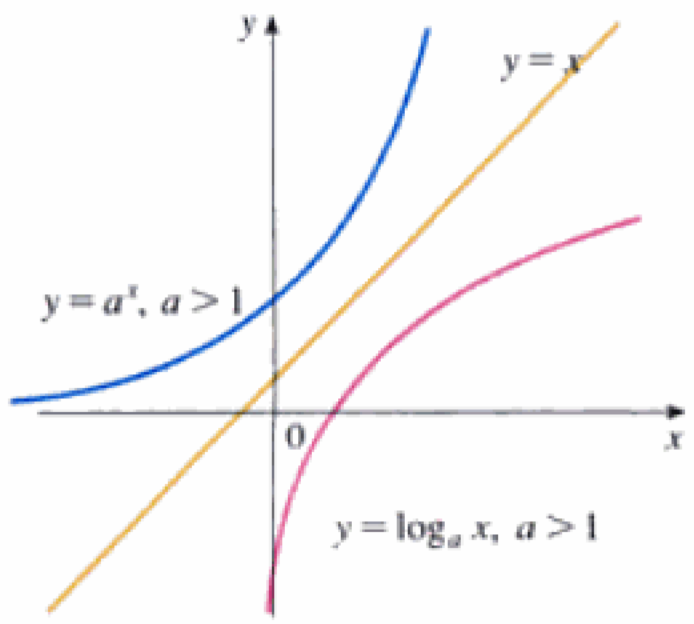


FIGURA 11

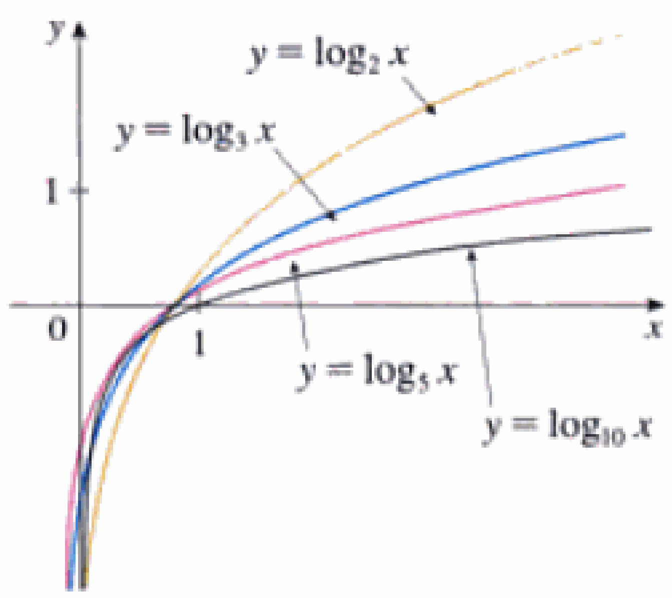


FIGURA 12

□ Notación para los logaritmos

En la mayor parte de los libros de cálculo y de ciencias, así como en las calculadoras, se usa la notación $\ln x$ para el logaritmo natural y $\log x$ para el "logaritmo común", $\log_{10} x$. Sin embargo, en la literatura más avanzada de matemáticas y científica y en los lenguajes para computadora, la notación $\log x$ suele denotar el logaritmo natural.

La función logarítmica $\log_a$ tiene dominio $(0, \infty)$ y recorrido $\mathbb{R}$. Su gráfica es la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ respecto a la recta $y = x$.

En la figura 11 se muestra el caso en donde $a > 1$. (Las funciones logarítmicas más importantes tienen base $a > 1$.) El hecho de que $y = a^x$ sea una función que aumenta con mucha rapidez para $x > 0$ se refleja en que $y = \log_a x$ es una función que aumenta con mucha lentitud para $x > 1$.

En la figura 12 se muestran las gráficas de $y = \log_a x$, con diversos valores de la base a. Como $\log_a 1 = 0$, las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

Las propiedades siguientes de las funciones logarítmicas se deducen a partir de las propiedades correspondientes de la función exponencial, dadas en la sección 1.5.

Leyes de los logaritmos Si x y y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (en donde r es cualquier número real)

EJEMPLO 6 □ Aplique las leyes de los logaritmos para evaluar $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUCIÓN Si se aplica la ley 2, tenemos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$. □

Logaritmos naturales

De todas las bases a para los logaritmos, en el capítulo 3 veremos que la elección más conveniente de una base es el número e, el cual se definió en la sección 1.5. El logaritmo con base e se conoce como **logaritmo natural** y tiene una notación especial:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Si en (6) y (7) ponemos $a = e$ y $\log_e = \ln$, entonces las propiedades de definición de la función logaritmo natural quedan

8 $$\boxed{\ln x = y \iff e^y = x}$$

9 $$\boxed{\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} &= x \qquad x > 0 \end{aligned}}$$

En particular, si se hace $x = 1$, obtenemos

$$\boxed{\ln e = 1}$$

EJEMPLO 7 □ Encuentre x, si $\ln x = 5$.

SOLUCIÓN 1 Con base en (8) vemos que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Por lo tanto, $x = e^5$.

(Si tiene problemas para trabajar con la notación "ln", reemplácela con $\log_e$. Entonces la ecuación queda $\log_e x = 5$; por tanto, por la definición de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUCIÓN 2 Empiece con la ecuación

$$\ln x = 5$$

y aplique la función exponencial a ambos miembros de la ecuación:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Pero la segunda ecuación de cancelación de (9) expresa que $e^{\ln x} = x$. Por lo tanto, $x = e^5$. □

EJEMPLO 8 □ Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$.

SOLUCIÓN Tomemos los logaritmos naturales de ambos miembros de la ecuación y usemos (9):

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

Puesto que el logaritmo natural se encuentra en las calculadoras científicas, podemos aproximar la solución hasta cuatro decimales: $x \approx 0.8991$. □

EJEMPLO 9 □ Exprese $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como un solo logaritmo.

SOLUCIÓN Con las leyes 3 y 1 de los logaritmos tenemos

$$\begin{aligned} \ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln\sqrt{b} \\ &= \ln\left(a\sqrt{b}\right) \end{aligned}$$ □

La fórmula siguiente hace ver que los logaritmos con cualquier base se pueden expresar en términos del logaritmo natural.

10 Para cualquier número positivo a $(a \neq 1)$, tenemos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Demostración Sea $y = \log_a x$. Entonces, a partir de (6) tenemos $a^y = x$. Si se toman logaritmos naturales de ambos miembros de esta ecuación, obtenemos, $y \ln a = \ln x$. Por lo tanto,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Las calculadoras científicas tienen una tecla para los logaritmos naturales, de modo que la fórmula 10 nos permite usar una calculadora para calcular un logaritmo con cualquier base (como se hace ver en el ejemplo siguiente). De manera análoga, la fórmula 10 nos permite graficar cualquier función logarítmica en una calculadora graficadora o en una computadora (véanse los Ejercs. 43 y 44).

EJEMPLO 10 □ Evalúe $\log_8 5$, correcto hasta seis decimales.

SOLUCIÓN La fórmula 10 da

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$

EJEMPLO 11 □ En el ejemplo 3 de la sección 1.5, demostramos que la masa de ^{90}Sr que queda de una muestra de 24 mg, después de t años, es $m = f(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Encuentre e interprete la inversa de esta función.

SOLUCIÓN Necesitamos resolver la ecuación $m = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Empezamos tomando logaritmos naturales de ambos miembros:

$$\ln m = \ln(24 \cdot 2^{-t/25}) = \ln 24 + \ln(2^{-t/25})$$

$$\ln m = \ln 24 - \frac{t}{25}\ln 2$$

$$\frac{t}{25}\ln 2 = \ln 24 - \ln m$$

$$t = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

De modo que la función inversa es

$$f^{-1}(m) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m)$$

Esta función da el tiempo necesario para que la masa disminuya hasta m miligramos. En particular, el tiempo necesario para que la masa se reduzca hasta 5 mg es

$$t = f^{-1}(5) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln 5) \approx 56.58 \text{ años}$$

Esta respuesta concuerda con la estimación gráfica que hicimos en el ejemplo 3 de la sección 1.5.

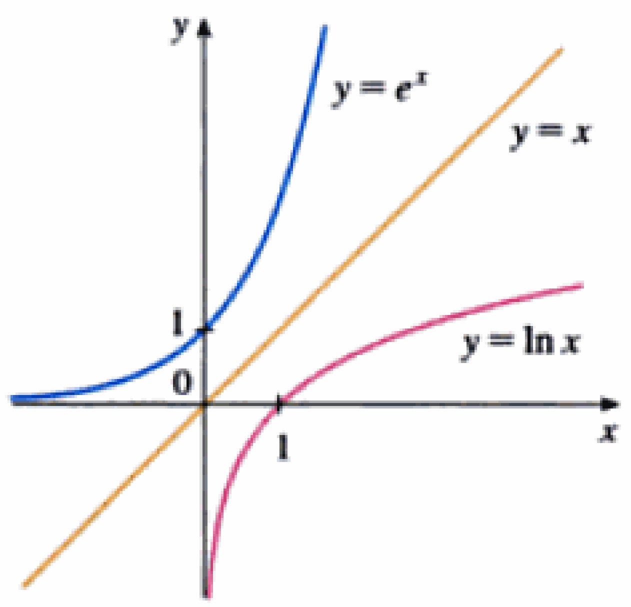


FIGURA 13

En la figura 13 se muestran las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función logaritmo natural. Debido a que la curva $y = e^x$ cruza el eje y con una pendiente de 1, se infiere que la curva $\ln x$ cruza el eje x con una pendiente de 1.

Al igual que las demás funciones logarítmicas con base mayor que 1, el logaritmo natural es una función creciente definida en $(0, \infty)$ y el eje y es una asíntota vertical. (Esto significa que los valores de $\ln x$ se vuelven negativos muy grandes conforme x tiende a 0.)

EJEMPLO 12 □ Trace la gráfica de la función $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUCIÓN Partimos de la gráfica de $y = \ln x$, como se da en la figura 13. Si se aplican las transformadas de la sección 1.3, la desplazamos dos unidades a la derecha para lograr la gráfica de $y = \ln(x - 2)$ y, a continuación, la desplazamos una unidad hacia abajo, para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2) - 1$ (Fig. 14).

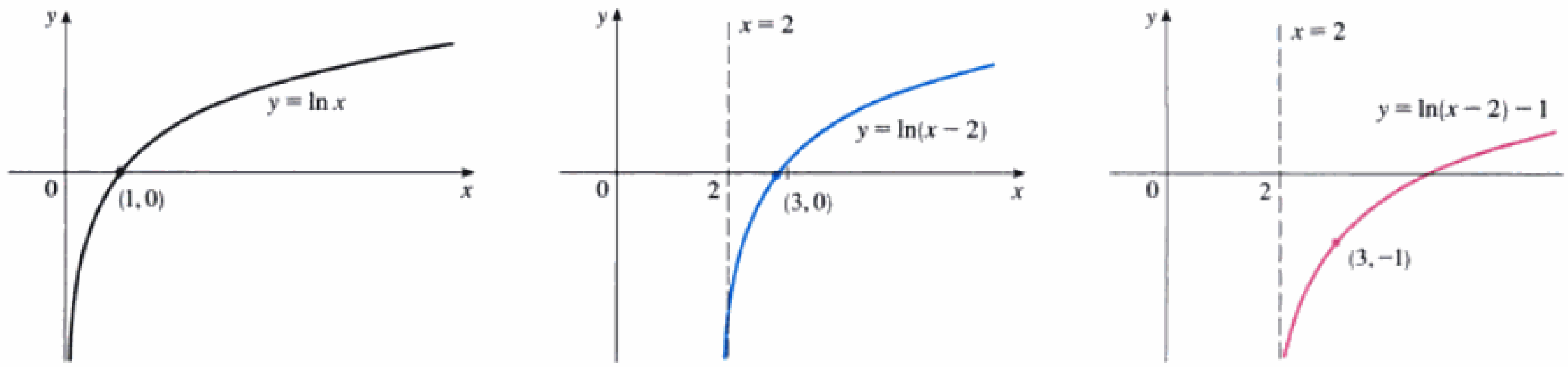


FIGURA 14

□

Aunque $\ln x$ es una función creciente, crece *con mucha* lentitud cuando $x > 1$. De hecho, $\ln x$ crece más despacio que cualquier potencia positiva de x. Para ilustrar este hecho, comparemos los valores aproximados de las funciones $y = \ln x$ y $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ de la tabla siguiente y tracemos sus gráficas en las figuras 15 y 16. Verá que, inicialmente, las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ crecen a tasas comparables pero llega el momento en que la función raíz sobrepasa con mucho el logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10,000	100,000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

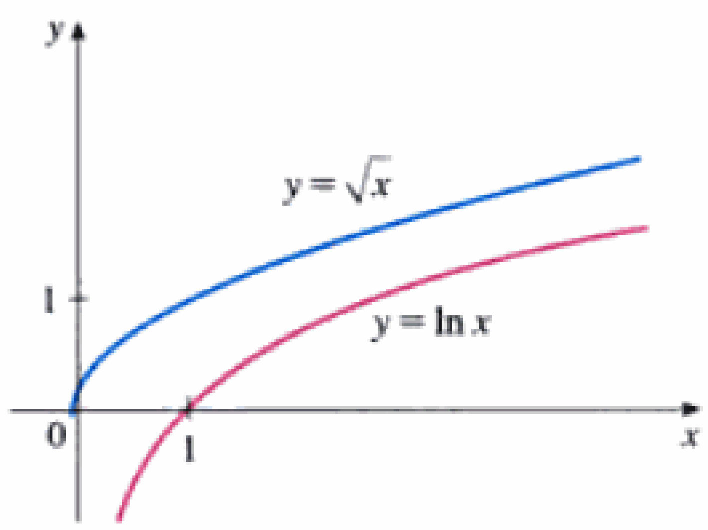


FIGURA 15

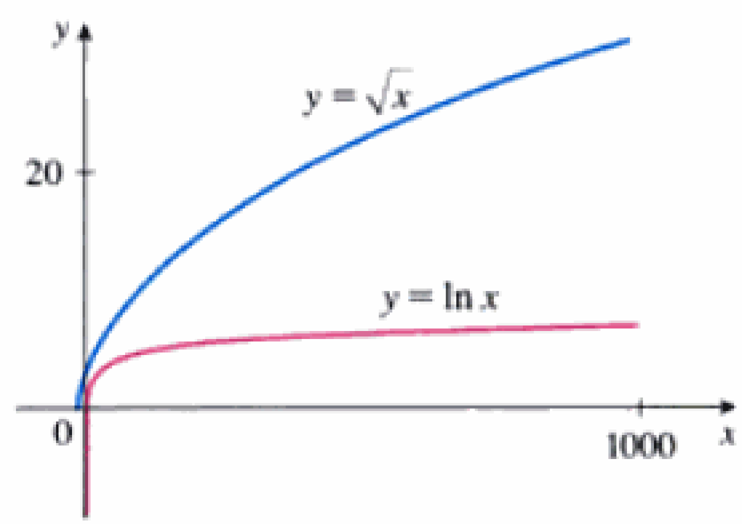


FIGURA 16

1.6 Ejercicios

1. (a) ¿Qué es una función uno a uno?
(b) ¿Con base en la gráfica de una función, cómo puede decir si ella es uno a uno?

2. (a) Suponga que f es una función uno a uno, con dominio A e imagen B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es la imagen de f^{-1}?
(b) Si se le da una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}
(c) Si tiene la gráfica de f, ¿cómo halla la gráfica de f^{-1}?

3–14 □ Se da una función f por medio de una tabla de valores, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si f es uno a uno.

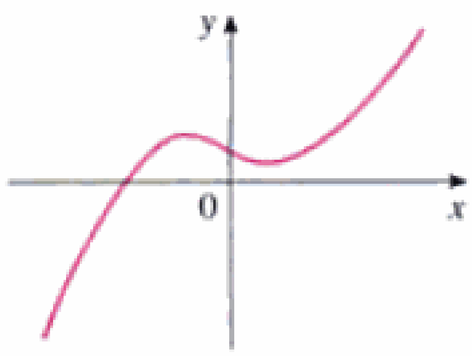
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

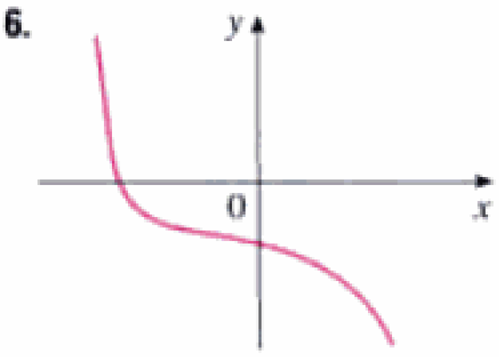
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

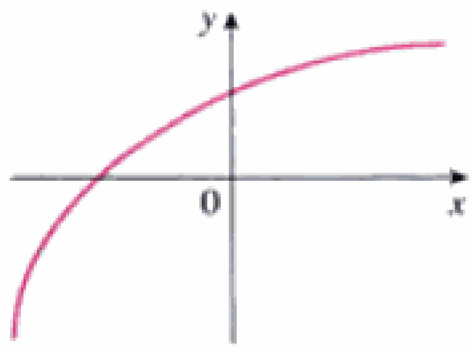
5.



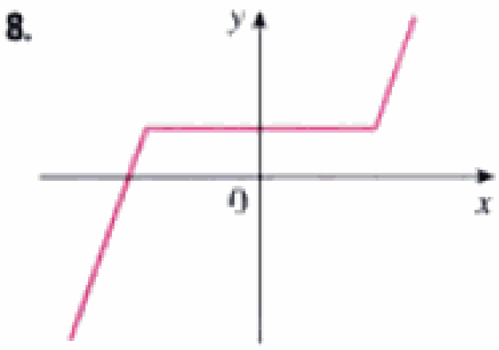
6.



7.



8.



9. $f(x) = 7x - 3$

10. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

11. $g(x) = |x|$

12. $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ es la altura a la que se encuentra una pelota de futbol americano t segundos después de la patada de salida.

14. $f(t)$ es su altura a la edad t.

15–16 □ Use una gráfica para decidir si f es uno a uno.

15. $f(x) = x^3 - x$

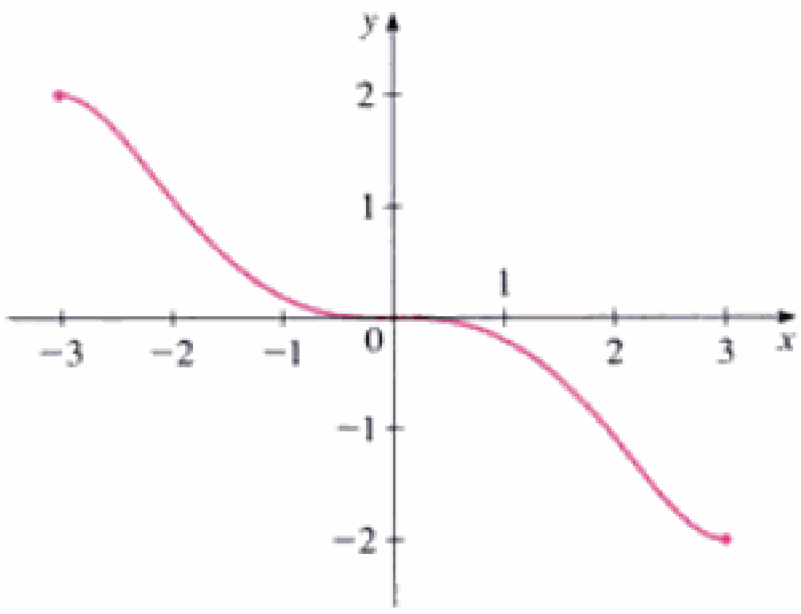
16. $f(x) = x^3 + x$

17. Si f es una función uno a uno tal que $f(2) = 9$, ¿cuál es $f^{-1}(9)$?

18. Si $f(x) = 3 + x^2 + \tan(\pi x/2)$, donde $-1 < x < 1$, encuentre $f^{-1}(3)$..

19. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, encuentre $g^{-1}(4)$.

20. Se da la gráfica de f.
(a) ¿Por qué es uno a uno?
(b))Dé el dominio y la imagen de f^{-1}.
(c) Estime el valor de $f^{-1}(1)$.



21. La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geqslant -459.67$, expresa la temperatura Celsius C como función de la temperatura Fahrenheit F. Encuentre una fórmula para la función inversa e interprétela. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

22. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz en el vacío. Encuentra la función inversa de f y explique su significado.

23–28 □ Halle una fórmula para la inversa de la función.

23. $f(x) = \dfrac{1 + 3x}{5 - 2x}$

24. $f(x) = 5 - 4x^3$

25. $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$

26. $y = 2^{10^x}$

27. $y = \ln(x + 3)$

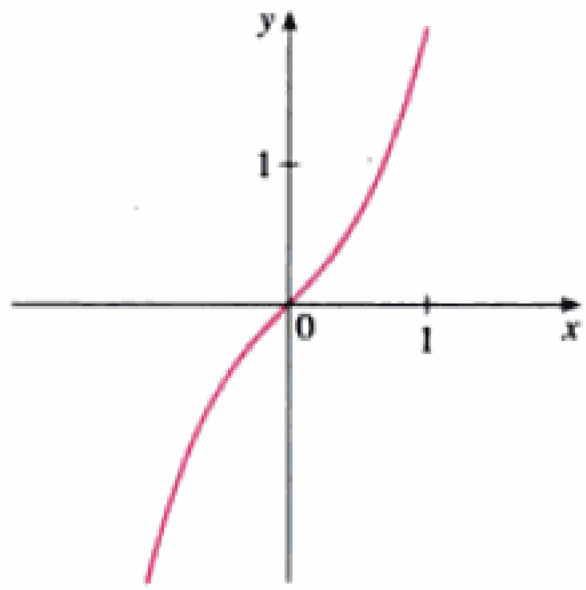
28. $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

29–30 □ Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y úsela para trazar la gráfica de f^{-1}, de f y de la recta $y = x$ en la misma pantalla. Compruebe su trabajo: vea si las gráficas de f y de f^{-1} son reflexiones respecto de la recta.

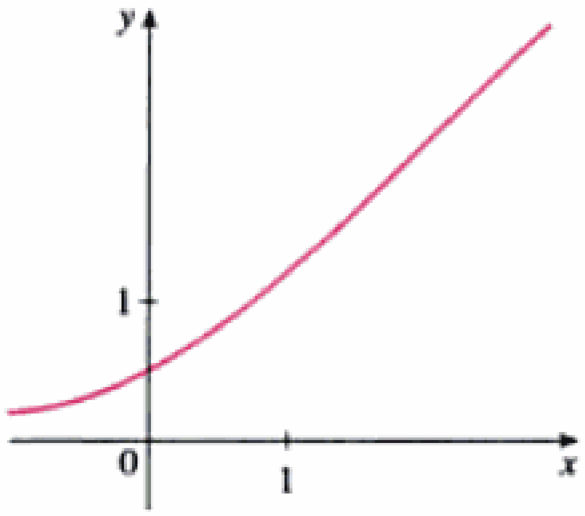
29. $f(x) = 1 - 2/x^2, \quad x > 0$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}, \quad x > 0$

31. Use la gráfica dada de f para graficar f^{-1}.



32. Use la gráfica dada de f para trazar la gráfica de f^{-1} y de $1/f$.



33. (a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_a x$?
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) ¿Cuál es la imagen de esta función?
(d) Esquematice la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$, si $a > 1$.

34. (a) ¿Cuál es el logaritmo natural?
(b) ¿Cuál es el logaritmo común?
(c) Trace las gráficas de la función logaritmo natural y de la función exponencial natural juntas.

35–38 □ Encuentre el valor exacto de cada expresión.

35. (a) $\log_2 64$ (b) $\log_6 \frac{1}{36}$

36. (a) $\log_8 2$ (b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

37. (a) $\log_{10} 1.25 + \log_{10} 80$
(b) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3\log_5 2$

38. (a) $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)}$ (b) $e^{3\ln 2}$

39–40 □ Exprese la cantidad dada como un solo logaritmo.

39. $2\ln 4 - \ln 2$

40. $\ln x + a\ln y - b\ln z$

41. Use la fórmula 10 para evaluar cada logaritmo, correcto hasta seis decimales.
(a) $\log_2 5$ (b) $\log_5 26.05$

42. Encuentre el dominio y la imagen de la función $g(x) = \ln(4 - x^2)$.

43–44 □ Use la fórmula 10 para graficar las funciones dadas en una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

43. $y = \log_{1.5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

45. Suponga que se grafica $y = \log_2 x$ en una cuadrícula de coordenadas donde la unidad de medida es una pulgada. ¿Cuántas millas hacia la derecha del origen tenemos que movernos antes que la altura de la curva llegue a los 3 pies?

46. Compare las funciones $f(x) = x^{0.1}$ y $g(x) = \ln x$, graficando f y g en varias pantallas. ¿Cuándo llega el momento en que la gráfica de f sobrepasa la de g?

47–48 □ Trace un esquema aproximado de la gráfica de cada función, sin calculadora. Sólo use las gráficas dadas en las figuras 12 y 13 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

49–52 □ Resuelva cada ecuación para x.

49. (a) $e^x = 16$ (b) $\ln x = -1$

50. (a) $\ln(2x - 1) = 3$ (b) $e^{3x-4} = 2$

51. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

52. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, en donde $a \neq b$

SAC **53.** Grafique la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es una función uno a uno. Entonces, use un sistema algebráico de computadoras (SAC) para encontrar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (Su sistema SAC le dará tres expresiones posibles; explique por qué dos de éstas no tienen caso en este contexto.)

SAC **54.** (a) Si $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$, use un sistema SAC para tener una expresión de $g^{-1}(x)$.
(b) Use la expresión del inciso a) para graficar $y = g(x)$, $y = x$, y $y = g^{-1}(x)$ en la misma pantalla.

55. Si una población de bacterias comenzó con 100 y se duplica cada tres horas, la cantidad de ejemplares después de t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ (Ejerc. 23, de la Sec. 1.5).
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuándo habrá 50,000 ejemplares?

56. Cuando se dispara el *flash* de una cámara, de inmediato las pilas empiezan a recargar el capacitor del *flash*, en el cual se almacena la carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La capacidad máxima de carga es Q_0 y t se mide en segundos.)
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuánto tarda en recargarse el capacitor hasta 90% de su capacidad, si $a = 2$?

57. A partir de la gráfica de $y = \ln x$, encuentre la ecuación de la gráfica que resulta de
(a) desplazarla 3 unidades hacia arriba.
(b) desplazarla 3 unidades a la izquierda.
(c) reflejarla respecto al eje x.
(d) reflejarla respecto al eje y.
(e) reflejarla respecto a la recta $y = x$.
(f) reflejarla respecto al eje x y, después, respecto a la recta $y = x$.
(g) reflejarla respecto al eje y y, después, respecto a la recta $y = x$.
(h) desplazarla 3 unidades a la izquierda y, a continuación, reflejarla respecto a la recta $y = x$.

58. (a) Si desplazamos una curva hacia la izquierda, ¿qué sucede a su reflexión respecto a la recta $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$, donde f es una función uno a uno.
(b) Halle una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

1 Repaso

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una función? ¿Qué es su dominio y qué su imagen?
(b) ¿Qué es la gráfica de una función?
(c) ¿Cómo se puede decidir que una curva dada es gráfica de una función.

2. Explicar cuatro maneras de representar una función. Dar ejemplos.

3. (a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede decir si una función es par al mirar su gráfica?
(b) Qué es una función impar? ¿Cómo puede decir si una función es impar al mirar su gráfica?

4. ¿Qué es una función creciente?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

6. .Dé un ejemplo de cada tipo de función
(a) Función lineal (b) Función potencia
(c) Función exponencial (d) Función cuadrática
(e) Polinomio de quinto grado (f) Función racional

7. Bosquejar en un mismo sistema de ejes, las gráficas de las siguientes funciones
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Dibuje a mano un esquema aproximado de la gráfica de cada función.
(a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \tan x$
(c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
(e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$

9. Suponiendo que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
(a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
(b) ¿Cuál es el dominio de fg?
(c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

11. Se da la gráfica de f. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen a partir de la de f como se dice a continuación.
(a) Trasladar 2 unidades hacia arriba
(b) Trasladar 2 unidades hacia abajo
(c) Trasladar 2 unidades a la derecha
(d) Trasladar 2 a la izquierda
(e) Reflejar alrededor del eje x.
(f) Reflejar alrededor del eje y
(g) Estirar verticalmente por el factor 2.
(h) Encoger verticalmente por el factor 2.
(i) Estirar horizontalmente al doble
(j) Comprimir horizontalmente a la mitad (por el factor 2).

12. (a) ¿Qué es una función uno a uno? ¿Cómo puede decir si una función es uno a uno al mirar su gráfica?
(b) Si f es una función uno a uno, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.

3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.

4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$

5. Una recta vertical interseca la gráfica de una función más de una vez.

6. Si f y g son funciones, entonces $f \circ g = g \circ f$.

7. Si f es uno a uno, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

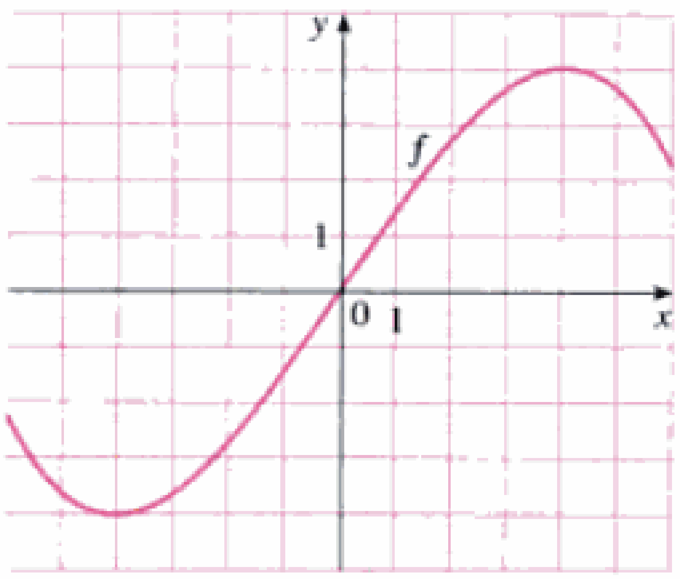
8. Siempre se puede dividir entre e^x.

9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.

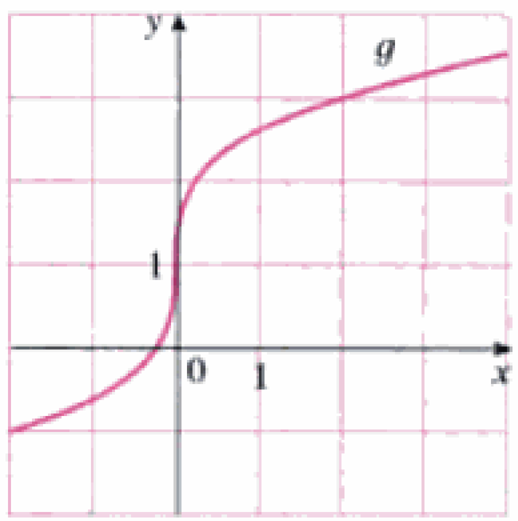
10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

EJERCICIOS

1. Sea f la función cuya gráfica se da.
   (a) Estime el valor de $f(2)$.
   (b) Estime los valores de x tales que $f(x) = 3$.
   (c) Dé el dominio de f.
   (d) Dé la imagen de f.
   (e) ¿Sobre cuál intervalo es f creciente?
   (f) ¿f es uno a uno? Explique.
   (g) ¿f es par, impar o de ninguno de los dos tipos? Explique.



2. Se da la gráfica de g.
   (a) Dé el valor de $g(2)$.
   (b) ¿Por qué g es uno a uno?
   (c) Estime el valor de $g^{-1}(2)$.
   (d) Estime el dominio de g^{-1}.
   (e)Trace la gráfica de g^{-1}.



3. La distancia recorrida por un automóvil está dada por los valores de la tabla.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
d (pies)	0	10	32	70	119	178

   (a) Use los datos para graficar d como función de t.
   (b) Con la gráfica estime la distancia recorrida después de 4.5 segundos.

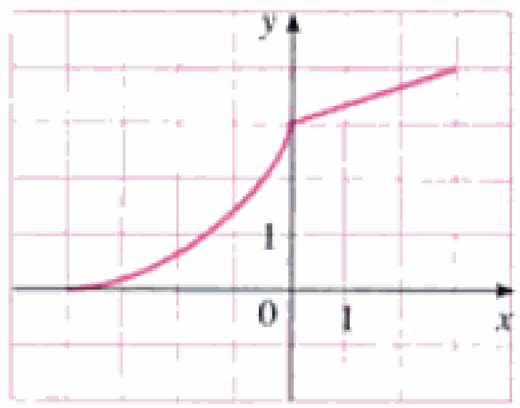
4. Trace una gráfica aproximada del rendimiento de un cultivo como función de la cantidad de fertilizante usado.

5–8 □ Encuentre el dominio y la imagen de la función.

5. $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$
6. $g(x) = 1/(x + 1)$
7. $y = 1 + \text{sen}\, x$
8. $y = \ln(1 - x)$

9. Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las funciones siguientes a partir de la gráfica de f.
   (a) $y = f(x) + 8$
   (b) $y = f(x + 8)$
   (c) $y = 1 + 2f(x)$
   (d) $y = f(x - 2) - 2$
   (e) $y = -f(x)$
   (f) $y = f^{-1}(x)$

10. Se da la gráfica de f. Grafique las funciones siguientes.
   (a) $y = f(x - 8)$
   (b) $y = -f(x)$
   (c) $y = 2 - f(x)$
   (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
   (e) $y = f^{-1}(x)$
   (f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 □ Trace la gráfica de la función.

11. $y = 1 + \sqrt{x + 2}$
12. $y = (x - 1)^4 - 1$
13. $y = \cos 3x$
14. $y = 3 - 2\,\text{sen}\, x$
15. $f(x) = -e^x$
16. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

17. Determine si f es par, impar o ninguna de las dos cosas.
   (a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
   (b) $f(x) = x^3 - x^7$
   (c) $f(x) = e^{-x^2}$
   (d) $f(x) = 1 + \text{sen}\, x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica consta de un segmento rectilíneo del punto (–2, 2) hasta el punto (–1, 0) junto con la mitad superior del círculo con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como composición de tres funciones.

21. En este siglo, la expectativa de vida ha mejorado de manera notable. En la tabla se da la expectativa de vida al nacer (en años) de los individuos del sexo masculino en Estados Unidos.

Año de nacimiento	Expectativa de vida
1900	48.3
1910	51.1
1920	55.2
1930	57.4
1940	62.5
1950	65.6
1960	66.6
1970	67.1
1980	70.0
1990	71.8

Use una gráfica de dispersión para elegir un tipo apropiado de modelo. Utilice su modelo para predecir la duración de la vida de un individuo del sexo masculino nacido en el año 2000.

22. Un pequeño empresario ha determinado que el costo de producir 1000 tostadores semanalmente es de 9000 dls. y que 1500 le cuestan 12,000 dls.

(a) Exprese el costo como función del número de tostadores producidos, suponiendo que es lineal. Trace la gráfica.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

(c) ¿Cuál es la intercepción con el eje y y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, encuentre $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

25. Determine el valor exacto de cada expresión.

(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

26. Resuelva x en cada ecuación.

(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$ (c) $e^{e^x} = 2$

27. La vida media del paladio 100, ^{100}Pd, es de cuatro días (de modo que la mitad de cualquier cantidad dada de ^{100}Pd se desintegra en cuatro días). La masa inicial de una muestra es de un gramo.

(a) Encuentre la cantidad que queda después de 16 días.

(b) Indique la masa $m(t)$ que queda después de t días.

(c) Halle la inversa de esta función y explique su significado.

(d) ¿Cuándo se reducirá la masa hasta 0.01 g?

28. La población de cierta especie en un ambiente limitado, con población inicial de 100 y que soporta una capacidad de 1000, es

$$P(t) = \frac{100{,}000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años

(a) Grafique esta función y estime cuánto tarda la población en llegar a 900.

(b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(c) Use la función inversa para hallar el tiempo requerido para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso a).

29. Trace las gráficas de los miembros de la familia de funciones $f(x) = \ln(x^2 - c)$ para varios valores de c. ¿Cómo se modifica la gráfica al cambiar c?

30. Grafique las tres funciones $y = x^a$, a^x y $y = \log_a x$ en la misma pantalla para dos o tres valores de $a > 1$. Para valores grandes x, ¿cuál de estas funciones tiene los valores más grandes y cuál los más pequeños?

Principios para la solución de problemas

No existen reglas firmes y rápidas que garanticen el éxito en la solución de problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos pasos generales del proceso de solución de problemas y aprender algunos principios que pueden resultar útiles en la solución de problemas. Estos pasos y principios no son más que sentido común hecho explícito. Se han adaptado del libro *How To Solve It* de George Polya.

1 Entender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de entenderlo con claridad. Hágase las preguntas siguientes:

¿Cuál es la incógnita?

¿Cuáles son las cantidades dadas?

¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas, resulta útil

dibujar un diagrama

e identificar las cantidades dadas y las necesarias para el diagrama.

Por lo común, es necesario

introducir una notación apropiada

Al elegir los símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como a, b, c, m, n, x y y pero, en algunos casos, ayuda usar iniciales sugerentes; por ejemplo, V para el volumen o t para el tiempo

2 Pensar en un plan

Encuentre una relación entre la información dada y lo que desconoce que le permita calcular la incógnita. Con frecuencia ayuda preguntarse: "¿Cómo puedo relacionar los datos con lo desconocido?" Si no ve una relación de inmediato, las ideas siguientes pueden resultar útiles para idear un plan.

Intente reconocer algo familiar Relacione la situación dada con sus conocimientos. Observe la incógnita e intente recordar un problema que haya resuelto y tenga una incógnita semejante.

Intente reconocer patrones Algunos problemas se resuelven al reconocer que se presenta algún modelo. Éste puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si reconoce regularidad o repetición en un problema, quizá sea capaz de conjeturar cuál es el modelo y probarlo.

Use la analogía Intente pensar en un problema análogo; es decir, un problema semejante o relacionado, pero más fácil que el original, entonces éste le podría dar los indicios que necesita para resolver el problema original. Por ejemplo, si en un problema intervienen números muy grandes, podría intentar primero un caso semejante con números más pequeños. O bien, si en el problema interviene geometría tridimensional, busque uno similar en geometría bidimensional. O también, si el problema es general, podría intentar con un caso especial.

Introduzca algo nuevo A veces puede ser necesario introducir algo nuevo, algo auxiliar, para ayudar a establecer la conexión entre los datos y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva recta trazada en un diagrama. En un problema más algebraico, podría ser una nueva incógnita relacionada con la original.

Establezca casos En ocasiones habrá que dividir el problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno. Por ejemplo, con frecuencia tenemos que aplicar esta estrategia al tratar con el valor absoluto.

Resuelva hacia atrás A veces resulta útil imaginar que el problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a los datos dados. Entonces es posible invertir los pasos y, de este modo, construir una solución del problema original. Es común aplicar este procedimiento al resolver ecuaciones. Por ejemplo, al resolver la ecuación $3x - 5 = 7$, suponemos que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y procedemos hacia atrás. Sumamos 5 a cada miembro de la ecuación y, dividimos cada miembro entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada paso se puede invertir, hemos resuelto el problema.

Establezca metas intermedias En un problema complejo, suele convenir establecer metas intermedias (en las cuales sólo se satisface parcialmente la situación deseada). Si podemos alcanzar la primera de estas metas intermedias, es posible que seamos capaces de construir sobre ellas hasta alcanzar la meta final.

Razonamiento indirecto En ocasiones es apropiado atacar un problema de manera indirecta. Al utilizar la demostración por contradicción para probar que P implica Q, suponemos que P es verdadera y que Q es falsa e intentamos ver por qué esto no puede ser. De algún modo, tenemos que usar esta información y llegar a una contradicción de lo que estamos seguros que es verdadero.

Inducción matemática Al probar proposiciones que comprenden un entero positivo n, con frecuencia es útil aplicar el principio siguiente:

Principio de la inducción matemática Sea S_n una proposición acerca del entero n. Si

1. S_1 es verdadera.
2. S_{k+1} es verdadera siempre que S_k sea verdadera.

Entonces S_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Esto es razonable porque, como S_1 es verdadera, de la condición 2 (con $k = 1$) se infiere que S_2 es verdadera. Entonces, si se aplica la condición 2 con $k = 2$, vemos que S_3 es verdadera. Al aplicar una vez más la condición 2, esta vez con $k = 3$, tenemos que S_4 es verdadera. Este procedimiento se puede seguir indefinidamente.

3 Llevar a cabo el plan

En el paso 2 se ideó un plan. Al ponerlo en práctica tenemos que comprobar cada etapa y escribir los detalles que prueben que cada una es correcta.

4 Mirar retrospectivamente

Luego de completar la solución, es inteligente revisarla, en parte para ver si cometimos errores en la solución y también para ver si podemos pensar en una manera más fácil de resolver el problema. Otra razón para mirar hacia atrás es que nos familiarizará con el método de solución y esto puede ser útil para resolver un problema futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas".

Estos principios de solución de problemas se ilustran en los ejemplos siguientes. Intente resolverlos antes de mirar las soluciones. Consulte estos principios de solución de problemas si se atora. Puede encontrar útil repasar a esta sección de vez en cuando al resolver los ejercicios de los capítulos restantes del libro.

Ejemplo 1 Exprese la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con un área de 25 m^2 como función de su perímetro P.

Comprender el problema

Solución Primero, clasifiquemos la información, identificando la cantidad desconocida y los datos:

Incógnita: hipotenusa h

Cantidades dadas: perímetro P, área de 25 m^2

Dibujar diagrama

Ayuda dibujar un diagrama y así lo hacemos en la figura 1

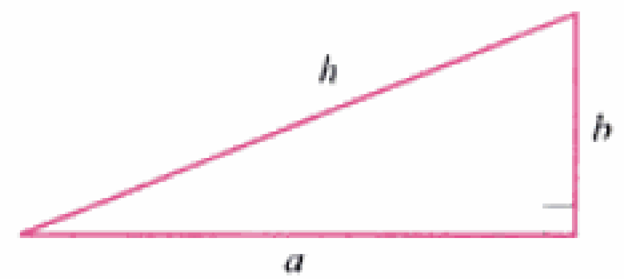


FIGURA 1

Relacionar lo dado con lo desconocido

Introducir algo adicional

Para relacionar las cantidades dadas con la incógnita, introducimos dos variables adicionales, a y b, que son las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Esto nos permite expresar la condición dada, es decir, que el triángulo es rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Las otras relaciones entre las variables se obtienen al escribir las expresiones para el área y el perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Como se da P, note que ahora tenemos tres ecuaciones con las tres incógnitas a, b y h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

Relacionar con algo familiar

Aunque tenemos el número correcto de ecuaciones, no son fáciles resolver de una manera directa; pero si aplicamos la estrategia de intentar reconocer algo conocido, entonces podemos resolverlas con un método más fácil. Vea los segundos miembros de las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Le recuerdan algo? Note que contienen los ingredientes de una fórmula conocida:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si aplicamos esta idea podemos expresar $(a + b)^2$ de dos maneras. De las ecuaciones 1 y 2 tenemos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

De la ecuación 3 tenemos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Por tanto
$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$
$$2Ph = P^2 - 100$$
$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Es la expresión requerida para h como función de P.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, a menudo es necesario aplicar el principio de solución de problemas de *establecer casos*, al tratar con valores absolutos.

Ejemplo 2 Resuelva la desigualdad $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

Solución Recuerde la definición de valor absoluto:
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se concluye que
$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

De manera análoga
$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{si } x + 2 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Establecer casos

Estas expresiones hacen ver que debemos considerar tres casos:
$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I :: Si $x < -2$, tenemos
$$|x - 3| + |x + 2| < 11$$
$$-x + 3 - x - 2 < 11$$
$$-2x < 10$$
$$x > -5$$

CASO II :: Si $-2 \leqslant x < 3$, la desigualdad dada queda
$$-x + 3 + x + 2 < 11$$
$$5 < 11$$

CASO III :: Si $x \geqslant 3$, la desigualdad queda
$$x - 3 + x + 2 < 11$$
$$2x < 12$$
$$x < 6$$

Si combinamos los casos I, II y III, vemos que la desigualdad se satisface cuando $-5 < x < 6$. De modo que la solución es el intervalo $(-5, 6)$.

En el ejemplo siguiente, primero suponemos una respuesta revisando los casos especiales y reconociendo un modelo. A continuación, lo probamos por inducción matemática.

Al aplicar el principio de inducción matemática, seguimos tres pasos:

Paso 1 Se prueba que S_n es verdadera cuando $n = 1$.

Paso 2 Se supone que S_n es verdadera cuando $n = k$ y se deduce que S_n es verdadera cuando $n = k + 1$.

Paso 3 Se concluye, por el principio de inducción matemática, que S_n es verdadera para toda n.

Ejemplo 3 Si $f_0(x) = x/(x+1)$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

■ Analogía: intente un problema semejante, más sencillo

Solución Empezamos por hallar fórmulas para $f_n(x)$, para los casos especiales $n = 1$, 2 y 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

■ Busque un problema

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Notamos un modelo: en los tres casos calculados, el coeficiente de x en el denominador de $f_n(x)$ es $n + 1$. De modo que conjeturamos que, en general,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}$$

Para probar esto, aplicamos el principio de inducción matemática. Ya hemos comprobado que (4) es verdadera para $n = 1$. Suponga que es verdadera para $n = k$; es decir,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}$$

Entonces $f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\dfrac{x}{(k+1)x+1}\right)$

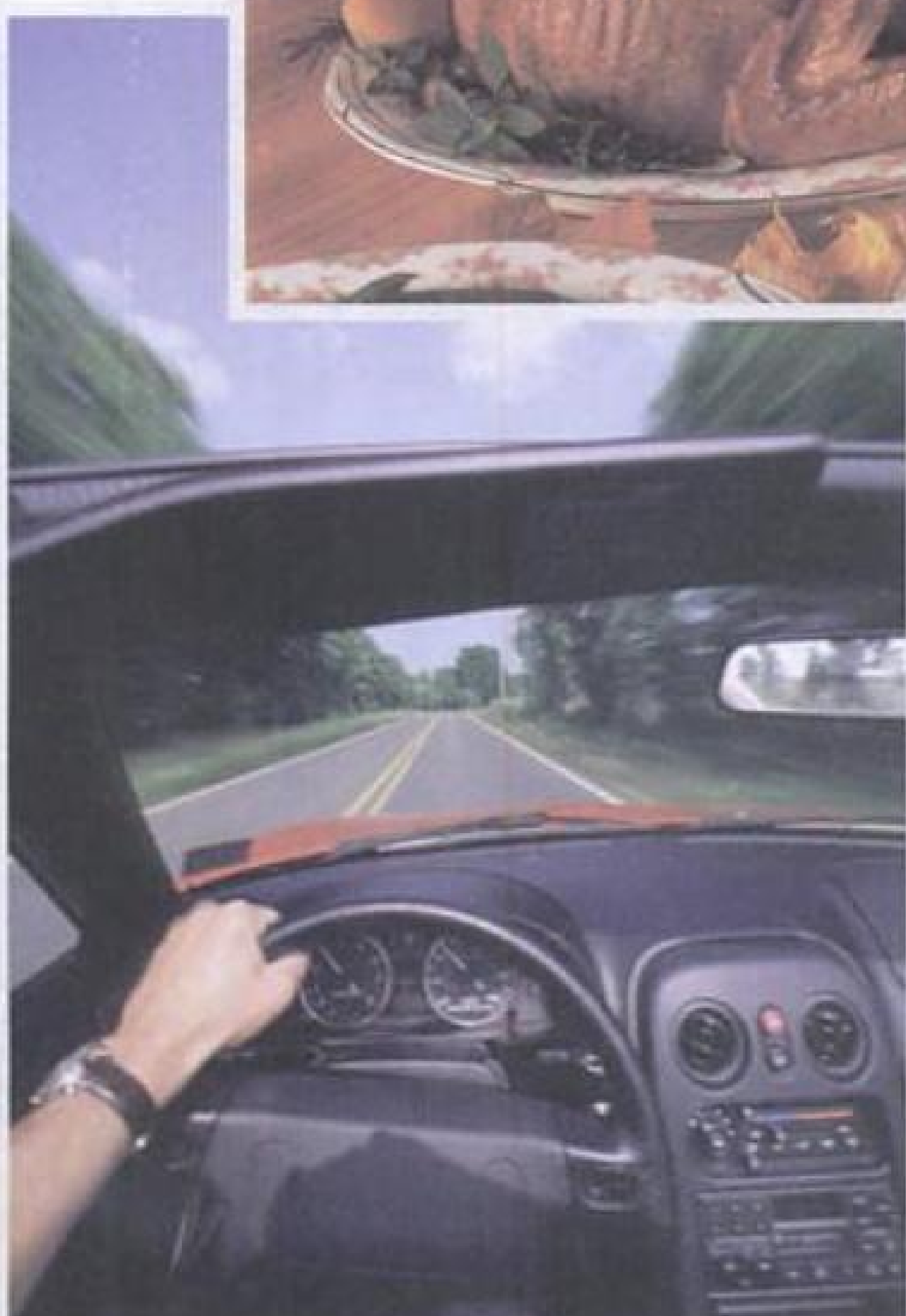
$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Esta expresión hace ver que (4) es verdadera para $n = k + 1$. Por lo tanto, por inducción matemática es verdadera para todos los enteros positivos n.

Problemas

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo tiene una longitud de 4 cm. Exprese la longitud de la altura perpendicular a la hipotenusa como función de longitud de esta última.
2. La altura perpendicular a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 12 cm. Exprese la longitud de la hipotenusa como función del perímetro.
3. Resuelva la ecuación $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.
4. Resuelva la desigualdad $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.
5. Trace la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.
6. Bosqueje la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.
7. Dibuje la gráfica de la ecuación $|x| + |y| = 1 + |xy|$.
8. Trace la gráfica de la ecuación $x^2y - y^3 - 5x^2 + 5y^2 = 0$, sin construir una tabla de valores.
9. Esquematice la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leqslant 1$.
10. Haga un esquema de la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que
$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$
11. Evalúe $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.
12. (a) Demuestre que la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ es una función impar.
    (b) Encuentre la función inversa de f.
13. Resuelva la desigualdad $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.
14. Aplique un razonamiento indirecto para probar que $\log_2 5$ es un número irracional.
15. Una mujer sale de viaje en su automóvil. La primera mitad de la distancia la recorre a la velocidad de 30 mi/h y la segunda mitad a 60 mi/h. ¿Cuál es la velocidad promedio en este viaje?
16. ¿Es cierto que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?
17. Pruebe que si n es un entero positivo, entonces $7^n - 1$ es divisible entre 6.
18. Pruebe que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
19. Si $f_0(x) = x^2$ y $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ encuentre una fórmula para $f_n(x)$.
20. (a) Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ encuentre una expresión para $f_n(x)$ y aplique la inducción matemática para probarla.
    (b) Grafique f_0, f_1, f_2, f_3 en la misma pantalla y describa los efectos de la composición repetida.

2 Límites y derivadas



En este capítulo usaremos límites para estimar qué tan rápido se enfría un pavo al sacarlo del horno, para explicar qué significa en realidad lo que nos indica el velocímetro de un automóvil y para estimar la corriente eléctrica que fluye del capacitor a la unidad de destello ("flash") de una cámara fotográfica.

En *Presentación preliminar del cálculo* (pág. 2) vimos de qué manera la idea de límite sustenta las diversas ramas del cálculo. Por lo tanto, resulta adecuado empezar nuestro estudio del cálculo investigando los límites y sus propiedades. El tipo especial de límite que se usa para hallar tangentes y velocidades da lugar a la idea central del cálculo diferencial: la derivada.

2.1 Problemas de la tangente y velocidad

En esta sección veremos cómo surgen los límites cuando intentamos hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

Problema de la tangente

La palabra *tangente* proviene de la palabra latina *tangens*, la cual significa "tocar". De este modo, una tangente a una curva es una recta que toca a esta última. ¿Cómo se puede precisar esta idea?

Para un círculo, podríamos seguir la idea de Euclides y decir que una tangente es una recta que interseca ese círculo una vez y sólo una [Fig. 1a)]. Para curvas más complicadas, esta definición es inadecuada. En la figura 1b), se muestran dos rectas, l y t, que pasan por un punto P de una curva C. La recta l interseca C sólo una vez, pero es evidente que no se parece a lo que consideramos una tangente. Por otra parte, la recta t parece una tangente, pero interseca C dos veces.

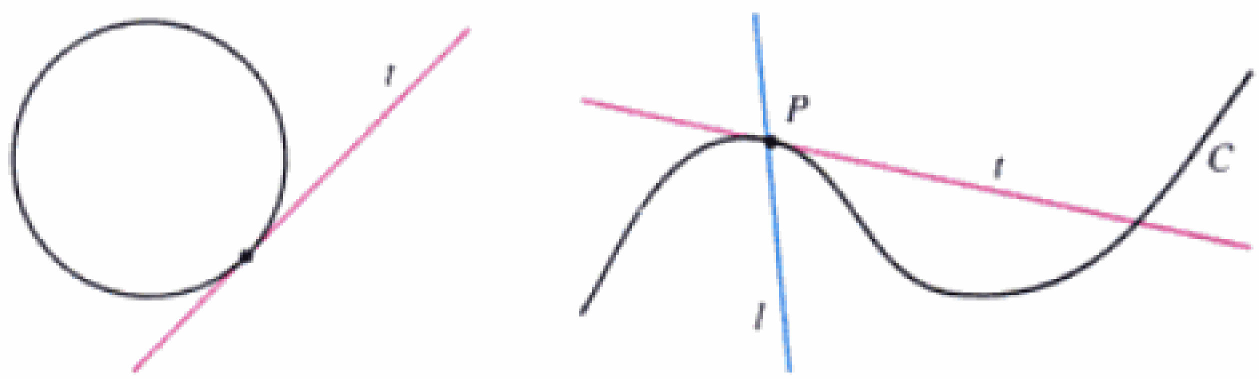


FIGURA 1 (a) (b)

Para ser específicos, veamos el problema de intentar hallar una recta tangente t a la parábola $y = x^2$ en el ejemplo siguiente.

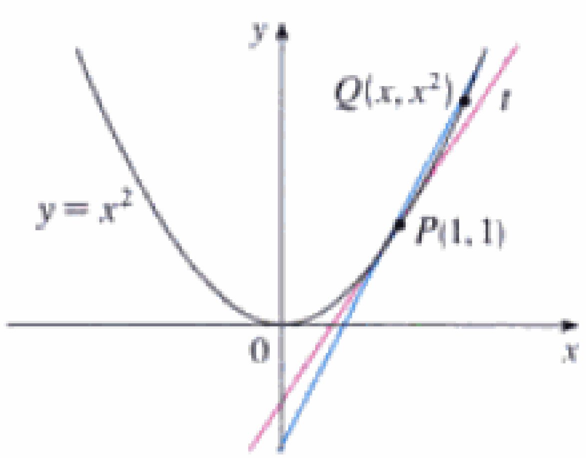


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN Podremos hallar la ecuación de la recta tangente t tan pronto conozcamos su pendiente m. La dificultad es que conocemos sólo un punto, P, de t, en tanto que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente. Pero podemos calcular una aproximación para m si elegimos un punto cercano $Q(x, x^2)$ de la parábola (Fig. 2) y calculamos la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ.

Elegimos $x \neq 1$, de modo que $Q \neq P$, entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$ tenemos

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Las tablas en el margen muestran los valores de m_{PQ} para varios valores de x cercanos a 1. Entre más cerca está Q de P, más lo está x de 1 y, por lo que se ve en las tablas, m_{PQ} está más próxima a 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

Decimos que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes y, simbólicamente, expresamos esto al escribir

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m$$

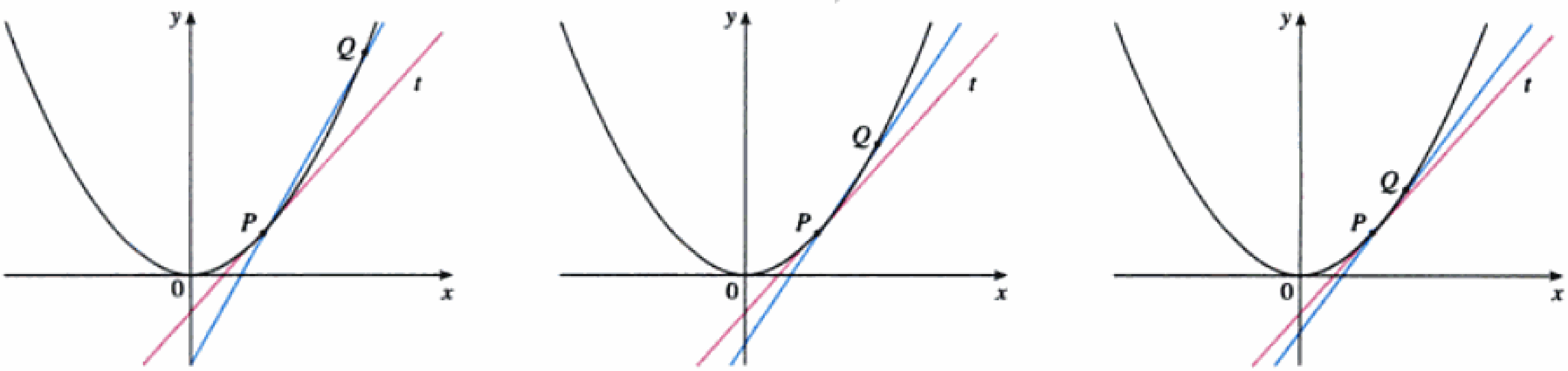
y

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

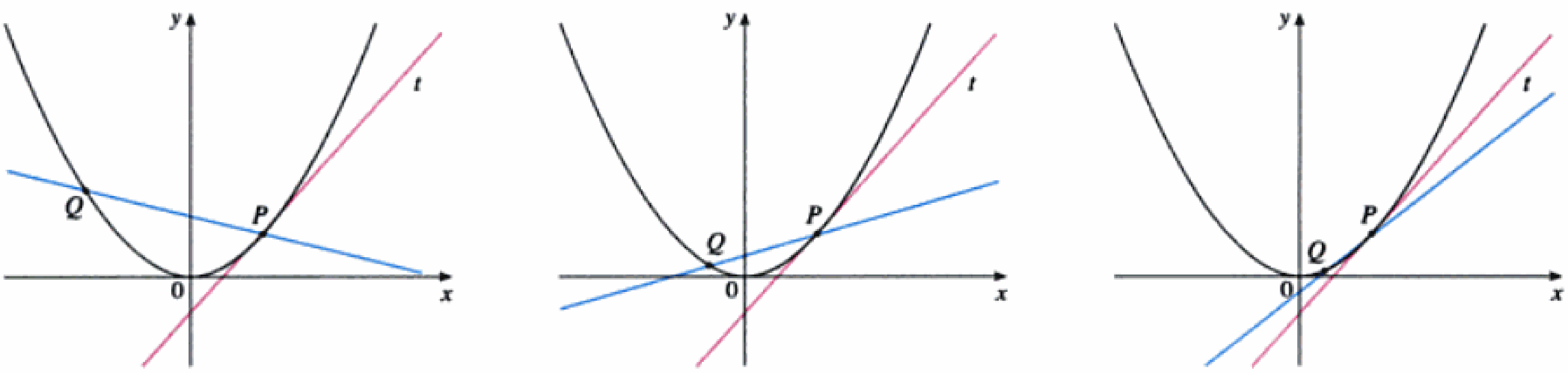
Si se supone que, en efecto, la pendiente de la recta tangente es 2, usamos la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta (Ap. B) para escribir la ecuación de la recta tangente que pasa por (1, 1) como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

En la figura 3 se ilustra el proceso de tender hacia el límite que se presenta en este ejemplo. Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las rectas secantes correspondientes giran en torno a P y se acercan a la recta tangente t.



Q se aproxima a P desde la derecha



Q se aproxima a P desde la izquierda

FIGURA 3

□

Muchas funciones que se encuentran en las ciencias no se describen mediante una ecuación explícita; se definen por datos experimentales. En el ejemplo que sigue se indica cómo estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de ese tipo de funciones.

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

EJEMPLO 2 □ La unidad de destello (*flash*) de una cámara opera por el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina al disparar la unidad. Los datos que se dan a la izquierda describen la carga Q que permanece en el capacitor (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos). Use los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [*Nota:* la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica que fluye del capacitor al bulbo del *flash* (medida en microamperes).]

SOLUCIÓN En la figura 4 hemos situado los datos dados y los usamos para trazar una curva que se aproxime a la gráfica de la función.

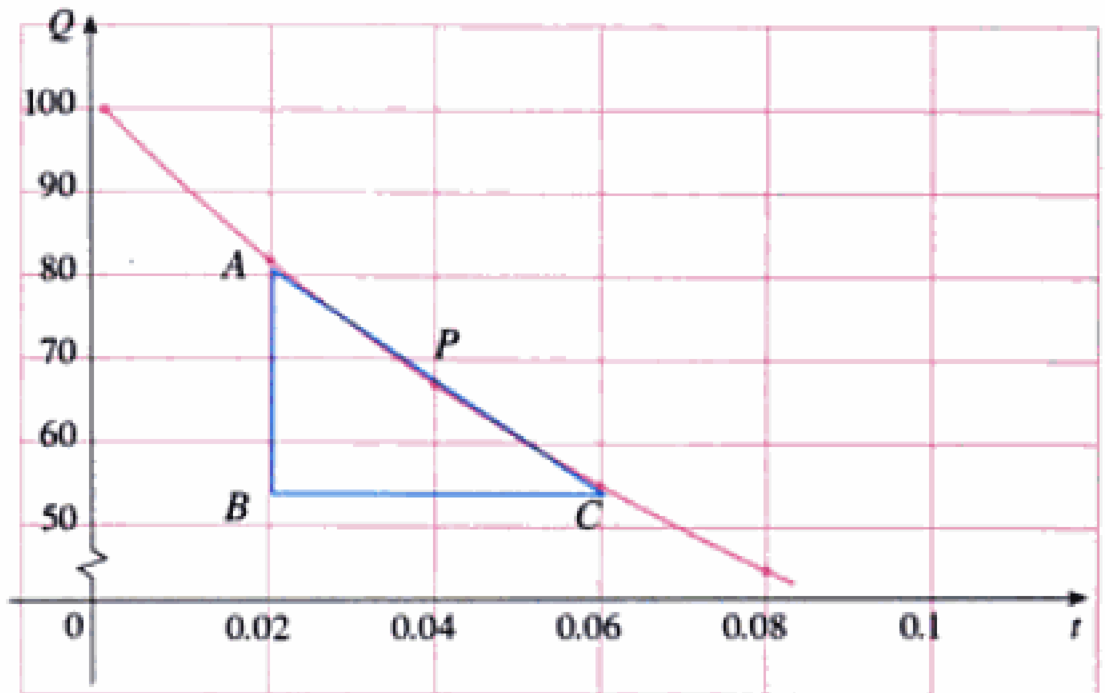


FIGURA 4

Dados los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ de la gráfica, encontramos que la pendiente de la recta secante PR es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

En la tabla de la izquierda se muestran los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. Con base en esta tabla, cabe esperar que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre en algún valor entre −742 y −607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

Por tanto, por este método, estimamos la pendiente de la recta tangente como −675.

Otro método es trazar una aproximación a la recta tangente en P y medir los catetos del triángulo ABC (Fig. 4). Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$

□

□ El significado físico de la respuesta del ejemplo 2 es que la corriente eléctrica fluye del capacitor al bulbo del flash después de 0.04 segundos es de alrededor de −670 microamperes.

Problema de velocidad

Si observa el velocímetro de un automóvil al viajar en el tráfico de la ciudad, puede ver que la aguja no permanece inmóvil mucho tiempo; es decir, la velocidad del auto no es constante. Al observar el velocímetro, suponemos que el vehículo tiene una velocidad definida en cada momento, ¿pero cómo se define la "velocidad instantánea"? Investiguemos el ejemplo de una pelota que cae.

La Torre CN en Toronto es el edificio autoestable más alto de la actualidad en el mundo.

EJEMPLO 3 ☐ Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN en Toronto, 450 m arriba del suelo. Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.

SOLUCIÓN Al intentar resolver este problema, aplicamos el hecho, descubierto por Galileo hace casi cuatro siglos, de que la distancia recorrida por cualquier cuerpo que cae libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (En esto se desprecia la resistencia del aire.) Si la distancia recorrida después de t segundos se denota con $s(t)$ y se mide en metros, entonces la ley de Galileo se expresa con la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para hallar la velocidad después de 5 segundos es que estamos tratando con un solo instante ($t = 5$), de modo que no interviene un intervalo. Sin embargo, podemos tener una aproximación de la cantidad deseada calculando la velocidad promedio durante el breve intervalo de un décimo de segundo, desde $t = 5$ hasta $t = 5.1$:

$$\begin{aligned} \text{velocidad promedio} &= \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} \\ &= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1} \\ &= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s} \end{aligned}$$

En la tabla siguiente se muestran los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos sucesivos más pequeños:

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53.9
$5 \leq t \leq 5.1$	49.49
$5 \leq t \leq 5.05$	49.245
$5 \leq t \leq 5.01$	49.049
$5 \leq t \leq 5.001$	49.0049

Ocurre que, conforme acortamos el periodo, la velocidad promedio se aproxima a 49 m/s. La **velocidad instantánea**, cuando $t = 5$, se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante periodos cada vez más cortos que se inician en $t = 5$. Por lo tanto, la velocidad (instantánea) después de 5 s es

$$v = 49 \text{ m/s}$$ ☐

Quizá sienta que los cálculos usados en la solución de este problema son muy semejantes a los aplicados con anterioridad en esta sección para hallar tangentes. De hecho, existe una íntima relación entre el problema de la tangente y el de hallar velocidades. Si dibujamos la gráfica de la función distancia de la pelota (Fig. 5) y consideramos los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ de la gráfica, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

lo cual es lo mismo que la velocidad promedio durante el periodo $[a, a + h]$. Por lo tanto, la velocidad en el instante $t = a$ (el límite de estas velocidades promedio conforme h tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

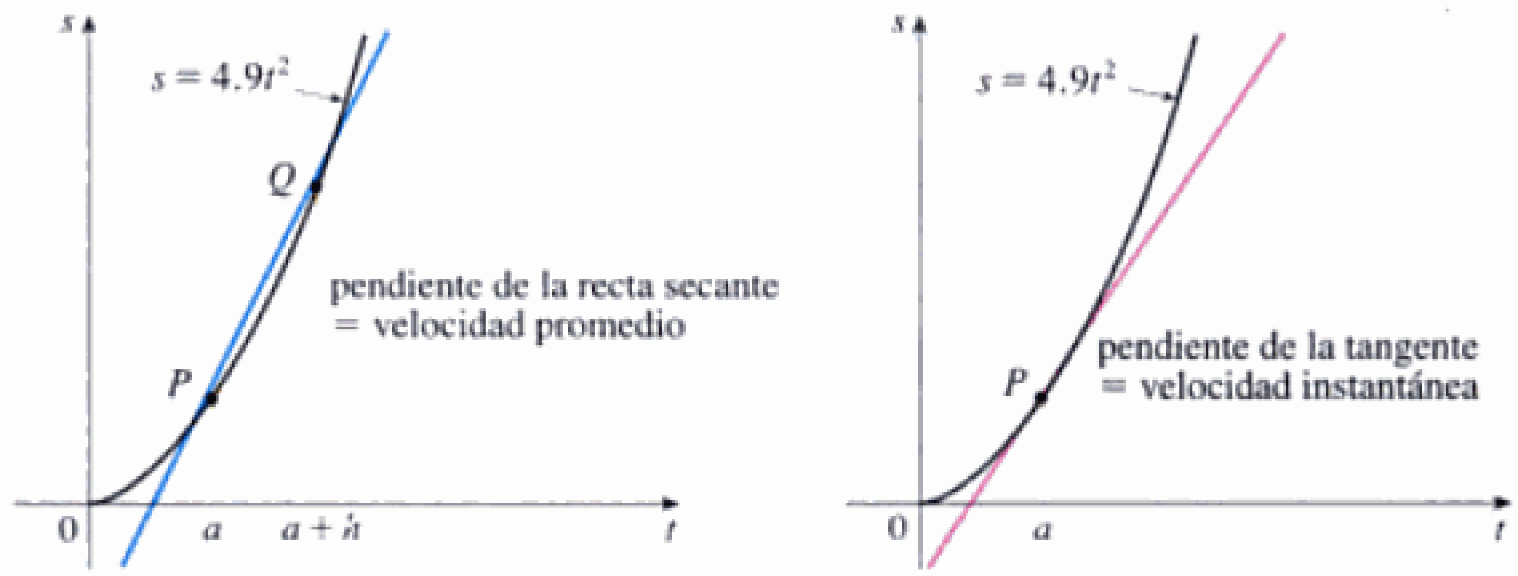


FIGURA 5 (a) (b)

Los ejemplos 1 y 3 hacen ver que para resolver problemas de tangentes y de velocidades, debemos ser capaces de hallar límites. Después de estudiar los métodos para calcular los límites en las cuatro secciones siguientes, regresaremos a los problemas de hallar tangentes y velocidades, en la sección 2.6.

2.1 Ejercicios

1. Un tanque contiene 1000 galones de agua que salen por el fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen V de agua restante en el tanque (en galones) al cabo de t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

(a) Si P es el punto (15,250) en la gráfica de V hallar la péndiente de las rectas secantes PQ cuando Q es un punto en la gráfica con $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30$.
(b) Estimar la pendiente de la recta tangente en P como el promedio de pendientes de dos secantes.
(c) Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P (esta pendiente representa la rapidez del flujo de agua a la salida del tanque a los quince minutos).

2. Se usa un monitor cardiaco para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de la cirugía. Recopila el número de latidos después de t minutos. Cuando se sitúan los datos de la tabla en una gráfica, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Latidos cardiacos	2530	2661	2806	2948	3080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Use los datos para estimar la frecuencia cardiaca del paciente, después de 42 minutos, usando la recta secante entre
(a) $t = 36$ y $t = 42$ (b) $t = 38$ y $t = 42$
(c) $t = 40$ y $t = 42$ (d) $t = 42$ y $t = 44$
¿A qué conclusiones llega?

3. El punto $P(4, 2)$ está sobre la curva $y = \sqrt{x}$.
(a) Si Q es el punto $(x, \sqrt{x})$, use su calculadora con el fin de hallar la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta seis decimales) para los siguientes valores de x.
(i) 5 (ii) 4.5 (iii) 4.1
(iv) 4.01 (v) 4.001 (vi) 3
(vii) 3.5 (viii) 3.9 (ix) 3.99
(x) 3.999
(b) Con los resultados del inciso a), conjeture el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(4, 2)$.
(c) Con la pendiente del inciso b), encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en $P(4, 2)$.

4. El punto $P(0.5, 2)$ está sobre la curva $y = 1/x$.
(a) Si Q es el punto $(x, 1/x)$, use su calculadora con el fin de hallar la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta seis decimales) para los siguientes valores de x:
(i) 2 (ii) 1 (iii) 0.9
(iv) 0.8 (v) 0.7 (vi) 0.6
(vii) 0.55 (viii) 0.51 (ix) 0.45
(x) 0.49
(b) Con los resultados del inciso a), conjeture el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 2)$.
(c) Con la pendiente del inciso b), encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en $P(0.5, 2)$.

(d) Grafique la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

5. Si se lanza una pelota al aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura en pies, después de t segundos, se expresa por $y = 40t - 16t^2$.
(a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que se inicia cuando $t = 2$ y dura:
(i) 0.5 s (ii) 0.1 s
(iii) 0.05 s (iv) 0.01 s
(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

6. Si se dispara una flecha hacia arriba, sobre la superficie de la Luna, con una velocidad de 58 m/s, su altura en metros, después de t segundos, se expresa por $h = 58t - 0.83t^2$.
(a) Encuentre la velocidad promedio durante los intervalos dado:
(i) [1, 2] (ii) [1, 1.5] (iii) [1, 1.1]
(iv) [1, 1.01] (v) [1, 1.001
(b) Encuentre la velocidad instantánea después de 1 s.

7. El desplazamiento (en pies) de una partícula que se mueve en una recta se expresa por $s = t^3/6$, en donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio durante los periodos siguientes:
(i) [1, 3] (ii) [1, 2]
(iii) [1, 1.5] (iv) [1, 1.1]
(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 1$.
(c) Dibuje la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedios halladas en el inciso a).
(d) Trace la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea hallada en el inciso b).

8. Los valores de la tabla anexa dan la posición de un automóvil.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (pies)	0	10	32	70	119	178

(a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que empieza cuando $t = 2$ y dura:
(i) 3 s (ii) 2 s (iii) 1 s
(b) Use la gráfica de s como función de t para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

9. El punto $P(1, 0)$ está sobre la curva $y = \text{sen}(10\pi/x)$.
(a) Si Q es el punto $(x, \text{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta cuatro cifras decimales) para $x = 2, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ y 0.9. ¿Parece que las pendientes tienden a un límite?
(b) Use una gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes del inciso a) no están cercanas a la pendiente de la recta tangente en P.
(c) Mediante la selección de las rectas secantes apropiadas, estime la pendiente de la recta tangente en P.

2.2 Límites de una función

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando deseamos hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, volvamos nuestra atención hacia los límites en general y los métodos para calcularlos.

Investiguemos el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

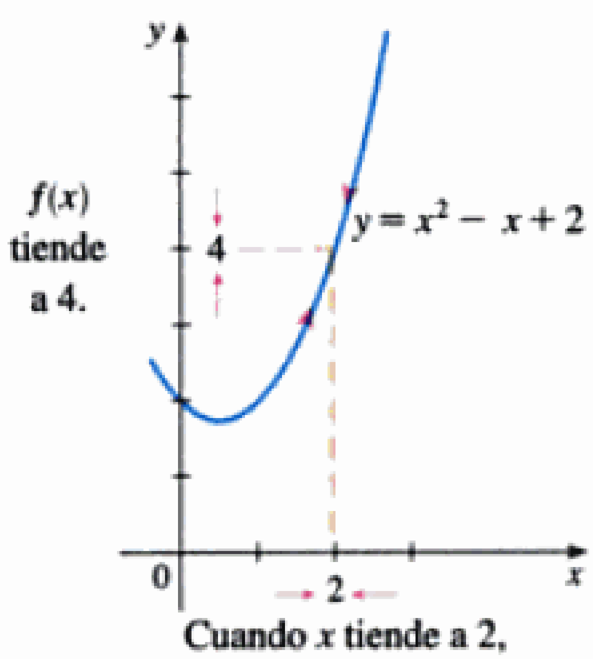


FIGURA 1

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se muestra en la figura 1, vemos que cuando x está cercano a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece que podemos acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como deseemos si tomamos una x suficientemente cerca de 2. Expresamos este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4".

La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, usamos la siguiente notación:

[1] Definición Escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como deseemos) tomando x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a), pero $x \neq a$. En la sección 2.4 tendremos una definición más precisa.

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \qquad$ cuando $\qquad x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Advierta la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca consideramos $x = a$. De hecho, incluso no es necesario que $f(x)$ esté definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo está definida f *cerca de a*.

En la figura 2 se muestran las gráficas de tres funciones. Note que en la parte c), $f(a)$ no está definido y, en la parte b), $f(a) \neq L$. Pero en cada caso, sin importar lo que suceda en a, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

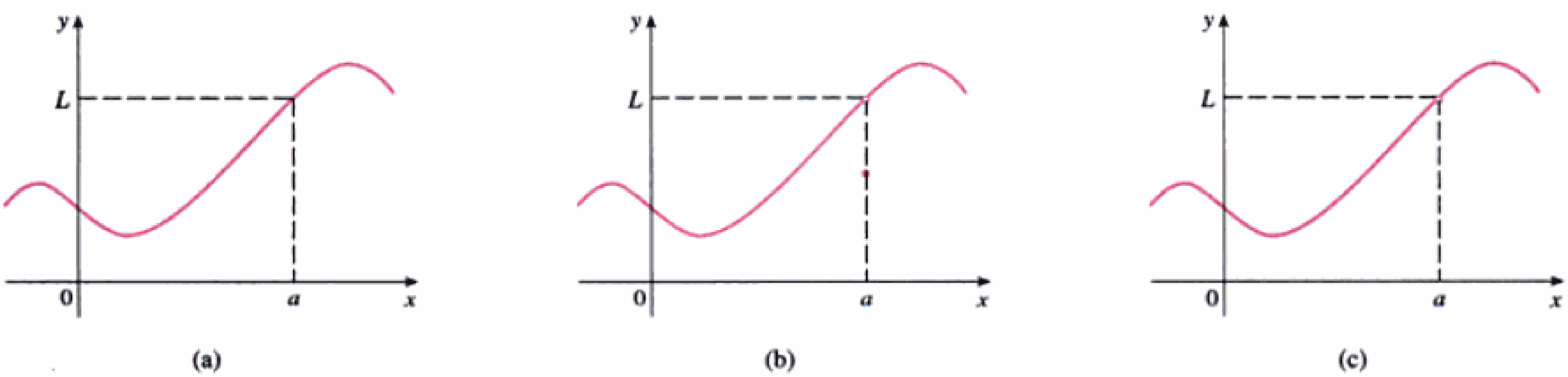


FIGURA 2
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 □ Haga una conjetura sobre el valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUCIÓN Advierta que la función $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que consideremos valores de

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

x próximos a a pero diferentes de a. En las tablas de la izquierda se dan los valores de $f(x)$ (correctos hasta seis decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no son iguales a 1). Con base en los valores de las tablas, conjeturamos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0.5$$ □

El ejemplo 1 se ilustra mediante la gráfica de f de la figura 3. Cambiemos ahora ligeramente el valor de f, dándole el valor de 2 cuando $x = 1$ y según la función resultante como g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g todavía tiene el mismo límite cuando x tiende a 1 (Fig. 4).

FIGURA 3

FIGURA 4

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN En la tabla se enumeran los valores de la función para varios valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±1.0	0.16228
±0.5	0.16553
±0.1	0.16662
±0.05	0.16666
±0.01	0.16667

A medida que t tiende a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.1666666… y, por consiguiente, suponemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$ □

En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si hubiéramos tomado valores incluso más pequeños de t? En la tabla al margen se muestran los resultados obtenidos con una calculadora; usted puede ver que parece suceder algo extraño.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±0.0005	0.16800
±0.0001	0.20000
±0.00005	0.00000
±0.00001	0.00000

Si intenta realizar estos cálculos en su calculadora, podría obtener valores diferentes pero llegará un momento en que obtendrá el valor 0, si reduce t lo suficiente. ¿Significa esto que la respuesta en realidad es 0, en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, cómo demostraremos en la sección siguiente. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2 + 9}$ está muy cercana a 3 cuando t es pequeño. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeño, el valor para $\sqrt{t^2 + 9}$ de una calculadora es $3.000\ldots$ hasta el número de dígitos que la calculadora es capaz de llevar.)

Algo similar sucede cuando intentamos trazar la gráfica de la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

del ejemplo 2, en una calculadora graficadora o en una computadora. Las partes a) y b) de la figura 5 muestran gráficas bastante exactas de f y, cuando usamos el modo de trazo (si contamos con él), podemos estimar con facilidad que el límite es alrededor de $\frac{1}{6}$. Pero si realizamos un acercamiento muy grande, como en las partes c) y d), obtenemos gráficas inexactas, una vez más debido a problemas con la sustracción.

(a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ (b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

FIGURA 5

EJEMPLO 3 □ Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN De nuevo, la función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Con una calculadora (y recordando que si $x \in \mathbb{R}$, sen x quiere decir el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x), construimos la tabla siguiente de valores correcta hasta ocho decimales. A partir de la tabla y de la gráfica de la figura 6, conjeturamos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

De hecho, esta conjetura es correcta, como se probará en capítulo 3 con la aplicación de un argumento geométrico.

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

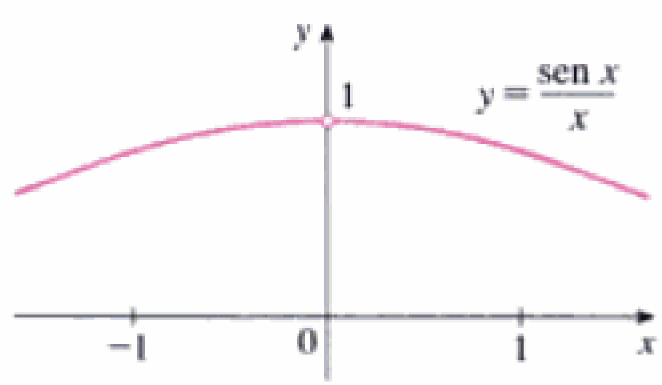


FIGURA 6

□

□ Sistemas algebraicos para computadora
Los sistemas algebraicos para computadora (SAC) tienen comandos que calculan límites. En virtud de las dificultades demostradas en los ejemplos 2, 4 y 5, no encuentran los límites por experimentación numérica, sino que aplican técnicas más elaboradas, como el cálculo de series infinitas. Si tiene acceso a un SAC, use el comando límite, calcule los límites de los ejemplos de esta sección y compruebe sus respuestas a los ejercicios de este capítulo.

EJEMPLO 4 □ Encuentre $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Una vez más, la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Si se evalúa la función para algunos valores pequeños de x, resulta

$$f(1) = \operatorname{sen}\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen}3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen}4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen}10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen}100\pi = 0$$

De manera análoga, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información, podríamos sentirnos tentados a presumir que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$$

pero, en esta ocasión, nuestra conjetura es errónea. Note que, aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$, para cualquier entero n, también se cumple que $f(x) = 1$ para un número infinito de valores de x que tienden a 0. [De hecho, $\operatorname{sen}(\pi/x) = 1$ cuando

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

y, al resolver para x, se obtiene $x = 2/(4n + 1)$.] La gráfica de f se da en la figura 7.

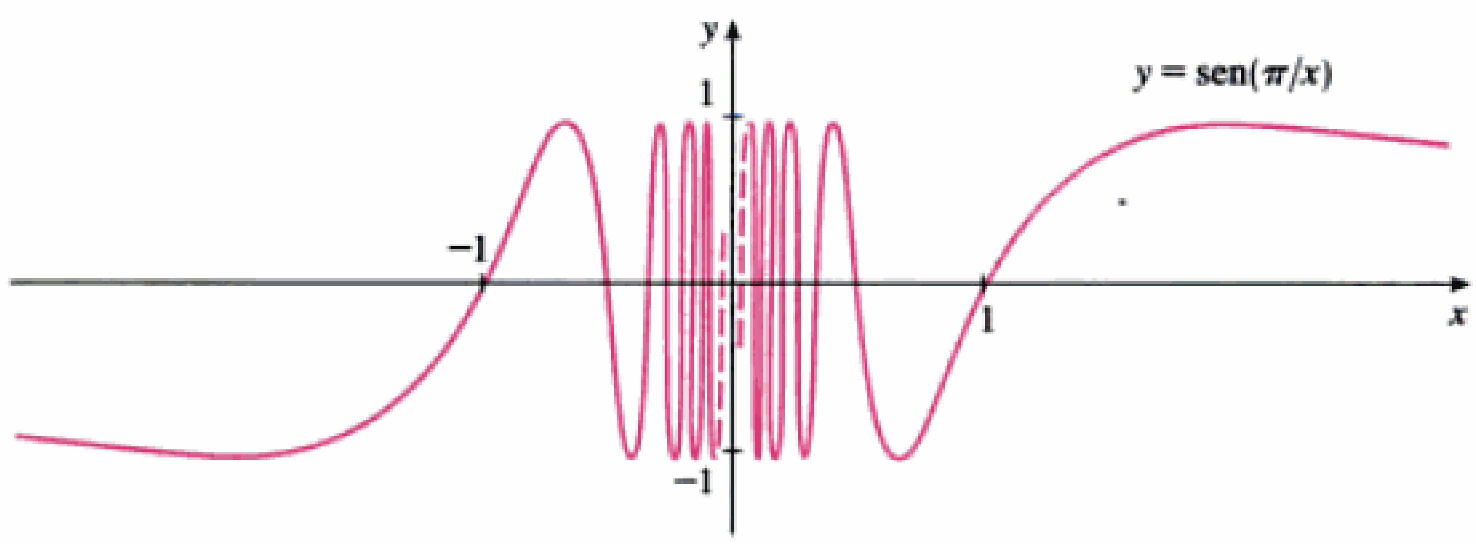


FIGURA 7

Las líneas punteadas indican que los valores de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilan con frecuencia infinita entre 1 y −1 conforme x tiende a 0 (véase el ej. 37). Debido a que los valores de $f(x)$ no tienden a un número fijo cuando x tiende a 0,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

□

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

EJEMPLO 5 □ Encuentre $\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}\right)$.

SOLUCIÓN Como antes, construimos una tabla de valores. A partir de la tabla en el margen parece que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000}\right) = 0$$

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10{,}000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

Pero si perseveramos con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10{,}000}\right) = 0.000100 = \frac{1}{10{,}000}$$

Posteriormente veremos que $\lim_{x\to 0} \cos 5x = 1$ y entonces se concluye que el límite es 0.0001 □

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los peligros al presumir el valor de un límite. Es fácil llegar a un valor erróneo, si se usan valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo suspender el cálculo de valores. Y, como hace ver el análisis que sigue al ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores erróneos. Sin embargo, más adelante desarrollaremos métodos a prueba de tontos para calcular límites.

EJEMPLO 6 □ La función de Heaviside H se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

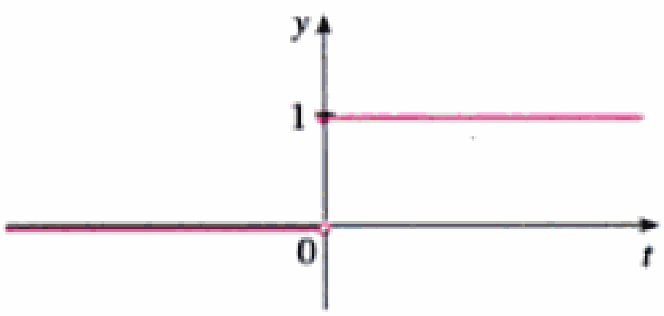


FIGURA 8

[Esta fórmula recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850–1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que inicia en el instante $t = 0$.] En la figura 8 se muestra su gráfica.

Conforme t se acerca a 0 desde la izquierda, $H(t)$ tiende a 0. Cuando t se aproxima a 0 desde la derecha, $H(t)$ tiende a 1. No existe un número único al que $H(t)$ se aproxime cuando t tiende a 0. Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} H(t)$ no existe. □

Límites laterales

En el ejemplo 6 hicimos ver que $H(t)$ tiende a 0 cuando t lo hace a 0 desde la izquierda y que esa función tiende a 1 cuando t lo hace a 0 desde la derecha. Indicamos simbólicamente esta situación escribiendo

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que sólo consideramos valores de t menores que 0. Del mismo modo, "$t \to 0^+$" indica que sólo consideramos valores de t mayores que 0.

2 Definición Escribimos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

decimos que el **límite izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a desde la izquierda**] es igual a L, si podemos aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como queramos, escogiendo x lo bastante cerca de a pero menor que a.

Advierta que la definición 2 difiere de la 1 sólo en que x debe ser menor que a. De manera análoga, si requerimos que x sea mayor que a, obtenemos "el **límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a a** es igual a L" y escribimos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Por lo tanto, el símbolo "$x \to a^+$" significa que consideremos sólo $x > a$. En la figura 9 se ilustran estas definiciones.

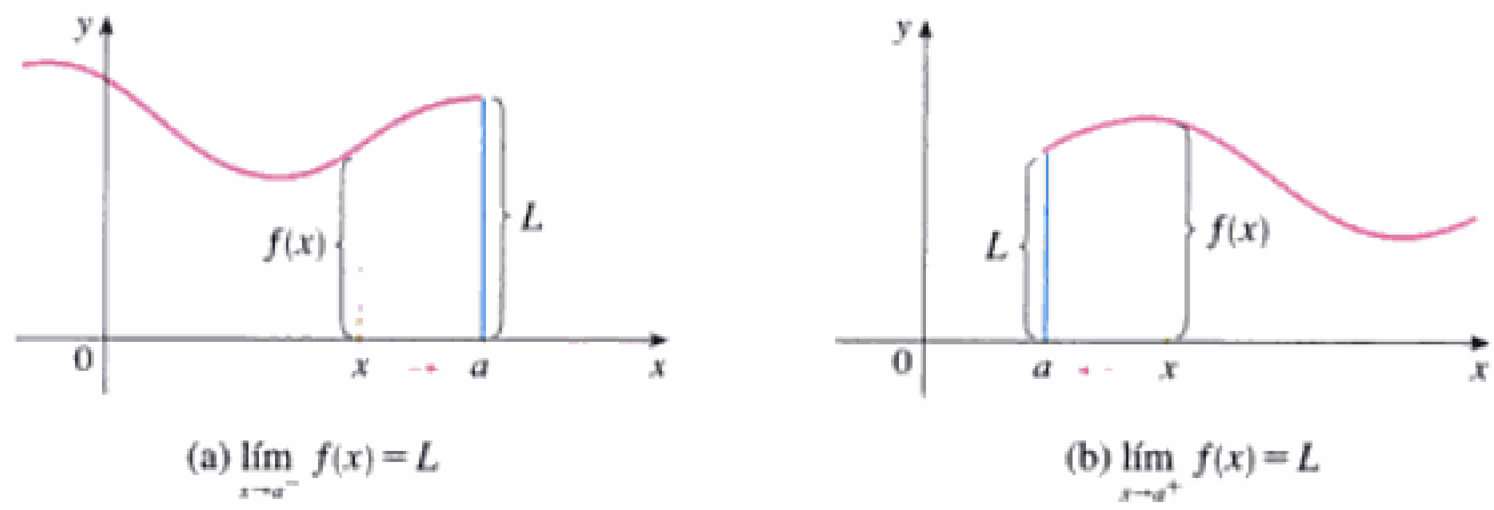


FIGURA 9 (a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la definición 1 con las definiciones de los límites laterales, vemos que se cumple lo siguiente:

$$\boxed{3} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

EJEMPLO 7 □ En la figura 10 se muestra la gráfica de una función g. Úsela para dar los valores (si existen) de los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

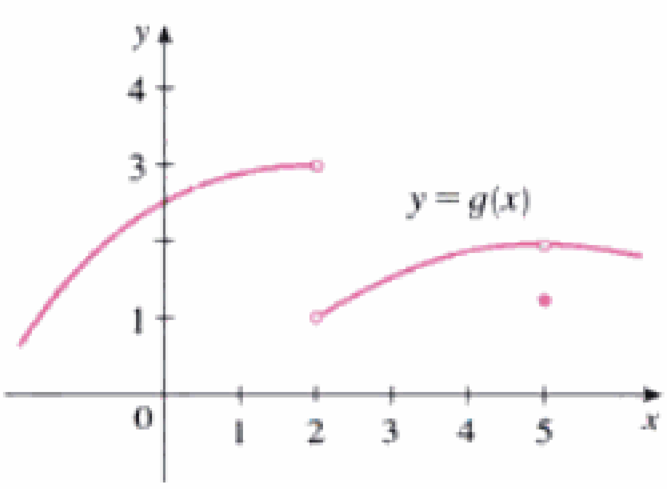


FIGURA 10

SOLUCIÓN A partir de la gráfica, vemos que los valores de $g(x)$ tienden a 3 cuando x tiende a 2 desde la izquierda, pero se acercan a 1 cuando x se aproxima a 2 desde la derecha. Por lo tanto,

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Como los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, con base en (3) concluimos que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

La gráfica también muestra que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{y} \qquad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) En esta ocasión, los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos y, por tanto, con base en (3), tenemos

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, advierta que $g(5) \neq 2$. □

Límites infinitos

EJEMPLO 8 □ Encuentre $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

SOLUCIÓN Conforme x se aproxima a 0, x^2 también se aproxima a 0 y $1/x^2$ se hace muy grande. (Vea la tabla de la izquierda.) De hecho, al ver la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ (Fig. 11), parece que los valores de $f(x)$ se pueden aumentar arbitrariamente, si se escoge

x lo bastante cerca de 0. De este modo, los valores de $f(x)$ no tienden a un número, de modo que $\lim(1/x^2)$ no existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

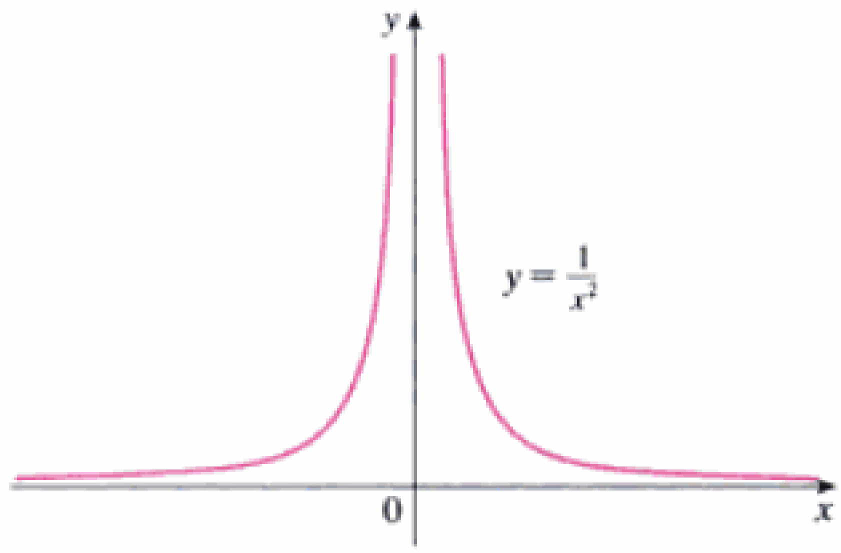


FIGURA 11

Para indicar la clase de comportamiento que se muestra en el ejemplo 8 usamos la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no significa que estemos considerando que ∞ es un número. Tampoco significa que existe el límite. Nada más expresa la manera en que *no* existe el límite: $1/x^2$ puede hacerse tan grande como se quiera con sólo tomar x lo suficientemente cerca de 0.

En general escribimos simbólicamente

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se hacen más grandes (o "crecen sin límite") a medida que x se acerca a a.

> **4 Definición** Sea una función f definida a ambos lados de a, excepto tal vez en el mismo a. Entonces
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera) tomando x suficientemente cerca de a, pero distinto de a.

Otra notación, para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \qquad \text{conforme} \qquad x \to a$$

De nuevo, el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ suele leerse como

"límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es infinito"

o "$f(x)$ se hace infinito al tender x a a"

o "$f(x)$ crece sin límite cuando x se acerca a a".

Esta definición se ilustra gráficamente en la figura 12.

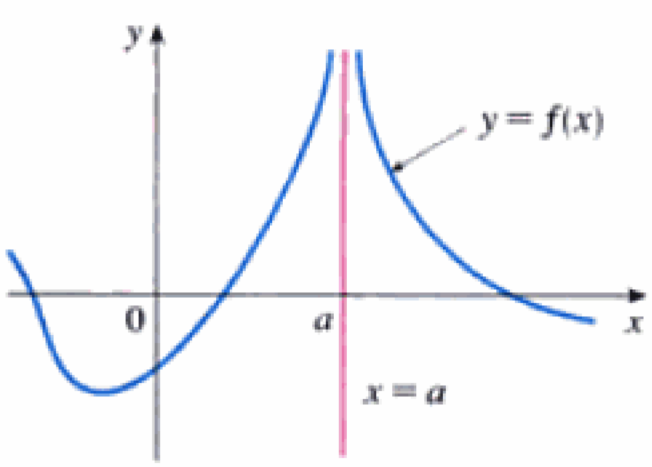


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

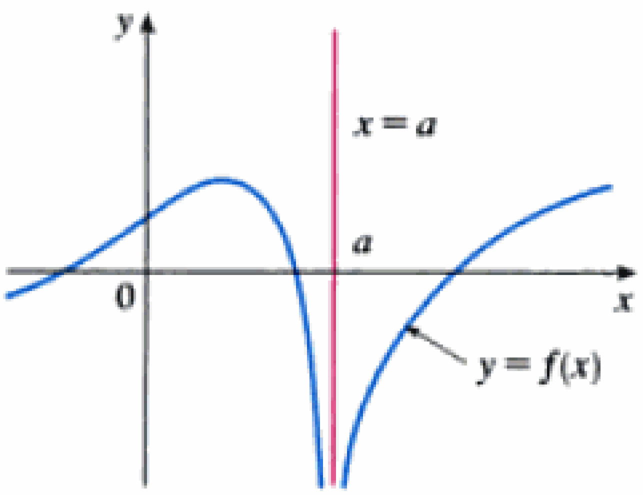


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Una clase similar de límite para funciones que crecen mucho en valores negativos cuando x se aproxima a a se define en la Definición 5 y se ilustra en la figura 13.

5 Definición Sea f la función definida en ambos lados de a quizá con excepción del mismo valor a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente grandes en valor negativo al tomar x suficientemente cerca de a pero distinto de a.

El símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ puede leerse como "el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a es "menos infinito" o $f(x)$ decrece sin límite cuando x se aproxima a a. Como ejemplo tenemos

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Se pueden dar definiciones semejantes para los límites infinitos laterales

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

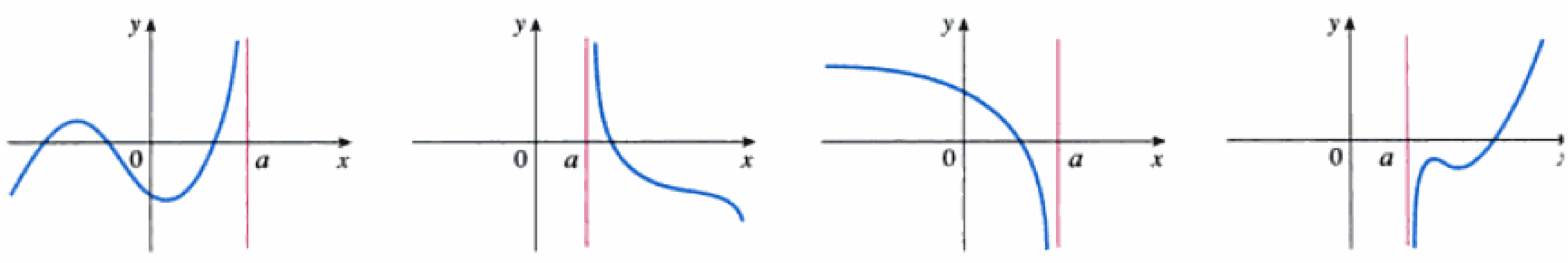
Recordando que "$x \to a^-$" significa que consideramos tan sólo valores de x que son menores que a, y en forma semejante "$x \to a^+$" significa que se consideran solamente $x > a$. En la figura 14 se tiene ejemplos de los cuatro casos.

6 Definición La recta $x = a$ se llama asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si por lo menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo el eje de las ordenadas es asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ porque $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. En la figura 14 la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno de los casos que se muestran. En general el conocimiento de las asíntotas verticales es de gran utilidad a la hora de trazar las gráficas.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

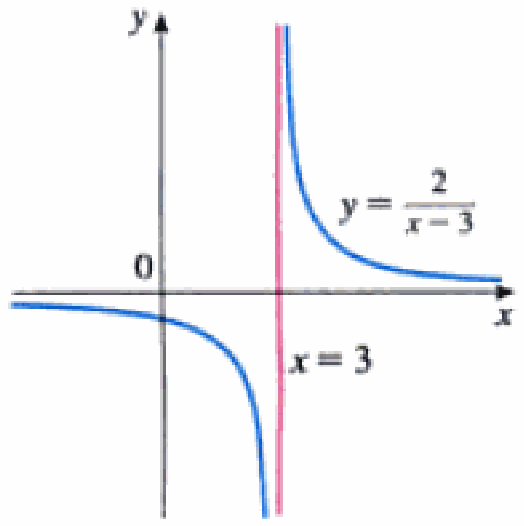


FIGURA 15

EJEMPLO 9 □ Hallar $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x-3}$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{x-3}$.

SOLUCIÓN Si x es cercano a 3 pero es mayor que 3 entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo pequeño y de este modo $2/(x - 3)$ es un número positivo grande. Así, intuitivamente se ve que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = \infty$$

De la misma manera si x está cerca de 3 pero es menor que 3 entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño y por tanto $2/(x - 3)$ es un número negativo grande. Así

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty$$

La gráfica de la curva $y = 2/(x - 3)$ está dada enla figura 15. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. □

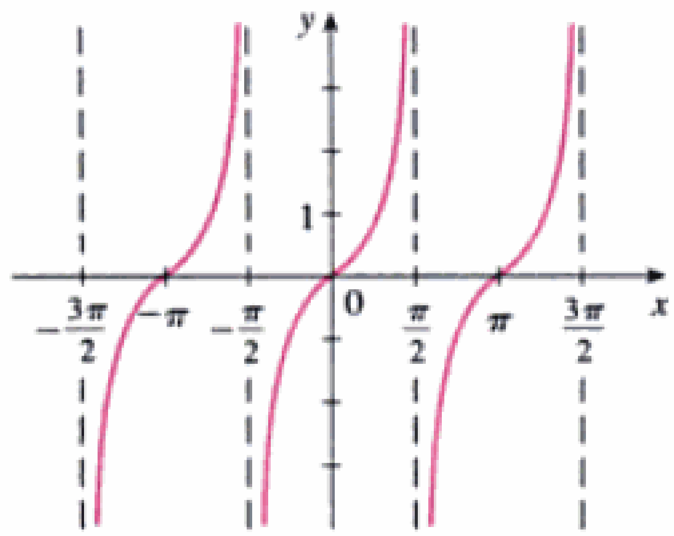


FIGURA 16
$y = \tan x$

EJEMPLO 10 □ Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN Dado que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

existen potencialmente asíntotas verticales donde $\cos x = 0$. De hecho como $\cos x \to 0^+$ cuando $x \to (\pi/2)]$ y $\cos x \to 0$ cuando $x \to (\pi/2)^+$, en tanto que $\operatorname{sen} x$ es positivo en la cercanía de $\pi/2$, tenemos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Esto muestra que la recta $x = \pi/2$. es una asíntota vertical. Razonar de manera semejante nos permitirá mostrar que las rectas $x. = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero, todas son asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$. La gráfica de la figura 16 confirma lo dicho. □

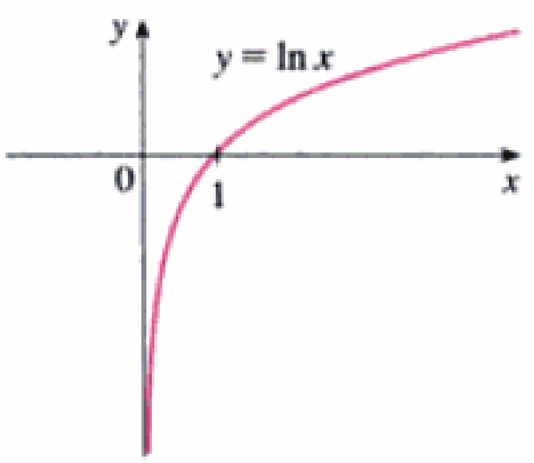


FIGURA 17
El eje y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural $y = \ln x$. De la Fig. 17 vemos que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

y así la recta $x = 0$ (el eje de las ordenadas) es una asíntota vertical. De hecho, lo mismo es verdad para la función $y = \log_a x$ siempre que $a > 1$. (Véanse las figuras 11 y 12 de la sección 1.6.)

2.2 Ejercicios

1. Explique con sus palabras qué se quiere dar a entender mediante la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla esta proposición y todavía $f(2) = 3$? Dé una explicación.

2. Explique qué se quiere dar a entender con

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación, ¿es posible que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ exista? Dé una explicación.

3. Explicar lo que significa.

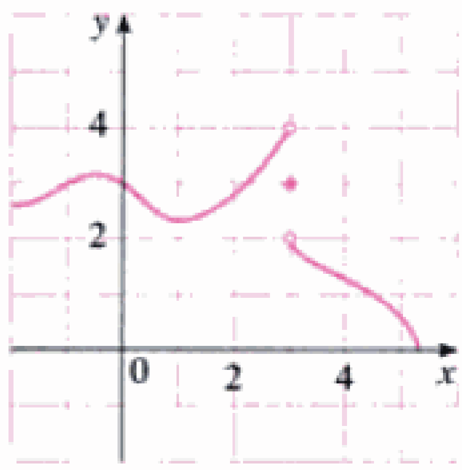
(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Para la función f cuya gráfica está dada, enuncie el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explicar.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 3} f(x)$

(e) $f(3)$

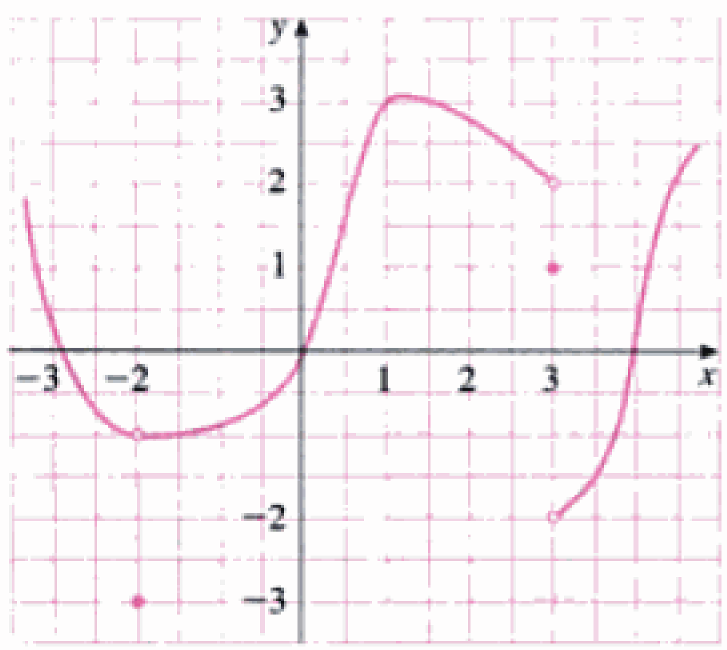


5. Para la función f cuya gráfica se da, proporcione el valor de la cantidad dada, si existe. Si no la hay, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

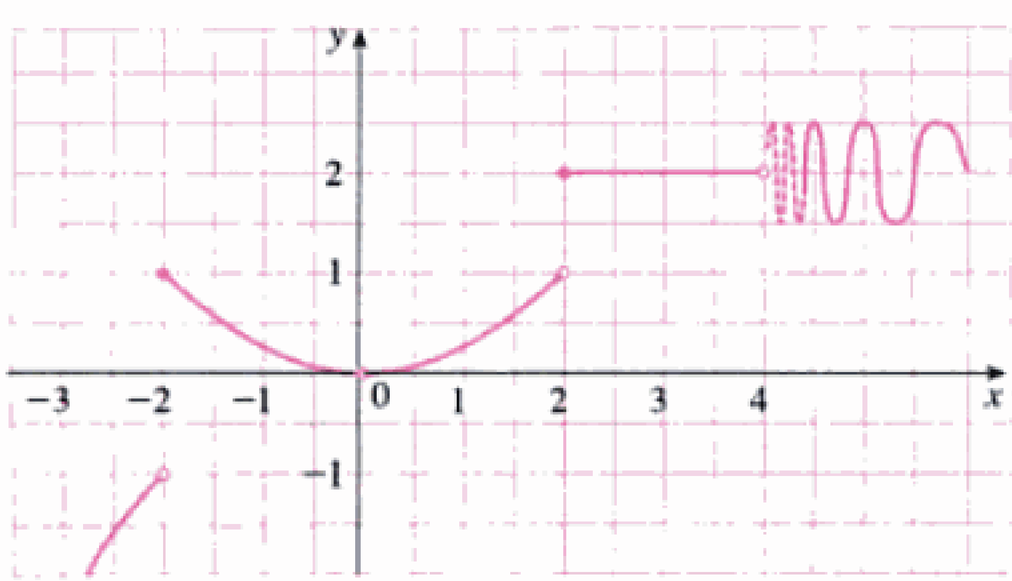
(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$ (f) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

(g) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ (h) $\lim_{x \to -2} f(x)$ (i) $f(-2)$



6. Para la función g cuya gráfica se da, enuncie el valor de la cantidad, si existe. Si no existe, explique.

(a) $\lim_{x \to -2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to -2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to -2} g(x)$



(d) $g(-2)$ (e) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

(g) $\lim_{x \to 2} g(x)$ (h) $g(2)$ (i) $\lim_{x \to 4^+} g(x)$

(j) $\lim_{x \to 4^-} g(x)$ (k) $g(0)$ (l) $\lim_{x \to 0} g(x)$

7. Dé el valor del límite, si existe, a partir de la gráfica dada. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} f(x)$

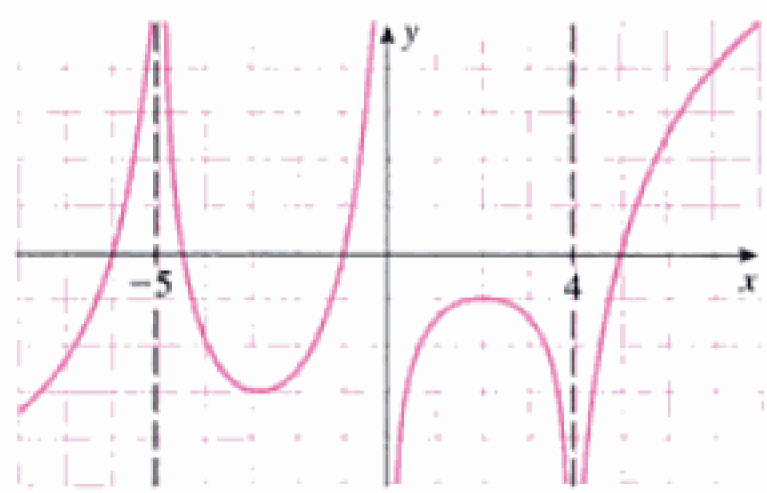
(d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (f) $\lim_{x \to 2} f(x)$

8. Para la función g cuya gráfica se muestra, conteste cada uno de los incisos.

(a) $\lim_{x \to -6} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^-} g(x)$

(c) $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ (d) $\lim_{x \to 4} g(x)$

(e) Ecuaciones de las asíntotas verticales.

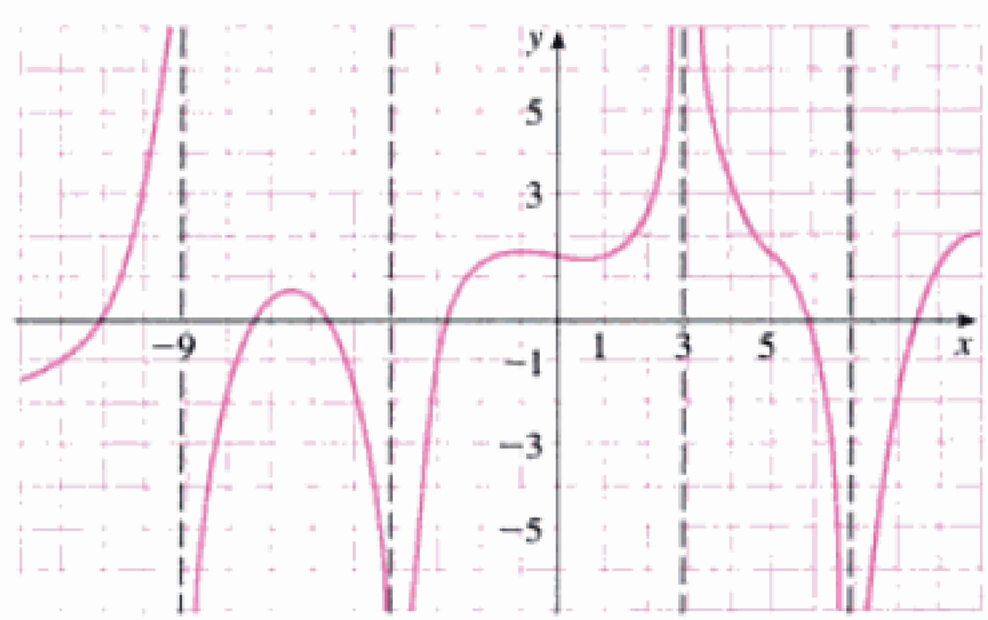


9. Para la función f cuya gráfica se muestra, conteste a lo que se pide en cada inciso.

(a) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 7} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -4} f(x)$

(d) $\lim_{x \to -9^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to -9^+} f(x)$

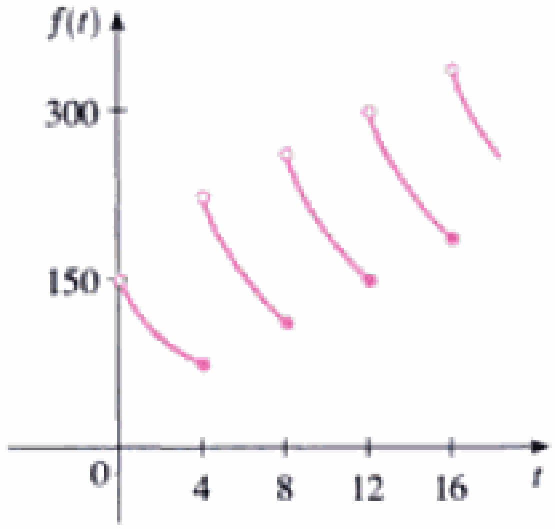
(f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento, cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en la corriente sanguínea, después de t horas. (Más adelante, seremos capaces de calcular la dosis y el intervalo con el fin de garantizar que la concentración de un medicamento no alcance un nivel peligroso.) Encuentre

$$\lim_{t \to 12^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11. Use la gráfica de la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para dar el valor de cada límite, si existe. Si no lo hay, explique por qué.
(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

12. Trazar la gráfica de la función siguiente y usarla para determinar los valores de a para los que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

13–14 □ Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

13. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$,
$f(3) = 3$, $f(-2) = 1$

14. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ es indefinido

15–20 □ Evalúe la función en los números dados correctamente hasta el sexto decimal. Usar los resultados para conjeturar el valor del límite o explique porqué no existe.

15. $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$;
$x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.99, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2, 1.1, 1.01$;
$\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$

16. $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 3x - 10}$;
$x = 3, 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, 2.00001$;
$\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 3x - 10}$

17. $F(x) = \dfrac{(1/\sqrt{x}) - \frac{1}{5}}{x - 25}$;
$x = 26, 25.5, 25.1, 25.05, 25.01, 24, 24.5, 24.9, 24.95, 24.99$;
$\lim_{x \to 25} \dfrac{(1/\sqrt{x}) - \frac{1}{5}}{x - 25}$

18. $F(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}$; $t = 1.5, 1.2, 1.1, 1.01, 1.001$; $\lim_{t \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}$

19. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; $x = 1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$;
$\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

20. $g(x) = \sqrt{x} \ln x$;
$x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$;
$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

21–28 □ Determinar el límite infinito.

21. $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{6}{x - 5}$

22. $\lim_{x \to 5^-} \dfrac{6}{x - 5}$

23. $\lim_{x \to 3} \dfrac{1}{(x - 3)^8}$

24. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - 1}{x^2(x + 2)}$

25. $\lim_{x \to -2^+} \dfrac{x - 1}{x^2(x + 2)}$

26. $\lim_{x \to \pi^-} \csc x$

27. $\lim_{x \to (-\pi/2)^-} \sec x$

28. $\lim_{x \to 5^+} \ln(x - 5)$

29. Determinar $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ y $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$
(a) evaluando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproxima a 1 por la derecha y por la izquierda.
(b) por un raciocinio como en el ejemplo 9, y
(c) a partir de la gráfica de f.

30. (a) Hallar las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x}{x^2 - x - 2}$$

(b) Confirme su respuesta del inciso a) con la gráfica de la función.

31. (a) Estime el valor del límite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ hasta cinco decimales. ¿Le parece familiar este número?
(b) Ilustre el inciso a) graficando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

32. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$ en el punto $(0, 1)$ es $\lim_{x \to 0} (2^x - 1)/x$. Estime la pendiente hasta tres decimales.

33. (a) Grafique la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y haga un acercamiento al punto donde la gráfica cruza al eje de las ordenadas para estimar el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(b) Compruebe su respuesta evaluando $f(x)$ para valores de x que se aproxima a cero.

34. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{6^x - 2^x}{x}$$

graficando la función $y = (6^x - 2^x)/x$. Dé su respuesta correcta hasta dos decimales.

(b) Compruebe la respuesta del inciso a) evaluando $f(x)$ para valores de x que tiendan a 0.

35. (a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05, y estime el valor de

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{2^x}{1000}\right)$$

(b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Vuelva a estimar.

36. (a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.

(b) Suponga el valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

(c) Evalúe $h(x)$ para valores sucesivamente más pequeños de x hasta que, por último, llegue a valores de 0 para esta función. ¿Confía en que su suposición del inciso b) es correcta? Explique por qué terminó obteniendo valores de 0. (En la Sec. 4.4 se explica un método para evaluar el límite.)

(d) Grafique la función h en la pantalla $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Amplifique (*zoom*) el punto donde la gráfica cruza el eje y con el fin de estimar el límite de $h(x)$ cuando x tiende a 0. Siga haciendo acercamientos hasta que observe las distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso c).

37. Graficar la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en la pantalla $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Luego haga varios acercamientos al origen. Comente respecto del comportamiento de esta función.

38. En la teoría de la relatividad la masa de la partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo, de la partícula y c es la velcidad de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c^-$?

39. Usar una gráfica para estimar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales de la curva

$$y = \tan(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

entonces, se encuentran las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

40. (a) Use evidencias numérica y gráfica para conjeturar el valor del límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) ¿Qué tan próximo tiene que estar x a 1 para garantizar que la función del inciso a) está a una distancia menor que 0.5 de su límite?

2.3 Cálculo de límites utilizando las leyes de los límites

En la sección 2.2 usamos calculadoras y gráficas para presumir los valores de los límites, pero vimos que esos métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. En esta sección, aplicaremos las propiedades siguientes de los límites, conocidas como *leyes de los límites*, para calcularlos.

Leyes de los límites Supóngase que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

existen. Entonces

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Estas leyes se pueden expresar verbalmente como sigue:

Ley de la suma
1. El límite de una suma es la suma de los límites.

Ley de la diferencia
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

Ley del múltiplo constante
3. El límite de la multiplicación de una constante por una función es la multiplicación de la constante por el límite de la función.

Ley del producto
4. El límite de un producto es el producto de los límites.

Ley del cociente
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0).

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ está cercana a L y $g(x)$ lo está de M, resulta razonable concluir que $f(x) + g(x)$ está cercana a $L + M$. Esto nos proporciona la base intuitiva para creer que la Ley 1 es verdad. En la sección 2.4 daremos una definición precisa de límite y la usaremos para demostrar esta ley. La demostración de las leyes restantes se da en el apéndice F.

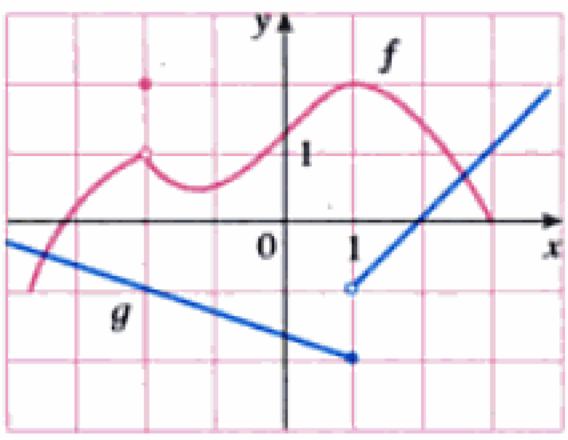


FIGURA 1

EJEMPLO 1 □ Use las leyes de los límites y las gráficas de f y g de la figura 1 para evaluar los límites siguientes, si existen.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

(a) A partir de las gráficas de f y g, vemos que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(por la ley 1)} \\ &= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(por la ley 3)} \\ &= 1 + 5(-1) = -4 \end{aligned}$$

(b) Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

De suerte que no podemos usar la ley 4. El límite dado no existe, el límite por la izquierda no es el mismo que el de la derecha

(c) Las gráficas muestran que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Debido a que el límite del denominador es 0, no podemos aplicar la ley 5. El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a 0 en tanto que el numerador se aproxima a un valor no nulo. □

Si aplicamos la ley del producto repetidas veces, con $g(x) = f(x)$, obtenemos la ley siguiente.

Ley de la potencia

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ en donde n es un entero positivo

En la aplicación de estas seis leyes de los límites, necesitamos usar dos límites especiales:

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

Estos límites son obvios desde un punto de vista intuitivo (establézcalos verbalmente o grafique $y = c$ y $y = x$), pues en los ejercicios para la Sección 2.4 se piden demostraciones basadas sobre la definición precisa.

Si en la ley 6 ponemos ahora $f(x) = x$ en la ley 6 y aplicamos la ley 8, obtenemos otro útil límite especial.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo

Se cumple un límite similar para las raíces, como sigue. (Para raíces cuadradas, se indica la demostración en el Ejercicio 35 de la Sección 2.4).

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo

(Si n es par, consideramos que $a > 0$.)

De modo más general, tenemos la siguiente ley, que se demuestra como consecuencia de La Ley 10 de la Sección 2.5.

Ley de la raíz

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo

[Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

EJEMPLO 2 ▫ Evalúe los límites siguientes y justifique cada paso

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

(b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por las leyes 2 y 1)}\\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por la 3)}\\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(por las 9, 8, y 7)}\\ &= 39\end{aligned}$$

(b) Empezamos con la ley 5, pero su aplicación sólo se justifica plenamente en la etapa final, cuando vemos que los límites del numerador y del denominador existen, y este último no es 0.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x\to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2} (5 - 3x)} \qquad \text{(por la 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2 \lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3 \lim_{x\to -2} x} \qquad \text{(por la 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \qquad \text{(por la 9, 8 y 7)}$$

$$= -\frac{1}{11}$$

□

NOTA □ Si hacemos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habríamos obtenido la respuesta correcta del ejemplo 2a) sustituyendo x con 5. De manera análoga, la sustitución directa da la respuesta correcta en el inciso b). Las funciones del ejemplo 2 son un polinomio y una función racional, respectivamente, y el uso semejante de las leyes de los límites prueba que la sustitución directa siempre funciona para este tipo de funciones (véase los Ejercs. 51 y 52). Expresamos este hecho del modo siguiente:

> Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, entonces
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman *continuas en a* y se estudian en la sección 2.5. Sin embargo, no todos los límites se pueden evaluar por sustitución directa, como los ejemplos siguientes hacen ver.

EJEMPLO 3 □ Encuentre $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No podemos hallar el límite al sustituir $x = 1$ porque $f(1)$ no está definido. tampoco podemos aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. En lugar de ello, necesitamos algo de álgebra. Factorizamos el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando x tiende a 1, tenemos $x \neq 1$ y, por tanto, $x - 1 \neq 0$. Por consiguiente, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} (x + 1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

El límite de este ejemplo surgió en la sección 2.1, cuando tratábamos de hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). □

□ **Newton y los límites**

Isaac Newton nació el día de Navidad, en 1642, el año en que murió Galileo. Cuando ingresó a la Universidad de Cambridge, en 1661, no sabía mucho de matemáticas, pero aprendió con rapidez leyendo a Euclides y Descartes y asistiendo a las conferencias de Isaac Barrow. Cambridge se cerró debido a la epidemia de peste de 1665 y 1666, y Newton regresó a casa a reflexionar en lo que había aprendido. Esos dos años fueron asombrosamente productivos porque hizo cuatro de sus principales descubrimientos: 1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; 2) su trabajo sobre el cálculo diferencial e integral; 3) sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal, y 4) sus experimentos del prisma acerca de la naturaleza de la luz y del color. Debido a cierto temor a la controversia y a la crítica, se mostró renuente a publicar sus descubrimientos y fue hasta 1687, a instancias del astrónomo Halley, que publicó *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton expuso su versión del cálculo y lo usó para investigar la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de los planetas y de los cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en las operaciones para hallar las áreas y los volúmenes que realizaron los antiguos eruditos griegos, como Eudoxo y Arquímedes. Aun cuando los aspectos de la idea de límite se encuentran implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxo y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, los precursores inmediatos de Newton en el desarrollo del cálculo, no usaron los límites. Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente al respecto. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se acercan más que cualquier diferencia dada". Newton expresó que el límite era el concepto básico del cálculo, pero fue tarea de matemáticos posteriores, como Cauchy, aclarar sus ideas acerca de los límites.

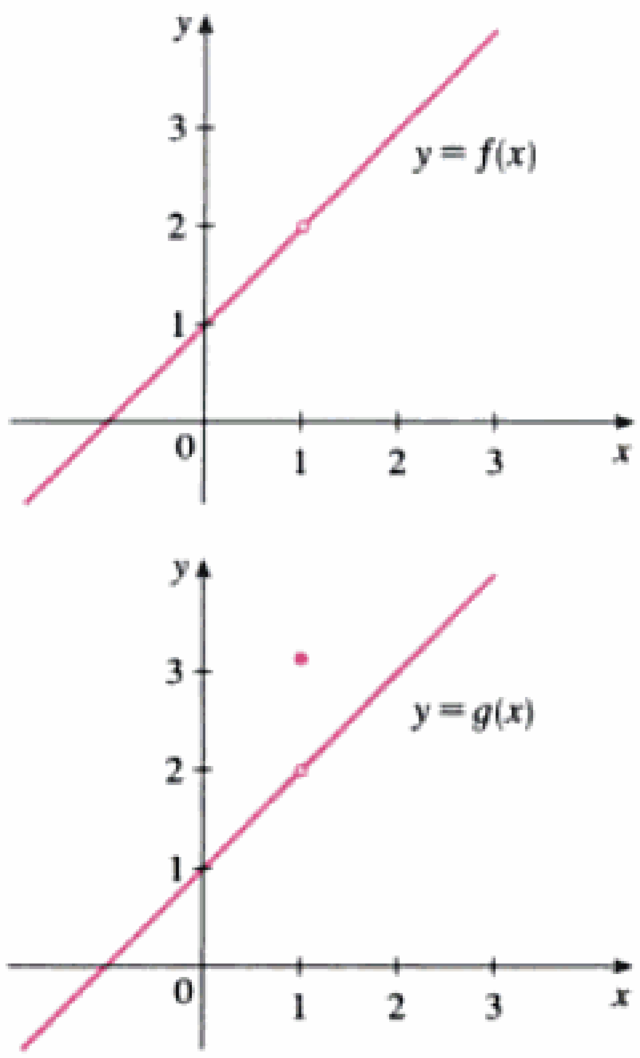


FIGURA 2
Gráficas de la función f, del ejemplo 3, y g del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 □ Encuentre $\lim_{x \to 1} g(x)$ donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN En este caso, g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor de un límite cuando x tiende a 1 no depende del valor de la función en 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, tenemos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

□

Note que los valores de las funciones de los ejemplos 3 y 4 son idénticos, excepto cuando $x = 1$ (Fig. 2), de modo que tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

EJEMPLO 5 □ Evalúe $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si definimos

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

entonces, como en el ejemplo 3, no podemos calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ haciendo $h = 0$, ya que $F(0)$ no está definido. Pero si simplificamos $F(h)$ algebraicamente, encontramos

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que sólo consideramos $h \neq 0$ cuando se hace que h tienda a 0.) De este modo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

□

EJEMPLO 6 □ Encuentre $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No podemos aplicar la ley del cociente de inmediato, puesto que el límite del denominador es 0. En el presente caso, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0}(t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Este cálculo confirma lo que se conjeturó en el ejemplo 2 de la sección 2.2 □

Lo mejor para calcular algunos límites es hallar en primer lugar los límites por la izquierda y por la derecha. El teorema siguiente es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Afirma que existe un límite bilateral si y sólo si los dos límites laterales existen y son iguales.

1 Teorema $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y sólo si $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Cuando calculamos límites laterales aplicamos el hecho de que las leyes de los límites también se cumplen para los límites de este tipo.

EJEMPLO 7 □ Demuestre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

□ Según la figura 3, el resultado del ejemplo 7 resulta plausible.

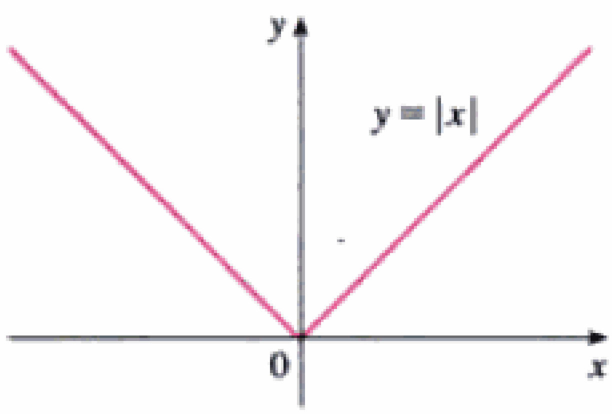


FIGURA 3

Como $|x| = x$ para $x > 0$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

Por lo tanto, por el teorema 1,

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

□

EJEMPLO 8 □ Pruebe que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

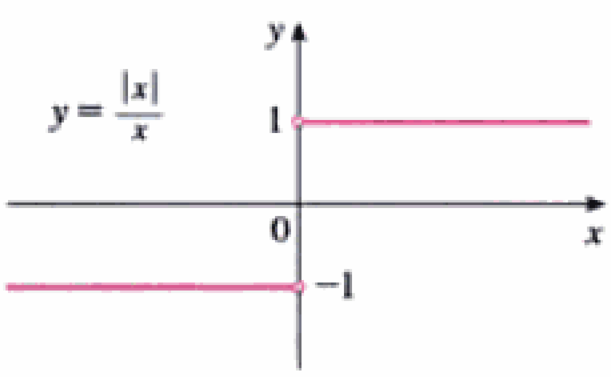


FIGURA 4

Como los límites de la derecha y de la izquierda son diferentes, por el teorema 1 se concluye que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. La figura 4 muestra la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ y corrobora los límites que encontramos.

□

EJEMPLO 9 □ Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determinar si existe $\lim_{x\to 4} f(x)$.

□ Esto se muestra en el ejemplo 3 en la sección 2.4 puesto que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

Dado que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los dos límites laterales son iguales. Así, el límite existe y

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

La gráfica de f se muestra en la figura 5.

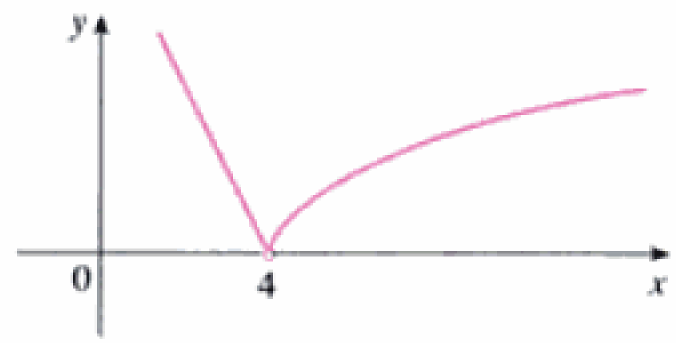


FIGURA 5

EJEMPLO 10 □ La **función máximo entero** se define con $[\![x]\!]$ = el entero más grande que es menor o igual que x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe.

Otras notaciones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$.

SOLUCIÓN En la figura 6, se muestra la gráfica de la función máximo entero. Puesto que. $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Dado que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tenemos

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

En virtud de que estos límites laterales no son iguales, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe por el teorema 1. □

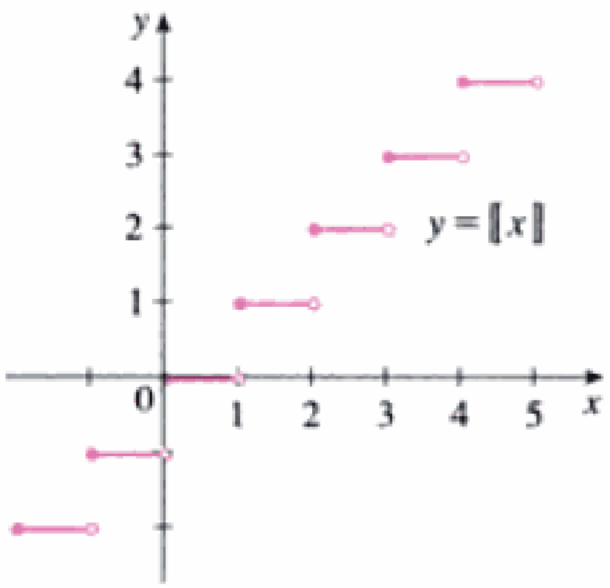


FIGURA 6
Función máximo entero

En los dos teoremas siguientes se dan dos propiedades adicionales de los límites. Las demostraciones se dan en el apéndice F.

2 Teorema Si $f(x) \leqslant g(x)$ cuando x está cerca de a (excepto posiblemente en a), y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 Teorema de la compresión Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ cuando x está cerca de a (excepto quizá en a), y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

entonces $$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

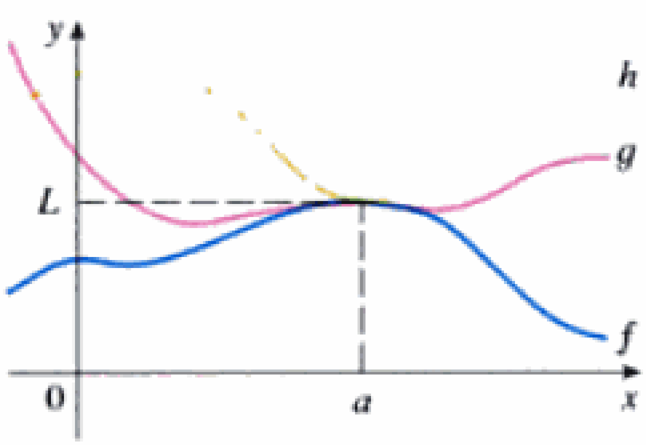


FIGURA 7

En la figura 6 se ilustra el teorema de la compresión, a veces conocido como teorema del emparedado o del apretón. Afirma que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$, cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, entonces es forzoso que g tenga el mismo límite L en a.

EJEMPLO 11 □ Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN En primer lugar, note que *no podemos* aplicar

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el Ejem. 4, Sec. 2.2). Sin embargo, como

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$$

tenemos, como se ilustra mediante la figura 8,

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

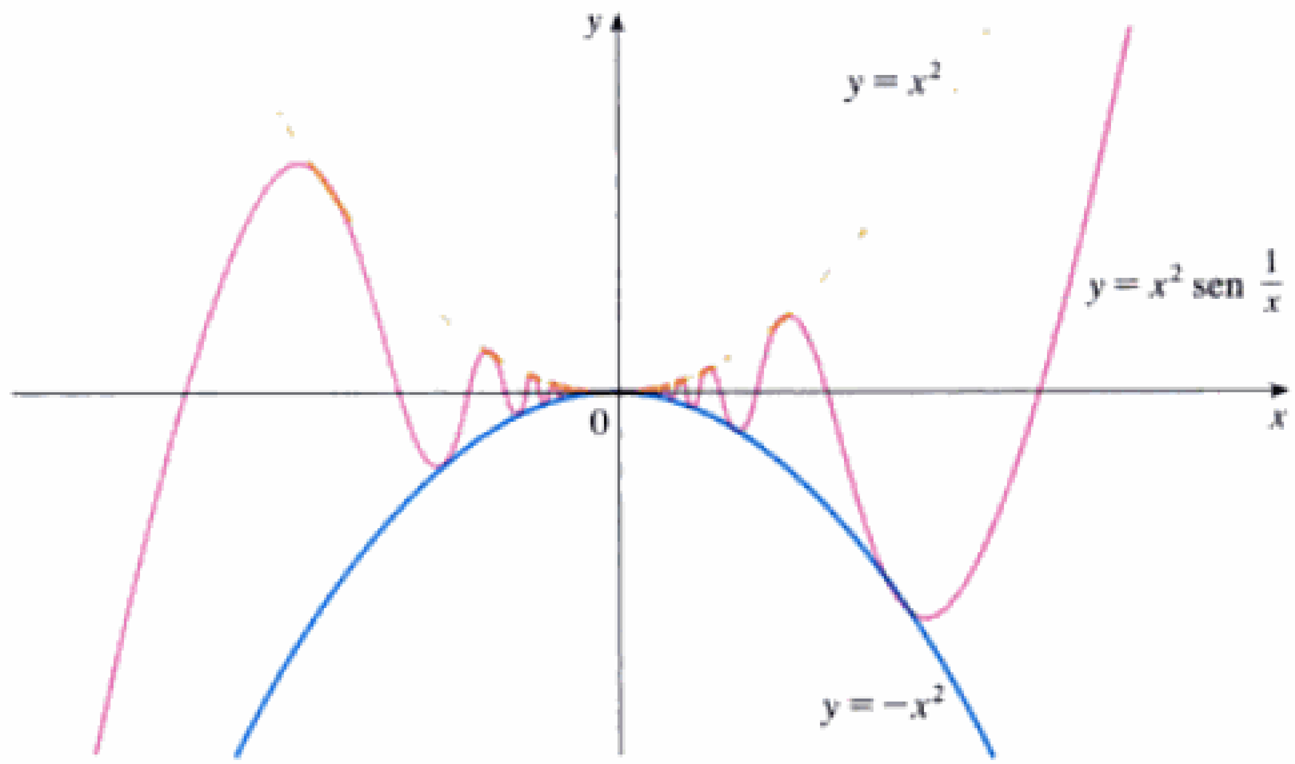


FIGURA 8

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$$

Al tomar $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, y $h(x) = x^2$ en el teorema de la compresión, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

□

2.3 Ejercicios

1. Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 8$$

encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to a} [f(x) + h(x)]$

(b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^2$

(c) $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{h(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$

(e) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$

(f) $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

(g) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

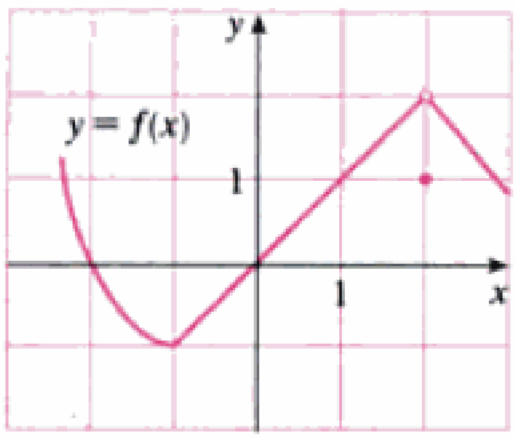
(h) $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

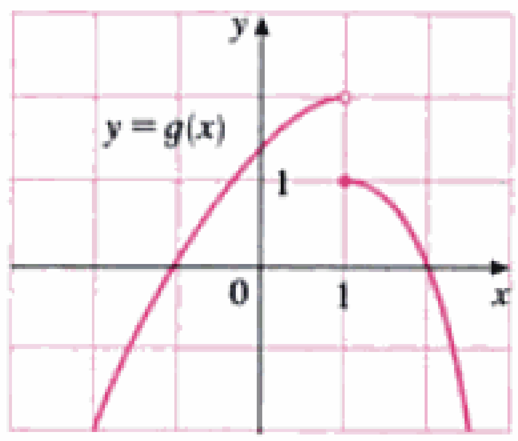
2. Se dan las gráficas de f y g. Úselas para evaluar cada límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} x^3 f(x)$ (f) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$





3–9 □ Evalúe el límite y justifique cada paso indicando la(s) ley(es) de los límites apropiada(s).

3. $\lim_{x\to 4}(5x^2-2x+3)$

4. $\lim_{x\to 3}(x^3+2)(x^2-5x)$

5. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2+4x-3}$

6. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^4+x^2-6}{x^4+2x+3}\right)^2$

7. $\lim_{t\to -2}(t+1)^9(t^2-1)$

8. $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4+3u+6}$

9. $\lim_{x\to 4^-}\sqrt{16-x^2}$

10. (a) ¿Qué está mal en la ecuación siguiente?

$$\frac{x^2+x-6}{x-2}=x+3$$

(b) En vista del inciso a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)$$

es correcta.

11–28 □ Evalúe el límite, si existe.

11. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-x+12}{x+3}$

12. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$

13. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

14. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

15. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(h-5)^2-25}{h}$

16. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

17. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^4-1}{h}$

18. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

19. $\lim_{t\to 9}\dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

20. $\lim_{t\to 2}\dfrac{t^2+t-6}{t^2-4}$

21. $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$

22. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

23. $\lim_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

24. $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]$

25. $\lim_{t\to 0}\left[\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right]$

26. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

27. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}}{x-2}$

28. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

29. (a) Estimar el valor de

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

viendo la gráfica de la función $f(x)=x/(\sqrt{1+3x}-1)$.

(b) Construir una tabla de valores de $f(x)$ para x cerca de 0 y conjeturar el valor del límite.

(c) Usar las leyes de los límites para probar la corrección de la conjetura.

30. (a) Usar una gráfica de

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to 0}f(x)$ a dos decimales correctos.

(b) Usar una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con cuatro decimales correctos.

(c) Usar las leyes de los límites para encontrar el valor exacto del límite.

31. Aplique el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x\to 0}x^2\cos 20\pi x=0$. Ilustre graficando las funciones $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2\cos 20\pi x$, y $h(x)=x^2$ en la misma pantalla.

32. Aplique el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}=0$$

Ilustre graficando las funciones, f, g y h (en la notación de ese teorema) en la misma pantalla.

33. Si $1\leq f(x)\leq x^2+2x+2$ para toda x, encuentre $\lim_{x\to -1}f(x)$.

34. Si $3x\leq f(x)\leq x^3+2$ para $0\leq x\leq 2$, evalúe $\lim_{x\to 1}f(x)$.

35. Pruebe que $\lim_{x\to 0}x^4\cos\dfrac{2}{x}=0$.

36. Pruebe que $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}=0$.

37–42 □ Encuentre el límite, si existe. Si no lo hay, explique por qué.

37. $\lim_{x\to -4}|x+4|$

38. $\lim_{x\to -4^-}\dfrac{|x+4|}{x+4}$

39. $\lim_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$

40. $\lim_{x\to 1.5}\dfrac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$ **42.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

43. La *función signum* (o función signo), que se denota sgn, se define mediante

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Trazar su gráfica.
(b) Hallar cada uno de los límites que siguen o explicar por qué no existe.
(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$
(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

44. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$
(b) ¿Existe $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$?
(c) Trazar la gráfica de f.

45. Sea $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.
(a) Hallar
(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} F(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F(x)$
(b) ¿Existe $\displaystyle\lim_{x\to 1} F(x)$?
(c) Trazar la gráfrica de F.

46. Sea

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada uno de los límites siguientes, si existen.
(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} h(x)$
(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} h(x)$ (v) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} h(x)$ (vi) $\displaystyle\lim_{x\to 2} h(x)$
(b) Trace la gráfica de h.

47. (a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función mayor entero definida en el ejemplo 10, evalúe.
(i) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to -2.4} [\![x]\!]$
(b) Si n es un entero, evalúe.
(i) $\displaystyle\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$
(c) ¿Para cuáles valores de a existe $\displaystyle\lim_{x\to a} [\![x]\!]$?

48. Sea $f(x) = x - [\![x]\!]$.
(a) Trace la gráfica de f.
(b) Si n es un entero, evalúe.
(i) $\displaystyle\lim_{x\to n^-} f(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to n^+} f(x)$
(c) ¿Para cuáles valores de a existe $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$?

49. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ existe pero no es igual a $f(2)$.

50. En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorenz.

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Encuentre $\displaystyle\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué se necesita un límite por la izquierda?

51. Si p es un polinomio, demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

52. Si r es una función racional, aplique el resultado del ejercicio 51 para demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ para todo número a en el dominio de r.

53. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

54. Muestre por medio de un ejemplo que $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque ni $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\displaystyle\lim_{x\to a} f(g)$ existan.

55. Muestre por medio de un ejemplo que $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ puede existir aunque ni $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\displaystyle\lim_{x\to a} f(g)$ existan.

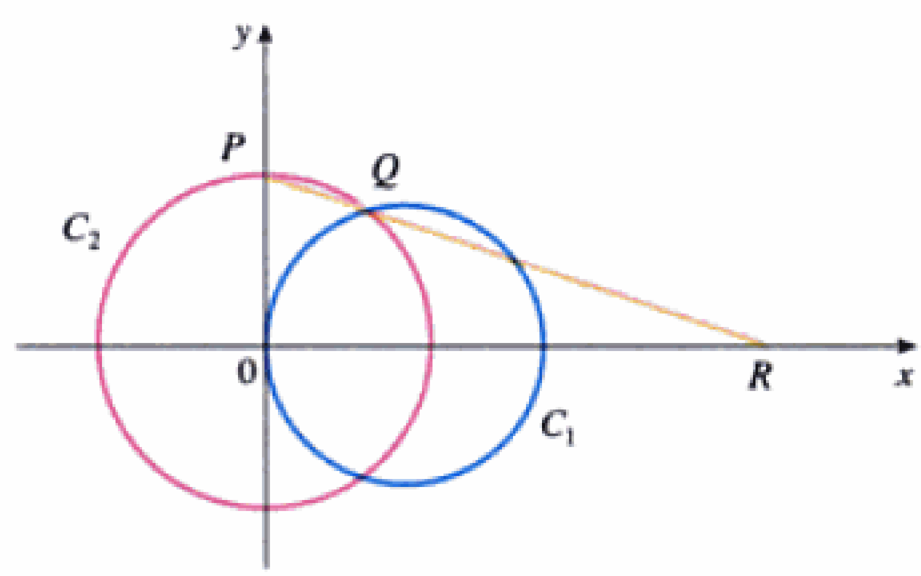
56. Evaluar $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

57. ¿Hay un número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre los valores de a y del límite.

58. En la figura se muestra un círculo fijo C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y un círculo C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. ¿Qué le sucede a R al contraerse C_2; es decir, cuando $r \to 0^+$?



2.4 Definición precisa de límite

La definición intuitiva de límite dada en la sección 2.2 es inadecuada para ciertos propósitos, porque frases tales como "x cercano a 2" y "$f(x)$ se acerca cada vez más a L" son vagas. Para poder demostrar en forma concluyente que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10{,}000}\right)=0.0001 \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

debemos precisar la definición de límite.

Para motivar la definición de límite consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\neq 3\\ 6 & \text{si } x=3\end{cases}$$

Intuitivamente es claro que cuando x está cerca de 3 pero es distinto de 3, entonces $f(x)$ está cerca de 5 y por tanto, $\lim_{x\to 3} f(x)=5$.

Para obtener información más detallada de cómo varía $f(x)$ cuando x está cerca de 3, preguntamos lo siguiente:

¿Qué tan cerca de 3 debe estar x para que $f(x)$ diste de 5 una distancia menor que 0.1?

□ Ya es tradición usar la letra δ en esta situación.

La distancia de x a 3 es $|x-3|$ y la distancia de 5 a $f(x)$ es $|f(x)-5|$ de modo que nuestro problema es el de encontrar un número δ tal que

$$|f(x)-5|<0.1 \qquad \text{si} \qquad |x-3|<\delta \text{ pero } x\neq 3$$

Si $|x-3|>0$, entonces $x\neq 3$, de manera que una formulación equivalente de nuestro problema es la de encontrar un número δ tal que

$$|f(x)-5|<0.1 \qquad \text{si} \qquad 0<|x-3|<\delta$$

Nótese que si $0<|x-3|<(0.1)/2=0.05$, entonces

$$|f(x)-5|=|(2x-1)-5|=|2x-6|=2|x-3|<0.1$$

esto es, $$|f(x)-5|<0.1 \qquad \text{si} \qquad 0<|x-3|<0.05$$

De modo que una respuesta para nuestro problema está dada por $\delta=0.05$; es decir, si x está a distancia no mayor que 0.05 de 3 entonces $f(x)$ estará a distancia no mayor que 0.1 de 5.

Si cambiamos el número 0.1 en nuestro problema, al número más pequeño 0.01 entonces con el mismo procedimiento encontramos que $f(x)$ estará a distancia no mayor que 0.01 del valor 5 siempre que x no diste de 3 más de $(0.01)/2=0.005$:

$$|f(x)-5|<0.01 \qquad \text{si} \qquad 0<|x-3|<0.005$$

De manera semejante,

$$|f(x)-5|<0.001 \qquad \text{si} \qquad 0<|x-3|<0.0005$$

si en vez de tolerar un error de 0.1 o 0.01 o 0.001 queremos una precisión con una tolerancia de un número arbitrario ε (la letra épsilon) encontramos, como anteriormente,

FIGURA 1

que

$$\boxed{1} \qquad |f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta es una forma precisa de decir que $f(x)$ es cercano a 5 cuando x está cerca de 3 porque (1) dice que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cerca de 5 tomando los valores de x a una distancia de $\varepsilon/2$ desde el valor 3 (pero $x \neq 3$).

Observe que (1) se puede reescribir como

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \qquad (x \neq 3)$$

y esto se ilustra en la Figura 1. Al tomar los valores de ($x \neq 3$) dentro del intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$ podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén en el intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Usando (1) como modelo daremos una definición precisa de límite.

2 Definición Sea f una función definida sobre un intervalo abierto que contiene el número a, excepto cuando a se define a sí misma. Entonces decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende o se aproxima a a es L** y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para cada número $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Otra forma de escribir el último renglón de esta definición es

$$\boxed{\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Ya que $|x - a|$ es la distancia desde x hasta a y $|f(x) - L|$ es la distancia de $f(x)$ a L, y dado que ε puede ser arbitrariamente pequeño, la definición de un límite puede expresarse en palabras como sigue:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse arbitrariamente pequeña al tomar la distancia entre x y a suficientemente pequeña (pero no nula).

También puede expresarse de la manera que sigue,

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden ser tan cercanos a L como se desee al tomar x lo suficientemente cercano a a (pero no igual a a).

También podemos reformular la definición 2 en términos de intervalos al observar que la desigualdad $|x - a| < \delta$ es quivalente a $-\delta < x - a < \delta$ que a su vez puede escribirse como $a - \delta < x < a + \delta$. También $0 < |x - a|$ es verdad si y sólo si, $x - a \neq 0$, esto es, $x \neq a$. De forma semejante, la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ es equivalente al par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Por lo tanto, en términos de intervalos la definición 2 puede enunciarse como sigue:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ (sin importar lo pequeño del valor ε) podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si x se encuentra en el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$ entonces $f(x)$ está en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Este enunciado lo interpretamos geométricamente representando una función por un diagrama de flechas como en la figura 2 donde f mapea un subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre otro subconjunto de $\mathbb{R}$.

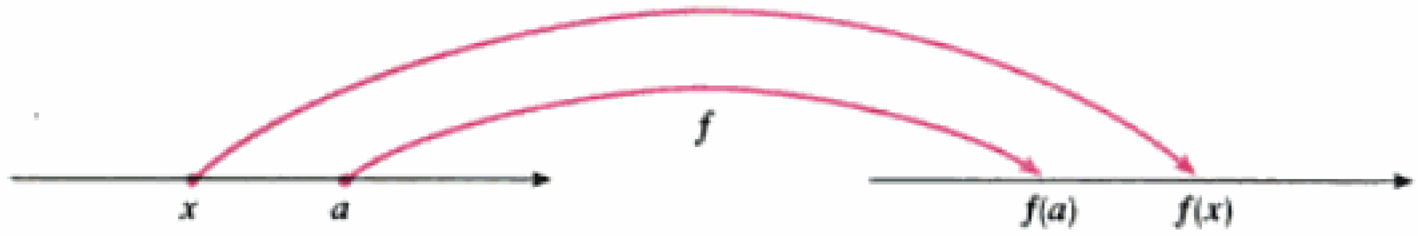


FIGURA 2

La definición de límite dice que si se da cualquier pequeño intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ alrededor de L entonces podemos encontrar un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ alrededor de tal suerte que f mapea todos los puntos del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ (con la posible excepción de a) en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Véase la figura 3.)

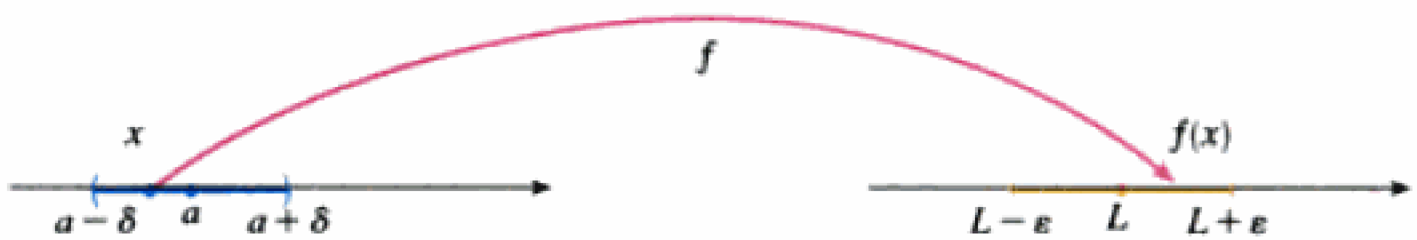


FIGURA 3

Otra intrepretación geométrica de los límites puede darse en términos de la gráfica de una función. Si se da $\varepsilon > 0$ entonces trazamos las horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ y la gráfica de f (véase la figura 4). Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ entonces podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringimos a x a enontrarse en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ y tomamos $x \neq a$ entonces la curva $y = f(x)$ está entre las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$. (Véase la figura 5). El lector se da cuenta de que si un valor de δ es bueno entonces también lo será cualquier valor menor de δ.

Es importante darse cuenta de que el proceso ilustrado en las figuras 4 y 5 debe ser efectivo para cada número positivo ε sin importar lo pequeño que sea. La figura 6 muestra que si se toma un ε más pequeño, entonces será necesario un δ más pequeño.

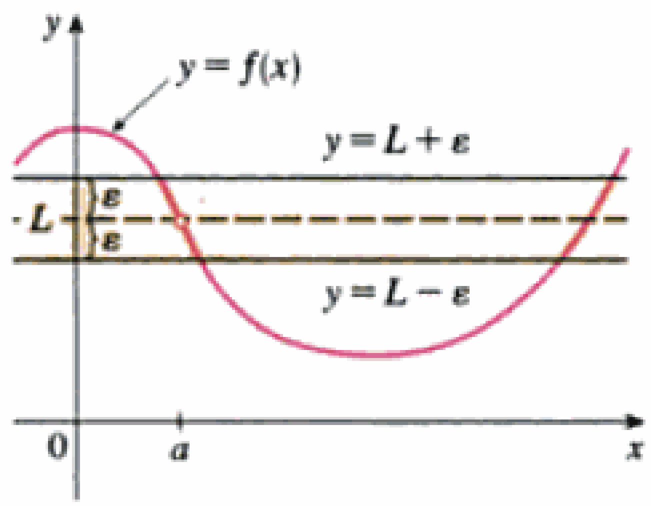


FIGURA 4

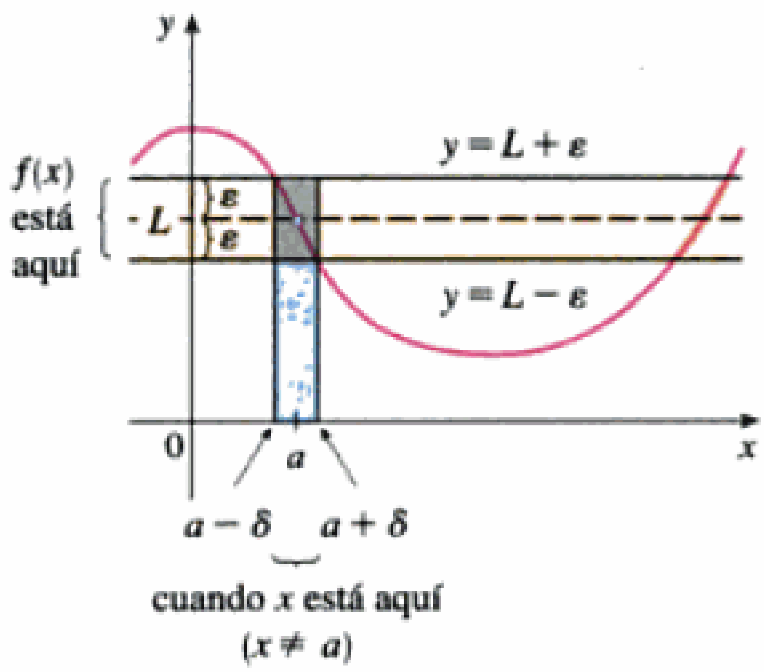


FIGURA 5

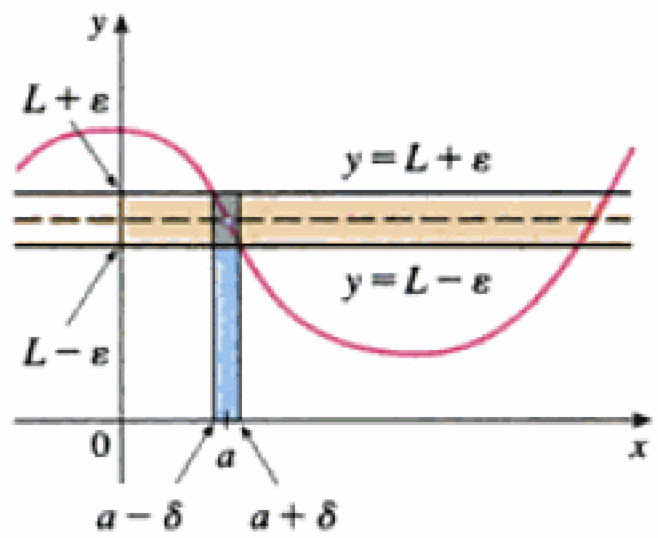


FIGURA 6

EJEMPLO 1 □ Use una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2 \quad \text{siempre que} \quad |x - 1| < \delta$$

En otras palabras encuéntrese un número δ que corresponda a $\varepsilon = 0.2$ en la definición de un límite para la función $f(x) = x^3 - 5x + 6$, con $a = 1$ y $L = 2$.

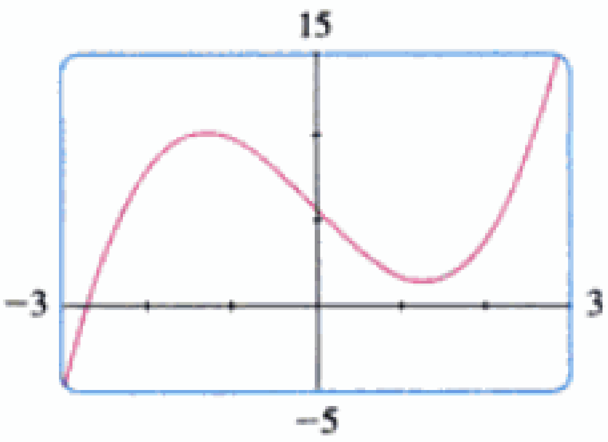


FIGURA 7

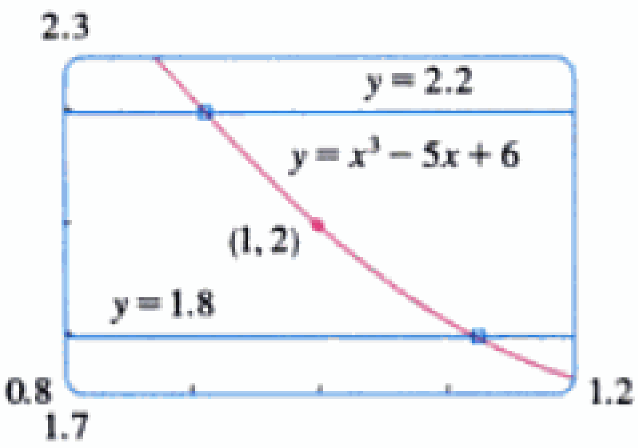


FIGURA 8

SOLUCIÓN En la figura 7 se muestra una gráfica de f; nos interesa la región cercana al punto (1,2). Nótese que se puede reescribir la desigualdad

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

como
$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

De modo que tenemos que determinar los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 5x + 6$ esté entre las dos horizontales $y = 1.8$ y y 2.2. Por tanto, hacemos las tres gráficas de $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1.8$, y $y = 2.2$ en la cercanía de (1, 2) en la figura 8. Luego, usamos el cursor para estimar que la abscisa x del punto de intersección de la recta $y = 2.2$ y la curva $y = x^3 - 5x + 6$ es aproximadamente 0.911. De manera semejante $y = x^3 - 5x + 6$ corta la recta $y = 1.8$ cuando $x \approx 1.124$. De modo que, redondeando para evitar error, podemos decir que

$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2 \quad \text{siempre que} \quad 0.92 < x < 1.12$$

El intervalo (0.92, 1.12) no es simétrico respecto de $x = 1$. La distancia de $x = 1$ al extremo izquierdo es $1 - 0.92 = 0.08$, y al extremo derecho es 0.12. Podemos elegir δ para que sea el menor de esos números, esto es $\delta = 0.08$. Entonces, podremos reformular nuestras desigualdades como sigue, en términos de distancias:

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2 \quad \text{siempre que} \quad |x - 1| < 0.08$$

Esto dice, ni más ni menos, que si mantenemos x a una distancia de 1 menor de 0.08, podremos conservar $f(x)$ dentro de una distancia a 2 menor que 0.2.

Aunque elegimos $\delta = 0.08$, también pudo funcionar cualquier valor de δ menor y positivo. □

El procedimiento gráfico del ejemplo 1 constituye una muestra de la definición para $\varepsilon = 0.2$, pero no demuestra que el límite es igual a 2. Una demostración debe definir un δ para *cualquier* ε.

A fin de demostrar los enunciados de los límites es útil imaginar que la definición de límite es un desafío. Primero el reto es un número ε. A continuación hay que producir un δ adecuado. Se debe hacer para toda $\varepsilon > 0$, y no sólo para cierta ε.

Imaginemos una competencia entre dos personas, A y B, sea B el lector. El sujeto A estipula que los valores de $f(x)$ se deben acercar al número fijo L hasta cierto grado de exactitud ε (digamos, 0.01). B responde determinando un número δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Después, A se vuelve más exigente y reta a B a encontrar un valor menor que ε (digamos 0.0001). Otra vez B contesta hallando un δ adecuado. Por lo general, mientras menor es el valor de ε, el δ correspondiente debe ser menor. Si B gana siempre, sin importar lo pequeño que A defina a ε, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

EJEMPLO 2 □ Demuestra que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema* (*tantear con un valor de* δ). Sea ε un número positivo dado. Necesitamos determinar un número δ tal que

$$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Pero $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. por consiguiente, necesitamos que

$$4|x - 3| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

esto es, que $$|x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x-3| < \delta$$

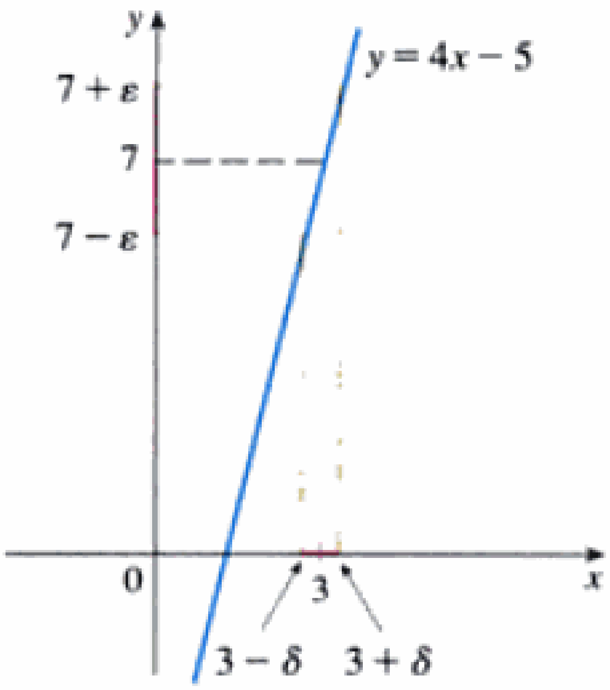


FIGURA 9

Ello sugiere que deberíamos definir a $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Demostración (comprobar que δ funciona).* Dado $\varepsilon > 0$, definimos $\delta = \varepsilon/4$. Si $0 < |x-3| < \delta$, entonces

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Así

$$|(4x-5)-7| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x-3| < \delta$$

De acuerdo con la definición de límite,

$$\lim_{x \to 3} (4x-5) = 7$$

Este ejemplo se muestra en la figura 9. □

Notará que en la solución del ejemplo 2 se definieron dos etapas: tanteo y demostración. Efectuamos un análisis preliminar que nos permitió proponer un valor de δ. Pero después, en la segunda etapa, tuvimos que regresar y demostrar con cuidado y en forma lógica que nuestro tanteo era correcto. Este procedimiento es característico de las matemáticas. En ocasiones es necesario proponer un tanteo inteligente sobre la respuesta a un problema, y después demostrar que el tanteo es correcto.

Las definiciones intuitivas de los límites unilaterales que presentamos en la sección 2.2 se pueden reformular de un modo preciso como sigue:

3 Definición del límite izquierdo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad a - \delta < x < a$$

4 Definición del límite derecho

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad a < x < a + \delta$$

Observa que la definición (3) es igual a la definición (2), excepto porque x se restringe a quedar en la mitad *izquierda* $(a - \delta, a)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. En la definición (4) está restringida a la mitad derecha $(a, a, + \delta)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

EJEMPLO 3 □ Con la definición 4, demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Cauchy y los límites

Después de la invención del cálculo en el siglo XVII, siguió un periodo de desarrollo libre del tema durante el siglo XVIII. Algunos matemáticos, como Euler y los hermanos Bernoulli, aplicaron el poder del cálculo infinitesimal y exploraron, con audacia, las consecuencias de esta nueva y bella teoría matemática, sin preocuparse demasiado si sus demostraciones eran correctas por completo.

En contraste, el siglo XIX fue la Edad del Rigor en matemáticas. Se produjo un movimiento de regreso a las bases del tema, para presentar definiciones cuidadosas y demostraciones rigurosas. Al frente de este movimiento estuvo Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés, quien comenzó como ingeniero militar antes de ser profesor de matemáticas en París. Cauchy tomó la idea de límite de Newton, que Jean d'Alembert, otro matemático francés, había mantenido viva durante el siglo XVIII y la hizo más precisa. Su definición de límite es: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable tienden indifinidamente a un valor fijo, de modo que al final difieren de él todo lo poco que uno desea, a esto último se le llama *límite* de los demás." Pero cuando Cauchy empleó esta definición en ejemplos y demostraciones, con frecuencia echó mano de desigualdades delta-épsilon, semejante a las que vemos en esta sección. Una demostración característica de Cauchy comienza "Designemos dos números muy pequeños como δ y ε... " Empleó la ε por la correspondencia entre la épsilon y la palabra francesa *erreur*. Depués, Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemán, enunció la definición de límite exactamente igual a nuestra definición.

SOLUCIÓN

1. *Tantear un valor de δ.* Sea ε un número positivo dado. En este caso, $a = 0$ y $L = 0$, de modo que deseamos encontrar un número δ tal que

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < x < \delta$$

esto es,
$$\sqrt{x} < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < x < \delta$$

o bien elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad $\sqrt{x} < \varepsilon$, llegamos a

$$x < \varepsilon^2 \quad \text{siempre que} \quad 0 < x < \delta$$

Esto sugiere que debemos definir $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Comprobar que δ es adecuado.* Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon^2$. Si $0 < x < \delta$, entonces

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

y entonces
$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Según la definición 4, lo anterior demuestra que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$. □

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

SOLUCIÓN

1. *Proponer un valor de δ.* Sea $\varepsilon > 0$. Debemos definir un número $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 9| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Para relacionar $|x^2 - 9|$ con $|x - 3|$ escribimos $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. A continuación vemos que hay que cumplir

$$|x + 3||x - 3| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Notará que si se puede definir una constante positiva C tal que $|x + 3| < C$, entonces

$$|x + 3||x - 3| < C|x - 3|$$

y se puede obligar que $C|x - 3| < \varepsilon$ haciendo que $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.

Podemos definir ese número C si nos restringimos a que x esté en algún intervalo centrado en 3. De hecho, como sólo nos interesan los valores de x cercanos a 3, cabe suponer que x está entre la distancia 1 a 3; esto es, $|x - 3| < 1$. Entonces, $2 < x < 4$, de modo que $5 < x + 3 < 7$; por consiguiente, $|x + 3| < 7$, y así $C = 7$ es una elección adecuada de la constante.

Pero ahora se presentan dos restricciones para $|x - 3|$, que son

$$|x - 3| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para estar seguros de que ambas desigualdades queden satisfechas, definimos δ como el menor de los dos números 1 y $\varepsilon/7$. La notación correspondiente es $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Demostrar que δ es adecuado.* Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como en la parte 1). También, $|x - 3| < \varepsilon/7$, de manera que

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Así, queda demostrado que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$. □

Como vimos en este ejemplo, no siempre es fácil demostrar que los enunciados sobre límites son válidos mediante la definición de ε y δ. De hecho, para una función más complicada, como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, la demostración requiere mucho ingenio. Por fortuna no es necesaria, porque es posible demostrar las leyes de los límites (Sec. 2.3) empleando la definición (2) y hallar los límites de funciones complicadas a partir de las leyes de los límites sin recurrir directamente a la definición.

Por ejemplo, demostraremos la ley de la suma: si existen $\lim_{x \to a} f(x) = L$, y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Las demás leyes se demostrarán en los ejercicios y en el apéndice F.

Demostración de la ley de la suma Sea $\varepsilon > 0$. Debemos definir $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

□ Desigualdad del triángulo:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

(Véase apéndice A.)

Recurrimos a la desigualdad del triángulo y escribimos

$$\boxed{5} \qquad \begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Hacemos que $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ sea menor que ε si logramos que cada uno de los términos $|f(x) - L$ y $g(x) - M|$ sea menor que $\varepsilon/2$.

Como $\varepsilon/2 > 0$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe un número, $\delta_1 > 0$, tal que

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

Igualmente, ya que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe un número, $\delta_2 > 0$, tal que

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Vemos que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

y así
$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por consiguiente, de acuerdo con (5),

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

En resumen

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Así, de acuerdo con la definición de un límite

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$ □

Límites infinitos

Los límites infinitos también se pueden definir con precisión. A continuación presentamos una versión precisa de la definición (4), sección 2.2.

6 Definición Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene el número a, excepto, posiblemente, en a mismo. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

significa que para cada número positivo M hay un número correspondiente δ tal que

$$f(x) > M \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

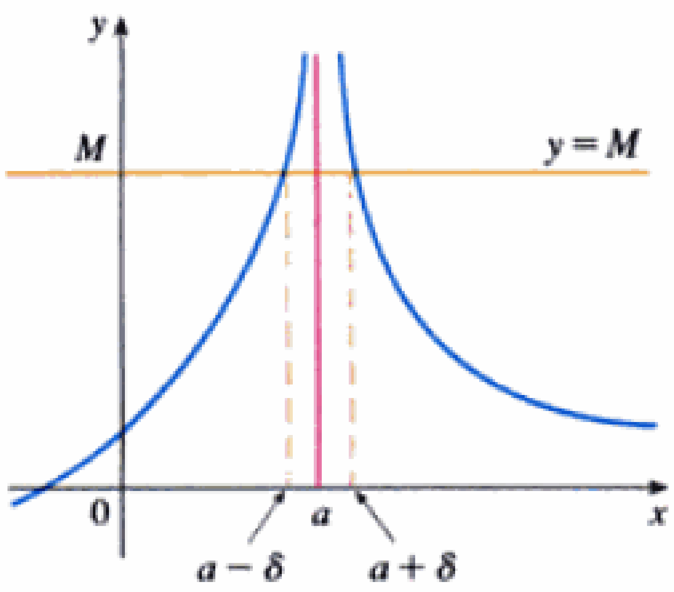


FIGURA 10

Esto indica que el valor de $f(x)$ se puede aumentar arbitrariamente más que cualquier número dado M) si escogemos x lo suficiente cerca de a (dentro de una distancia δ, donde δ depende de M, $x \neq a$). En la figura 10 vemos una interpretación geométrica.

Dado cualquier recta horizontal, $y = M$, podemos definir un número $\delta > 0$ tal que si restringimos x a que quede en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, entonces la curva $y = f(x)$ queda arriba de la recta $y = M$. Puede ver si elige un M mayor, necesitará un δ menor.

EJEMPLO 5 □ Con la definición (6) demostrar que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

SOLUCIÓN

1. *Proponer un valor de δ.* Dado $M > 0$, deseamos definir $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{x^2} > M \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 0| < \delta$$

esto es, $$x^2 < \frac{1}{M} \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x| < \delta$$

o sea, $$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x| < \delta$$

Esto sugiere que debemos tomar $\delta = 1/\sqrt{M}$.

2. *Demostrar que este δ es adecuado.* If $M > 0$ entonces sea $\delta = 1/\sqrt{M}$. Si $0 < |x - 0| < \delta$, entonces

$$|x| < \delta \;\Rightarrow\; x^2 < \delta^2$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = M$$

Así $$\frac{1}{x^2} > M \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - 0| < \delta$$

En consecuencia, de acuerdo con la definición (6)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

□

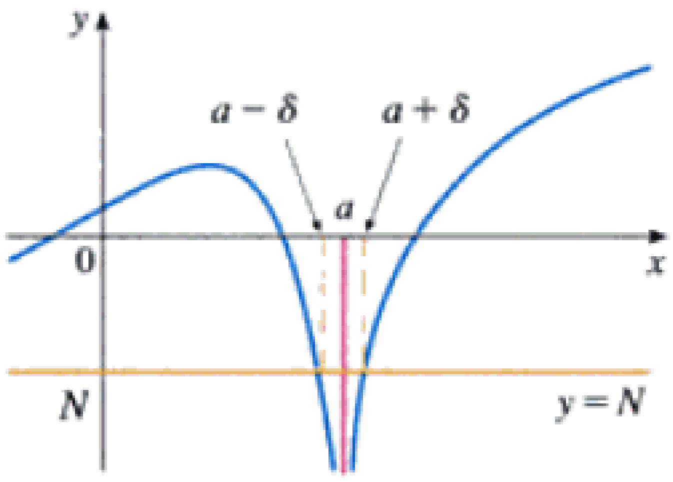


FIGURA 11

Asimismo, presentamos una versión precisa de la definición (5), sección 2.2. Esto se muestra en la figura 11.

7 Definición Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene el número a excepto, quizás en a mismo. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

quiere decir que para todo número negativo N, hay un número δ correspondiente tal que

$$f(x) < N \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

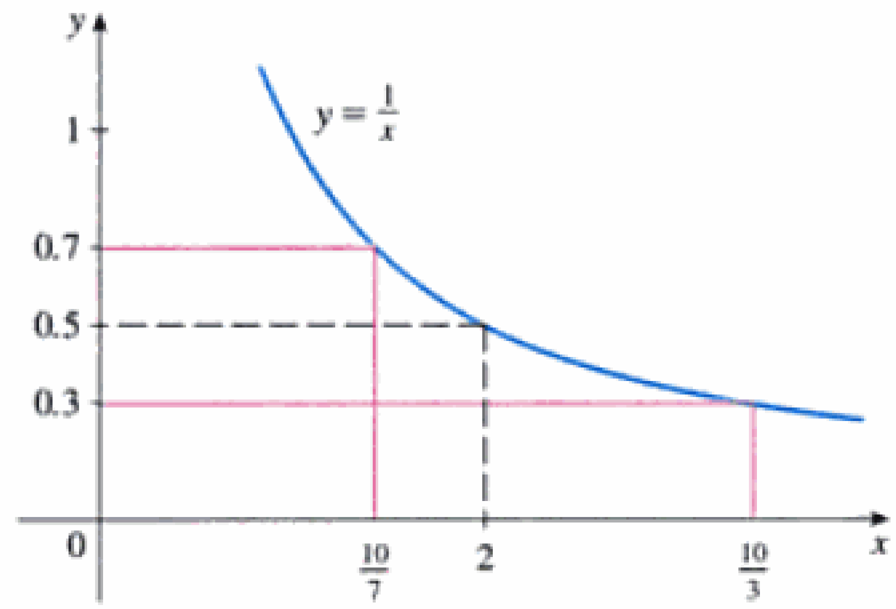
2.4 Ejercicios

1. ¿Cuánto se debe acercar x a 2 para que $5x + 3$ quede a una distancia menor que a) 0.1, y b) 0.01, de 13?

2. ¿Cuánto debemos aproximar x a 5 para que $6x - 1$ quede dentro de una distancia de a) 0.01, b) 0.001 y c) 0.0001 de 29?

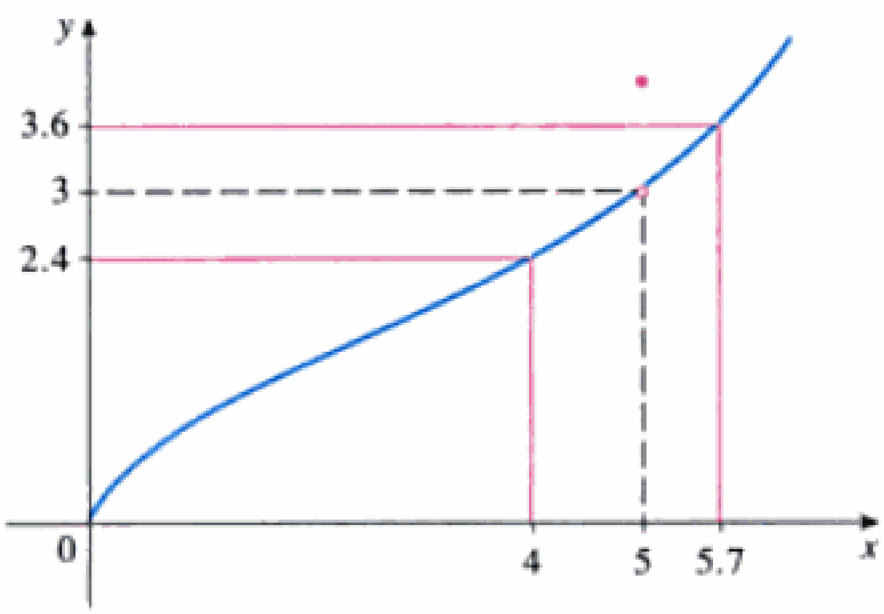
3. Con la siguiente gráfica de $f(x) = 1/x$, halle un número δ tal que

$$\left|\frac{1}{x} - 0.5\right| < 0.2 \qquad \text{siempre que} \qquad |x - 2| < \delta$$



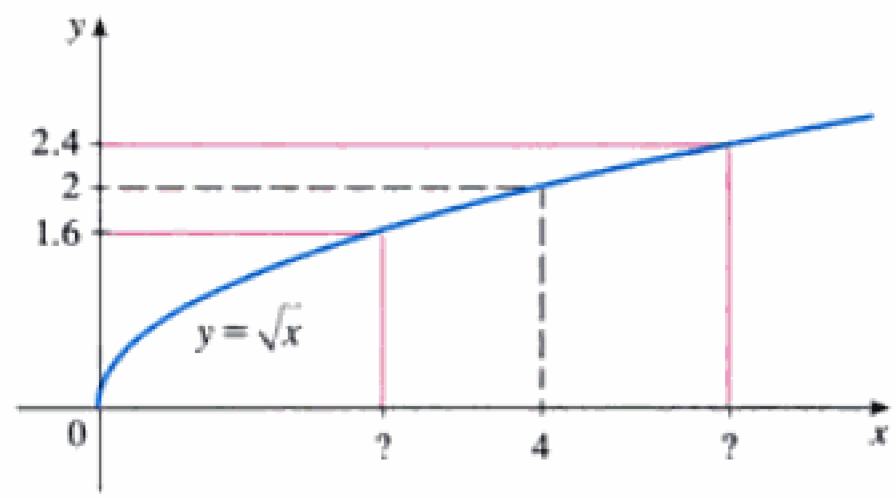
4. Use la gráfica dada de f para determinar un número δ tal que

$$|f(x) - 3| < 0.6 \qquad \text{siempre que} \qquad |x - 5| < \delta$$



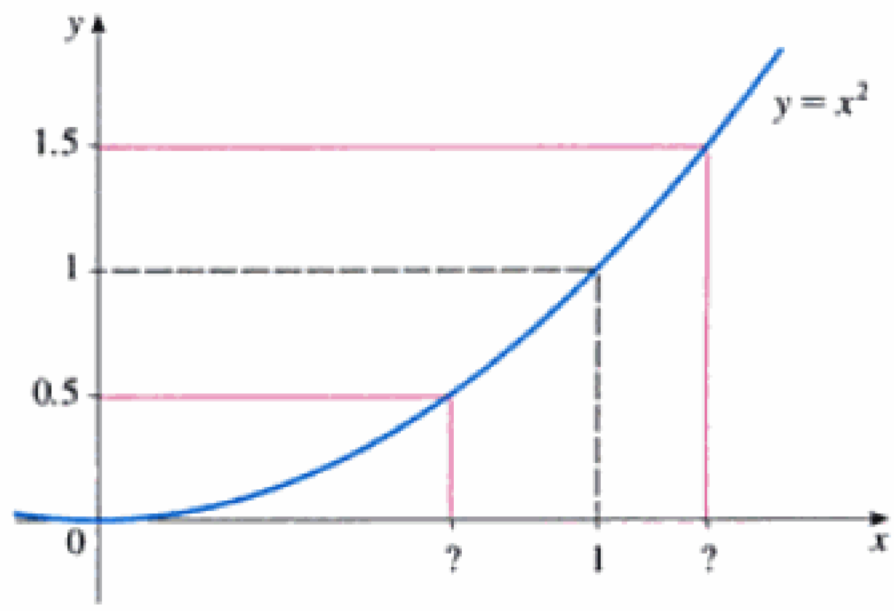
5. Use la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número δ tal que

$$|\sqrt{x} - 2| < 0.4 \qquad \text{siempre que} \qquad |x - 4| < \delta$$



6. Emplee la gráfica de $f(x) = x^2$ para encontrar un número δ tal que

$$|x^2 - 1| < \tfrac{1}{2} \qquad \text{siempre que} \qquad |x - 1| < \delta$$



7. Mediante una gráfica determine un número δ tal que

$$|\sqrt{4x + 1} - 3| < 0.5 \qquad \text{siempre que} \qquad |x - 2| < \delta$$

8. Por medio de una gráfica halle un número δ tal que

$$\left|\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}\right| < 0.1 \qquad \text{siempre que} \qquad \left|x - \frac{\pi}{6}\right| < \delta$$

9. Ilustre la definición de límite para

$$\lim_{x\to 1} (4 + x - 3x^3) = 2$$

calculando valores de δ que correspondan a $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon = 0.1$.

10. Para el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ilustre la definición determinando valores de δ que corresponda a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$

11. Mediante una gráfica determine un número δ tal que

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} > 100 \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |x-1| < \delta$$

12. Para el límite

$$\lim_{x\to 0} \cot^2 x = \infty$$

ilustre la definición para encontrar valores de δ que correspondan a (a) $M = 100$ y (b) $M = 1000$.

13. Un operario tiene que manufacturar un disco metálico circular con área 1000 cm^2?

(a) ¿Qué radio corresponde a este disco?

(b) Si el operario tiene permitido un error de hasta ± 5 cm^2? en el área del disco ¿que tan próximo al radio ideal de la parte a) debe el operario controlar el radio real?

(c) ¿En términos de la definición ε y δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Cuál es el valor dado de ε? ¿Cuál es el número δ correspondiente?

14. En la investigación espacial se usa un horno de crecimiento de cristales para determinar cómo se deben manufacturar los cristales usados en los componentes electrónicos del "taxi espacial". El proceso requiere un control preciso de la potencia de entrada. Suponga que la relación está dada por

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w la potencia de entrada en watts.

(a) ¿Cuánta potencia de entrada se necesita para mantener la temperatura en 200°C?

(b) ¿Si la temperatura puede variar hacia arriba o abajo de 200°C en $\pm$ 1°C, qué variación en la potencia, en watts, será permitida?

(c) ¿En términos de la definición δ, ε, de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ¿Qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿que valor de ε se da? ¿cuál es el δ correspondiente?

15–18 □ Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones empleando la definición de límite mediante ε y δ, y dé un ejemplo con un diagrama como el de la figura 9.

15. $\lim_{x\to 2} (3x - 2) = 4$

16. $\lim_{x\to 4} (5 - 2x) = -3$

17. $\lim_{x\to -1} (5x + 8) = 3$

18. $\lim_{x\to -1} (3 - 4x) = 7$

19–32 □ Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones empleando la definición de límite mediante ε y δ.

19. $\lim_{x\to 3} \frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

20. $\lim_{x\to 6} \left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{9}{2}$

21. $\lim_{x\to -5} \left(4 - \frac{3x}{5}\right) = 7$

22. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 7$

23. $\lim_{x\to a} x = a$

24. $\lim_{x\to a} c = c$

25. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x\to 9^-} \sqrt[4]{9 - x} = 0$

29. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x\to 3} (x^2 + x - 4) = 8$

31. $\lim_{x\to -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Compruebe que $\delta = \min\{2, \varepsilon/8\}$ es otra elección posible de δ para demostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ en el ejemplo 4.

34. Demuestre que $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

35. Demuestre que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

$\left[\begin{array}{l}\textit{Sugerencia:}\\ \text{Usa}\end{array} \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$

36. Si H es la función de Heaviside definida en el Ejemplo 6 de la sección 2.2, con la definición (2), demuestre que no existe $\lim_{t\to 0} H(t)$. [*Sugerencia*: emplea una demostración indirecta: suponga que el límite es L. Haga que $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de límite y trate de llegar a una contradicción.]

37. Si definimos la función f mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

38. Compare las definiciones (2), (3) y (4) y demuestre el teorema (1) de la sección 2.3.

39. Indique cuánto se debe acercar x a -3 para que

$$\frac{1}{(x+3)^4} > 10{,}000$$

40. Con la definición (6), demuestre que $\lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^4} = \infty$.

41. Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

42. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, y que $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es un número real. Demuestre cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

(b) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \infty$ si $c > 0$

(c) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = -\infty$ si $c < 0$

2.5 Continuidad

En la sección 2.3 hicimos notar que a menudo se puede hallar el límite de una función cuando x tiende a a, con sólo calcular el valor de la función en a. Se dice que las funciones con esta propiedad son *continuas en a*. Veremos que la definición matemática de continuidad corresponde íntimamente al significado de la palabra *continuidad* en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo tiene lugar gradualmente, sin interrupción ni cambio abrupto.)

1 Definición Una función f es **continua en un número a** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

◻ Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, entonces los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ de la gráfica. Por lo tanto, no hay brecha alguna en la curva.

Si f no es continua en a, decimos que f es **discontinua en a** o que f tiene una **discontinuidad** en a. Advierta que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas si f es cotinua en a:

1. $f(a)$ está definido (es decir, a está en el dominio de f).

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe (de modo que f debe estar definida en un intervalo abierto que contiene a a).

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

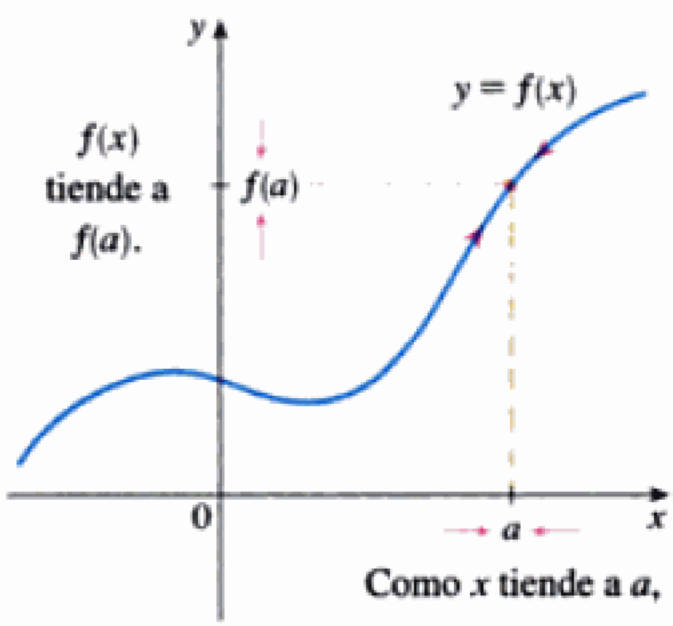


FIGURA 1

La definición afirma que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Por lo tanto, una función continua tiene la propiedad de que un cambio pequeño en x sólo produce una pequeña alteración en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ se puede mantener tan pequeño como deseemos, restringiendo el cambio en x lo necesario .

Los fenómenos físicos suelen ser continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían en forma continua con el tiempo, como pasa con la estatura de una persona. Pero en realidad se presentan discontinuidades en situaciones como las corrientes eléctricas. [Vea el Ejem. 6, Sec. 2.2, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 porque $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, una función continua en todo número en un intervalo se puede concebir como una función cuya gráfica no se rompe en este último. La gráfica se puede trazar sin levantar la pluma del papel.

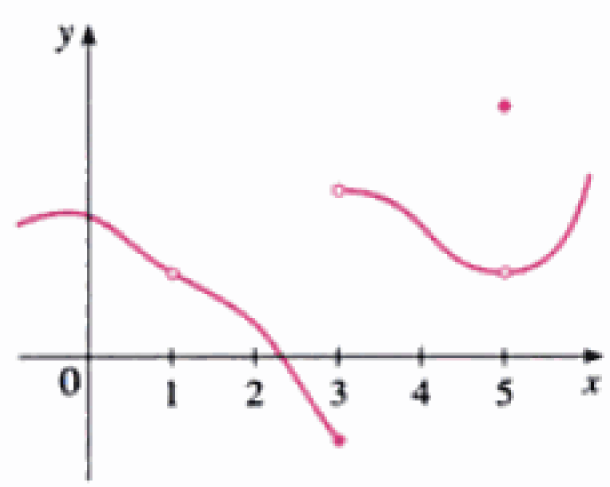


FIGURA 2

EJEMPLO 1 ◻ En la figura 2 se muestra la gráfica de una función f. ¿En cuáles números es f discontinua? ¿Por qué?

SOLUCIÓN Se ve como si hubiera una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón oficial de que f sea discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definida.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón de la discontinuidad es diferente. En este caso, $f(3)$ está definido, pero $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes). Por tanto, f es discontinua en 3.

¿Qué pasa cuando $a = 5$? En tal caso, $f(5)$ está definido y $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos). Pero

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

De este modo, f es discontinua en 5. ◻

Veamos ahora cómo detectar las discontinuidades cuando una fórmula define a la función.

EJEMPLO 2 □ ¿En dónde son discontinuas cada una de las funciones siguientes?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

(a) Advierta que $f(2)$ no está definido, por tanto f es discontinua en 2.

(b) En este caso, $f(0) = 1$ está definido pero

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Vea el Ejem. 8, Sec. 2.2.) Así entonces, f es discontinua en 0

(c) Aquí, $f(2) = 1$ está definido y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

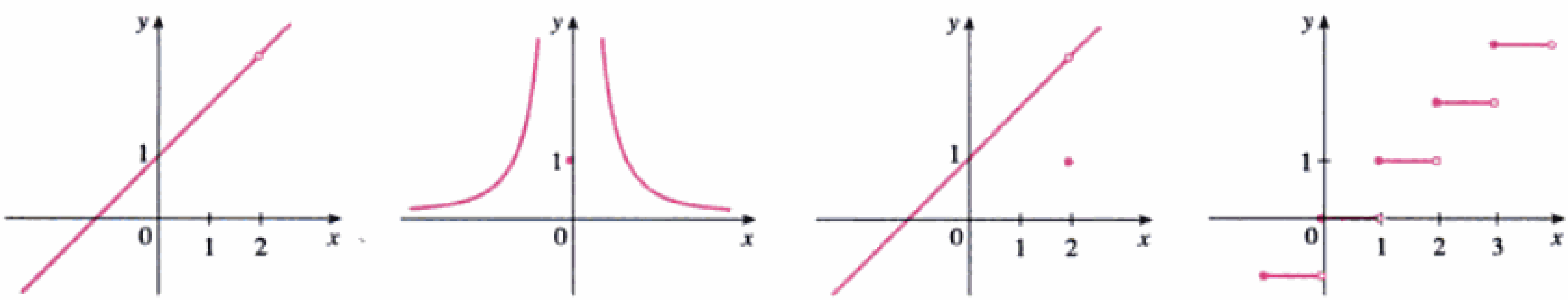
existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

por lo tanto, f no es continua en 2.

(d) La función mayor entero $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véase el Ejem. 10 y el Ejerc. 47, Sec. 2.3.) □

En la figura 3 se muestran las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En todos los casos, no se puede dibujar la gráfica sin levantar la pluma del papel, porque se presenta un agujero, una ruptura o un salto en esa gráfica. El tipo de discontinuidad que se ilustra en los incisos a) y c) se conoce como **removible** porque la discontinuidad podría eliminarse al redefinir f en 2. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad del inciso b) recibe el nombre de **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades del inciso d) se llaman **discontinuidad por salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3 Gráficas de las funciones del ejemplo 2

2 Definición Una función f es **continua desde la derecha en un número a** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua desde la izquierda en a** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 □ En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [Fig. 3d)] es continua desde la derecha pero discontinua desde la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero
$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$
□

3 Definición Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en todo número en el intervalo. (En un punto extremo del intervalo, entendemos que *continua* quiere decir *continua desde la derecha* o *continua desde la izquierda*.)

EJEMPLO 4 □ Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$, entonces, al aplicar las leyes de los límites tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a}(1 - x^2)} && \text{(por 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

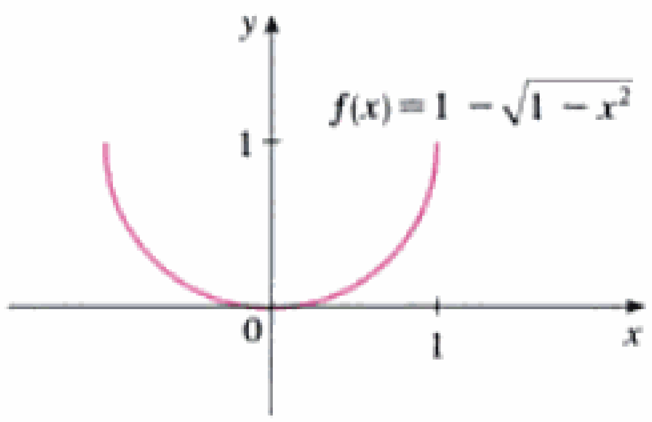


FIGURA 4

De suerte que por la definición 1, f es continua en a si $-1 < a < 1$. Cálculos similares hacen ver que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

de modo que f es continua desde la derecha en -1 y continua desde la izquierda en 1. Por consiguiente, según la definición 3, f es continua sobre $[-1, 1]$.

En la figura 4 se tiene la gráfica de f. Es la mitad inferior del círculo.

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$
□

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para comprobar la continuidad de una función, como en el ejemplo 4, a menudo resulta conveniente aplicar el teorema siguiente, el cual muestra cómo formar funciones continuas complicadas a partir de funciones sencillas.

4 Teorema Si f y g son continuas en a y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

Demostración Cada una de las cinco partes de este teorema se infieren de la ley de los límites correspondiente de la sección 2.3. Por ejemplo, demostraremos la parte 1. Puesto que f y g son continuas en a, tenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{si} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(por la Ley 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Esto muestra que $f + g$ es continua en a. □

Del teorema 4 y la definición 3 se deduce que si f y g son continuas sobre un intervalo, también lo son las funciones $f + g$, $f - g$, cf, fg y (si g nunca es 0) f/g. En la sección 2.3 se enunció el siguiente teorema.

5 Teorema
(a) Cualquier polinomio es continuo en todas partes; es decir, es continuo sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
(b) Cualquier función racional es continua, siempre que esté definida; es decir, es continua en su dominio.

Demostración
(a) Un polinomio es una función de la forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes. Sabemos que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(por la Ley 7)}$$

y $\displaystyle\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(por 9)}$

Esta ecuación es precisamente la proposición de que la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Por tanto, con base en la parte 3 del teorema 4, la función $g(x) = cx^m$ es continua. Dado que P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, a partir de la parte 1 del teorema 4 se deduce que P es continua.

(b) Una función racional es una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio de f es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabemos, con base en el inciso a), que P y Q son continuas en todas partes. De esta forma, f es continua en todo número en D, de acuerdo con la parte 5 del teorema 4. □

Como ilustración del teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ hace ver que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si se lanza una pelota verticalmente hacia el aire, con una velocidad de 50 pies/s, entonces la fórmula $h = 50t - 16t^2$ expresa la altura de la pelota, en pies, después de t segundos. De nuevo, es una función polinomial, de modo que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber cuáles funciones son continuas nos permite evaluar algunos límites con mucha rapidez, como muestra el ejemplo que sigue. Compárelo con el ejemplo 2b) de la sección 2.3.

EJEMPLO 5 □ Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, de modo que por el teorema 5 es continua sobre su dominio, el cual es $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. Por lo tanto

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$ □

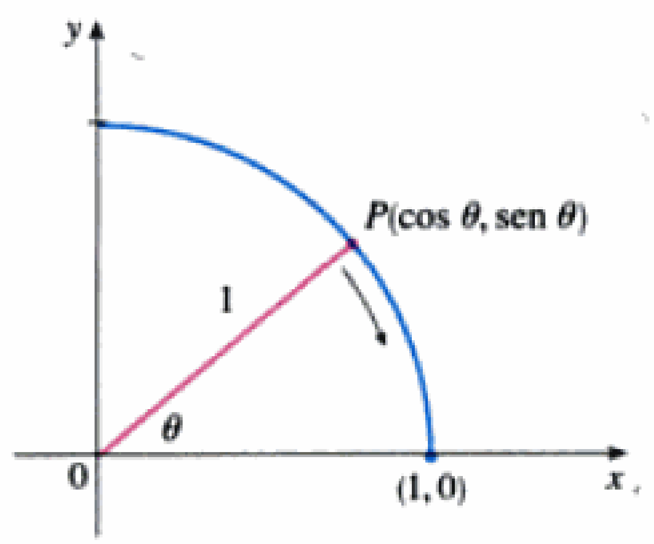


FIGURA 5

□ Otra manera de establecer los límites en (6) es usar el teorema de la compresión con la desigualdad sen $\theta < 0$ (para $\theta > 0$), el cual se demuestra en la sección 3.4.

Resulta que la mayor parte de las funciones conocidas son continuas en todo número en su dominio. Por ejemplo, la ley de los límites 10 (página 104) es exactamente la proposición de que las funciones raíz son continuas. (En el ejemplo 3 de la sección 2.4 muestra que $f(x) = \sqrt{x}$ sí es continua desde la derecha hasta 0.)

Con base en el aspecto de las gráficas de las funciones seno y coseno (Fig. 18, Sec. 1.2), supondríamos que son continuas. De acuerdo con la definición de sen θ y cos θ sabemos que las coordenadas del punto P de la figura 5 son (cos θ, sen θ). Cuando $\theta \to 0$, vemos que P tiende al punto (1, 0) y, por consiguiente, cos $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. Por lo tanto,

$$\boxed{6} \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

Puesto que cos 0 = 1 y sen 0 = 0, las ecuaciones dadas en (6) afirman que las funciones seno y coseno son continuas en 0. Entonces se pueden aplicar las fórmulas de la adición para coseno y seno para deducir que estas funciones son continuas en todas partes (véase los Ejercs. 54 y 55).

De la parte 5 del teorema 4, se deduce que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

es continua excepto donde $\cos x = 0$. Esto sucede cuando x es un múltiplo impar de $\pi/2$, de modo que $y = \tan x$ tiene discontinuidades infinitas cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, y así sucesivamente (Fig. 6).

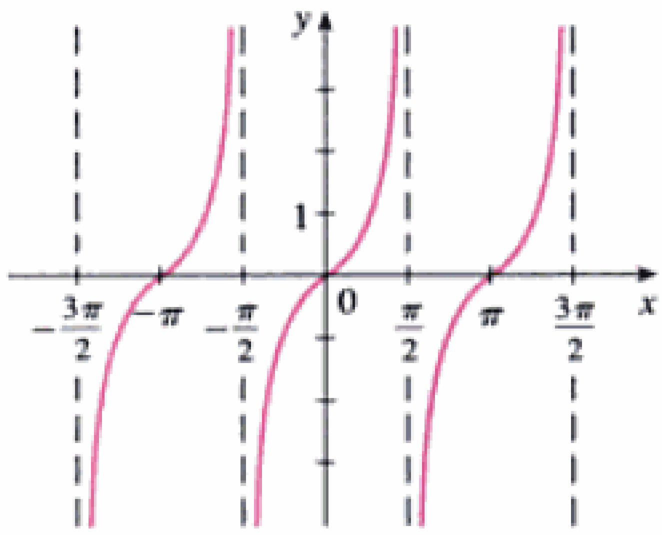


FIGURA 6
$y = \tan x$

□ En el apéndice D se hace un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

La función inversa de cualquier función continua también es continua. (La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la recta $y = x$. Así entonces, si la gráfica de f no tiene alguna ruptura, tampoco la tiene la gráfica de f^{-1}.) Por tanto, las funciones trigonométricas inversas son continuas.

En la sección 1.5 definimos la función exponencial $y = a^x$ de modo que se llenaran los agujeros en la gráfica de esta función donde x es racional. En otras palabras, la simple definición de $y = a^x$ la hace una función continua sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto, su función inversa $y = \log_a x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

7 Teorema Los tipos siguientes de funciones son continuos en todo número en sus dominios:

polinomios, funciones racionales, funciones raíz

funciones trigonométricas, funciones trigonométricas inversas

funciones exponenciales, funciones logarítmicas

EJEMPLO 6 □ ¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1}x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7, sabemos que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y que $y = \tan^{-1}x$ es continua sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto, por la parte 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1}x$ es continua sobre $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es un polinomio, de modo que es continuo en todas partes. Por lo tanto, por la parte 5 del teorema 4, f es continua en todo los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0$. De este modo, f es continua en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. □

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del teorema siguiente.

□ Este teorema expresa que se puede mover un símbolo de límite a través de un símbolo de función, si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, se puede invertir el orden de estos dos símbolos.

8 Teorema Si f es continua en b y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

A nivel intuitivo, este teorema resulta razonable porque si x está cerca de a, entonces $g(x)$ está cerca de b y como f es continua en b, si $g(x)$ está cerca de b entonces $f(g(x))$ está cerca de $f(b)$. Pruebe con el teorema 8 que se encuentra en el apéndice F.

EJEMPLO 7 □ Evalúe $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

SOLUCIÓN Debido a que sen^{-1} es una función continua, podemos aplicar el teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

□

Aplicamos el teorema 8 al caso especial cuando $f(x) = \sqrt[n]{x}$, con n entero positivo. Entonces

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y

$$f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Si sustituimos esto en el teorema 8 tenemos

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

y la ley 11 del límite se ha demostrado. (Suponemos que existe esta raíz.)

9 Teorema Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función cotinua".

Demostración Como g es continua en a, tenemos

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Dado que f es continua en $b = g(a)$, podemos aplicar el teorema 8 para obtener

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que es la proposición de la continuidad en a de la función $h(x) = f(g(x))$; es decir, $f \circ g$ es continua en a. □

EJEMPLO 8 □ ¿En dónde son continuas las funciones siguientes?

(a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

(a) Tenemos $h(x) = f(g(x))$, donde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$$

Ahora bien, g es continua sobre $\mathbb{R}$, puesto que es un polinomio, y f es continua en todas partes. Por tanto, por el teorema 9, $h = f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$.

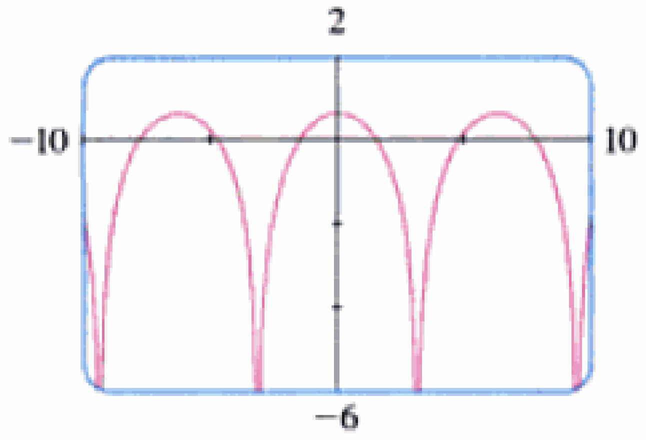


FIGURA 7

(b) Con base en el teorema 7, sabemos que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por lo tanto, por el teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continua siempre que esté definida. Ahora bien, $\ln(1 + \cos x)$ está definido cuando $1 + \cos x > 0$. Por tanto, no está definida cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Por tanto, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua sobre los intervalos entre estos valores. (Véase la Fig. 7.) □

Una importante propiedad de las funciones continuas se expresa con el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en libros más avanzados de cálculo.

> **10 Teorema del valor intermedio** Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio afirma que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Note que el valor N se puede tomar una vez [como en la parte a)] o más de una vez [como en la parte b)].

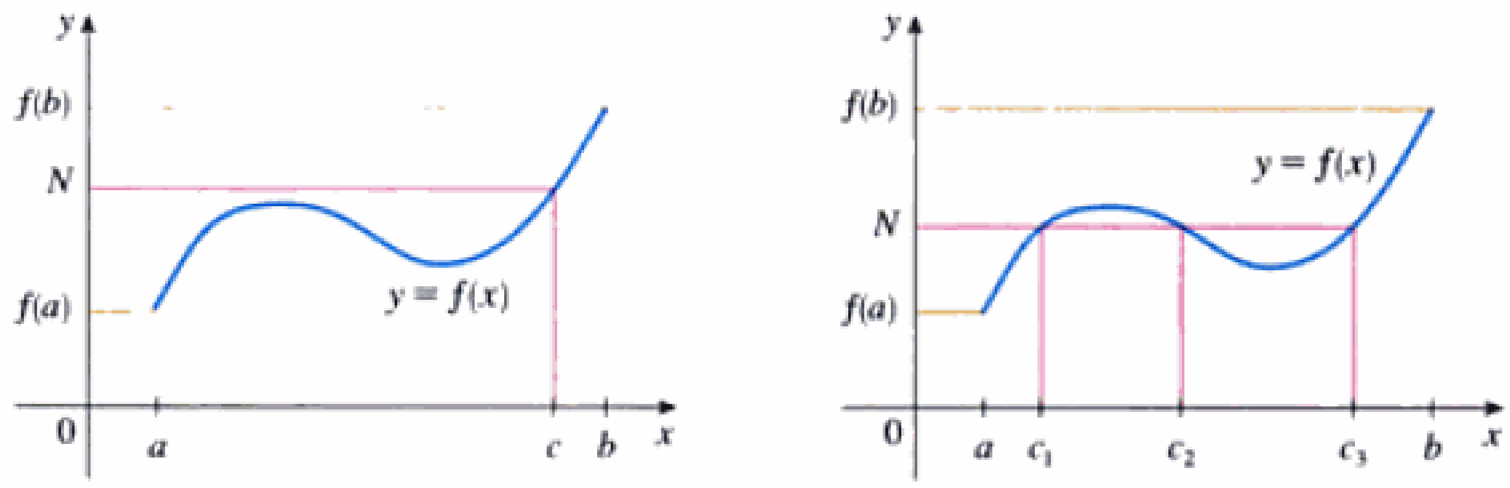


FIGURA 8 (a) (b)

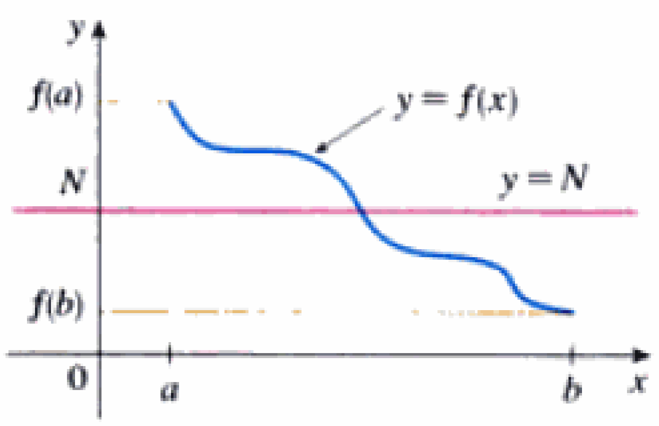


FIGURA 9

Si pensamos en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene agujeros o rupturas, entonces es fácil creer que el teorema del valor intermedio es cierto. En términos geométricos, dice que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, entonces la gráfica de f no puede saltar sobre la recta. Debe intersecar $y = N$ en alguna parte.

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para las funciones discontinuas (véase el Ejerc. 42).

Un uso del teorema del valor intermedio es hallar las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 □ Demuestre que la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

tiene una raíz entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Estamos buscando una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por lo tanto, en el teorema 10, tomamos $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$. Tenemos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Por lo tanto, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es un polinomio, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar una raíz con mayor precisión aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Puesto que

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz se debe encontrar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por tanteos,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

de modo que una raíz se encuentra en el intervalo $(1.22, 1.23)$. □

Usemos una calculadora graficadora o una computadora para ilustrar la aplicación del teorema del valor intermedio en el ejemplo 9. En la figura 10 se muestra la gráfica de f en la pantalla $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$ y se puede ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. En la figura 11 se muestra el resultado de amplificar la pantalla $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

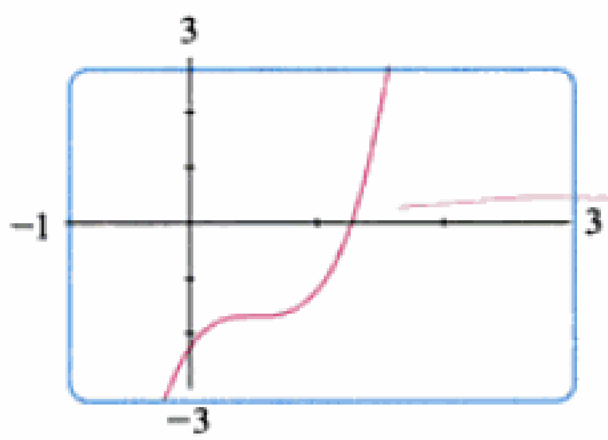


FIGURA 10

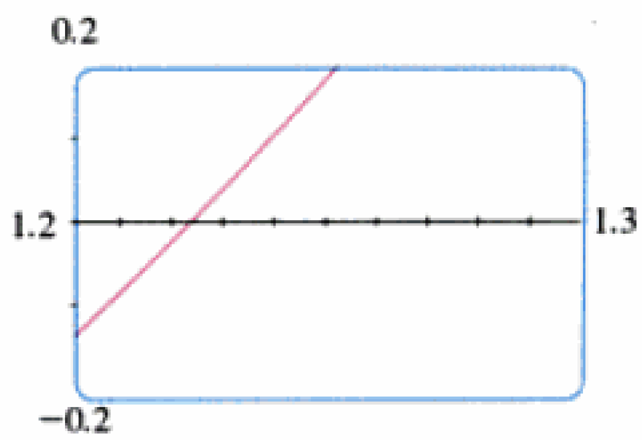


FIGURA 11

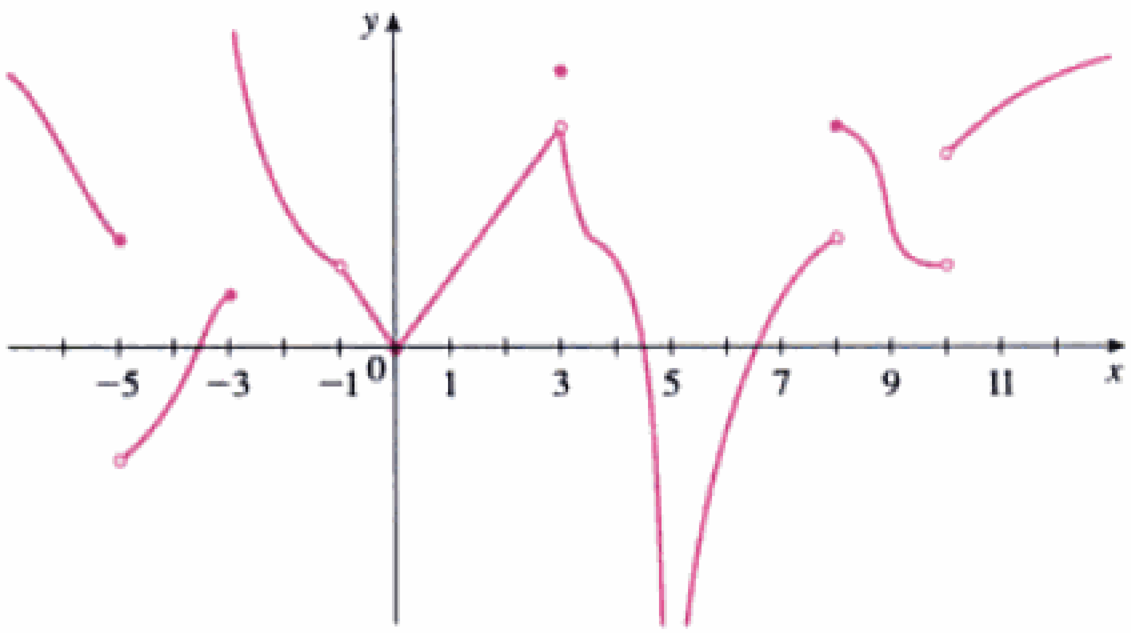
De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un papel en la manera en que funcionan estos aparatos graficadores. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y hace aparecer los pixeles que contienen estos puntos calculados. Supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. Por lo tanto, la computadora une los pixeles al hacer aparecer los pixeles intermedios.

2.5 Ejercicios

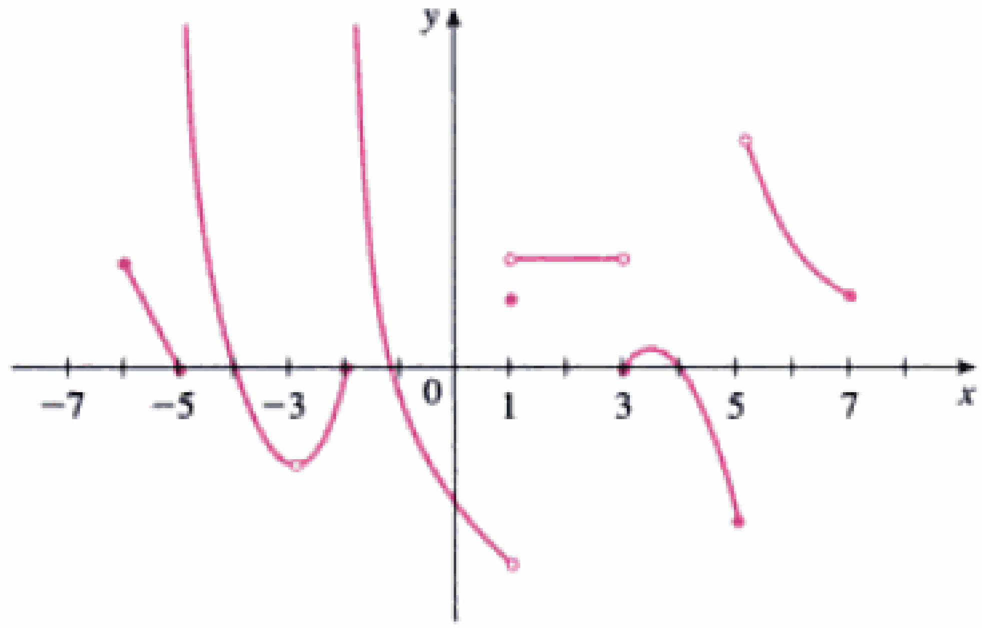
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su gráfica?

3. (a) A partir de la gráfica de f, dé los números en que f es discontinua y explique por qué.
   (b) Para cada uno de los números que se den en el inciso a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



4. A partir de la gráfica de g, dé los intervalos sobre los que g es continua.



5. Trace la gráfica de una función que sea continua en todas partes, excepto en $x = 3$, y sea continua desde la izquierda en 3.

6. Grafique una función que tenga una discontinuidad por salto en $x = 2$ y una discontinuidad removible en $x = 4$, pero que sea continua en todas los demás puntos.

7. En un estacionamiento se cobran 3 dólares por la primera hora (o fracción) y 2 dólares por cada hora (o fracción) subsiguiente, hasta un máximo diario de 10 dólares.
   (a) Grafique el costo de estacionar un automóvil como función del tiempo que permanezca allí.
   (b) Discuta las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estacione su automóvil.

8. Explique por qué cada función es continua o discontinua:
   (a) La temperatura en un lugar específico como función del tiempo.
   (b) La temperatura en un momento dado como función de la distancia hacia el oeste de la ciudad de Nueva York.
   (c) La altitud sobre el nivel del mar como función de la distancia hacia el oeste de la ciudad de Nueva York.
   (d) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida.
   (e) La corriente en el circuito para las luces de un cuarto como función del tiempo

9. Si f y g son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $\lim_{x \to 3} [2f(x) - g(x)] = 4$, hallan $g(3)$.

10–12 □ Usan la definición de continuidad y las propiedades de los límites para mostrar que la función es continua donde se indica.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $g(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 - 1}, \quad a = 4$

13–14 □ Con la definición de continuidad y las propiedades de los límites demuestre que la función es continua en el intervalo.

13. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}, \quad [-4, 4]$

14. $F(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3}, \quad (-\infty, 3)$

15–20 □ Explique por qué la función es discontinua en el punto dado. Bosqueje la gráfica.

15. $f(x) = \ln|x - 2| \qquad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} \qquad a = -1$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ 6 & \text{si } x = -1 \end{cases} \qquad a = -1$

19. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 3 & \text{si } x = 4 \end{cases} \qquad a = 4$

20. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad a = 2$

21–28 □ Con los teoremas 4, 5, 7 y 9 explique por qué la función es continua en todo número en su dominio. Dé el dominio.

21. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

22. $f(t) = 2t + \sqrt{25 - t^2}$

23. $h(x) = \sqrt[3]{x - 1}\,(x^2 - 2)$

24. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

25. $f(x) = e^x \operatorname{sen} 5x$

26. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

29–30 □ Localice las discontinuidades de la función e ilústrelas trazando una gráfica.

29. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\tan^2 x)$

31–34 □ Aplique la continuidad para evaluar el límite.

31. $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

33. $\displaystyle\lim_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

34. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \arctan\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para } x < 3 \\ 5 - x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Mostrar que f es continua en $(-\infty, \infty)$

36–37 □ Encuentre los números en que la función es discontinua. ¿En cuáles de estos puntos f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados? Trace la gráfica de f.

36. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 3x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3 & \text{si } x < 0 \\ (x + 1)^3 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

38. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\[2mm] \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿F es una función continua de r?

39. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) > \begin{cases} cx + 1 & \text{si } x \leqslant 3 \\ cx^2 - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

40. Hallar la constante c para la cual la función g es continua en todos los valores reales.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c^2 & \text{si } x < 4 \\ cx + 20 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

41. ¿Cuál de las funciones siguientes tiene una discontinuidad removible en a? Si es removible, hallar una función g que coincida con f para $x \neq a$ y que sea continua en toda la recta real $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}, \quad a = -2$

(b) $f(x) = \dfrac{x - 7}{|x - 7|}, \quad a = 7$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 64}{x + 4}, \quad a = -4$

(d) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}, \quad a = 9$

42. Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en 0.25, y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos gráficas posibles de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis)..

43. Si $f(x) = x^3 - x^2 + x$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 10$.

44. Aplique el teorema del valor intermedio para probar que existe un número positivo c tal que $c^2 = 2$. (Con esto se prueba la existencia del número $\sqrt{2}$.)

45–48 □ Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación dada en el intervalo especificado.

45. $x^3 - 3x + 1 = 0, \quad (0, 1)$

46. $x^2 = \sqrt{x + 1}, \quad (1, 2)$

47. $\cos x = x, \quad (0, 1)$

48. $\ln x = e^{-x}, \quad (1, 2)$

49–50 □ (a) Pruebe que la ecuación tiene por lo menos una raíz real. b) Use su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

49. $e^x = 2 - x$

50. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

51–52 □ a) Pruebe que la ecuación tiene por lo menos una raíz real. b) Use su aparato graficador para hallar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

51. $x^5 - x^2 - 4 = 0$

52. $\sqrt{x - 5} = \dfrac{1}{x + 3}$

53. Demuestre que f es continua en a si y solo si

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

54. Para probar que seno es continuo, necesitamos demostrar que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$, para todo número real a. Con el ejercicio 53 una proposición equivalente es que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Aplique (6) para probar que esto es verdadero

55. Pruebe que el coseno es una función continua.

56. (a) Demostrar el Teorema 4, parte 3.
(b) Demostrar el Teorema 4, parte 5.

57. ¿Para qué valores de x es continua f?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

58. ¿Para qué valores de x es continua g?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

59. ¿Existe un número que sea exactamente su cubo más uno?

60. (a) Muestre que el valor absoluto de la función $F(x) = |x|$ es continua en todas partes.
(b) Pruebe que si f es una función continua en un intervalo, entonces también lo es $|f|$.
(c) El inverso del inciso (b) ¿también es verdadero? De otra manera, si $|f|$ es continua, ¿se concluye que f es continua? Si es así, demuéstrelo. De no serlo dé un contraejemplo.

61. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 A.M. y toma su sendero usual hasta la cima de la montaña, a la que llega a las 7:00 P.M. A la mañana siguiente, parte a las 7:00 A.M. de la cima, toma el mismo sendero de regreso y llega al monasterio a las 7:00 P.M. Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe un punto en el sendero que el monje cruzará exactamente en el mismo momento del día, en ambos días.

2.6 Límites al infinito, asíntotas horizontales

En las secciones 2.2 y 2.4 investigamos los límites infinitos y las asíntotas verticales. Dejamos que x tendiera a un número y, como resultado, los valores de y se volvieron arbitrariamente grandes (positivo o negativos). En esta sección dejaremos que x se haga arbitrariamente grande (positiva o negativa) para ver qué sucede con y.

Comenzaremos investigando el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando x crece. En la tabla adjunta vemos los valores de la función, con precisión de seis decimales; en la figura 1 hemos trazado la gráfica que produjo una computadora.

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

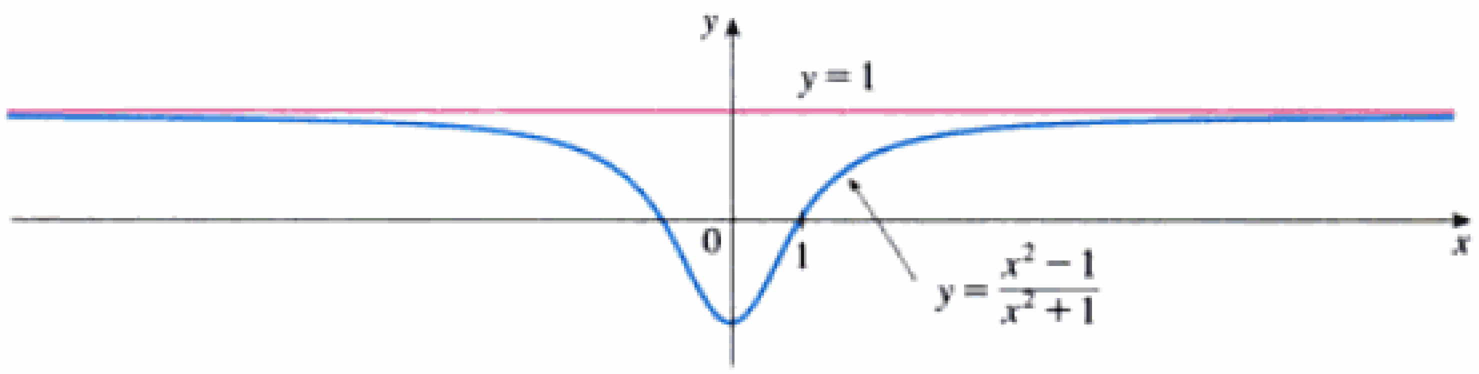


FIGURA 1

Cuando x se vuelve más y más grande, se advierte que los valores de $f(x)$ se acercan más y más a 1. De hecho, parece que podemos aproximar los valores de $f(x)$ tanto como queramos a 1 aumentando x los suficiente. Este caso se representa como sigue:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En el caso general se emplea el simbolismo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se acercan más y más a L cuando x se vuelve más y más grande.

1 Definición Sea f una función definida en algún intervalo, (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden acercar arbitrariamente a L si x se incrementa lo suficiente.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa número alguno; sin embargo, la expresión $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ con frecuencia se lee

"El límite de $f(x)$, cuando x tiende a infinito es L"

o bien "el límite de $f(x)$ cuando x se vuelve infinito es L"

o también "el límite de $f(x)$ cuando x crece sin límite es L"

En la definición 1 se presenta el significado de esas frases. Al final de esta sección presentaremos una definición más precisa, semejante a la definición de ε y δ, de la sección 2.4.

En la figura 2 tenemos ejemplos geométricos de la definición (1). Hay muchos modos en que la gráfica de f puede tender a la recta $y = L$ (esta recta se conoce como *asíntota horizontal*) cuando vemos el dibujo lejos a la derecha.

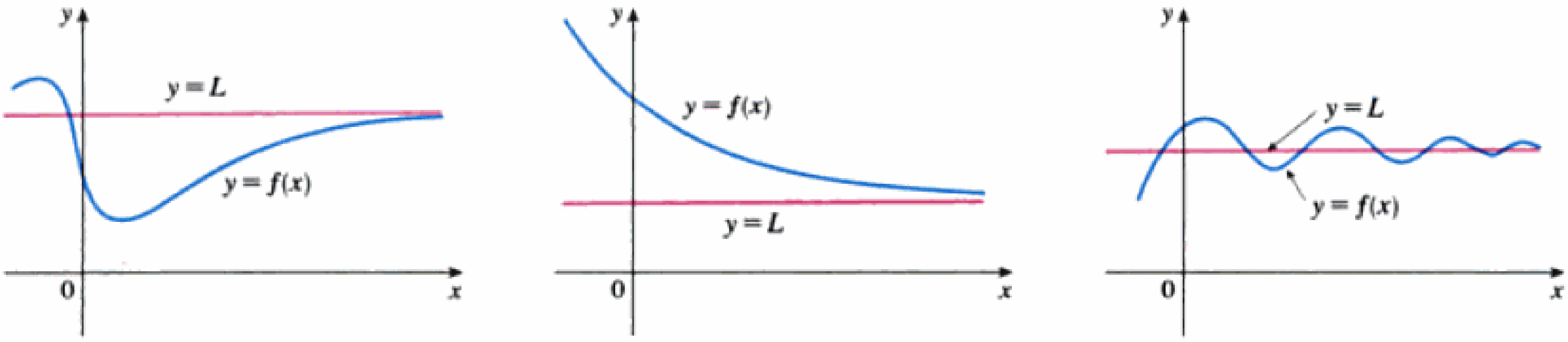


FIGURA 2
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

De regreso a la figura 1, vemos que para valores negativos numéricamente grandes de x, los valores de $f(x)$ se acercan a 1. Haciendo que x decrezca arbitrariamente con valores negativos, podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a 1 tanto como queramos. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es

2 Definición Sea f una función definida en un intervalo (∞, a). Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

indica que los valores de $f(x)$ se pueden acercar arbitrariamente a L haciendo que x sea negativa y lo bastante grande.

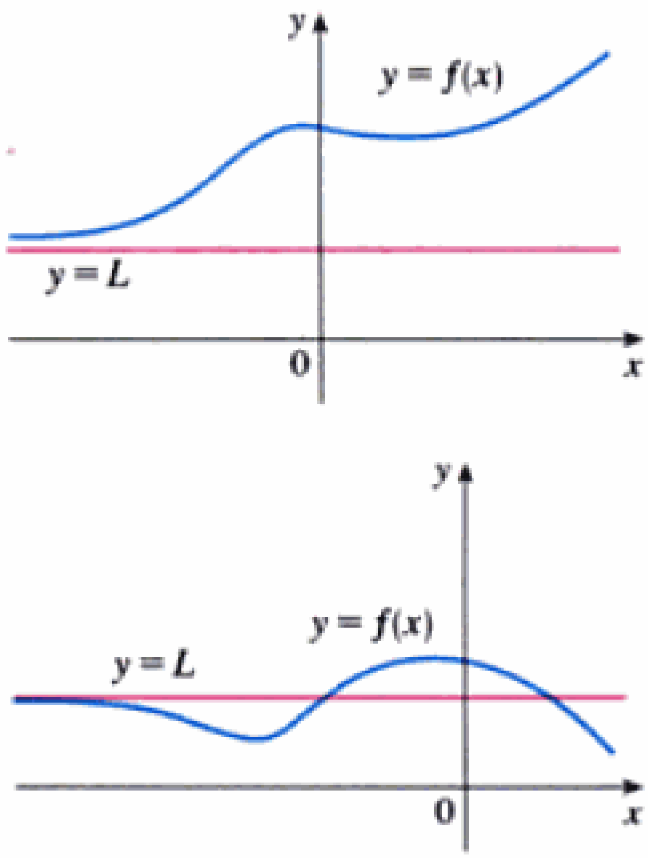


FIGURA 3
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

De nuevo el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero con frecuencia la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se lee como sigue:

"El límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito negativo es L"

La definición (2) se ilustra en la figura 3. Note que la gráfica se acerca a la línea $y = L$ como se ve en el extremo izquierdo.

3 Definición La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva de la figura 1 tiene como asíntota horizontal la recta $y = 1$ porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$ (Fig. 4). En efecto,

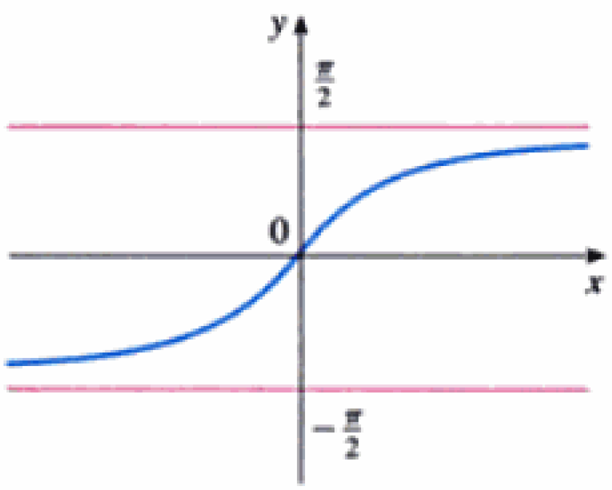


FIGURA 4
$y = \tan^{-1}x$

$$\boxed{4} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}}$$

de modo que las dos rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se concluye a partir del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan.)

EJEMPLO 1 □ Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f graficada en la figura 5.

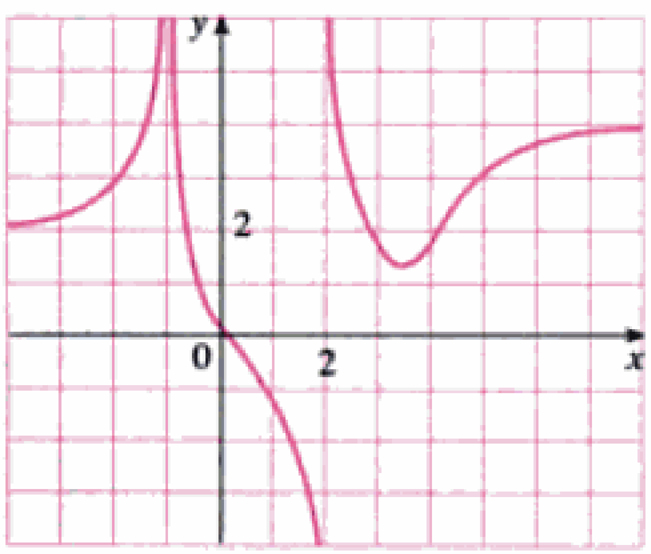


FIGURA 5

SOLUCIÓN Vemos que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \to -1$ desde ambos lados; por lo tanto

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Advierta que $f(x)$ se hace grande negativo cuando x tiende a 2 desde la izquierda, pero grande positivo cuando x tiende a 2 desde la derecha. De este modo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

De esta suerte, las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x crece, vemos que $f(x)$ tiende a 4. Pero cuando x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Así entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales. □

EJEMPLO 2 □ Encuentre $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeño. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10{,}000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1{,}000{,}000} = 0.000001$$

De hecho, si elegimos un x suficientemente grande, podemos aproximar $1/x$ a 0 cuanto queramos. Por lo tanto, según la definición 1, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar hace ver que cuando x es grande negativo, $1/x$ es pequeño negativo; de este modo, también tenemos

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se infiere que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$ (ésta es una hipérbola equilátera; véase Fig. 6) □

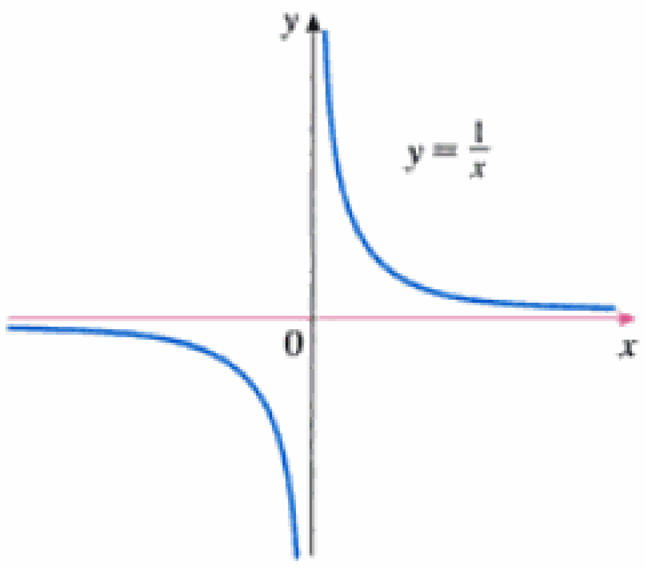


FIGURA 6

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

La mayor parte de las leyes de los límites que se dieron en la sección 2.3 también se cumplen para los límites en el infinito. Se puede probar que las *leyes de los límites cuya lista se da en la sección 2.3 (con la excepción de las leyes 9 y 10) también son válidas si "$x \to a$" se reemplaza con "$x \to \infty$" o con "$x \to -\infty$"*. En particular, si combinamos la ley 6 con los resultados del ejemplo 2, obtenemos la importante regla que sigue para el cálculo de límites.

> **5 Teorema** Si $r > 0$ es un número racional, entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$
>
> Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida por toda x, entonces
>
> $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EJEMPLO 3 □ Evalúe

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique cuáles son las propiedades de los límites que usa en cada paso.

SOLUCIÓN Para evaluar el límite en el infinito de una función racional, dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x que halla en el denominador. (Podemos suponer que $x \neq 0$, puesto que sólo estamos interesados en los valores grandes de x.) En este caso, la mayor potencia de x en el denomimador es x^2, con lo cual tenemos,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(por la 1, 2, y 3)}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{(por la 7 y teorema 5)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

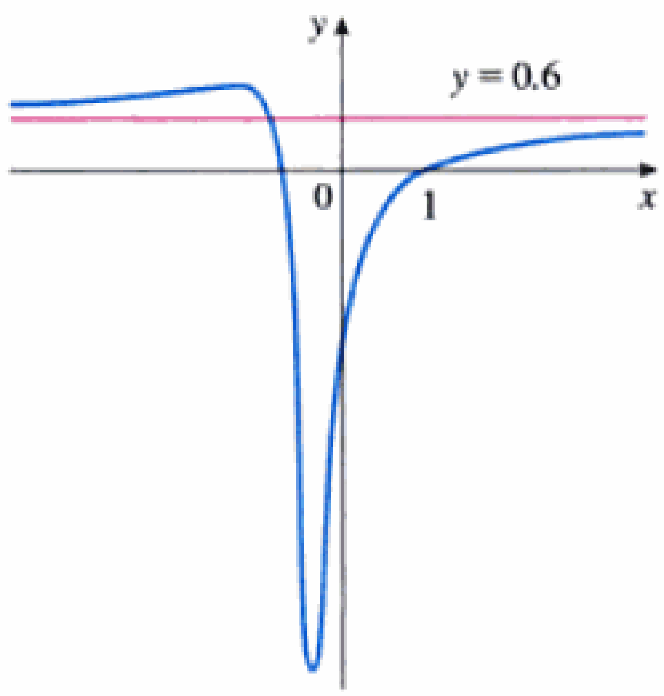


FIGURA 7

$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Un cálculo semejante hace ver que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$. □

EJEMPLO 4 □ Hallar las asíntotas horizontales y las asíntotas verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUCIÓN Al dividir numerador y denominador de la fracción por x y usar las propiedades de los límites, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \qquad \text{(como } \sqrt{x^2} = x \text{ cuando } x > 0\text{)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - 5 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Luego, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica f.

Al calcular el límite cuando $x \to -\infty$, debemos recordar que para $x < 0$ tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Luego, al dividir el numerador por x, y para $x < 0$, obtenemos

$$\frac{1}{x} \sqrt{2x^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}} \sqrt{2x^2 + 1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Por tanto
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}}$$
$$=\frac{-\sqrt{2+\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{3-5\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

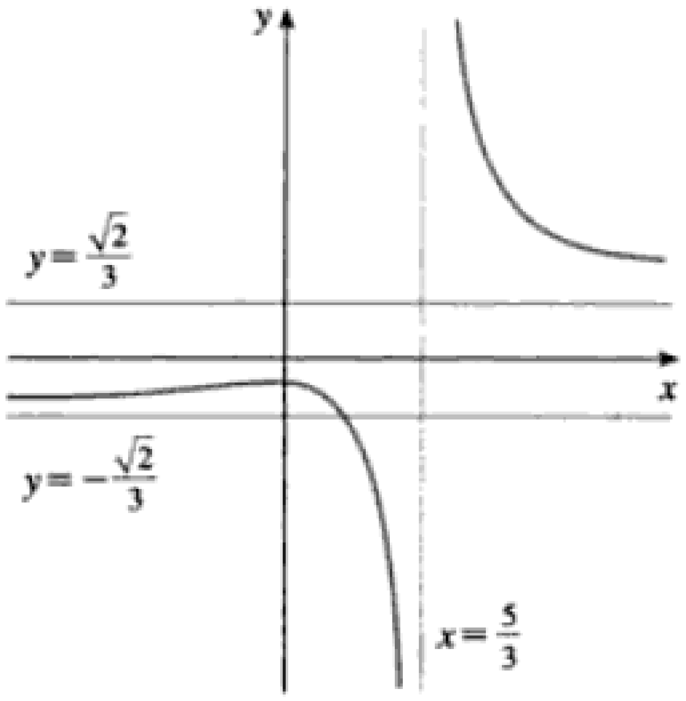


FIGURA 8
$y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

De modo que la recta $y=-\sqrt{2}/3$ es también una asíntota horizontal.

Aparecerá casi seguramente una asíntota vertical cuando el denominador $3x-5$ sea cero, esto es cuando $x=\frac{5}{3}$. Si x se aproxima a $\frac{5}{3}$ y $x>\frac{5}{3}$ entonces el denominador es cercano a 0 y $3x-5$ positivo. El numerador $\sqrt{2x^2+1}$ siempre es positivo, de modo que $f(x)$ es positivo. Por tanto

$$\lim_{x\to(5/3)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty$$

Si x está próximo a $\frac{5}{3}$ pero $x<\frac{5}{3}$, entonces $3x-5<0$ y por tanto $f(x)$ es negativo y grande. Luego

$$\lim_{x\to(5/3)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$$

La asíntota vertical es $x=\frac{5}{3}$. Las tres asíntotas pueden verse en la figura 8. □

EJEMPLO 5 □ Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

SOLUCIÓN Como $\sqrt{x^2+1}$ y x son grandes cuando x es grande, es difícil ver qué ocurre con su diferencia, así que recurrimos al álgebra para reescribir la función. Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del radical

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

Se podría aplicar el teorema de la compresión para demostrar que este límite es 0. Pero un método más fácil es dividir el numerador y el denominador entre x. Al hacerlo y utilizando las leyes de los límites

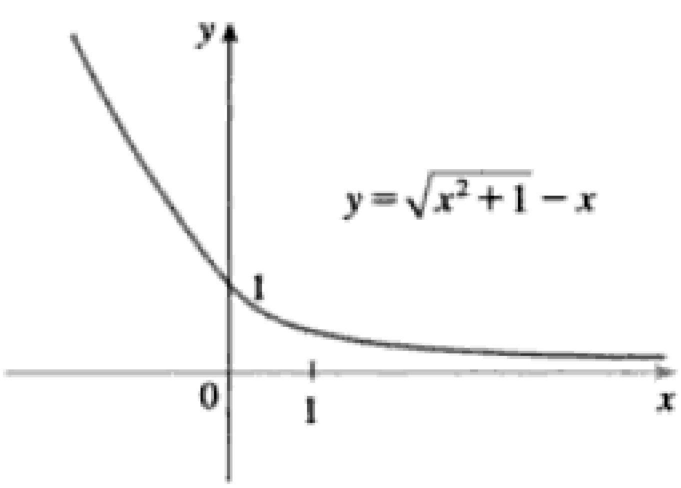


FIGURA 9

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}$$
$$=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

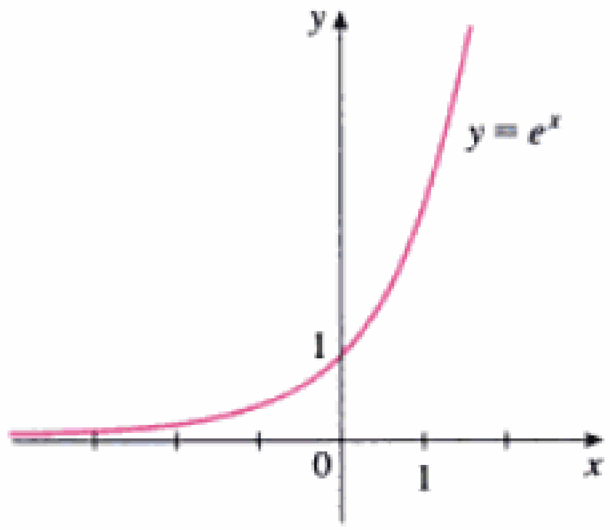
En la figura 9 se ilustra este resultado. □

La gráfica de la función exponencial natural $y=e^x$ tiene la recta $y=0$ (eje x) como asíntota horizontal. (Lo mismo se cumple para cualquier función exponencial con base $a>1$.)

En efecto, a partir de la gráfica de la figura 10 y la tabla correspondiente de valores, vemos que

6 $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

Advierta que los valores de e^x tienden a 0 con mucha rapidez.



x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

FIGURA 10

■ La estrategia de solución en el ejemplo 6 es la de *introducir algo nuevo* (vea la página 78). Aquí, la ayuda adicional la proporciona la nueva variable t.

EJEMPLO 6 □ Evalúe $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUCIÓN Si hacemos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por lo tanto, por (6)

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

(Véase el ejercicio 65.) □

EJEMPLO 7 □ Evalúe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Cuando x crece, los valores de sen x oscilan entre 1 y −1 infinidad de veces y por tanto no se aproximan a ningún número. En consecuencia, no existe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$. □

Límites infinitos en el infinito

La notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Se usa para indicar que los valores de $f(x)$ crecen al crecer x sin cotas. Se asocian significados semejantes a los símbolos siguientes:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO 8 □ Encontrar $\lim_{x \to \infty} x^3$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x crece, x^3 también lo hace; por ejemplo,

$$10^3 = 1000 \qquad 100^3 = 1{,}000{,}000 \qquad 1000^3 = 1{,}000{,}000{,}000$$

De hecho, podemos incrementar x^3 tanto como queramos aumentando x lo suficiente; en consecuencia, podemos escribir

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

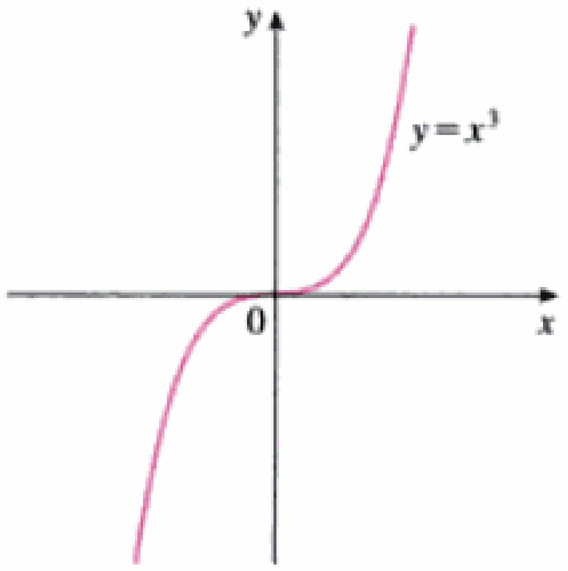


FIGURA 11
$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

De igual forma, cuando x es grande y negativo, también lo es x^3. Así,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

El significado de estas límites se puede apreciar en la gráfica de $y = x^3$ de la figura 11. □

En la figura 10 se aprecia que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

pero en la figura 12 se aprecia que $y = e^x$ crece cuando $x \to \infty$ con mucha mayor rapidez que $y = x^3$.

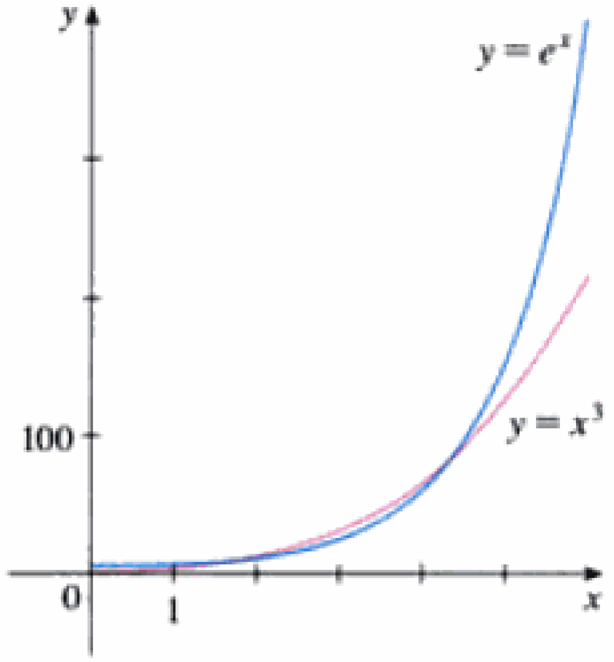


FIGURA 12
e^x es mucho más grande que x^3 cuando x es grande.

EJEMPLO 9 □ Encuentre $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Note que *no podemos* escribir

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x$$
$$= \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no se pueden aplicar a los límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ es indefinible). Sin embargo, podemos escribir

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x - 1) = \infty$$

porque tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y también su producto. □

EJEMPLO 10 □ Encuentre $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3 dividimos el numerador y el denominador entre x (la mayor potencia de x que aparece en el denominador) que es x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

porque $x + 1 \to \infty$ y $(3/x) - 1 \to -1$ cuando $x \to \infty$. □

En el ejemplo que sigue veremos que usando límites infinitos en infinito y conociendo las coordenadas al origen, podremos tener una idea aproximada de la gráfica de un polinomio sin calcular muchos valores.

EJEMPLO 11 Trazar la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ determinando sus coordenadas al origen y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN solución La ordenada al origen es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y las abscisas al origen se determinan fijando $y = 0$: $x = 2, -1, 1$. Observa que como $(x - 2)^4$ es positivo, la función no cambia de signo en 2; por consiguiente, la gráfica no cruza al eje x en 2 pero sí lo cruza en -1 y 1.

Cuando x es grande los tres factores también lo son, así que

$$\lim_{x\to\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x es grande y negativo, el primer factor es grande y positivo, y el segundo y el tercero son, a la vez, grandes y negativos, de modo que

$$\lim_{x\to-\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Al combinar esta información obtenemos un bosquejo de la gráfica (Fig. 13).

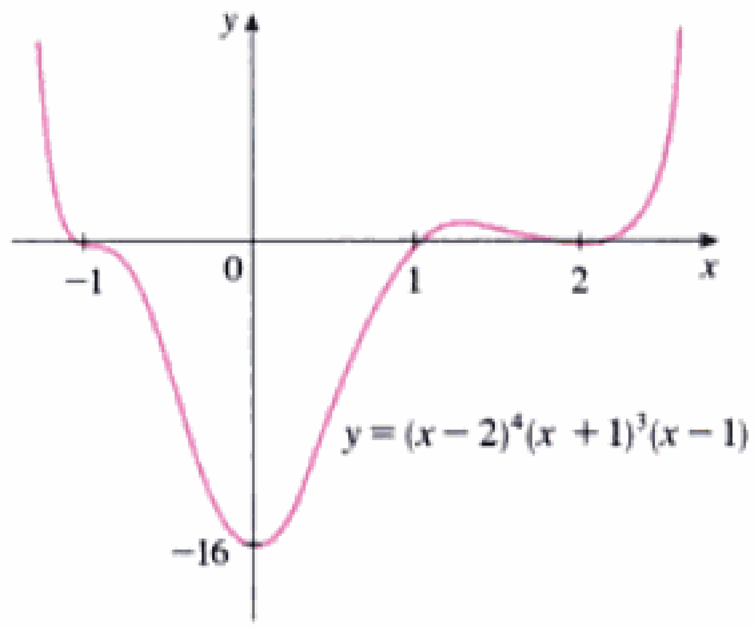


FIGURA 13

□

Definiciones precisas

La definición (1) se puede enunciar con precisión como sigue:

> **7 Definición** Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces,
>
> $$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$
>
> significa que para todo $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente N tal que
>
> $$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad x > N$$

En palabras, lo anterior dice que los valores $f(x)$ se pueden acercar arbitrariamente a L (dentro de una distancia ε, donde ε es un número positivo) si x se hace suficientemente grande (mayor que N, donde N depende de ε). En plano gráfico significa que si elegimos a x lo suficientemente grande (mayor que un número N), podemos hacer que la gráfica de f quede entre las líneas dadas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ (Fig. 14). Esto se debe cumplir sin importar lo pequeño que se elija ε. La figura 15 muestra que si se escoge un valor menor de ε, se podrá necesitar un valor mayor de N.

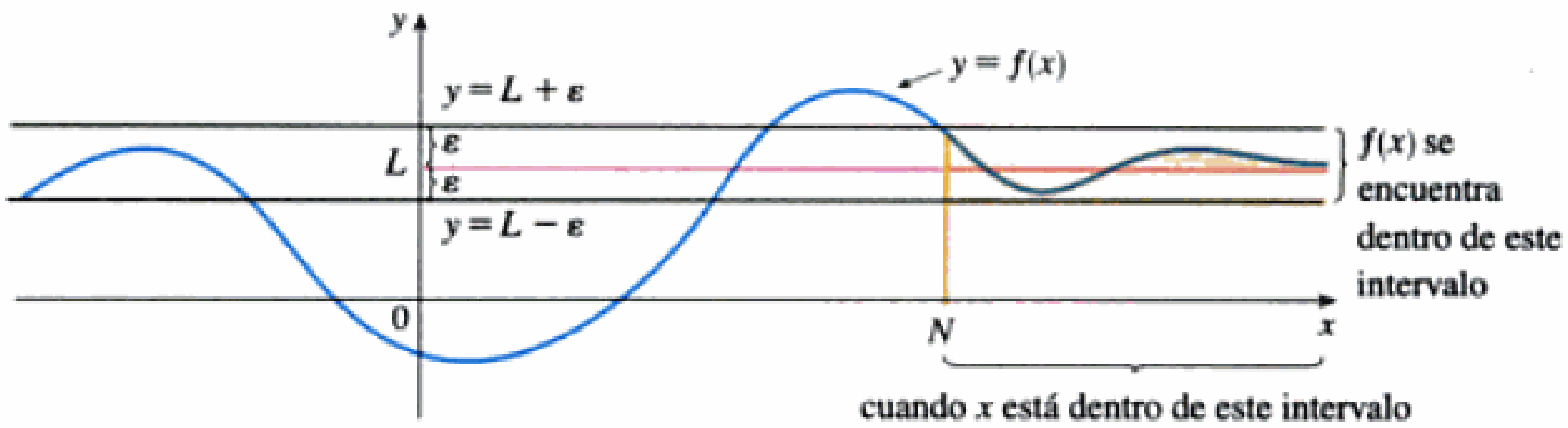


FIGURA 14
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

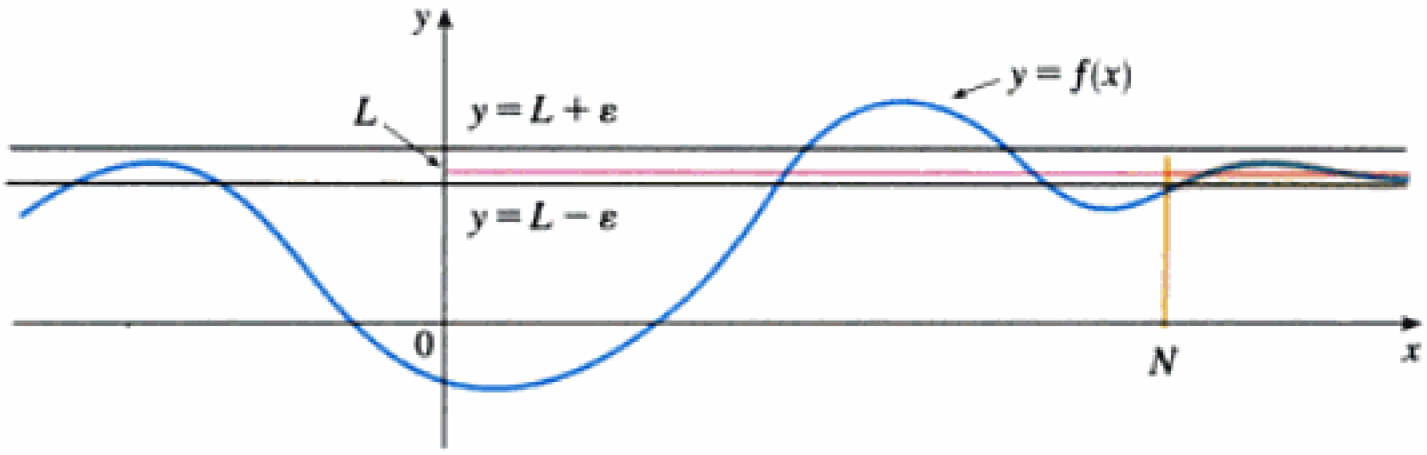


FIGURA 15
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

De igual modo, en la definición (2) damos una versión precisa de la definición (8) y la vemos en la figura 16.

8 Definición Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente N tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x < N$$

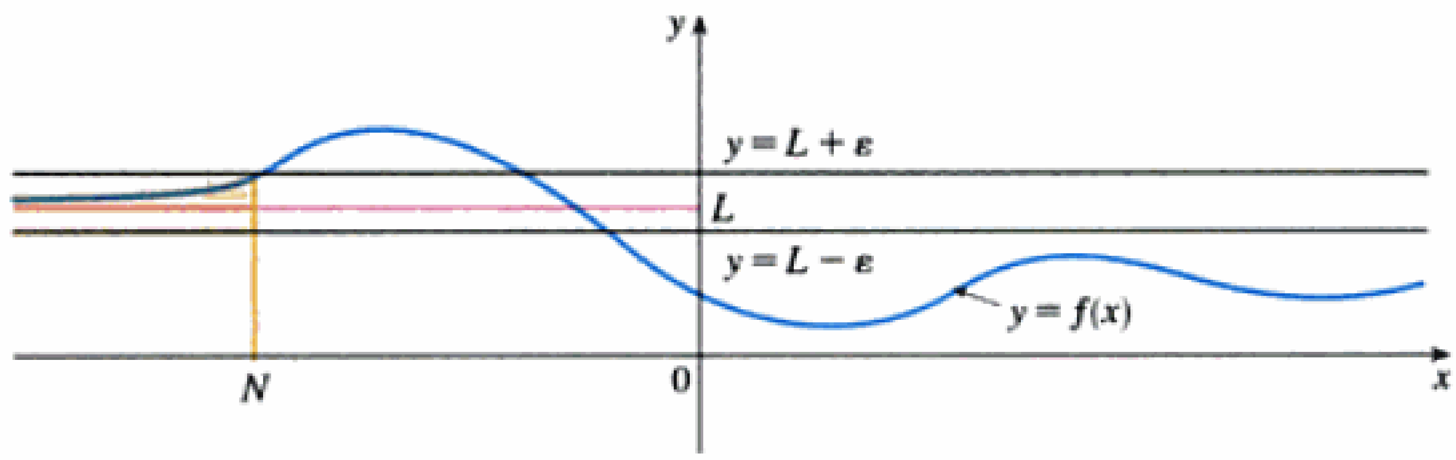


FIGURA 16
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

En el ejemplo 3, calculamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

En el ejemplo que sigue emplearemos una graficadora para relacionar lo anterior con la definición (7) con $L = \frac{3}{5}$ y $\varepsilon = 0.1$.

EJEMPLO 12 □ Con una graficadora determine un número N tal que

$$\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6\right| < 0.1 \quad \text{siempre que} \quad x > N$$

SOLUCIÓN Reacomodamos como sigue la desigualdad original:

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

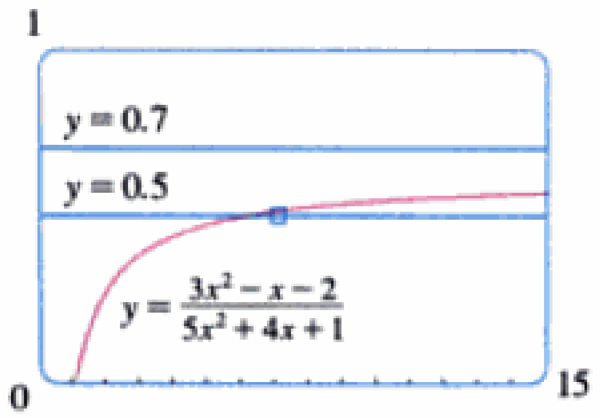


FIGURA 17

Necesitamos hallar los valores de x para los cuales la curva dada quede entre las rectas horizontales $y = 0.5$ y $y = 0.7$; por consiguiente, graficaremos la curva y esas rectas (Fig. 17); a continuación usaremos el cursor para estimar que la curva cruza la recta $y = 0.5$ cuando $x \approx 6.7$. A la derecha de ese número la curva permanece entre las rectas $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Luego de redondear para estar seguros, podemos decir que

$$\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6\right| < 0.1 \quad \text{siempre que} \quad x > 7$$

En otras palabras, para $\varepsilon = 0.1$, podemos elegir $N = 7$ (o cualquier número mayor que éste) en la definición (7). □

EJEMPLO 13 □ Emplea la definición (7) para demostrar que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema: proponer un valor de N.* Dado $\varepsilon > 0$, deseamos determinar N tal que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N$$

Al calcular el límite cabe suponer que $x > 0$, en cuyo caso

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto, deseamos que

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N$$

esto es, que

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{siempre que} \quad x > N$$

Ello sugiere que deberíamos hacer $N = 1/\varepsilon$.

2. *Prueba (demostrar que N funciona).* Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $N = 1/\varepsilon$. Sea $x > N$. Entonces

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \varepsilon$$

Así

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N$$

Por consiguiente, según la definición (7),

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

La figura 18 ilustra la demostración señalando algunos valores de ε y los valores correspondientes de N.

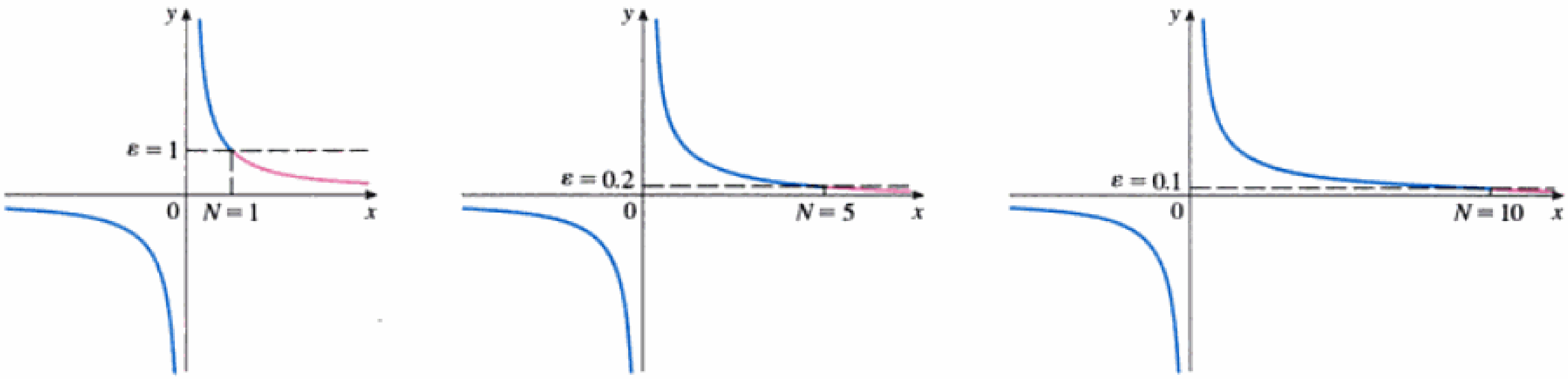


FIGURA 18

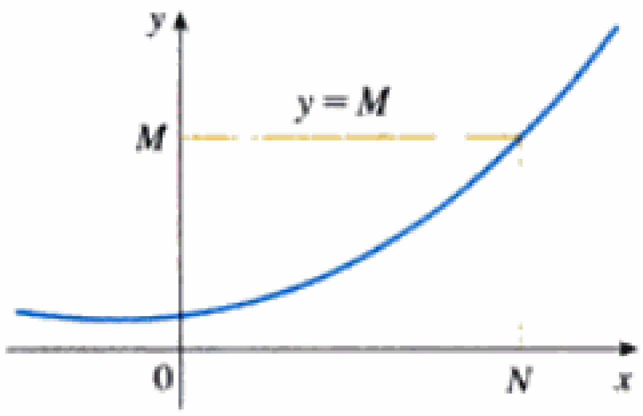


FIGURA 19
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Por último, notaremos que un límite infinito al infinito se puede definir como sigue. La representación geométrica aparece en la figura 19.

9 Definición Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

quiere decir que para todo número positivo M hay un número $N > 0$ correspondiente tal que

$$f(x) > M \quad \text{siempre que} \quad x > N$$

Se aplican definiciones semejantes cuando el símbolo ∞ se reenplaza por $-\infty$ (Ej. 64).

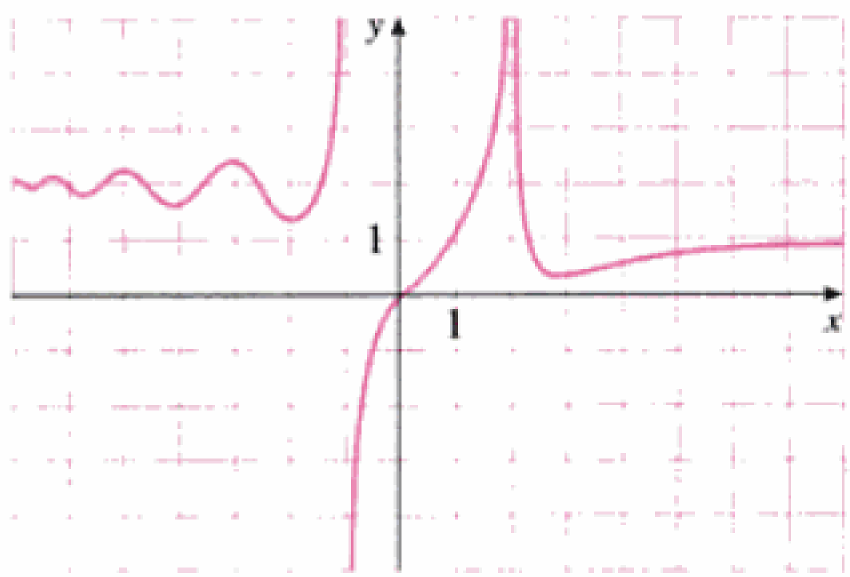
2.6 Ejercicios

1. Explique qué significa.

   (a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

2. (a) ¿Es posible que la gráfica de $y = f(x)$ corte una asíntota vertical? ¿Puede cortar una asíntota horizontal? Dé ejemplos gráficos.
   (b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Ejemplifique las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica se exhibe, determine
   (a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
   (d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
   (f) Las ecuaciones de las asíntotas.



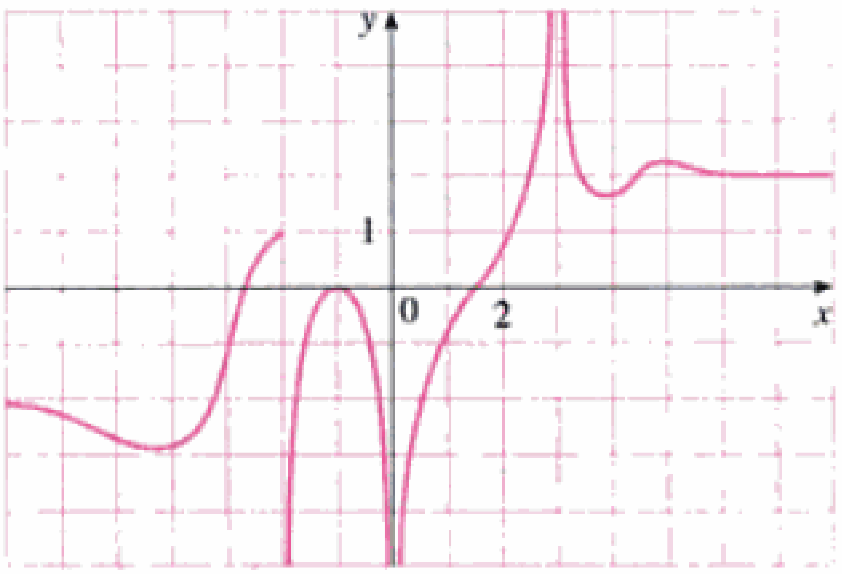
4. Para la función g cuya gráfica se exhibe, determine:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$

(f) Las ecuaciones de las asíntotas.



5–8 □ Bosqueje la gráfica de un ejemplo de una función f que satisface todas las condiciones dadas.

5. $f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad f$ es impar

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1,$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

7. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0,$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$

9. Por prueba y error (tanteo) halle el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ cuando $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. Luego, use una gráfica de f para reafirmar.

10. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ correctamente con dos decimales.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con cuatro decimales.

11–14 □ Evalúe el límite y justifique cada paso indicando las propiedades pertinentes de los límites.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+4}{x^2 - 2x + 5}$

12. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{7t^3 + 4t}{2t^3 - t^2 + 3}$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2 - 1}{x + 8x^2}}$

15–32 □ Encontrar el límite

15. $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r^4 - r^2 + 1}{r^5 + r^3 - r}$

16. $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{6t^2 + 5t}{(1-t)(2t-3)}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1 + 4x^2}}{4 + x}$

18. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x}}{4x + 1}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x\right)$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

22. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}$

26. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x + \sqrt{x}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 5x^2)$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1}(x^2 - x^4)$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^7 - 1}{x^6 + 1}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}$

33. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

graficando la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para tantear el valor del límite.

(c) Demuestre que la conjetura es correcta.

34. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ con un decimal correcto.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con cuatro decimales.

(c) Hallar el valor exacto del límite.

35–40 □ Determine las asíntotas horizontales y verticales de cada curva. Compruebe su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

35. $y = \dfrac{x}{x+4}$

36. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$

37. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3x - 10}$

38. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + x}$

39. $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4 + 1}}$

40. $F(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{4x^2 + 3x + 2}}$

41. Halle una fórmula para una función f que satisfaga:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

42. Halle una fórmula para una función que tenga asíntotas verticales $x = 1$ y $x = 3$ y asíntotas horizontales $y = 1$.

43–46 □ Halle los límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. Con esta información, y las coordenadas al origen, forme un esquema aproximado de la gráfica, como en el ejemplo 11.

43. $y = x^2(x - 2)(1 - x)$

44. $y = (2 + x)^3(1 - x)(3 - x)$

45. $y = (x + 4)^5(x - 3)^4$

46. $y = (1 - x)(x - 3)^2(x - 5)^2$

47. Use el "teorema del emparedado" para evaluar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$.

48. El *comportamiento terminal* de una función significará una descripción de lo que pasa cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$

(a) Describa y compare el comportamiento terminal de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

graficando ambas en las pantallas $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10{,}000, 10000]$.

(b) Dos funciones se dice que tienen el *mismo comportamiento terminal* si su corriente tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Muestre que P y Q tienen el mismo comportamiento terminal.

49. Sean P y Q polinomios. Determine

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es a) menor que el grado de Q y b) mayor que el grado de Q.

50. Trace una gráfica aproximada de la curva $y = x^n$ (n es un entero) para los cinco casos siguientes:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n impar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n impar
(v) $n < 0$, n par

A continuación, use esas gráficas para hallar los límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x^n$
(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^n$

51. Determine $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ si

$$\frac{4x - 1}{x} < f(x) < \frac{4x^2 + 3x}{x^2}$$

para toda $x > 5$.

52. (a) Un tanque contiene 5000 L de agua pura. Se le bombea una salmuera con 30 g de sal por litro, a una tasa de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal, pasados t minutos, en gramos por litro, es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \to \infty$?

53. En el noveno capítulo podremos mostrar que bajo ciertas condiciones la velocidad de caída de una gota de lluvia, en el instante t, $v(t)$ es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

en donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la velocidad terminal de la gota.

(a) Halle $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(b) Grafique $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s y $g = 9.8$ m/s^2. ¿Cuánto tiempo pasa antes de que la velocidad de la gota de lluvia llegue al 99% de su velocidad terminal?

54. (a) Graficando $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla, descubra qué tan grande hay que hacer x para que $e^{-x/10} < 0.1$

(b) ¿Puede resolver a) sin usar un aparato graficador?

55. Con una gráfica determine un número N tal que

$$\left|\frac{6x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 1} - 3\right| < 0.2 \quad \text{siempre que} \quad x > N$$

56. Para el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre la definición 7 hallando valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

57. Para el límite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

ilustre la definición 8 determinando valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.5$ y ε 0.1.

58. Para el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

ilustre la definición 9 encontrando un valor de N que corresponda a $M = 100$.

59. (a) ¿De qué magnitud debe ser x para que $1/x^2 < 0.0001$?

(b) Si $r = 2$ en el teorema 5, tendremos la ecuación

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrelo directamente a partir de la definición 7.

60. (a) ¿De qué magnitud debe ser x para que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?

(b) Si $r = \frac{1}{2}$ en el teorema 5, tendremos la ecuación.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrelo directamente con la definición 7.

61. Con la definición 8 demuestre que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

62. Demuestre que $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$, empleando la definición 9.

63. Use la definición 9 para probar que $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

64. Formule una definición precisa de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Utilice su definición para demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

65. Demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

y que $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

si es que existen esos límites.

2.7 Tangentes, velocidades y otras razones de cambio

En la sección 2.1 presumimos los valores de pendientes de rectas tangentes y de velocidades con base en la evidencia numérica. Ahora que hemos definido los límites y aprendido las técnicas para calcularlos, regresaremos a los problemas de la tangente y la velocidad, pero con la habilidad para calcular pendientes de tangentes, velocidades y otras razones de cambio.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y queremos hallar la tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces consideramos un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En seguida, acercamos Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces definimos la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la Fig. 1.)

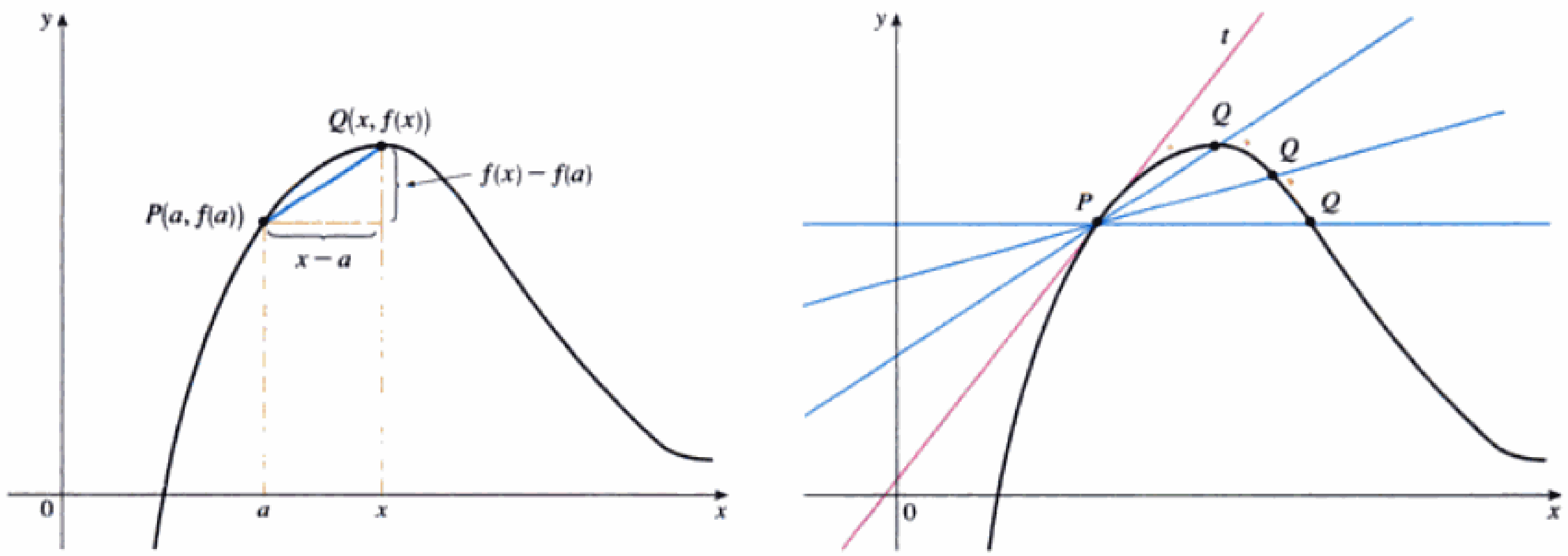


FIGURA 1

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con la pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que exista este límite.

En nuestro primer ejemplo, confirmamos la suposición que hicimos en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

EJEMPLO 1 ☐ Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN En este caso, tenemos $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, encontramos que una ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$ ☐

A veces nos referimos a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la *pendiente de la curva* en el punto. La idea es que si nos acercamos lo suficiente al punto (*zoom in*), la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Entre más nos acerquemos, la parábola más parece una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

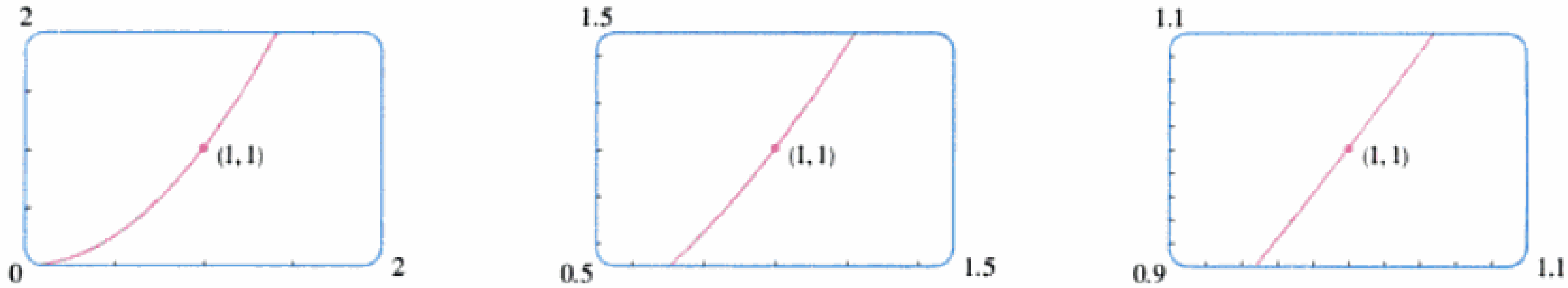


FIGURA 2
Acercamiento al punto (1, 1) de la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Sea

$$h = x - a$$

Entonces $$x = a + h$$

de modo que la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(Véase la Fig. 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

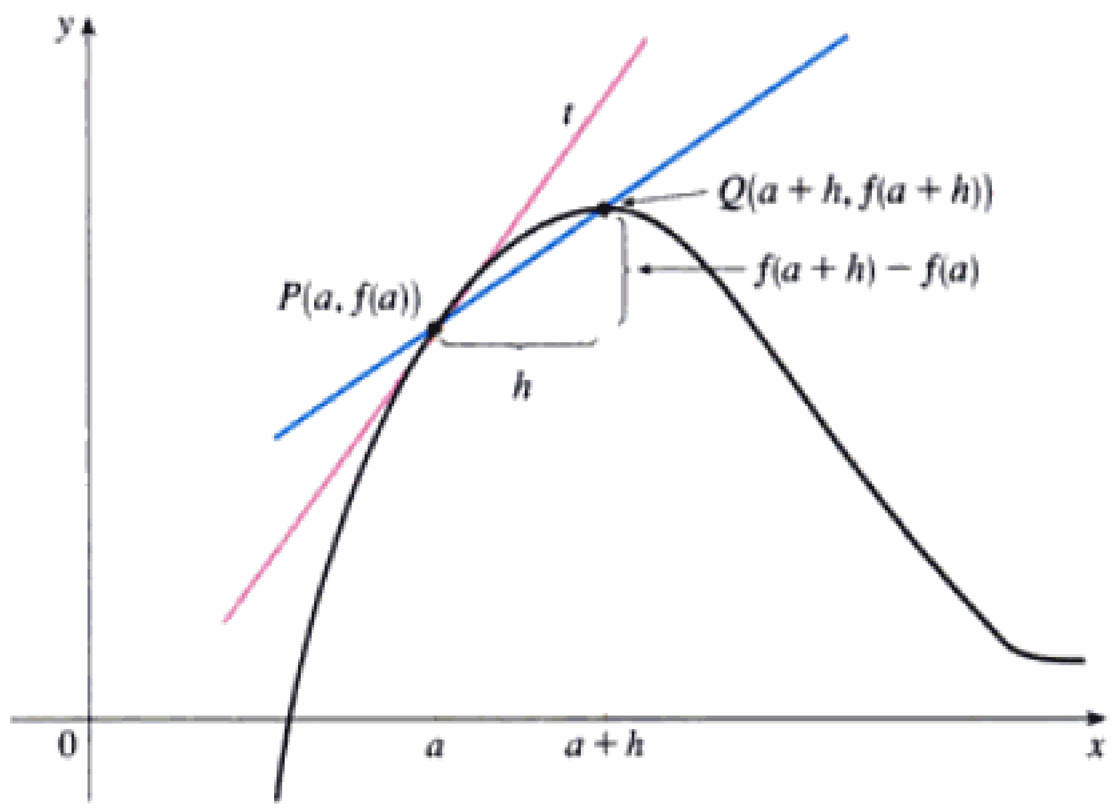


FIGURA 3

Advierta que, cuando x tiende a a, h lo hace a 0 (porque $h = x - a$) y, de este modo, la expresión para la pendiente de la recta tangente, dada en el definición 1, queda

2
$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

EJEMPLO 2 □ Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3 + h)}{3 + h}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3 + h} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

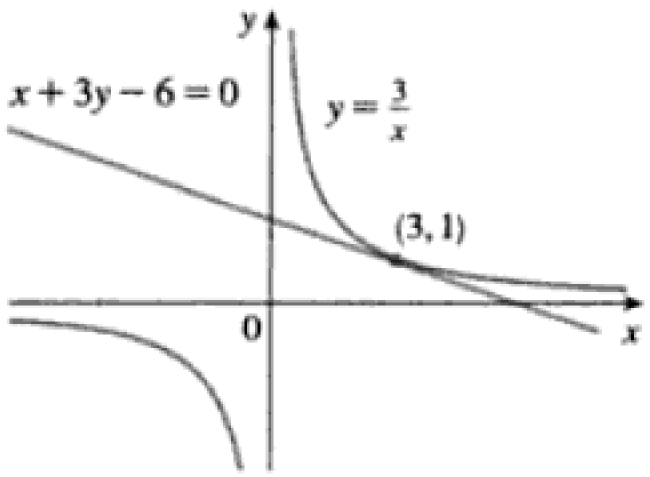


FIGURA 4

la cual se simplifica hasta $$x + 3y - 6 = 0$$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente. □

EJEMPLO 3 □ Hallar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en los puntos (1, 1), (4, 2) y (9, 3).

SOLUCIÓN Ya que se piden tres pendientes lo más eficiente será buscar la pendiente en el punto general $(a, \sqrt{a})$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

Le racionaliza el numerador

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h) - a}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

Función continua de h

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

En el punto (1, 1), tenemos $a = 1$, de modo que la pendiente de la tangente es $m = 1/\left(2\sqrt{1}\right) = \frac{1}{2}$. En (4, 2) tenemos $m = 1/\left(2\sqrt{4}\right) = \frac{1}{4}$; en (9, 3), $m = 1/\left(2\sqrt{9}\right) = \frac{1}{6}$. □

Velocidad

En la sección 2.1 investigamos el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el instante t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto. En el intervalo de $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$ (Fig. 5). La velocidad promedio en este periodo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la secante PQ en la figura 6.

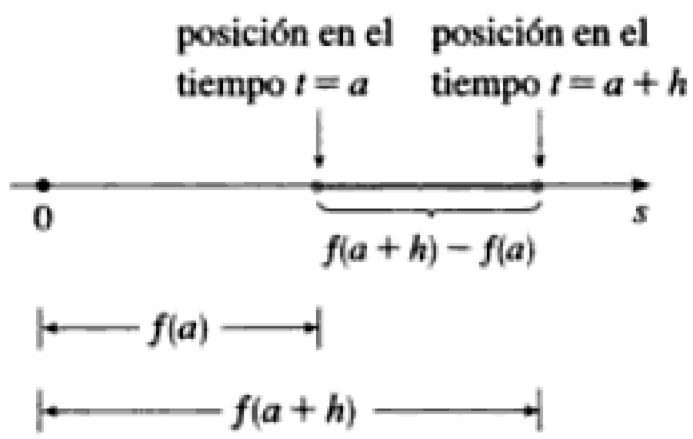


FIGURA 5

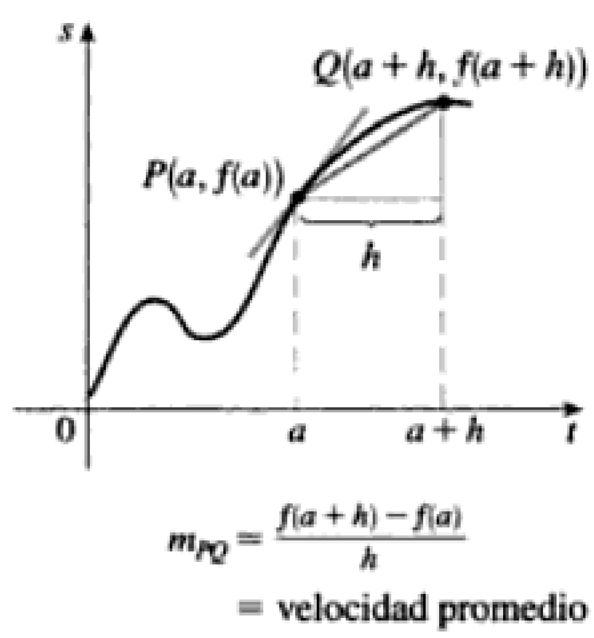


FIGURA 6

Suponga ahora que calculamos las velocidades promedio sobre lapsos $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, hagamos que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la bola que cae, definimos la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3
$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P. (Compare las Ecs. 2 y 3.)

Ahora que sabemos calcular límites, volvamos a considerar el problema de la pelota que cae.

EJEMPLO 4 □ Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, 450 m arriba del suelo.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
(b) ¿Con qué velocidad choca contra el suelo?

□ Recuerde que en la sección 2.1 vimos que la distancia (en metros) recorrida al caer después de t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Usemos la ecuación del movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$ para hallar la velocidad $v(a)$ después de a segundos:

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a \end{aligned}$$

(a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.

(b) Como la plataforma de observación está 450 m arriba del suelo, la pelota chocará contra éste en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por lo tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$ □

Otras razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Por lo tanto, y es una función de x y escribimos $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se llama **razón promedio de cambio de y con respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la figura 7.

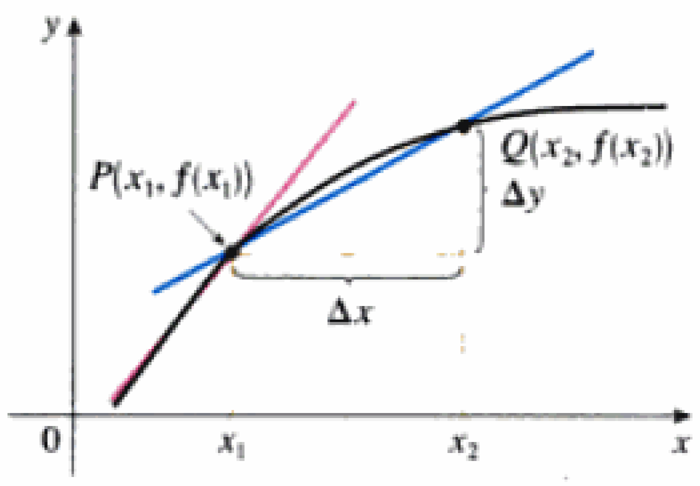


FIGURA 7

razón promedio de cambio = m_{PQ}
razón instantánea de cambio = pendiente de la tangente P

Por analogía con la velocidad, consideramos la razón promedio de cambio sobre intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por lo tanto, al hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas razones de cambio se llama **razón (instantánea) de cambio de y con respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

4 razón instantánea de cambio $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

x (h)	T (°C)	x (h)	T (°C)
0	6.5	13	16.0
1	6.1	14	17.3
2	5.6	15	18.2
3	4.9	16	18.8
4	4.2	17	17.6
5	4.0	18	16.0
6	4.0	19	14.1
7	4.8	20	11.5
8	6.1	21	10.2
9	8.3	22	9.0
10	10.0	23	7.9
11	12.1	24	7.0
12	14.3		

EJEMPLO 5 □ Se registraron las lecturas de la temperatura (en grados Celsius) cada hora, a partir de la media noche, en un día de abril, en Whitefish, Montana. El tiempo x se mide en horas a partir de la medianoche. Los datos se dan en la tabla de la izquierda.

(a) Encuentre la razón promedio de cambio de la temperatura con respecto al tiempo:
  (i) desde el mediodía hasta las 3 P.M. (ii) desde el mediodía hasta las 2 P.M.
  (iii) desde el mediodía hasta la 1 P.M.
(b) Estime la razón instantánea de cambio a mediodía.

SOLUCIÓN
(a) (i) Desde mediodía hasta las 3 P.M., la temperatura cambia desde 14.3 °C hasta 18.2 °C, de modo que

$$\Delta T = T(15) - T(12) = 18.2 - 14.3 = 3.9 \text{ °C}$$

en tanto que el cambio en el tiempo es $\Delta x = 3$ h. Por consiguiente, la razón promedio de cambio de la temperatura con respecto al tiempo es

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{3.9}{3} = 1.3 \text{ °C/h}$$

Nota sobre unidades

Las unidades para la razón promedio de cambio $\Delta T/\Delta x$ son las unidades para ΔT divididas entre las unidades para Δx, a saber, grados Celsius por hora. La razón instantánea de cambio es el límite de las razones promedio de cambio, de modo que se mide en las mismas unidades: grados Celsius por hora.

(ii) Desde el mediodía hasta las 2 P.M., la razón promedio de cambio es

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(14) - T(12)}{14 - 12} = \frac{17.3 - 14.3}{2} = 1.5 \text{ °C/h}$$

(iii) Desde el mediodía hasta la 1 P.M., la razón promedio de cambio es

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(13) - T(12)}{13 - 12} = \frac{16.0 - 14.3}{1} = 1.7 \text{ °C/h}$$

(b) En la figura 8, situamos los datos y los usamos para trazar una curva suave que se aproxime a la gráfica de la función de temperatura. En seguida, trazamos la tangente en el punto P, donde $x = 12$ y, después de medir los lados del triángulo ABC, estimamos que la pendiente de la recta tangente es

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{10.3}{5.5} \approx 1.9$$

Por lo tanto, la razón instantánea de cambio de la temperatura con respecto al tiempo, al mediodía, es alrededor de 1.9°C/h.

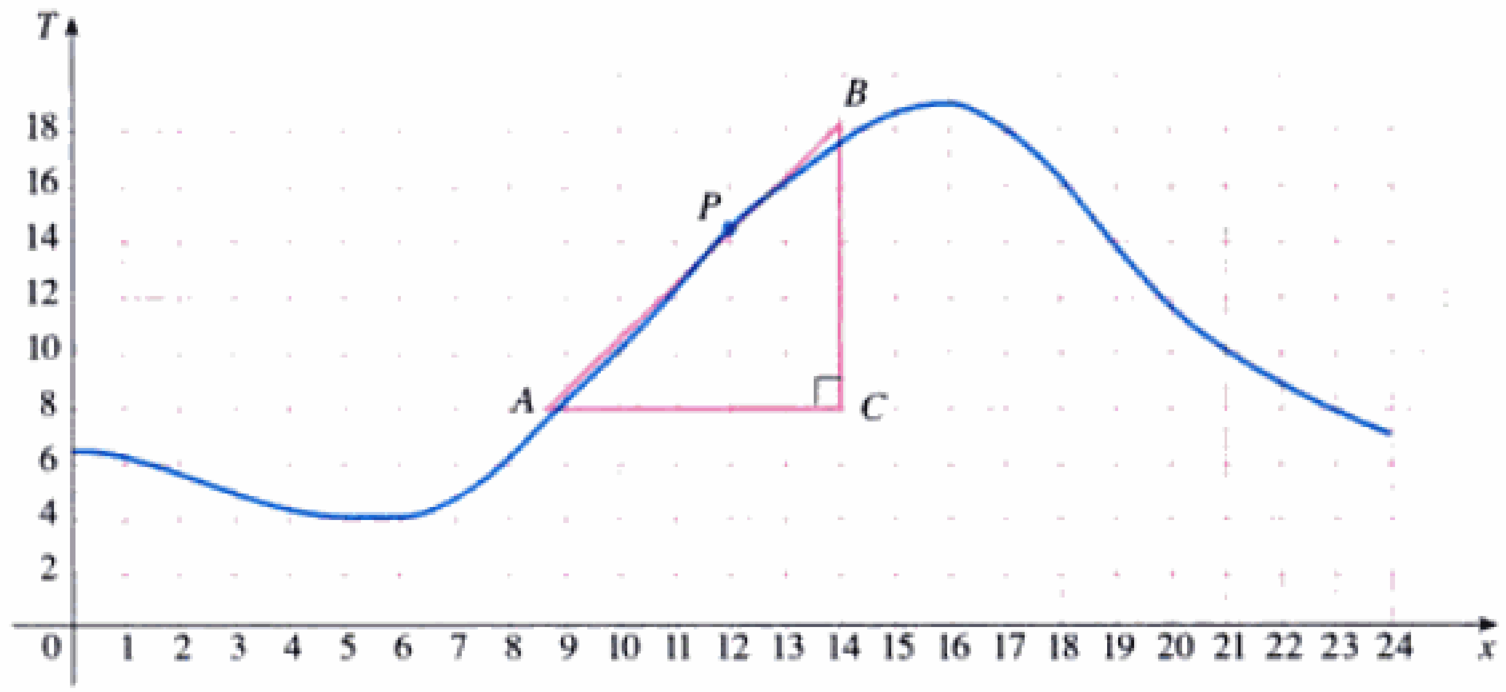


FIGURA 8

□

La velocidad de una partícula es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo. Los físicos también se interesan en otras razones de cambio; por ejemplo, la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo (lo que se conoce como *potencia*). Los químicos, que estudian una reacción química, se interesan en la razón de cambio en la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (llamada *velocidad de reacción*). Un fabricante de acero se interesa en la razón de cambio del costo de producir x toneladas de acero por día, con respecto a x (lo que se conoce como *costo marginal*). Un biólogo se interesa en la razón de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.3 se darán más ejemplos.

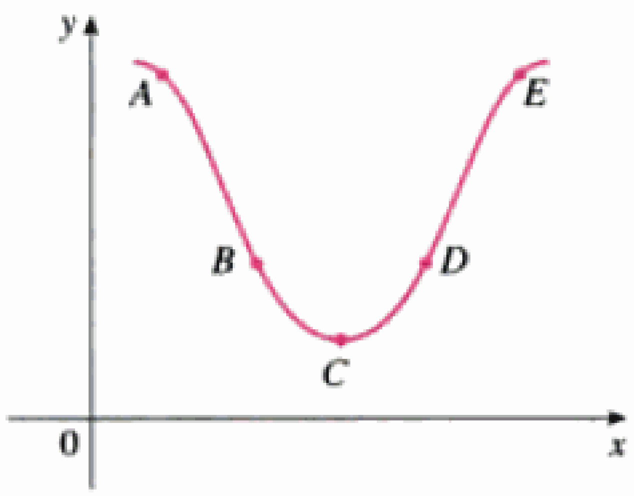
Todas estas razones de cambio se pueden interpretar como pendientes de tangentes. Esto da un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resolvemos problemas en que intervienen rectas tangentes, no resolvemos sólo un problema de geometría; también resolvemos implícitamente una gran variedad de problemas de la ciencia y la ingeniería en que intervienen razones de cambio.

2.7 Ejercicios

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
   (a) Encuentre una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
   (b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Suponga que un objeto se mueve con la función de posición $s = f(t)$.
   (a) Escriba una expresión para la velocidad promedio del objeto en el lapso $t = a$ a $t = a + h$.
   (b) Escriba una expresión para la velocidad instantánea en el instante $t = a$.

3. Considere la pendiente de la curva dada en cada uno de los cinco puntos que se muestran. Enumere estas cinco pendientes en orden decreciente y explique su razonamiento.



4. Grafique la curva $y = e^x$ en las pantallas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué advierte acerca de la curva a medida que se aproxime al punto $(0, 1)$?

5. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2 + 2x$, en el punto $(-3, 3)$
   (i) con la definición 1
   (ii) con la ecuación 2
   (b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso a).
   (c) Grafique la parábola y la recta tangente. Como una comprobación de su solución, acérquese al punto $(-3, 3)$ hasta que no pueda distinguir la parábola y la recta tangente.

6. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^3$, en el punto $(-1, -1)$.
   (i) con la definición 1
   (ii) con la ecuación 2.
   (b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso a).
   (c) Grafique la curva y la recta tangente en pantallas cada vez más pequeñas con centro en $(-1, -1)$ hasta que parezca que coinciden la curva y la recta.

7–10 □ Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto dado.

7. $y = 1 - 2x - 3x^2$, $(-2, -7)$

8. $y = 1/\sqrt{x}$, $(1, 1)$

9. $y = 1/x^2$, $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

10. $y = x/(1 - x)$, $(0, 0)$

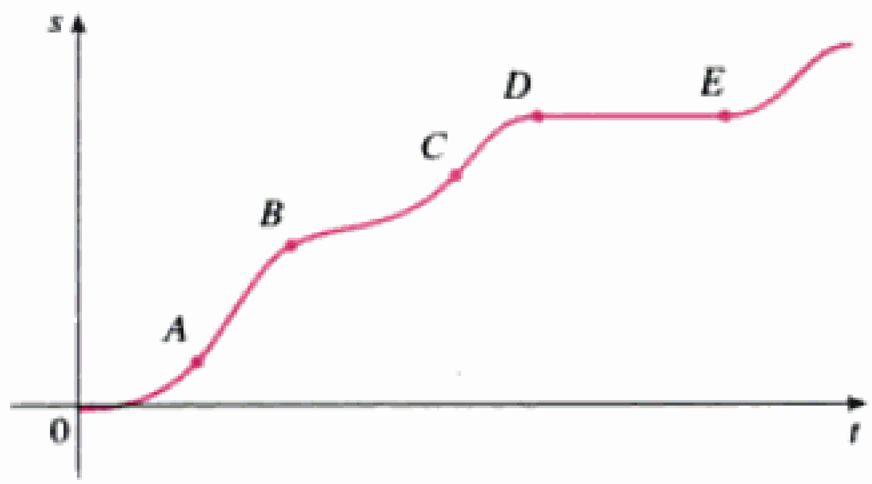
11. (a) Halle la pendiente de la tangente a la curva $y = 2/(x + 3)$ en el punto donde $x = a$.
    (b) Encuentre las pendientes de las tangentes en los puntos donde x vale i) -1, ii) 0 y iii) 1.

12. (a) Halle la pendiente de la tangente a la parábola $y = 1 + x + x^2$, en el punto donde $x = a$.
    (b) Encuentre las pendientes de las rectas tangentes en los puntos cuyas coordenadas x son i) -1, ii) $-\frac{1}{2}$ y iii) 1.
    (c) Grafique la curva y las tres tangentes

13. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 1$ en el punto donde $x = a$.
    (b) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, -2)$ y $(2, 1)$
    (c) Grafique la curva y las dos tangentes en una pantalla común.

14. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $y = 1/\sqrt{5 - 2x}$ en el punto donde $x = a$.
    (b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(2, 1)$ y $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$.
    (c) Trace las gráficas de la curva y las dos tangentes en una pantalla común

15. La gráfica muestra la función de posición de un automóvil. Use la forma de la gráfica para explicar las respuestas que dé a las siguientes preguntas.
    (a) ¿Cuál fue la velocidad inicial del automóvil?
    (b) ¿El automóvil viajaba más rápido en B o en C?
    (c) ¿El automóvil desaceleraba o aceleraba en A, B y C?
    (d) ¿Qué sucedió entre D y E?



16. Valeria conduce en una carretera. Grafique la función de posición del auto si maneja de la siguiente manera: en el instante $t = 0$ min, el automóvil pasa frente a la señal que marca la milla 15 a una velocidad constante de 55 mi/h, que conserva durante una hora. A continuación, disminuye gradualmente la velocidad durante un periodo de dos minutos cuando se detiene a comer. La comida dura 26 min; en seguida, vuelve a arrancar y acelera en forma gradual hasta 65 mi/h, durante dos minutos. Conduce a una velocidad constante de 65 mi/h durante dos horas y después, durante un periodo de tres minutos, disminuye su velocidad gradualmente hasta que se detiene por completo.

17. Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos se expresa con $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

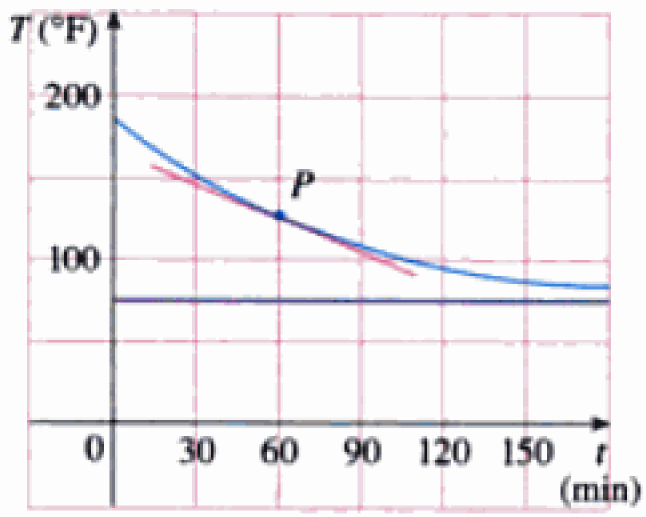
18. Si en la Luna se dispara una flecha hacia arriba con una velocidad de 58 m/s, su altura (en metros) después de t segundos se expresa con $H = 58t - 0.83t^2$.
(a) Encuentre la velocidad de la flecha después de 1 s.
(b) Halle la velocidad de la flecha cuando $t = a$.
(c) ¿Cuándo chocará la flecha con la Luna?
(d) ¿Con qué velocidad chocará?

19. La ecuación del movimiento $s = 4t^3 + 6t + 2$ denota el desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta. En dicha expresión, t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

20. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta se expresa con $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre las velocidades promedio durante los siguientes intervalos:
(i) [3, 4] (ii) [3.5, 4]
(iii) [4, 5] (iv) [4, 4.5]
(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
(c) Grafique s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes sean las velocidades promedio del inciso a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea del inciso b).

21. Se coloca una lata tibia de gaseosa en un refrigerador frío. Grafique la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón inicial de cambio de la temperatura es mayor o menor que la razón de cambio después de una hora?

22. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 185 °F y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde la temperatura es de 75 °F. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. (En la Sec. 9.4 seremos capaces de aplicar la ley de Newton del enfriamiento con el fin de hallar una ecuación para T como función del tiempo.) Por medio de la



medición de la pendiente de la tangente, estime la razón de cambio de la temperatura después de una hora.

23. (a) Use los datos del ejemplo 5 para hallar la razón promedio de cambio de la temperatura con respecto al tiempo:
(i) De las 8 P.M. a las 11 P.M.
(ii) De las 8 P.M. a las 10 P.M.
(iii) De las 8 P.M. a las 9 P.M.
(b) Estime la razón instantánea de cambio de T con respecto al tiempo a las 8 P.M., midiendo la pendiente de una tangente.

24. En la tabla se da la población P (en millares) de la ciudad de San José, California, desde 1991 hasta 1997.

Año	1991	1993	1995	1997
P	793	820	839	874

(a) Encuentre la tasa promedio de crecimiento.
(i) De 1991 a 1995
(ii) De 1993 a 1995
(iii) De 1995 a 1997
En cada caso, incluya las unidades.
(b) Tome el promedio de dos tasas promedio de cambio y estime la razón instantánea de crecimiento en 1995. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Estime la tasa instantánea de crecimiento en 1995 midiendo la pendiente de una tangente.

25. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.
(a) Encuentre la razón promedio de cambio de C con respecto a x, cuando se cambia el nivel de producción:
(i) De $x = 100$ a $x = 105$
(ii) De $x = 100$ a $x = 101$
(b) Halle la razón instantánea de cambio de C con respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la Sec. 3.3 se explica su significado.)

26. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 galones de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100{,}000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 60$$

Encuentre la rapidez con que sale el agua del tanque (la razón instantánea de cambio de V con respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ y 60, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una oración o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

2.8 Derivadas

En la sección 2.7 definimos la pendiente de la tangente a una curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto donde $x = a$, como

$$\boxed{1} \qquad m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vimos también que la velocidad de un objeto con función de posición $s = f(t)$ en el instante $t = a$ es

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De hecho, los límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

tienen su origen cuando se calcula la rapidez de cambio en la ingeniería como en el caso de la velocidad de reacción en la química o el costo marginal en la economía. Dada la frecuencia con que se presenta este tipo de límite, se le da un nombre y una notación especiales.

$f'(a)$ se lee "f prima de a".

2 Definición La **derivada de una función f en un número a**, denotada con $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si escribimos $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si, y sólo si, x tiende a a. Por lo tanto, una manera equivalente de enunciar la definición de la derivada, como vimos al hallar rectas tangentes, es

$$\boxed{3} \qquad \boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

EJEMPLO 1 □ Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

SOLUCIÓN A partir de la definición 2, tenemos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

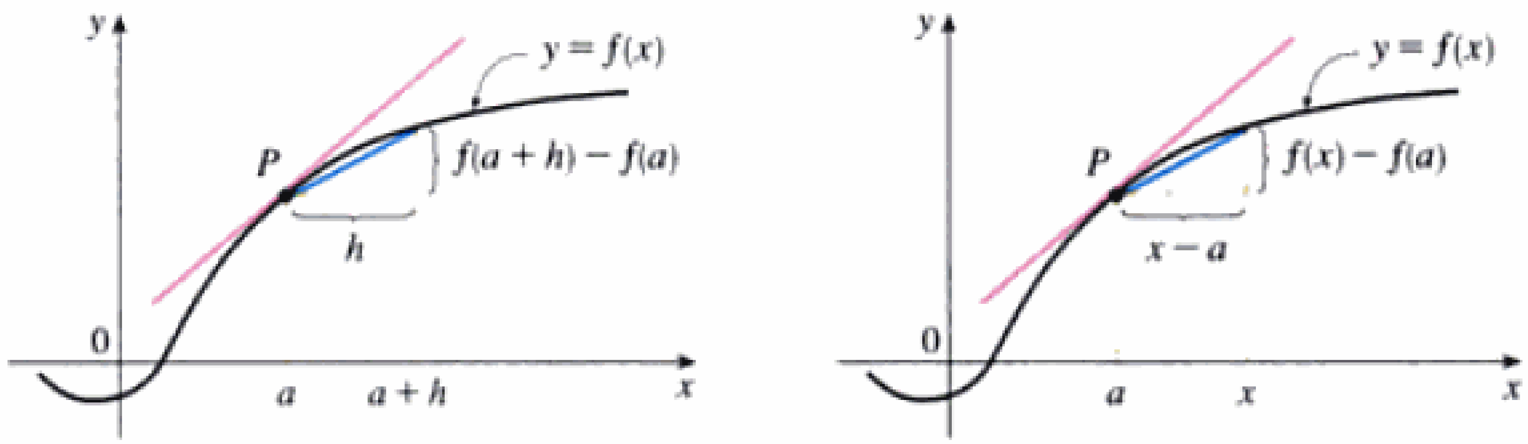
□

Interpretación de la derivada como la pendiente de una tangente

En la sección 2.7 definimos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene la pendiente m dada por la ecuación 1. Puesto que, por la definición 2, esto es lo mismo que la derivada $f'(a)$, podemos decir que

> La recta tangente a $y = f(x)$, en $(a, f(a))$, es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Por lo tanto, la interpretación geométrica de una derivada [definida por (2) o (3)] es como se muestra en la figura 1.



(a) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
= pendiente de la tangente P
= pendiente de la curva en P

(b) $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
= pendiente de la tangente en P
= pendiente de la curva en P

FIGURA 1
Interpretación geométrica de la derivada

Si usamos la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, podemos escribir una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EJEMPLO 2 □ Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Con base en el ejemplo 1, sabemos que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. De esta forma, una ecuación de la recta tangente es (Fig. 2)

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{o} \qquad y = -2x$$

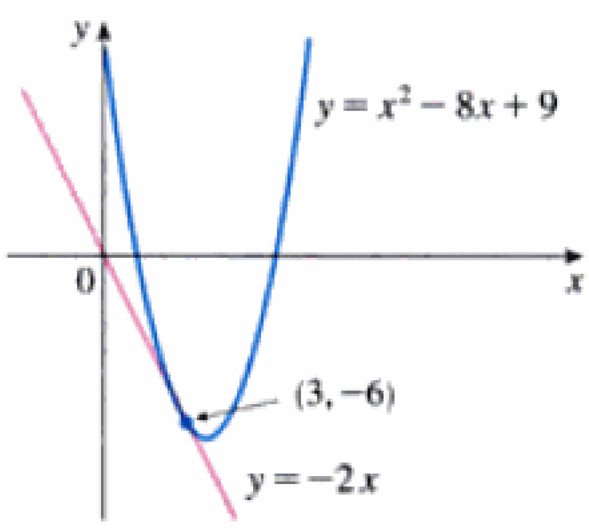


FIGURA 2

□

EJEMPLO 3 □ Sea $f(x) = 2^x$. Estime el valor de $f'(0)$ de dos maneras:
(a) Con la definición 2 y valores cada vez más pequeños de h.
(b) Interprete $f'(0)$ como la pendiente de una tangente y use una calculadora graficadora para acercarse en la gráfica de $y = 2^x$.

SOLUCIÓN
(a) A partir de la definición 2 tenemos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$
0.1	0.718
0.01	0.696
0.001	0.693
0.0001	0.693
−0.1	0.670
−0.01	0.691
−0.001	0.693
−0.0001	0.693

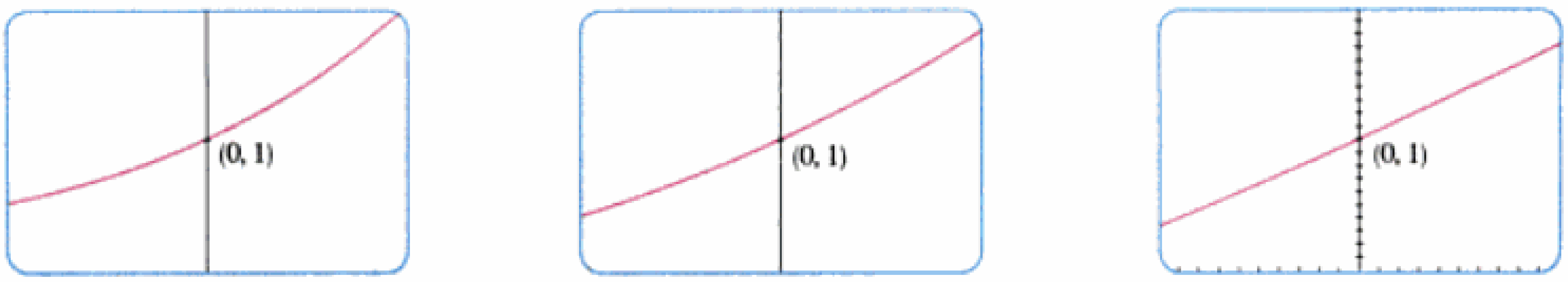
Puesto que todavía no podemos evaluar este límite con exactitud, usemos una calculadora para obtener aproximaciones de los valores de $(2^h - 1)/h$. Con base en la evidencia numérica de la tabla, vemos que conforme h tiende a 0, parece que estos valores tienden a un número cercano a 0.69. De modo que nuestra estimación es

$$f'(0) \approx 0.69$$

(b) En la figura 3 trazamos la curva $y = 2^x$ y nos acercamos al punto $(0, 1)$. Vemos que entre más nos acerquemos a $(0, 1)$, la curva más parece una recta. En efecto, en la figura 3c) prácticamente no se puede distinguir la curva de su recta tangente en $(0, 1)$. Como tanto la escala x como la escala y son de 0.01, estimamos que la pendiente de esta recta es

$$\frac{0.14}{0.20} = 0.7$$

De modo que nuestra estimación de la derivada es $f'(0) \approx 0.7$. En la sección 3.5 demostraremos que, correcta hasta seis decimales, $f'(0) \approx 0.693147$.



(a) $[-1, 1]$ por $[0, 2]$ (b) $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ (c) $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$

FIGURA 3 Amplificación de la gráfica de $y = 2^x$ en $(0, 1)$

□

Interpretación de la derivada como una razón de cambio

En la sección 2.7 definimos la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x en $x = x_1$ como el límite de las razones promedio de cambio en intervalos más y más pequeños. Si el intervalo es $[x_1, x_2]$, entonces el cambio en x es $\Delta x = x_2 - x_1$ y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

y

$$\boxed{4} \qquad \text{razón de cambio instantáneo} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A partir de la ecuación 3, reconocemos este límite como la derivada de f en x_1; es decir, $f'(x_1)$.

Esto da una segunda interpretación de la derivada:

> La derivada $f'(a)$ es la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = a$.

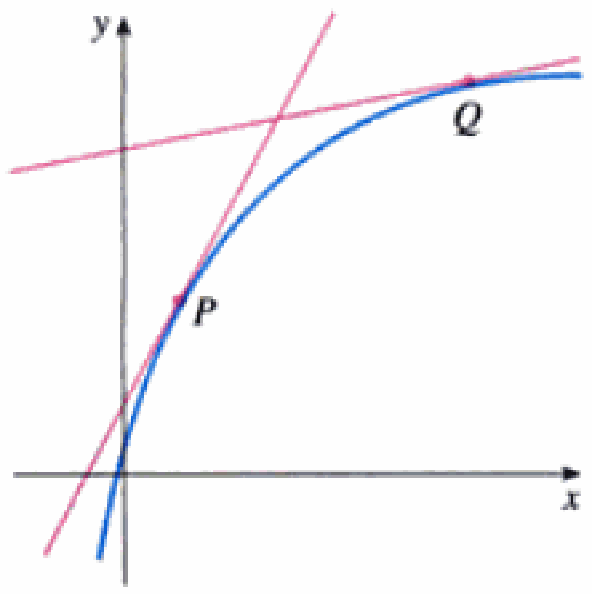


FIGURA 4
Los valores y cambian con rapidez en P y con lentitud en Q.

La conexión con la primera interpretación es que si graficamos la curva $y = f(x)$, entonces la razón instantánea de cambio es la pendiente de la tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, por lo tanto, la curva está empinada, como en el punto P de la Fig. 4), los valores y cambian con rapidez. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana y los valores y se modifican con lentitud.

En particular, si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s con respecto al tiempo t. En otras palabras, $f'(a)$ *es la velocidad de la partícula en el instante* $t = a$. (Véase la Sec. 2.7.) La *rapidez* de la partícula es el valor absoluto de la velocidad; es decir, $|f'(a)|$.

EJEMPLO 4 □ La posición de una partícula se da con la ecuación del movimiento $s = f(t) = 1/(1 + t)$, donde t se mide en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad y la rapidez después de 2 segundos.

SOLUCIÓN La derivada de f cuando $t = 2$ es

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{1 + (2+h)} - \dfrac{1}{1+2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{3+h} - \dfrac{1}{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3+h)}{3(3+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{3(3+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9}$$

Por lo tanto, la velocidad después de 2 s es $f'(2) = -\frac{1}{9}$ m/s, y la rapidez es $|f'(2)| = |-\frac{1}{9}| = \frac{1}{9}$ m/s.

□

EJEMPLO 5 □ Un fabricante produce rollos de tela con un ancho fijo. El costo de producir x yardas de esta tela es $C = f(x)$ dólares.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1000) = 9$?
(c) ¿Cuál piensa que sea mayor $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué puede decir de $f'(5000)$?

SOLUCIÓN

(a) La derivada $f'(x)$ es la razón instantánea de cambio de C con respecto a x; es decir, $f'(x)$ denota la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esta razón de cambio *costo marginal*. Esta idea se analiza con más detalle en las Secs. 3.3 y 4.8.)

Debido a que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las del cociente de diferencias $\Delta C/\Delta x$. Puesto que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, se deduce que las unidades para $f'(x)$ son las de dólares por yarda.

(b) La proposición $f'(1000) = 9$ significa que, después de fabricar 1000 yardas de tela, la razón a la cual aumenta el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1000$, C se incrementa nueve veces más rápido que x.)

Como $\Delta x = 1$ es pequeño en comparación con $x = 1000$, podríamos usar la aproximación

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decir que el costo de fabricar la yarda número 1000 (o la número 1001) es de unos 9 dólares.

(c) La razón a la que aumenta el costo de producción (por yarda) quizás es menor cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricar la yarda número 500 es menor que para la número 50) debido a el ahorro por cantidad. (El fabricante usa con más eficiencia los costos fijos de producción.) De este modo,

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero a medida que se expande la producción, la operación a gran escala resultante podría volverse ineficiente y haber costos por tiempo extra. Por tanto, es posible que llegue un momento en que la razón de incremento de los costos empiece a elevarse. De modo que puede suceder que

$$f'(5000) > f'(500)$$ □

El ejemplo siguiente muestra cómo estimar la derivada de una función tabular; es decir, una función definida no por una fórmula sino por una tabla de valores.

EJEMPLO 6 □ Sea $P(t)$ la población de Estados Unidos en el tiempo t. La tabla de la izquierda ofrece valores aproximados de esta función mediante estimaciones de la población a mediados de años, desde 1988 hasta 1996. Interprete y estime el valor de $P'(1992)$.

t	$P(t)$
1988	244,499,000
1990	249,440,000
1992	255,002,000
1994	260,292,000
1996	265,179,000

SOLUCIÓN La derivada $P'(1992)$ significa la razón de cambio de P con respecto a t, cuando $t = 1992$; es decir, la tasa de aumento de la población en 1992.

Según la ecuación 3,

$$P'(1992) = \lim_{t \to 1992} \frac{P(t) - P(1992)}{t - 1992}$$

De este modo, calculamos los valores del cociente de diferencias (las razones promedio de cambio) y los tabulamos:

t	$\dfrac{P(t) - P(1992)}{t - 1992}$
1988	2,625,750
1990	2,781,000
1994	2,645,000
1996	2,544,250

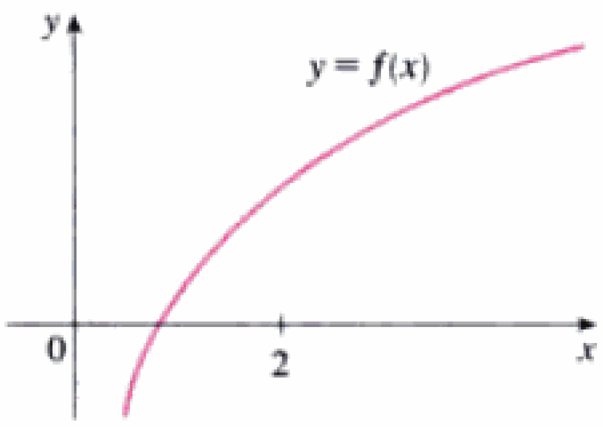
□ Otro método es graficar la función de población y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1992$. (Véase el Ejem. 5, Sec. 2.7.)

A partir de esta tabla, vemos que $P'(1992)$ se encuentra entre 2 781 000 y 2 645 000. Estimamos que la razón de crecimiento de la población de Estados Unidos en 1992 fue el promedio de estos números; a saber,

$$P'(1992) \approx 2713 \text{ millones de personas / año}$$

2.8 Ejercicios

1. En la gráfica dada de f, marque tramos que representen $f(2)$, $f(2+h)$, $f(2+h) - f(2)$ y h. (Tome $h > 0$.) ¿Cuál recta tiene la pendiente $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$?

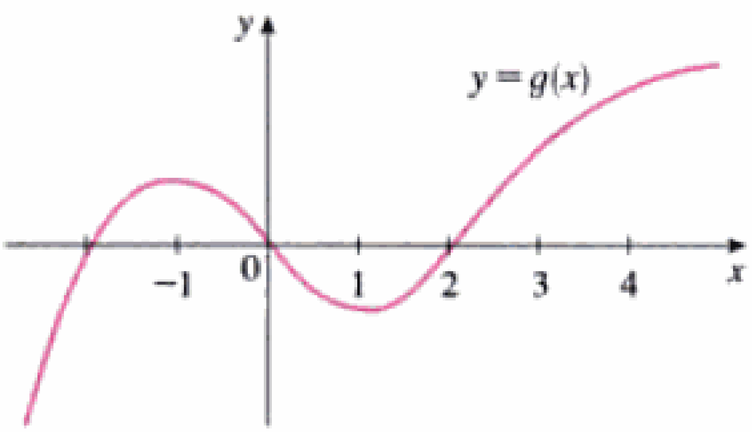


2. Para la función f cuya gráfica se muestra en el ejercicio 1, disponga los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento:

$$0 \qquad f'(2) \qquad f(3) - f(2) \qquad \tfrac{1}{2}[f(4) - f(2)]$$

3. Para la función g cuya gráfica se da, disponga los siguientes números en orden creciente y explique su razonamiento:

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



4. Si la recta tangente a $y = f(x)$, en $(4, 3)$, pasa por el punto $(0, 2)$, encuentre $f(4)$ y $f'(4)$.

5. Grafique una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

6. Trace la gráfica de una función g para la cual $g(0) = 0$, $g'(0) = 3$, $g'(1) = 0$ y $g'(2) = 1$.

7. Si $f(x) = 3x^2 - 5x$, encuentre $f'(2)$ y úsela para hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 3x^2 - 5x$, en el punto $(2, 2)$.

8. Si $g(x) = 1 - x^3$, encuentre $g'(0)$ y úsela para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1 - x^3$, en el punto $(0, 1)$.

9. (a) Si $F(x) = x^3 - 5x + 1$, encuentre $F'(1)$ y úsela para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 5x + 1$ en el punto $(1, -3)$.
   (b) Ilustre el inciso a) trazando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

10. (a) Si $G(x) = x/(1 + 2x)$, encuentre $G'(a)$ y úsela para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x/(1 + 2x)$, en el punto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.
    (b) Ilustre el inciso a) trazando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

11. Sea $f(x) = 3^x$. Estime el valor de $f'(1)$ de dos maneras:
    (a) Aplicando la definición 2 y tomando valores sucesivamente más pequeños de h.
    (b) Haciendo un acercamiento sobre la gráfica de $y = 3^x$ y estimando la pendiente.

12. Sea $g(x) = \tan x$. Estime el valor de $g'(\pi/4)$ de dos maneras:
    (a) Aplique la definición 2 y tome valores sucesivamente más pequeños de h.

(b) Amplifique la gráfica de $y = \tan x$ y estime la pendiente.

13–18 □ Encuentre $f'(a)$.

13. $f(x) = 1 + x - 2x^2$

14. $f(x) = x^3 + 3x$

15. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

17. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3 - x}}$

18. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

19–24 □ Cada límite representa la derivada de alguna función f, en algún número a. Establezca f y a en cada caso.

19. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

20. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

21. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x - 1}$

22. $\lim\limits_{x \to 3\pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - 3\pi}$

23. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) - 1}{t}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{x}$

25–26 □ Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con la ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

25. $f(t) = t^2 - 6t - 5$

26. $f(t) = 2t^3 - t + 1$

27. El costo de producir x onzas de oro proveniente de una nueva mina es de $C = f(x)$ dólares.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Qué significa $f'(800) = 17$?
(c) ¿Piensa que los valores de $f'(x)$ aumentarán o disminuirán a corto plazo? ¿Qué puede decir acerca del largo plazo? Explique.

28. La cantidad de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Suponga que existe una cantidad ilimitada de espacio y de nutrientes para las bacterias. ¿Cuál es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? ¿La limitación del suministro de nutrientes influiría en su conclusión? Explique.

29. El consumo de combustible (medido en galones por hora) de un automóvil que viaja a una velocidad de u millas por hora es $c = f(v)$
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(v)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Escriba una oración (en los términos de un lego) que explique el significado de la ecuación $f'(20) = -0.05$.

30. La cantidad (en libras) de café en polvo selecto que vende una compañía a un precio de p dólares por libra es $Q = f(p)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿$f'(8)$ es positiva o negativa? Explique.

31. Sea $C(t)$ la cantidad de circulante per cápita en el instante t del tiempo. La tabla, que se obtuvo del Departamento del Tesoro de EUA, da los valores de $C(t)$ en la fecha junio 30 del año especificado. Interpretar y estimar $C'(1980)$.

t	1960	1970	1980	1990
$C(t)$	\$177	\$265	\$571	\$1063

32. En el siglo XX, la expectativa de vida ha mejorado de manera impresionante. En la tabla se dan valores de $E(t)$, la expectativa de vida al nacer (en años) de un individuo del sexo masculino nacido en el año t, en Estados Unidos. Interprete y estime los valores de $E'(1910)$ y de $E'(1950)$.

t	$E(t)$	t	$E(t)$
1900	48.3	1950	65.6
1910	51.1	1960	66.6
1920	55.2	1970	67.1
1930	57.4	1980	70.0
1940	62.5	1990	71.8

33–34 □ Determine si $f'(0)$ existe o no.

33. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Proyecto de investigación histórica

Primeros métodos para hallar tangentes

La primera persona en formular explícitamente las ideas de los límites y derivadas fue Isaac Newton, en la década de 1660. Pero Newton reconoció: "Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre hombros de gigantes". Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601–1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630–1677). Newton conocía los métodos que estos hombres habían aplicado para hallar rectas tangentes, y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las referencias siguientes contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, aplique el método de la sección 2.8 para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$, en el punto (1, 3) y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, señale las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: John Wiley, 1989), pp. 389, 432.
2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.
4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.9 Derivada como función

En la sección anterior consideramos la derivada de una función f en un número fijo a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

En este punto, cambiamos nuestro punto de vista y hacemos que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplazamos a con una variable x, obtenemos

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \tag{2}$$

Dado cualquier número x para el cual este límite exista, asignamos a x el número $f'(x)$. De modo que podemos considerar f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Sabemos que el valor de f' en x, $f'(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f, porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

EJEMPLO 1 □ En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Úsela para graficar la derivada f'.

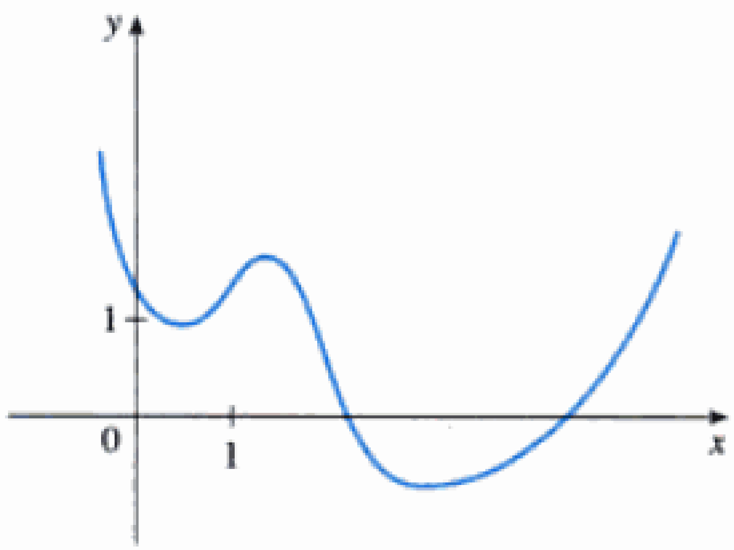
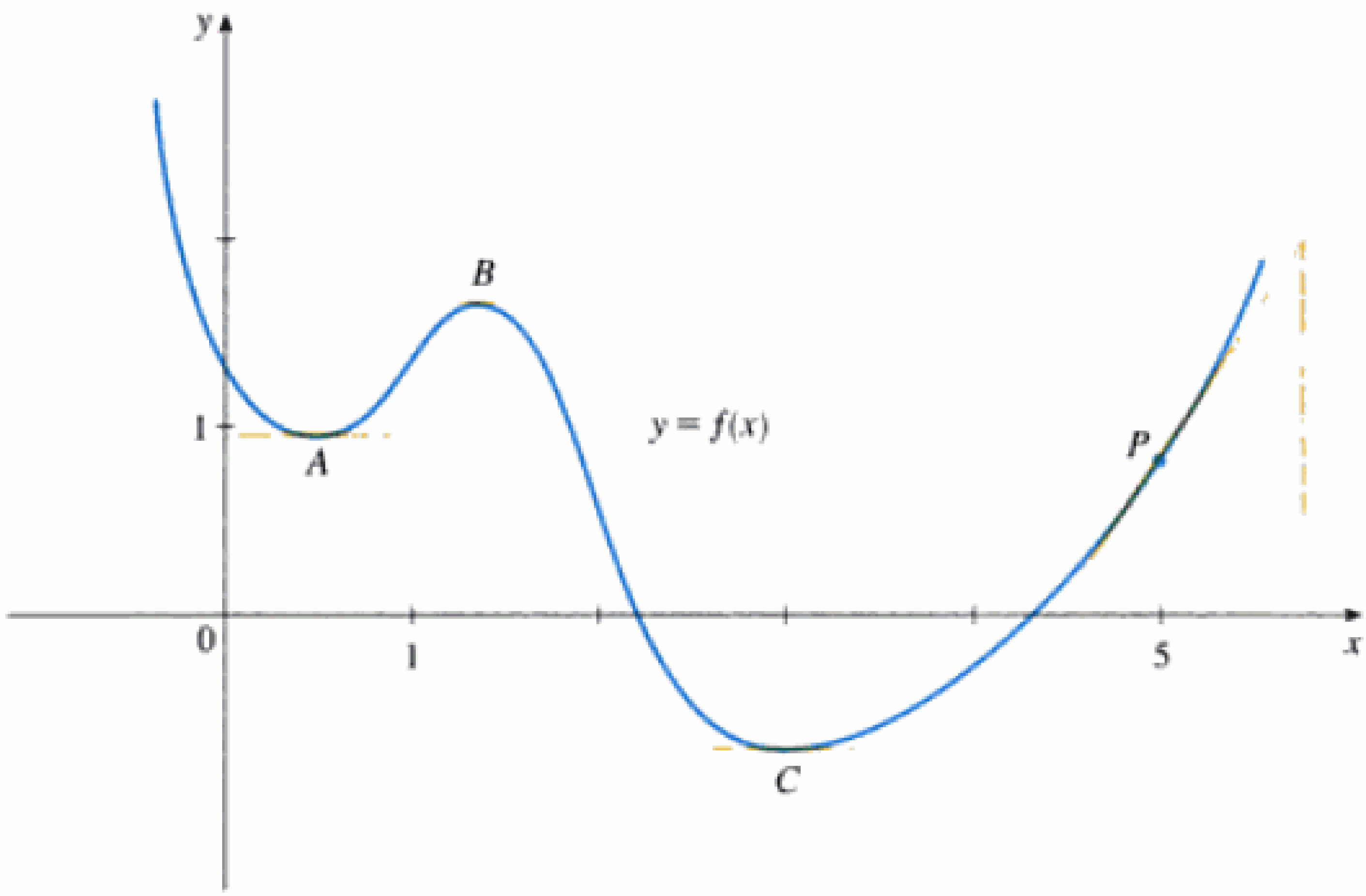


FIGURA 1

SOLUCIÓN Podemos estimar el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trazamos la tangente en P de la figura 2a) y estimamos su pendiente como alrededor de $\frac{3}{2}$, por lo tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f', directamente debajo de P. Si repetimos este procedimiento en varios puntos, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 2b). Advierta que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 allí y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B, las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva allí. Pero entre B y C, las tangentes tienen pendientes negativas, de modo que $f'(x)$ es negativa allí.



(a)

□ Observe que donde la derivada es positiva (a la derecha de C y entre A y B), la función f es creciente. Donde $f'(x)$ es negativa (a la izquierda A y entre B y C), f es decreciente. En la sección 4.3 se demostrará que esto es verdadero para todas las funciones.

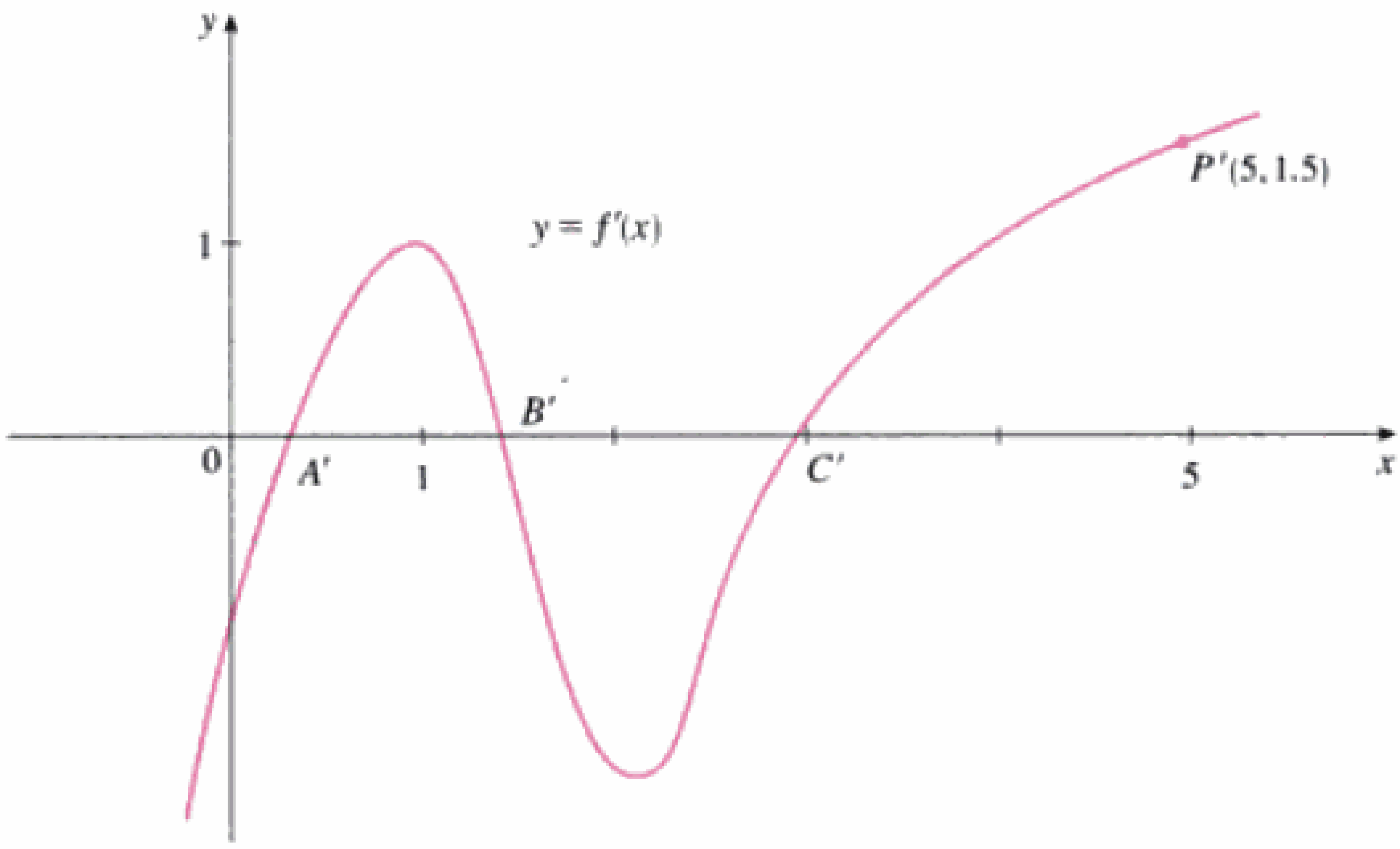


FIGURA 2 (b)

Si una tabla de valores define una función, podemos construir una tabla de valores aproximados de su derivada, como en el ejemplo siguiente.

t	$I(t)$
1979	11.3
1981	10.3
1983	3.2
1985	3.6
1987	3.6
1989	4.8
1991	4.2
1993	3.0
1995	2.8
1997	2.3

EJEMPLO 2 □ La tasa de inflación en los de Estados Unidos es una función del tiempo. En la tabla de la izquierda se dan los valores a la mitad del año de esta función $I(t)$, durante un periodo de 18 años (como un porcentaje anual). Construya una tabla de valores para la derivada de esta función.

SOLUCIÓN Supongamos que no hubo fluctuaciones desenfrenadas en la tasa de interés entre los valores dados. Empecemos hallando una aproximación para $I'(1991)$, la razón de cambio de la tasa de inflación en 1991. Ya que

$$I'(1991) = \lim_{h \to 0} \frac{I(1991 + h) - I(1991)}{h}$$

tenemos
$$I'(1991) \approx \frac{I(1991 + h) - I(1991)}{h}$$

para valores pequeños de h.

Para $h = 2$, obtenemos

$$I'(1991) \approx \frac{I(1993) - I(1991)}{2} = \frac{3.0 - 4.2}{2} = -0.6$$

t	$I'(t)$
1979	−0.5
1981	−2.025
1983	−1.675
1985	0.1
1987	0.3
1989	0.15
1991	−0.45
1993	−0.35
1995	−0.175
1997	−0.25

(Ésta es la razón promedio de cambio entre 1991 y 1993.) Para $h = -2$, tenemos

$$I'(1991) \approx \frac{I(1989) - I(1991)}{-2} = \frac{4.8 - 4.2}{-2} = -0.3$$

que es la razón promedio de cambio entre 1989 y 1991. Logramos una aproximación más exacta si tomamos el promedio de estas razones de cambio:

$$I'(1991) \approx \tfrac{1}{2}(-0.6 - 0.3) = -0.45$$

Esto significa que en 1991 la tasa de inflación disminuía a razón de 45% por año aproximadamente.

Si realizamos cálculos similares para los demás valores (excepto en los puntos extremos), obtenemos la tabla de valores aproximados para la derivada.

□ En la figura 3 se muestran las gráficas de la función tasa de inflación $I(t)$ y su derivada $I'(t)$ del ejemplo 2.

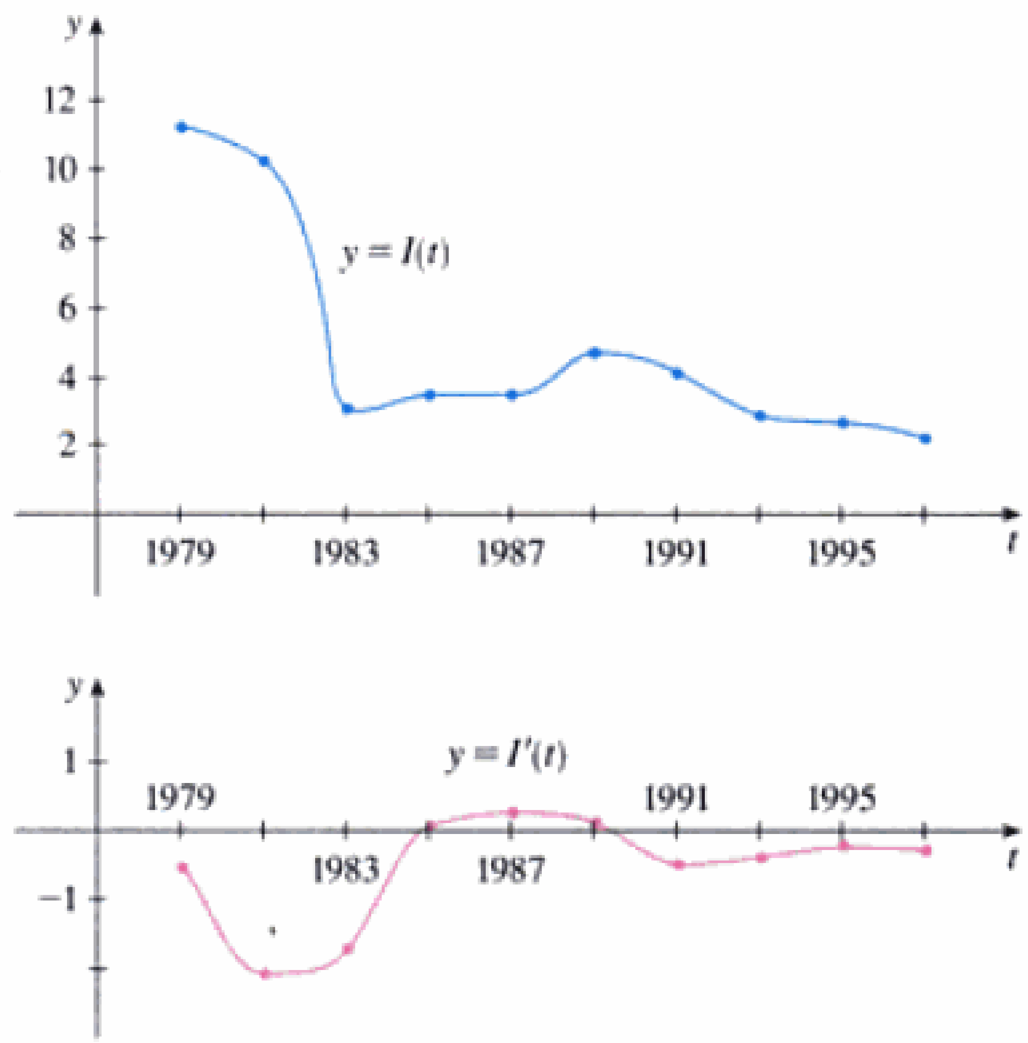


FIGURA 3

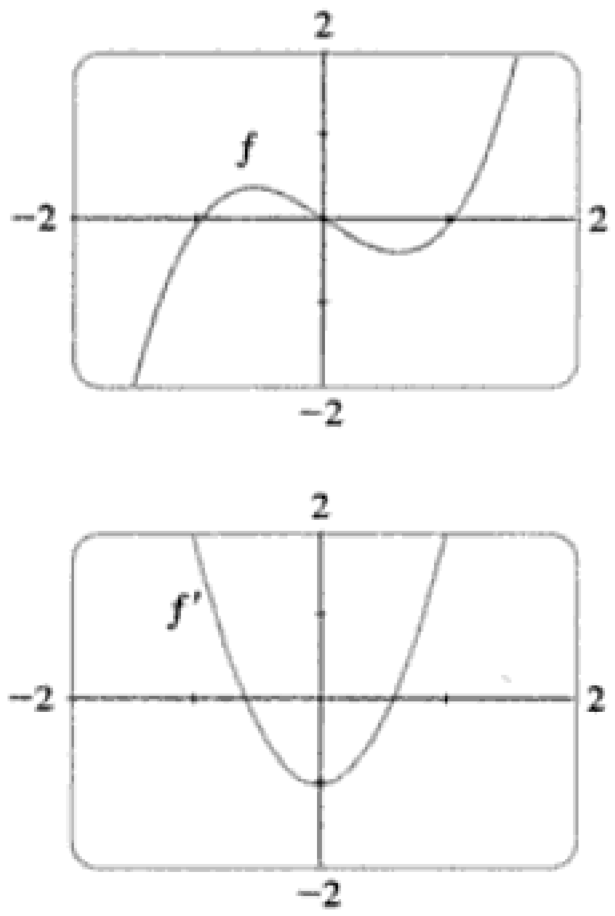


FIGURA 4

EJEMPLO 3 □
(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.
(b) Ilústrela comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN
(a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante, durante el cálculo del límite.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^3-(x+h)]-[x^3-x]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-x^3+x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-1) = 3x^2-1
\end{aligned}
$$

(b) Usamos un aparato graficador para graficar f y f' de la figura 4. Advierta que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas gráficas sirven como comprobación de nuestra solución del inciso a). □

EJEMPLO 4 □ Si $f(x) = \sqrt{x-1}$, encuentre la derivada de f. Enuncie cuál es el dominio de f'.

SOLUCIÓN

En este caso racionalizamos el numerador

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)-(x-1)}{h\left(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}
\end{aligned}
$$

Vemos que $f'(x)$ existe si $x > 1$, de modo que el dominio de f' es $(1, \infty)$. Éste es menor que el dominio de f, el cual es $[1, \infty)$. □

Hagamos una verificación para ver que el resultado del ejemplo 4 es razonable, observando las gráficas de f y f' en la figura 5. Cuando x se encuentra cerca de 1, $\sqrt{x-1}$ está cerca de 0 de modo que $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x-1}\right)$ es muy grande y esto corresponde a las tangentes empinadas cerca de (1, 0) de la figura 5*a*), y grandes valores de $f'(x)$ justo a la derecha de 1 en la figura 5b). Cuando x es grande $f'(x)$ es muy pequeña y esto corresponde a las tangentes más planas lejos a derecha sobre la gráfica de f y la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

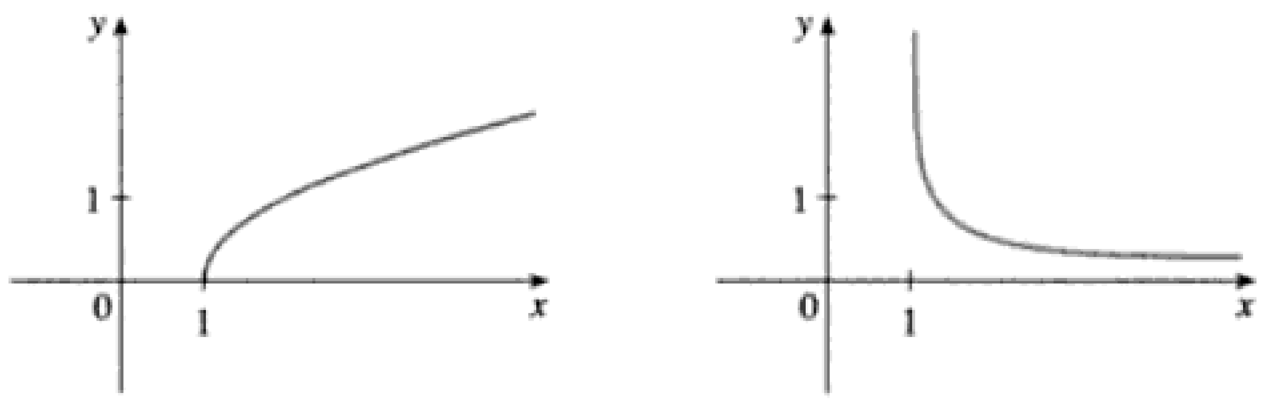


FIGURA 5 (a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ (b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

EJEMPLO 5 □ Halle f' si $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad-bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$ □

Otras anotaciones

Si usamos la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx —introducido por Leibniz— no debe de considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa junto con la notación de incrementos. Con base en la ecuación 4 de la sección 2.8, podemos volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

□ Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de esa ciudad. Obtuvo el grado de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones diplomáticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar las iglesias católica y protestante.

Su estudio serio de las matemáticas lo inició hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en las matemáticas y las ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En la versión del cálculo que publicó en 1684 estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que usamos en la actualidad.

Desgraciadamente, en la década de 1690 surgió una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del cálculo pero, debido a su temor a la controversia, no la publicó de inmediato. Por lo tanto, el informe de Leibniz del cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

Si deseamos indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico a, usamos la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

3 Definición Una función f es **derivable en a** si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$, $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

EJEMPLO 6 □ ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y podemos elegir h suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$ y, de donde $|x + h| = x + h$. Por lo tanto, para $x > 0$ tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

y así f es diferenciable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ tenemos $|x| = -x$ y se puede elegir h suficientemente pequeño para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por lo tanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

con lo que f es derivable para cualquier $x < 0$.

Para $x = 0$ tenemos que investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{si existe}$$

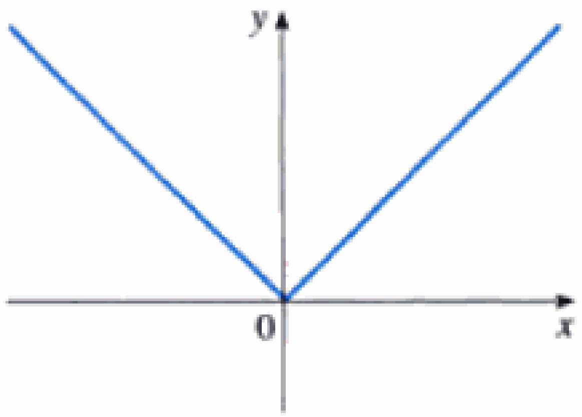
Calculamos los límites por la izquierda y por la derecha por separado:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

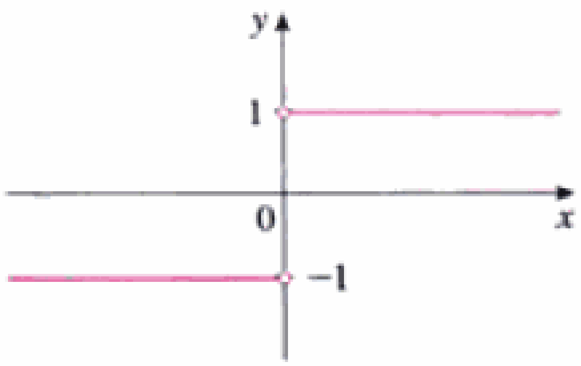
y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que son diferentes, $f'(0)$ no existe. Por lo tanto, f es diferenciable en toda x, excepto 0.



(a) $y = f(x) = |x|$



(b) $y = f'(x)$

FIGURA 6

La expresión

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

da una fórmula para f' y su gráfica aparece en la figura 6b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la Fig. 6a).] □

Tanto la continuidad como la diferenciabilidad son propiedades deseables para una función y el teorema siguiente muestra cómo se relacionan ambas.

4 Teorema Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Demostración Para probar que f es continua en a, tenemos que probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Llevamos a cabo esto demostrando que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es diferenciable en a; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. (Véase la Ec., 3, Sec. 2.8.) Para vincular lo dado con lo desconocido, dividimos y multiplicamos $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es viable cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

Por lo tanto, si usamos la ley de producto y la ecuación 3, podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \; . \end{aligned}$$

Para utilizar lo que acabamos de demostrar, partimos de $f(x)$ y le sumamos y restamos $f(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es continua en a. □

NOTA □ El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas pero no son diferenciables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en 0 porque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el Ejem. 7, Sec. 2.3.) Pero, en el ejemplo 6 hemos demostramos que f no es diferenciable en 0.

Formas en que una función es no derivable

Vimos en el ejemplo 6 que la función $y = |x|$ es no derivable en 0 y la figura 6a) muestra que su gráfica cambia bruscamente de dirección en $x = 0$. En general, si la gráfica de una función tiene un "pico" o "esquina", o un pliegue entonces la gráfica f no tiene tangente en este punto y ahí deja de ser derivable. (Al tratar de calcular $f'(a)$, encontramos que los límites por derecha e izquierda difieren.]

El teorema 4 muestra otra forma de una función de ser no derivable. Dice que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en a. De modo que en cada discontinuidad (como una discontinuidad por salto), la función es no derivable.

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en a y

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

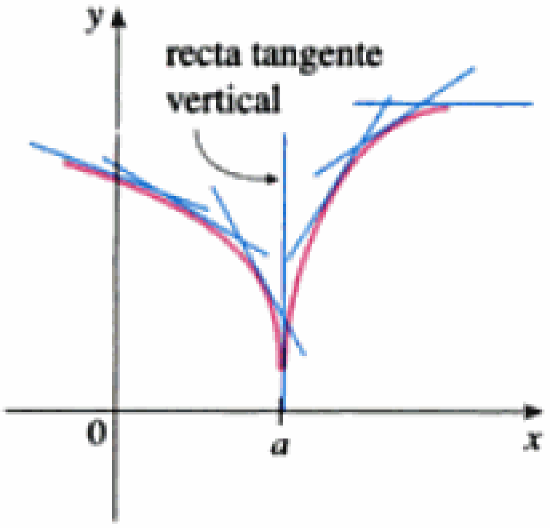
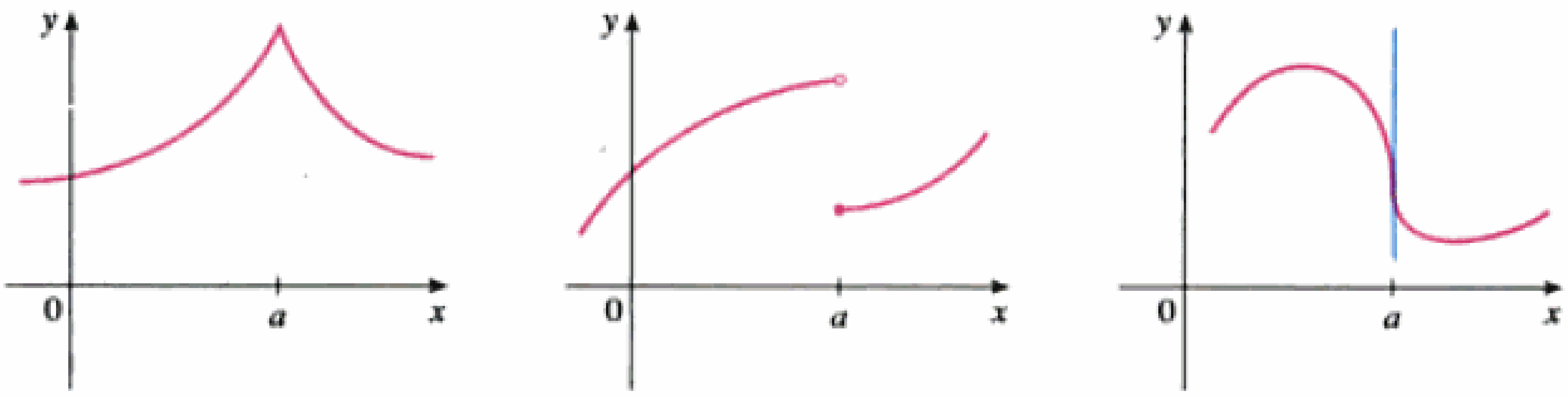


FIGURA 7

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más pronunciadas cuando $x \to a$. En las figuras 7 y 8c) se muestran dos formas en que esto puede suceder. Las tres posibilidades planteadas se ilustran en la figura 8.



(a) Una esquina (b) Una discontinuidad (c) Una tangente vertical

FIGURA 8
Tres maneras para que f no sea diferenciable en a

Una calculadora graficadora o una computadora ofrece otra manera de ver la diferenciabilidad. Si f es diferenciable en a, entonces, con amplificación en el punto $(a, f(a))$, la gráfica se endereza y adquiere más y más la la apariencia de una recta. (Véase la Fig. 9.) Vimos un ejemplo específico de esto en la Fig. 3, Sec. 2.8.) Pero no importa cuánto nos acerquemos a puntos como los de las figuras 7 y 8a), no podemos eliminar el punto agudo o esquina. (Véase la Fig. 10.)

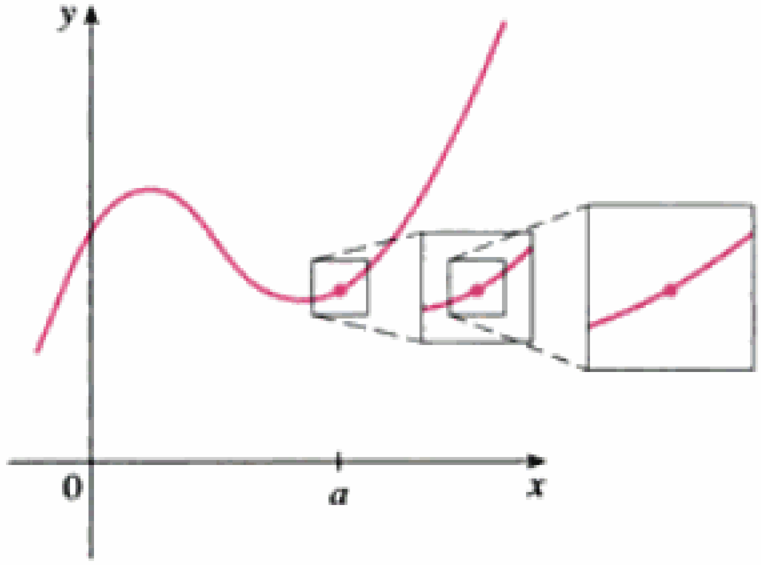


FIGURA 9
f es diferenciable en a.

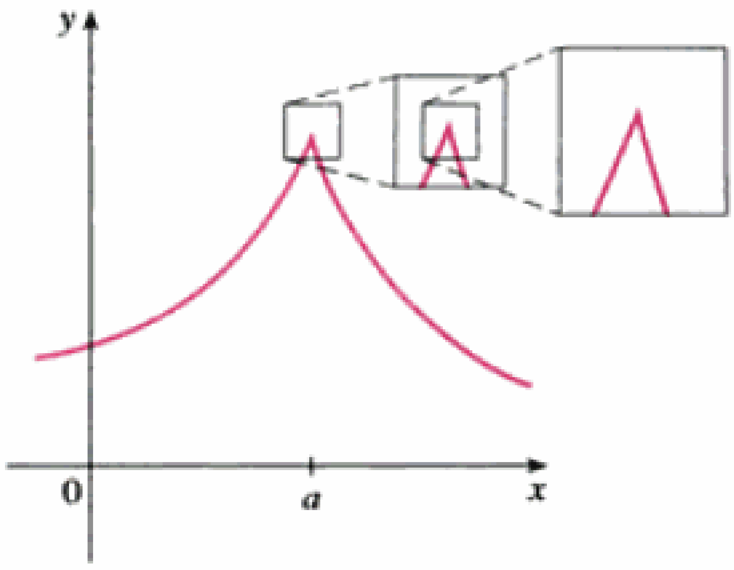
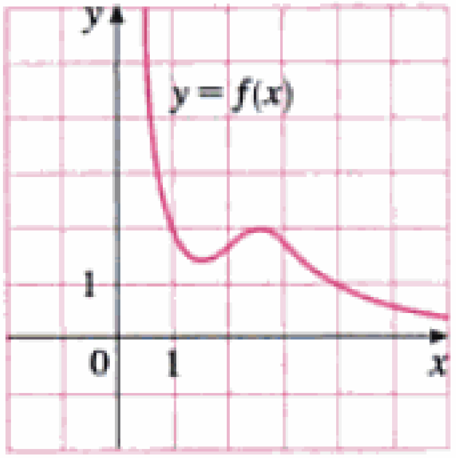


FIGURA 10
f no es diferenciable en a.

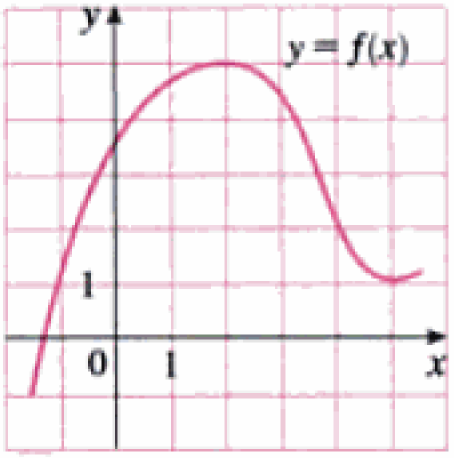
2.9 Ejercicios

1–3 □ Use la gráfica dada para estimar el valor de cada derivada. Luego grafique f'.

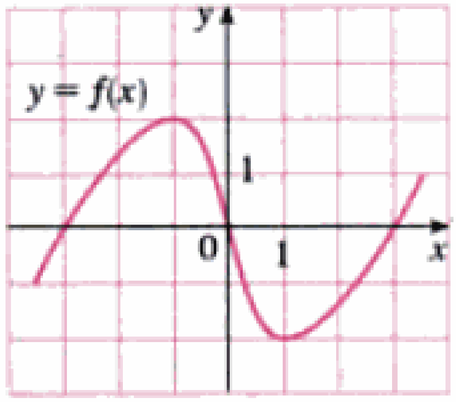
1. (a) $f'(1)$
(b) $f'(2)$
(c) $f'(3)$
(d) $f'(4)$



2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

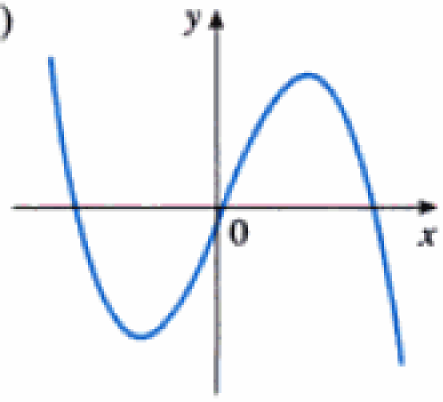


3. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

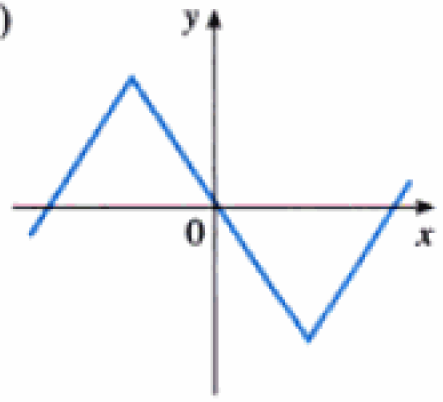


4. Correlacione la gráfica de cada función dada en las figuras a)–d) con las gráficas de sus derivadas (Figs. I–IV). Dé las razones para sus selecciones.

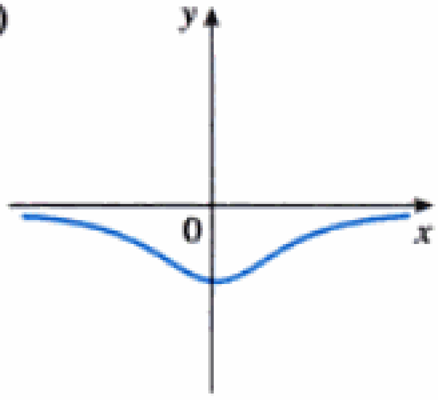
(a)



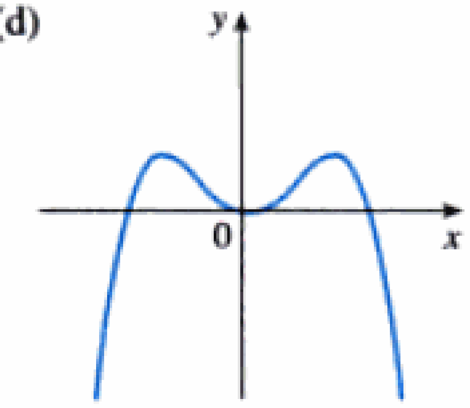
(b)



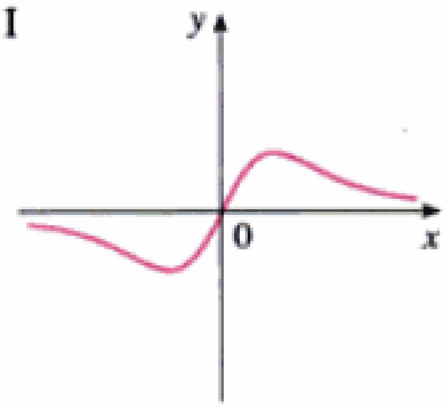
(c)



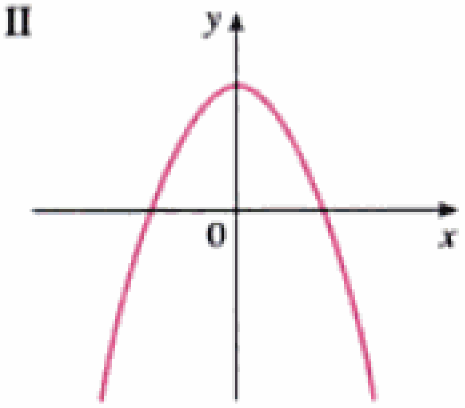
(d)



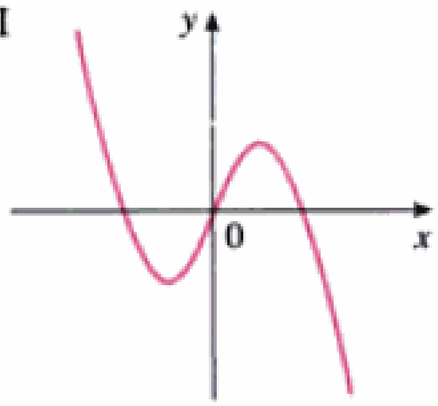
I



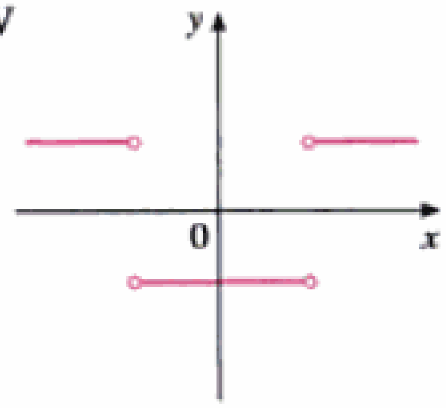
II



III

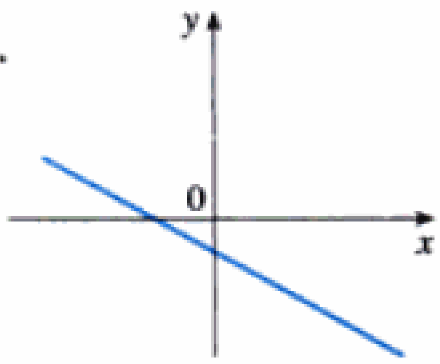


IV

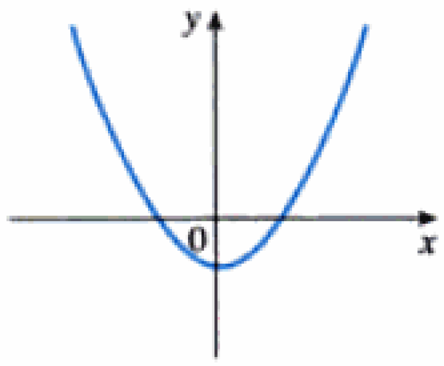


5–13 □ Calcule o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego, aplique el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de ella.

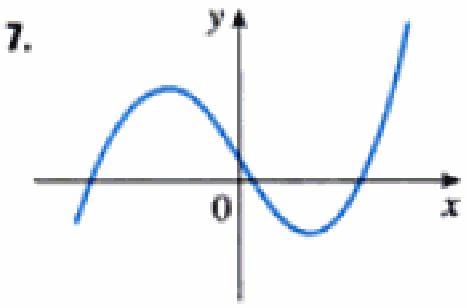
5.



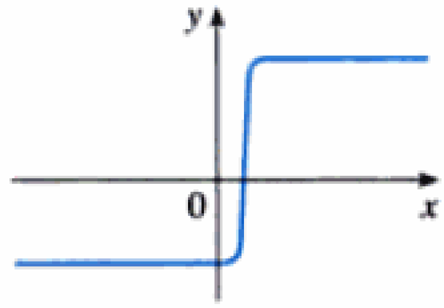
6.



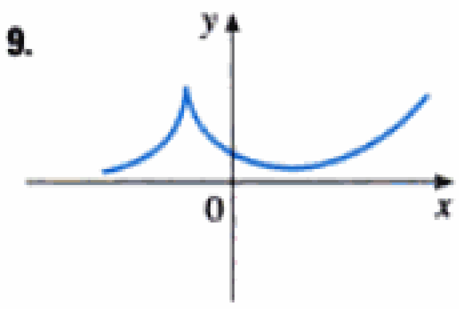
7.



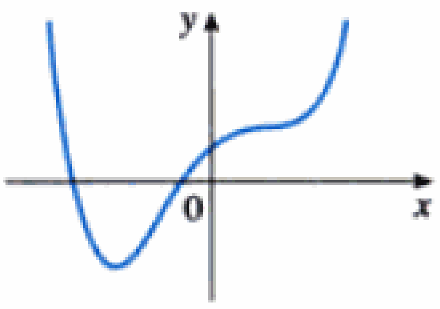
8.



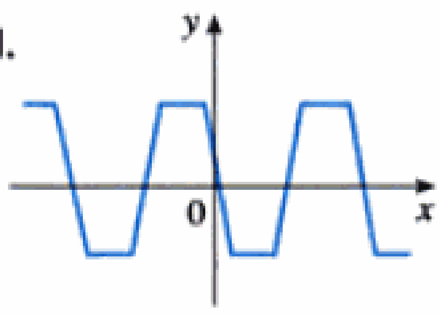
9.



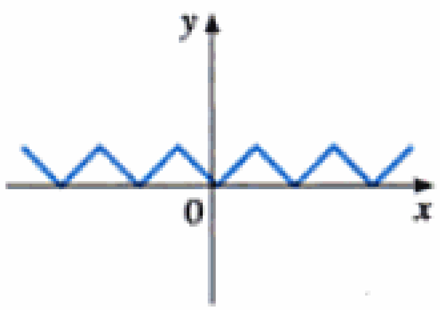
10.



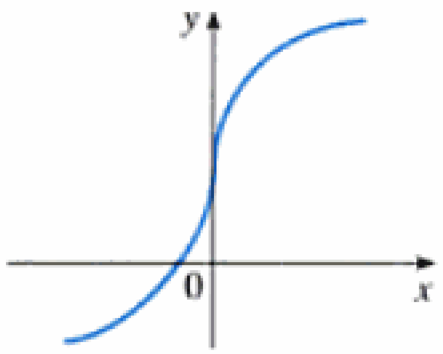
11.



12.



13.



14–16 □ Trace una gráfica cuidadosa de f y, debajo de ella, la gráfica de f', de la misma manera que en los ejercicios 5–13. ¿Puede conjeturar una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$

15. $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

17. Sea $f(x) = x^2$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, y $f'(2)$ usando un aparato graficador para amplificar en la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, y $f'(-2)$.
(c) Con los resultados de los incisos a) y b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
(d) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso c) es correcta.

18. Sea $f(x) = x^3$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$, y $f'(3)$ usando un aparato graficador para amplificar en la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$, y $f'(-3)$.
(c) Use los valores de los incisos a) y b) para trazar la gráfica de f'.
(d) Proponga una fórmula para $f'(x)$.
(e) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso d) es correcta.

19–27 □ Encuentre la derivada de la función dada aplicando la definición de derivada. Dé los dominios de la función y de su derivada.

19. $f(x) = 5x + 3$

20. $f(x) = 5 - 4x + 3x^2$

21. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

22. $f(x) = x + \sqrt{x}$

23. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

24. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

25. $G(x) = \dfrac{4 - 3x}{2 + x}$

26. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

27. $f(x) = x^4$

28. (a) Grafique $f(x) = \sqrt{6 - x}$, a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ y aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
(b) Use la gráfica del inciso a) para trazar la de f'.
(c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
(d) Use un aparato graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su esquema del inciso b).

29. (a) Si $f(x) = x - (2/x)$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

30. (a) Si $f(t) = 6/(1 + t^2)$, encuentre $f'(t)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

31. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. En la tabla se da el porcentaje de desempleo de la fuerza laboral estadounidense desde 1988 hasta 1997.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1988	5.5	1993	6.9
1989	5.3	1994	6.1
1990	5.6	1995	5.6
1991	6.8	1996	5.4
1992	7.5	1997	4.9

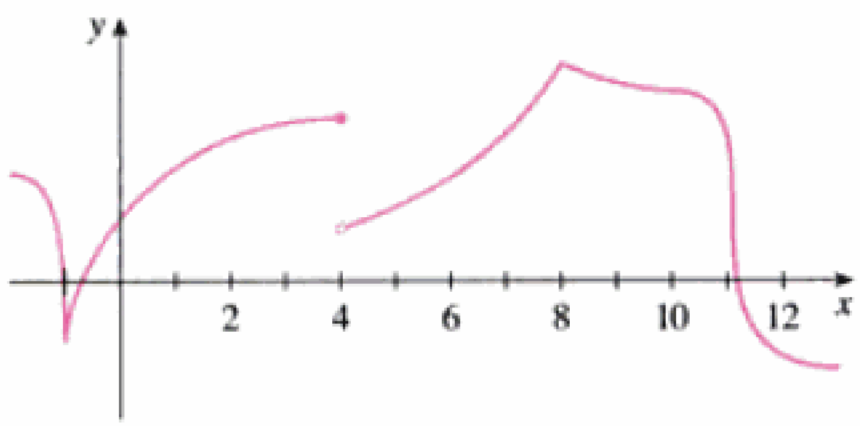
(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $U'(t)$.

32. Sea $S(t)$ la tasa de fumadores entre los estudiantes del último año de segunda enseñanza superior en el tiempo t. En la tabla aparecen los porcentajes de los alumnos del último año que informaron haber fumado en los últimos 30 días.

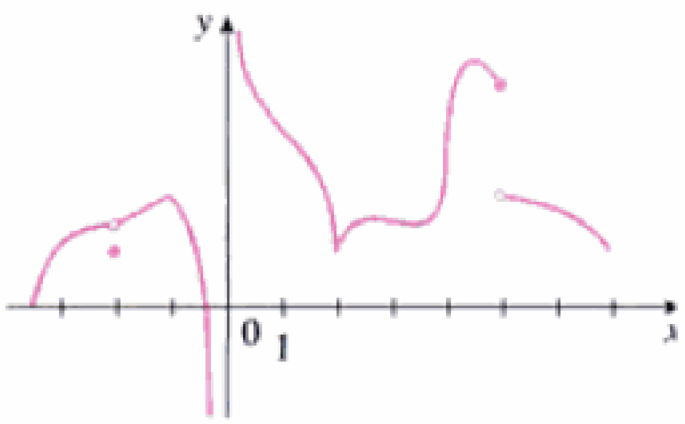
t	$S(t)$	t	$S(t)$
1978	27.5	1988	18.1
1980	21.4	1990	19.1
1982	21.0	1992	17.2
1984	18.7	1994	19.4
1986	18.7	1996	22.2

(a) ¿Qué significa $S'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $S'(t)$.
(c) Grafique S y S'.
(d) ¿Cómo sería posible obtener valores más exactos para $S'(t)$?

33. Se da la gráfica de f. Indique los números en que f no es diferenciable. Señale los motivos de lo anterior.



34. Se da la gráfica de g.
(a) ¿En cuáles números g es discontinua? ¿Por qué?
(b) En cuáles números g no es diferenciable? ¿Por qué?



35. Grafique la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$ Acérquese repetidas veces, primero al punto (–1, 0) y después al origen. ¿Qué es diferente respecto al comportamiento de f en la vecindad de estos dos puntos? ¿Qué concluye acerca de la diferenciabilidad de f?

36. Amplifique en los puntos (1, 0), (0, 1) y (–1, 0) en la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Qué advierte? Explique lo que ve en términos de la diferenciabilidad de g.

37. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
   (a) Si $a \neq 0$, use la ecuación 3 de la sección 2.8.3 para hallar $f'(a)$.
   (b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
   (c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0). (Recuerde la forma de la gráfica de f. Véase la Fig. 13, Sec. 1.2.)

38. (a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
   (b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
   (c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una tangente vertical en (0, 0).
   (d) Ilustre el inciso c) graficando $y = x^{2/3}$.

39. Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es diferenciable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

40. ¿En qué valores es no derivable la función "mayor entero" $f(x) = [\![x]\!]$? Determinan una fórmula para f' y hacer la gráfica.

41. (a) Grafique la función $f(x) = x\,|x|$.
   (b) ¿Para cuáles valores de x es f diferenciable?
   (c) Encuentre una fórmula para f'.

42. La **derivada izquierda** y la **derivada derecha** en f en a se definen mediante

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en caso de que existan estos límites. Entonces $f'(a)$ existe si y solo si estas derivadas laterales existen y son iguales.
   (a) Halle $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

   (b) Trace la gráfica de f.
   (c) ¿En qué valores es discontinua f?
   (d) ¿En qué valores la función f no es derivable?

43. Recuerde que se dice que una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$, para toda x en su dominio, y que es *impar* si $f(-x) = -f(x)$, para todas esas x. Pruebe cada una de las proposiciones siguientes.
   (a) La derivada de una función par es una función impar.
   (b) La derivada de una función impar es una función par.

44. Cuando abre un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
   (a) Trace una gráfica posible de T como función del tiempo transcurrido desde que se abrió el grifo.
   (b) Describa cómo varía la razón de cambio de T con respecto a t, conforme éste transcurre.
   (c) Bosqueje una grafica de la derivada de T.

45. Sea ℓ, la recta tangente a la parábola $y = x^2$ el punto (1, 1). El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que hace ℓ con la dirección positiva del eje de las abscisas. Calcule ϕ redondeado al grado más próximo.

35–36 □ Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

35. $2x^3 + x^2 + 2 = 0, \quad (-2, -1)$

36. $e^{-x^2} = x, \quad (0, 1)$

37. (a) Halle la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 9 - 2x^2$ en el punto (2, 1).
(b) Escriba una ecuación de esta tangente.

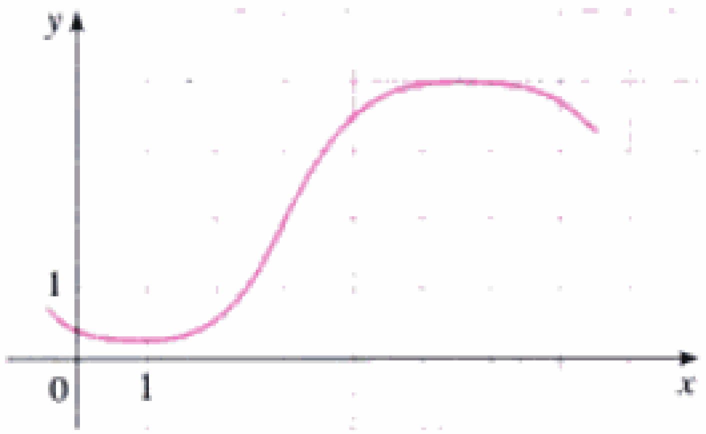
38. Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = 2/(1 - 3x)$ en los puntos de abcisas 0 y -1

39. El desplazamiento en metros de un objeto en movimiento rectilíneo esta dado por $s = 1 + 2t + t^2/4$ donde t es el número de segundos.
(a) Halle la velocidad promedio en los siguientes intervalos
(i) [1, 3] (ii) [1, 2]
(iii) [1, 1.5] (iv) [1, 1.1]
(b) Encuentre la velocidad instantántea en $t = 1$.

40. Según la Ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V en pulgadas cúbicas.
(a) Encuentre la razón promedio de cambio de P cuando V se incrementa de 200 pulg^3 a 250 pulg^3.
(b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón instantánea de cambio de V con respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de esta última.

41. Para la función f cuya gráfica se muestra, disponga los números siguientes en orden creciente:

$$0 \qquad 1 \qquad f'(2) \qquad f'(3) \qquad f'(5) \qquad f''(5)$$



42. (a) Use la definición de derivada para hallar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto (2, 4).
(c) Ilustre el inciso b) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

43. (a) Si $f(x) = e^{-x^2}$, estime el valor de $f'(1)$, gráfica y numéricamente.
(b) Encuentre una ecuación aproximada de la recta tangente a la curva $y = e^{-x^2}$, en el punto donde $x = 1$
(c) Ilustre el inciso b) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

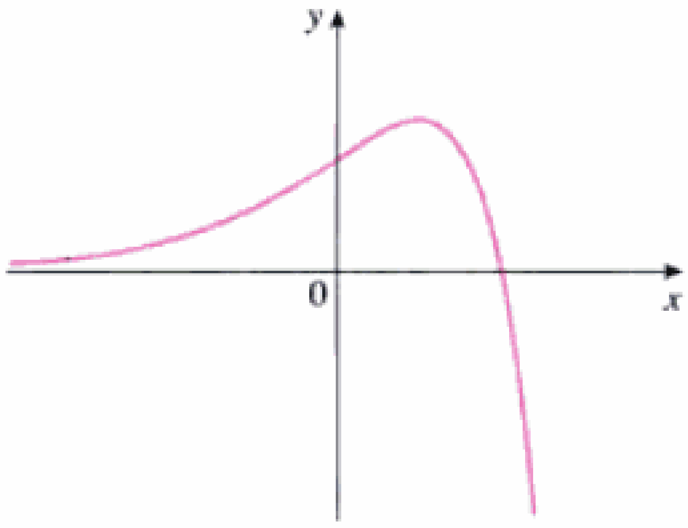
44. Encuentre una función f y un número a tales que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

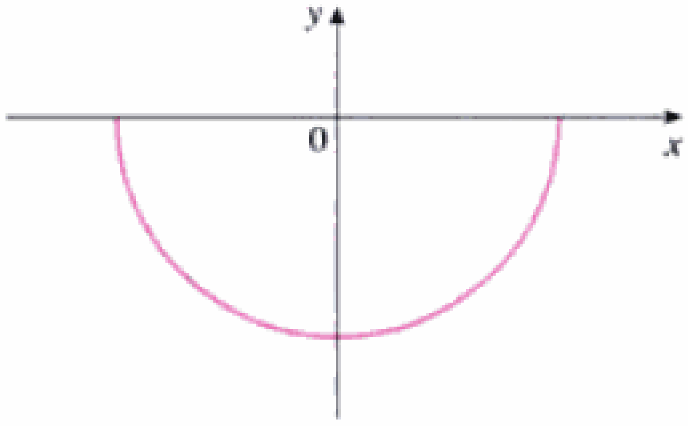
45. El costo total de pagar un préstamo para estudiante, a una tasa de interés de r% por año es $C = f(r)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Qué significa la proposición $f'(10) = 1200$?
(c) ¿$f'(r)$ siempre es positiva o cambia de signo?

46–48 □ Calque o copie la gráfica de la función dada. Luego, grafique directamente debajo su derivada.

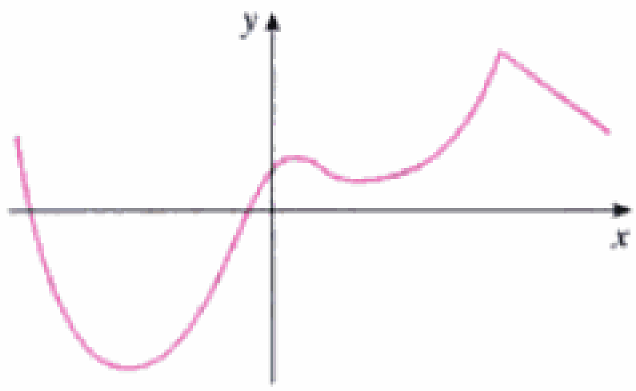
46.



47.



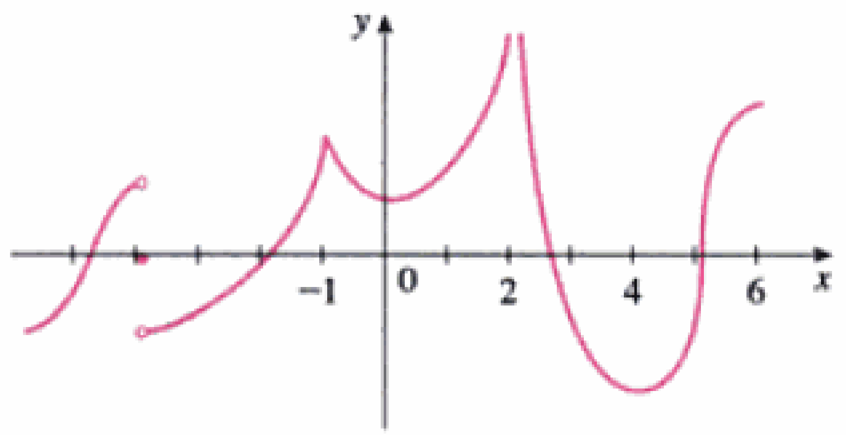
48.



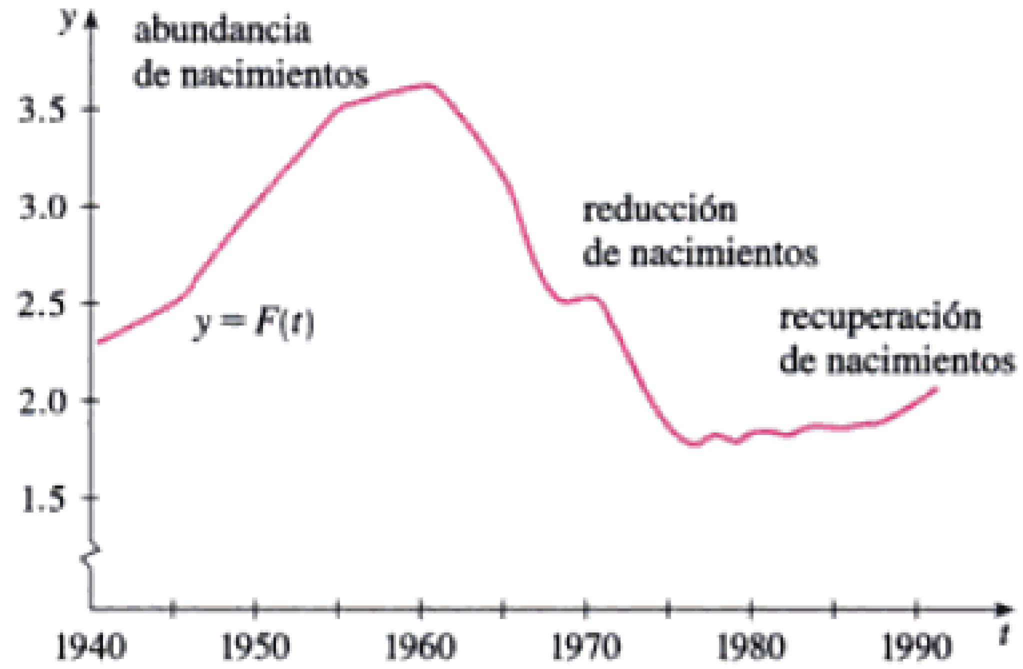
49. (a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
(b) Encuentre los dominios de f y f'.
(c) Grafique f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso a) es razonable.

50. (a) Encuentre las asíntotas de la gráfica de $f(x) = (4 - x)/(3 + x)$ y úselas para dibujar la gráfica.
(b) Use la gráfica del inciso a) para graficar f'.
(c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
(d) Utilice un aparato graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su dibujo del inciso b).

51. Se muestra la gráfica de f. Dé, con razones, los números en que f no es diferenciable.



52. La *tasa de fertilidad total*, en el tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos por cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en Estados Unidos, se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 1990.
(a) Estime los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.
(b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?
(c) ¿Puede sugerir razones de los valores de estas derivadas?



53. Use una gráfica para determinar un número δ tal que

$$\left| \frac{x+1}{x-1} - 3 \right| < 0.2 \qquad \text{cuando} \qquad |x - 2| < \delta$$

54. Grafique la curva $y = (x + 1)/(x - 1)$ y las tangentes de esta curva en los puntos $(2, 3)$ y $(-1, 0)$.

55. Suponga que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, y que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encuentre el $\lim_{x \to a} f(x)$

56. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.
(a) Para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?
(b) ¿En qué números es discontinua la función f?

Problemas especiales

En nuestro análisis de los principios de solución de problemas, consideramos la estrategia para resolver problemas llamada *Introducir algo adicional* (pág. 78). En el siguiente ejemplo, mostramos cómo este principio resulta útil a veces cuando evaluamos límites. La idea es cambiar la variable —introducir una nueva variable relacionada con la original— de tal manera que el problema se haga más sencillo. Posteriormente (Sec. 5.5) utilizaremos más esta idea general.

Ejemplo 1 Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, donde c es una constante.

Solución Según se ve, este límite parece retador. En la sección 2.3 evaluamos varios límites en los que tanto el numerador como el denominador tendieron a 0. Allí, nuestra estrategia fue realizar cierto tipo de manipulación algebraica que condujo a una cancelación simplificadora, pero en este caso no está claro qué clase de álgebra se necesita.

Por lo tanto, introducimos una variable t mediante la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

También necesitamos expresar x en términos de t, de modo que resolvemos esta ecuación:

$$t^3 = 1 + cx$$

$$x = \frac{t^3 - 1}{c}$$

Note que $x \longrightarrow 0$ equivale a $t \longrightarrow 1$. Esto nos permite convertir el límite dado en uno que comprende la variable t:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} \end{aligned}$$

El cambio de variable nos permitió reemplazar un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya hemos visto. Si factorizamos el denominador como una diferencia de cubos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3} \end{aligned}$$

Los problemas siguientes sirven para poner a prueba y desafiar sus habilidades de resolver. Algunos tienen que pensarse mucho tiempo, de modo que no se desaliente si no los puede resolver de inmediato. Si tiene alguna dificultad, quizá le sirva consultar el análisis de los principios de solución de problemas, en la página 78.

Problemas

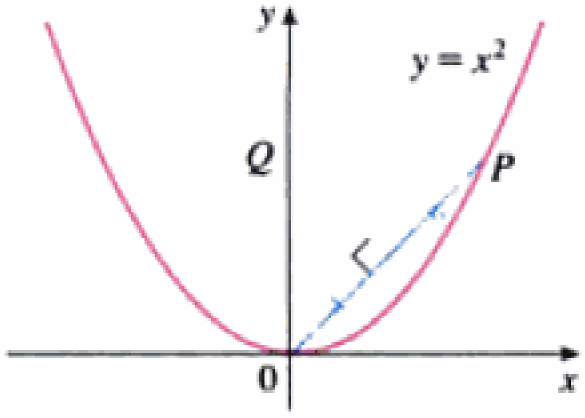


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

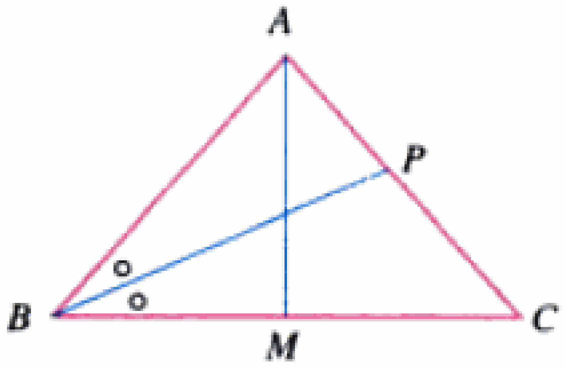


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

1. Evalúe $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encuentre los números a y b tales que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

3. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

4. En la figura se muestra un punto P, en la parábola $y = x^2$, y el punto Q, donde la mediatriz de OP interseca al eje y. Conforme P se aproxima al origen, a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

5. Si $[\![x]\!]$ denota la función mayor entero, encuentre $\lim_{x \to \infty} x/[\![x]\!]$.

6. Grafique la región en el plano definida por cada una de las ecuaciones siguientes:
   (a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$:
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c, éste permanece fijo.)
   (a) Dibuje la gráfica de una función continua con dominio $[0, 1]$ cuya imagen también se encuentre en $[0, 1]$. Localice un punto fijo de f.
   (b) Intente graficar una función continua con dominio $[0, 1]$ e imagen en $[0, 1]$ que *no* tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?
   (c) Aplique el teorema del valor intermedio para probar que cualquier función continua con dominio $[0, 1]$ imagen en $[0, 1]$ debe tener un punto fijo.

9. Si $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 1$, halle $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$.

10. (a) En la figura se muestra un triángulo isósceles ABC, con $\angle B = \angle C$. La bisectriz del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija, pero que la altura $|AM|$ del triángulo tiende a 0, de modo que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué sucede con P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.
    (b) Intente trazar la trayectoria recorrida por P durante este proceso. A continuación, halle la ecuación de esta curva y úsela para dibujarla.

11. (a) Si partimos de la latitud 0° y avanzamos en dirección oeste, podemos denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo dado. Suponga que T es una función continua de x y demuestre que, en cualquier tiempo fijo, existen por lo menos dos puntos opuestos sobre el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.
    (b) ¿El resultado del inciso a) se cumple para puntos que estén sobre cualquier círculo sobre la superficie de la Tierra?
    (c) ¿El resultado del inciso a) se cumple para la presión barométrica y para la unidad sobre el nivel del mar?

12. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$ use la definición derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponga que f es una función que satisface la ecuación $f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos los números reales x y y. Suponga también que
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$
    (a) Encuentre $f(0)$. (b) Encuentre $f'(0)$. (c) Encuentre $f'(x)$.

14. Suponga que f es una función que tiene la propiedad de que $|f(x)| \leq x^2$ para toda x. Muestre que $f(0) = 0$. En seguida, muestre que $f'(0) = 0$.

3 Reglas de derivación

En estas fotografías se representan derivadas en varios contextos. El conductor de un automóvil de carreras desea conocer su velocidad en un momento determinado. Debido a que la sangre fluye con mayor lentitud cerca de la pared en un vaso sanguíneo, podríamos desear conocer la rapidez con que aumenta su velocidad con respecto a la distancia desde la pared. La rapidez con que se esparce un rumor depende de la cantidad de personas que intervienen y de la manera en que reaccionan a la información. Todas estas razones de cambio son casos especiales de una sola idea matemática: la derivada.

Hemos visto cómo interpretar las derivadas como pendientes y razones de cambio. También estudiamos cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. Aprendimos la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente. Aplicamos la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso si siempre tuviéramos que aplicar la definición, de modo que, en este capítulo, desarrollaremos reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente esa definición. Estas reglas de derivación nos permiten calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, algebraicas, exponenciales y logarítmicas, y trigonométricas, y trigonométricas inversas. A continuación, usaremos estas reglas para resolver problemas en que intervienen razones de cambio, y la aproximación de funciones.

3.1 Derivadas de polinomios y de funciones exponenciales

En esta sección aprenderemos la manera de derivar funciones constantes, funciones potencias, polinomios y funciones exponenciales.

Empecemos con la más sencilla de todas las funciones, la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debemos tener $f'(x) = 0$ (Fig. 1). Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

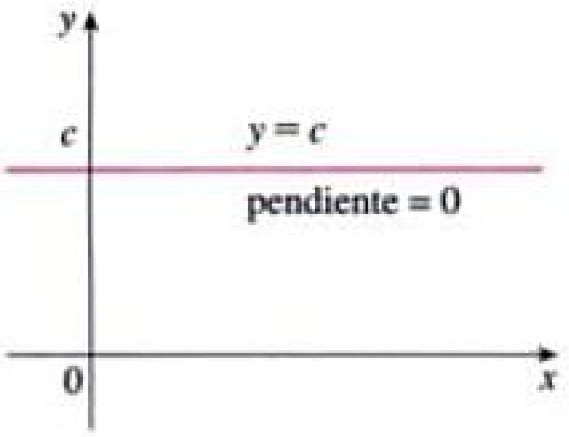


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$; por lo tanto $f'(x) = 0$.

En la notación de Leibniz, escribimos esta regla como sigue:

Derivada de una función constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Funciones potencia

Enseguida, consideremos las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (Fig. 2). De modo que

1 $$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

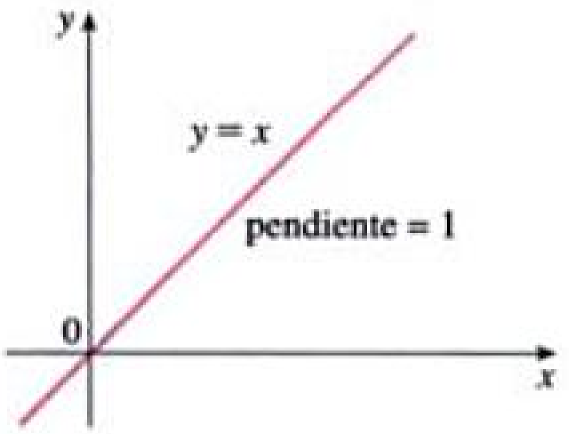


FIGURA 2
La gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$ de tal suerte que $f'(x) = 1$.

(También puede comprobar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya hemos investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.9 (ejercicios 17 y 18), encontramos que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, encontramos la derivada de $f(x) = x^4$, como sigue:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

Por tanto,

$$\boxed{3} \qquad \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si se comparan las ecuaciones (1), (2) y (3), vemos surgir un modelo. Parece razonable presumir que, cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto.

Regla de la potencia Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Primera demostración La fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

se puede verificar haciendo las multiplicaciones del segundo miembro (o sumando el segundo factor como en una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, podemos usar la ecuación 3 de la sección 2.8 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$
$$= \lim_{x\to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$
$$= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1}$$
$$= na^{n-1}$$

Segunda demostración

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

□ En las guardas del frente se da el teorema del binomio.

Al hallar la derivada de x^4, tuvimos que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, necesitamos desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, aplicamos el teorema del binomio:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$
$$= nx^{n-1}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor y, por lo tanto, tienden a 0. □

En el ejemplo 1, ilustramos la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1 □

(a) Si $f(x) = x^6$, entonces $f'(x) = 6x^5$. (b) Si $y = x^{1000}$, entonces $y' = 1000x^{999}$.

(c) Si $y = t^4$, entonces $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. (d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$ □

¿Qué se puede decir acerca de las funciones potencias con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 51 le pediremos al lector que compruebe, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Podemos volver a escribir esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por tanto, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente (Ejerc. 41), demostraremos que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo de la sección 2.5, encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.8, demostraremos que es verdadera para todos los números reales n.

Regla de la potencia (versión general) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EJEMPLO 2 □ Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

□ En la figura 3, se muestra la función y del ejemplo 2(b) y su derivada y'. Advierta que y no es diferenciable en 0 (y' no está definida allí). Observe que y' es positiva cuando y crece, y negativa cuando y decrece.

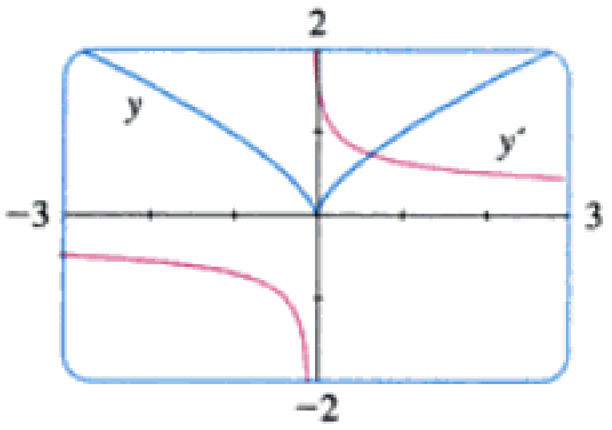


FIGURA 3

SOLUCIÓN En cada caso, volvemos a escribir la función como una potencia de x.
a) Como $f(x) = x^{-2}$, aplicamos la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2} = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$ □

EJEMPLO 3 □ Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$, en el punto (1, 1). Trace las gráficas de la curva y su recta tangente

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente en (1, 1) es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente, una ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

En la figura 4, trazamos las gráficas de la curva y su tangente.

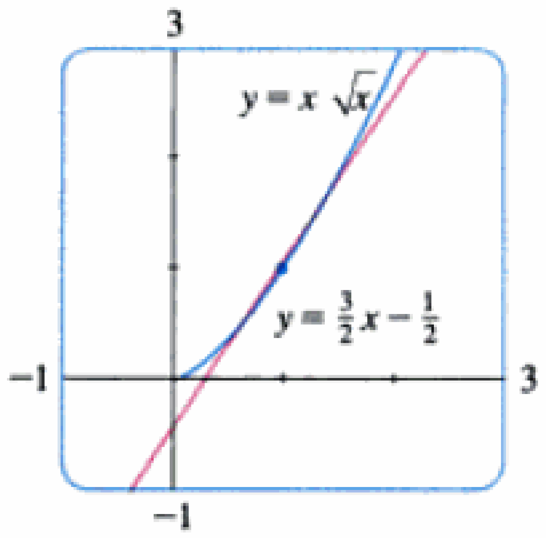


FIGURA 4

□

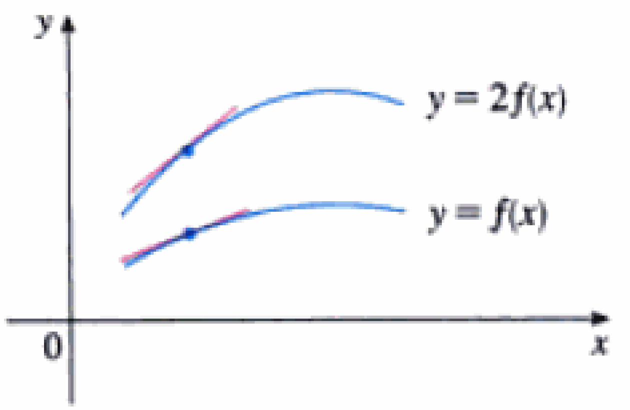
Nuevas derivadas a partir de anteriores

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustracción o multiplicación por una constante sus derivadas se pueden calcular en términos de la derivada de las funciones anteriores. En particular, en la fórmula siguiente se afirma que *la derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.*

Regla del múltiplo constante Si c es una constante y f es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

□ **Interpretación geométrica de la regla del múltiplo constante**



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. De donde las pendientes también se duplican.

Demostración Sea $g(x) = cf(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 3 de los límites)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$ □

EJEMPLO 4 □

(a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$ □

La regla siguiente nos dice que *la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas.*

Regla de la suma Si tanto f como g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

□ Si se utiliza la notación del apóstrofo, podemos escribir la regla de la suma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

Demostración Sea $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$ □

La regla de la suma se puede extender a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema por dos veces, obtenemos

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicar la regla de la suma y la del múltiplo constante, obtenemos la fórmula:

Regla de la diferencia Si tanto f como g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Estas tres reglas se pueden combinar con la regla de la potencia para derivar cualquier polinomio, como se demuestra en los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}&(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)\\ &= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)\\ &= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0\\ &= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$, donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)\\ &= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)\end{aligned}$$

De donde, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por tanto, la curva dada tiene tangentes horizontales cuando $x = 0$, $\sqrt{3}$, y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$, y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.)

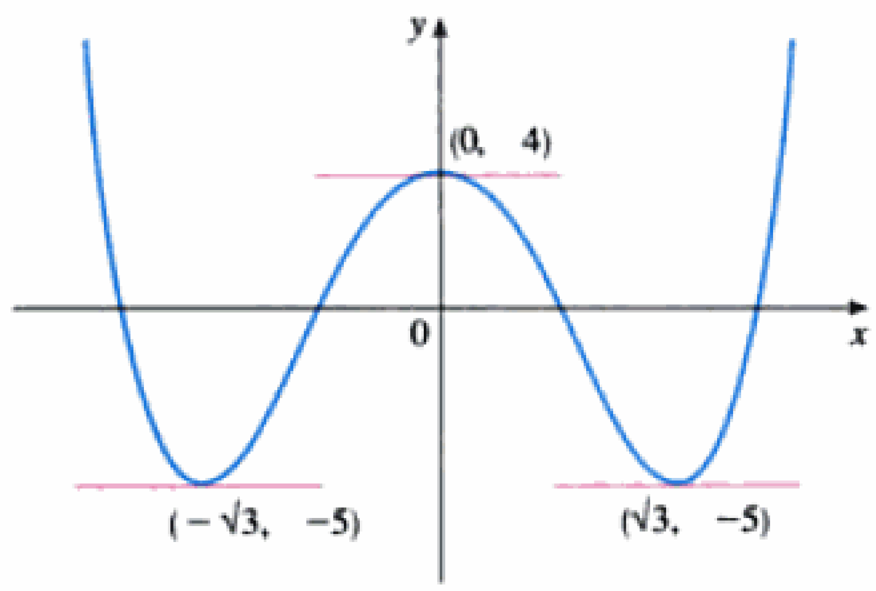


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus tangentes horizontales

Funciones exponenciales

Intentemos calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que podemos llevarlo adelante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Advierta que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

Por lo tanto, hemos demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es diferenciable en 0, entonces es diferenciable en todas partes y

$$\boxed{4} \qquad f'(x) = f'(0)a^x$$

En esta ecuación se afirma que *la razón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la propia función*. (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla de la izquierda, se da evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores se dan correctos hasta cuatro decimales. Respecto al caso de $a = 2$, véase también el ejemplo 3, Sec. 2.8.) Parece que los límites existen y

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{para } a = 2, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{para } a = 3, \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, se puede probar que los límites existen y, correctos hasta seis decimales, los valores son

$$\left. \frac{d}{dx}(2^x) \right|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \left. \frac{d}{dx}(3^x) \right|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por tanto, de la ecuación 4, tenemos

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las elecciones posibles para la base a de la ecuación 4, se tiene la fórmula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es tradicional denotar este valor con la letra e. (De hecho, fue como presentamos e en la Sec. 1.5.) Por tanto, tenemos la siguiente definición:

□ En el ejercicio 1 veremos que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante seremos capaces de demostrar que el valor correcto, hasta cinco decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

Definición del número e

$$e \text{ es el número tal que } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que, de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en (0, 1) tiene una pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véanse las Figs. 6 y 7.)

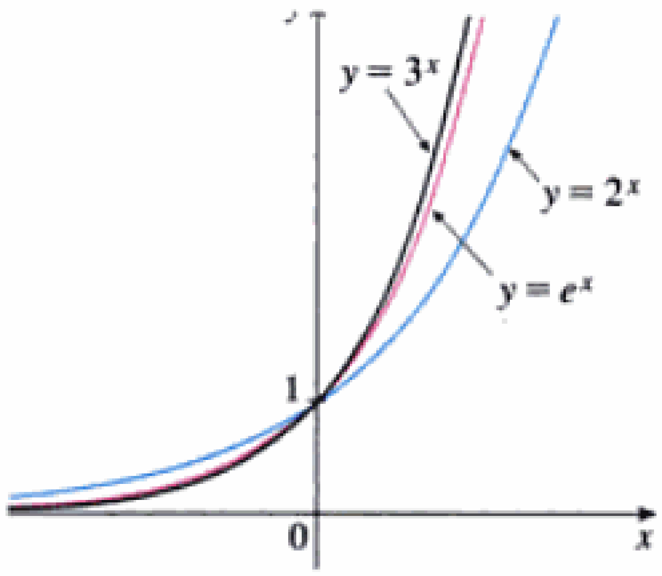


FIGURA 6

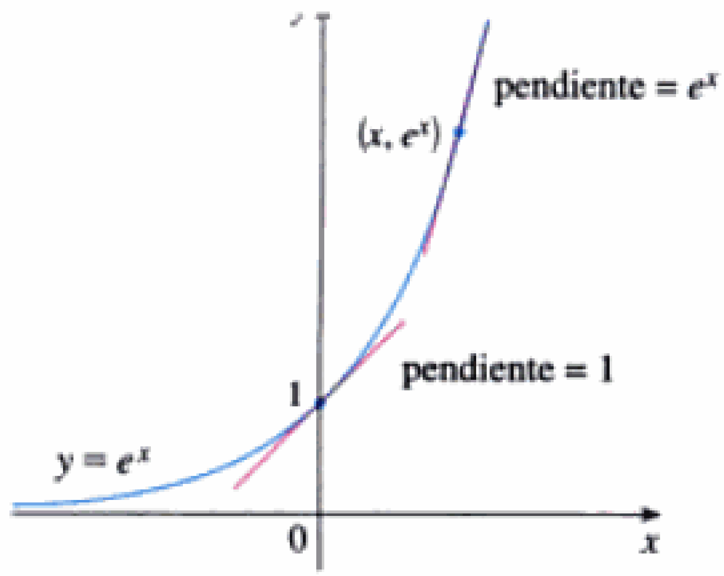


FIGURA 7

Si ponemos $a = e$ y por lo tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se da a continuación:

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

De donde, la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y, ordenada del punto (figura 7).

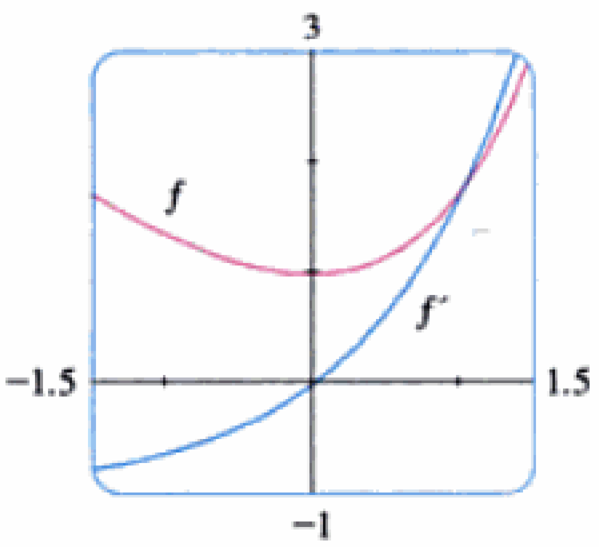


FIGURA 8

EJEMPLO 7 ▢ Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f'. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, tenemos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

La función f y su derivada f' se muestran en la figura 8. Observe que f tiene como tangente una recta horizontal en $x = 0$; corresponde al hecho que $f'(0) = 0$. También vea que, para $x > 0$, $f'(x)$ es positivo y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente. ▢

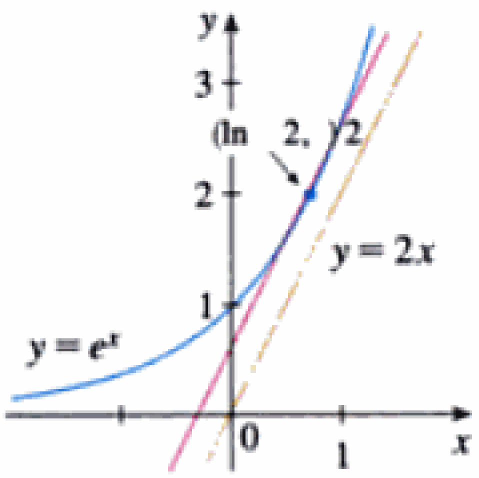


FIGURA 9

EJEMPLO 8 ▢ ¿En cuál punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Como $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Entonces, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, obtenemos

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por lo tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Fig. 9.) ▢

3.1 Ejercicios

1. (a) ¿Cómo se define el número e?
   (b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2.7^h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2.8^h - 1}{h}$$

   correctos hasta dos decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. (a) Grafique a mano la función $f(x) = e^x$, poniendo particular atención a la forma en que esa gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto
   (b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
   (c) ¿Cuál de las dos funciones del inciso b) crece con mayor rapidez cuando x es grande?

3–28 □ Derive la función.

3. $f(x) = 5x - 1$
4. $F(x) = -4x^{10}$
5. $f(x) = x^2 + 3x - 4$
6. $g(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$
7. $y = x^{-2/5}$
8. $y = 5e^x + 3$
9. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
10. $R(t) = 5t^{-3/5}$
11. $Y(t) = 6t^{-9}$
12. $R(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$
13. $F(x) = (16x)^3$
14. $y = \sqrt[3]{x}$
15. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
16. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
17. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$
18. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$
19. $y = 3x + 2e^x$
20. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$
21. $y = 4\pi^2$
22. $y = x^{4/3} - x^{2/3}$
23. $y = ax^2 + bx + c$
24. $y = A + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2}$
25. $y = x + \sqrt[5]{x^2}$
26. $u = \sqrt[3]{t^2} + 2\sqrt{t^3}$
27. $v = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$
28. $y = e^{x+1} + 1$

29–34 □ Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y úselas para explicar por qué su respuesta es razonable.

29. $f(x) = 2x^2 - x^4$
30. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$
31. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$
32. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
33. $f(x) = x - 3x^{1/3}$
34. $f(x) = x^2 + 2e^x$

35. (a) Amplifique la gráfica de $f(x) = x^{2/5}$ y estime el valor de $f'(2)$.
    (b) Use la regla de la potencia para hallar el valor exacto de $f'(2)$ y compárelo con su estimación del inciso a).

36. (a) Amplifique la gráfica de $f(x) = x^2 - 2e^x$ y estime el valor de $f'(1)$.
    (b) Encuentre el valor exacto de $f'(1)$ y compárelo con su estimación del inciso a).

37–40 □ Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado. Ilustre graficando la curva y la tangente en la misma pantalla.

37. $y = x + \dfrac{4}{x}$, $(2, 4)$
38. $y = x^{5/2}$, $(4, 32)$
39. $y = x + \sqrt{x}$, $(1, 2)$
40. $y = x^2 + 2e^x$, $(0, 2)$

41. (a) Use una calculadora gratificadora o computadora para graficar la función en la pantalla, $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ en la pantalla $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
    (b) Utilizando la gráfica de la parte (a) para estimar pendientes haga un bosquejo de la gráfica de f'. (ver el ejemplo 1 de la sección 2.9).
    (c) Calcule $f'(x)$ y usar esta expreción con una graficadora para graficar f'. Compare con su bosquejo de la parte *b*)

42. (a) (a) Use una calculadora graficadora o una computadora para graficar la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en la pantalla $[-1, 4]$ por $[8, 8]$.
    (b) Usando la gráfica de la parte (a) para estimar pendiente, haga usted un bosquejo a mano de la gráfica de g' (véase el ejemplo 1 de la sección 2.9).
    (c) Calcule $g'(x)$ y use esta expresión junto con una graficadora para graficar g' (compare con su bosquejo del inciso (b)

43. Encuentre los puntos sobre la curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ donde la tangente es horizontal.

44. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ tiene una tangente horizontal?

45. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

46. ¿En cuál punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ la recta tangente es paralela a la recta $3x - y = 5$? Ilustre trazando las gráficas de la curva y las dos rectas.

47. Dibuje un diagrama para mostrar que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes se cruzan con la parábola.

48. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.

49. La **recta normal** a una curva C, en un punto P, es, por definición, la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente a C en P. Encuentre una ecuación de la recta normal a la parábola $y = 1 - x^2$, en el punto $(2, -3)$. Grafique la parábola y su recta normal.

50. ¿La recta normal a la parábola $y = x - x^2$ en el punto $(1, 0)$, cruza con la misma parábola una segunda vez? Ilustre con un esquema.

51. Aplique la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$. (Con esto se prueba la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

52. Encuentre una parábola que tenga la ecuación, $y = ax^2 + bx$ y cuya tangente en $(1, 1)$ tenga la ecuación $y = 3x - 2$.

53. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿es f derivable en el valor 1? Haga las gráficas de f y f'.

54. En qué número es derivable la función g que sigue

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dé una fórmula para g' y haga las gráficas de g y g'.

55. (a) ¿Para qué valores de x es derivable la función, $f(x) = |x^2 - 9|$? Encuentre una fórmula para f'.
(b) Haga las gráficas de f y f'.

56. ¿En qué valores es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Dé una fórmula para h' y haga las gráficas de h y h'.

57. ¿Para qué valores de a y b es la recta, $2x + y = b$ tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

58. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre los valores de m y b para que f sea derivable en todos los puntos.

59. Encuentre una función cúbica, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tenga tangentes horinzontales en los puntos (2, 6 y (2, 0).

60. Se traza una recta tangente a la hipérbola $xy = c$, en un punto P.
(a) Demuestre que el punto medio del segmento rectilíneo cortado de esta tangente por los ejes coordenados es P.
(b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes coordenados siempre tienen la misma área, sin importar en dónde esté P sobre la hipérbola.

61. Evalúe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

62. Dibuje un diagrama en que se muestren dos rectas perpendiculares que se crucen sobre el eje y y que sean tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Dónde se cortan estas rectas?

3.2 Reglas del producto y el cociente

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

Regla del producto

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría sentirse la tentación de presumir, como Leibniz lo hizo hace tres siglos, que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, podemos ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Entonces la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Por tanto, $(fg)' \neq f'g'$. La fórmula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

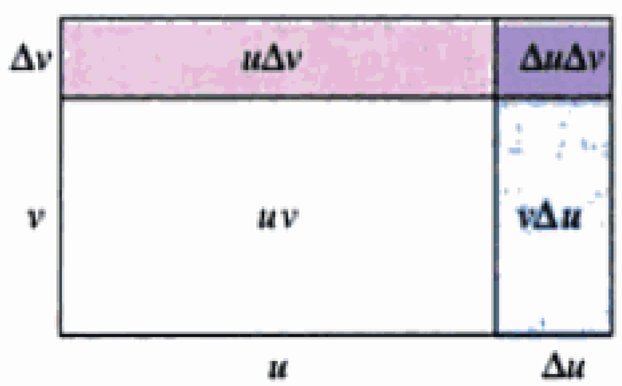


FIGURA 1
Geometría de la regla del producto

Antes de enunciar la regla del producto, veamos cómo podríamos descubrirla. En el caso donde tanto $u = f(x)$ como $v = g(x)$ son funciones positivas, podemos interpretar el producto uv como un área de un rectángulo (Fig. 1). Si x cambia una cantidad Δx, entonces los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, se puede interpretar como el área del rectángulo grande la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

$$\boxed{1} \qquad \Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$
$$= \text{la suma de las tres áreas sombreadas}$$

Si dividimos entre Δx, obtenemos

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

□ Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivadas se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$, obtenemos la derivada de uv:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\ &= u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\ &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0\cdot\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Advierta que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ puesto que f es derivable y, por lo tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) de que todas las cantidades son positivas, observamos que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu, y Δv son positivas o negativas.) De modo que hemos probado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones derivables u y v.

Regla del producto Si tanto f como g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En palabras, la regla del producto expresa que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.*

EJEMPLO 1 □ Una compañía telefónica desea estimar el número de líneas nuevas de teléfonos residenciales que necesitan instalar durante el mes venidero. A principios de enero de 1999, la compañía tenía 100,000 suscriptores, cada uno con (en promedio) 1.2 líneas telefónicas. La compañía estimó que sus suscriptores estaban aumentando a razón de 1,000 mensuales. Al hacer un escrutinio entre sus suscriptores existentes, halló que cada uno pretendía instalar un promedio de 0.01 líneas telefónicas nuevas para fines de enero. Estime el número de líneas nuevas que la compañía tendrá que instalar en enero, 1999, calculando la tasa de crecimiento de las líneas a principios del mes.

SOLUCIÓN Sean $s(t)$ los suscriptores y $n(t)$ la cantidad de líneas telefónicas por suscriptor en el tiempo t, donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde al inicio de 1999. Entonces el número total de líneas se expresa por

$$L(t) = s(t)n(t)$$

y deseamos hallar $L'(0)$. Según la regla del producto, tenemos

$$L'(t) = \frac{d}{dt}[s(t)n(t)] = s(t)\frac{d}{dt}n(t) + n(t)\frac{d}{dt}s(t)$$

Se nos da que $s(0) = 100{,}000$ y $n(0) = 1.2$. Las estimaciones de la compañía referentes a las tasas de incremento son que $s'(0) \approx 1{,}000$ y $n'(0) \approx 0.01$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} L'(0) &= s(0)n'(0) + n(0)s'(0) \\ &\approx 100{,}000 \cdot 0.01 + 1.2 \cdot 1000 = 2200 \end{aligned}$$

La compañía necesita instalar unas 2,200 líneas nuevas durante enero de 1999.

Advierta que los dos términos que surgen de la regla del producto vienen de diferentes fuentes: suscriptores antiguos y suscriptores nuevos. Una contribución para L' es el número de suscriptores existentes (10,000) multiplicado por la razón en que ordenan nuevas líneas (alrededor de 0.01 por suscriptor mensualmente). Una segunda contribución es el número promedio de líneas por suscriptor (1.2 a principios del mes) multiplicado por la tasa de incremento de los suscriptores (1,000 al mes). □

□ En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 2 y su derivada f'. Advierta que $f'(x)$ es positiva cuando f crece y negativa cuando f disminuye.

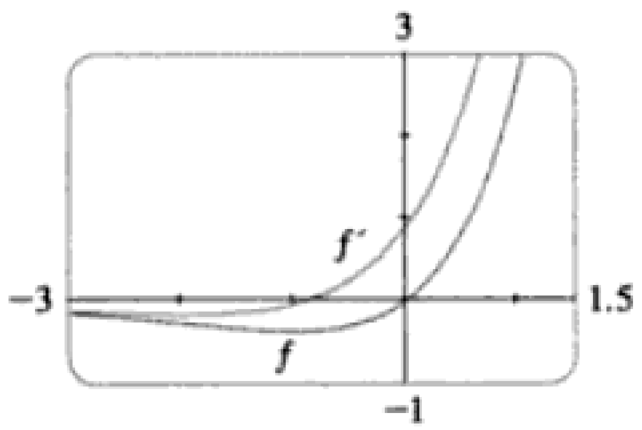


FIGURA 2

EJEMPLO 2 □ Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.

SOLUCIÓN Por la regla del producto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) \\ &= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3 □ Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(1 - t)$.

SOLUCIÓN 1 Si se aplica la regla del producto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\frac{d}{dt}(1-t) + (1-t)\frac{d}{dt}\sqrt{t} \\ &= \sqrt{t}\,(-1) + (1-t)\cdot\tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= -\sqrt{t} + \frac{1-t}{2\sqrt{t}} = \frac{1-3t}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si, en primer lugar, usamos las leyes de los exponentes para volver a escribir $f(t)$, entonces podemos proceder directamente, sin aplicar la regla del producto.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{t} - t\sqrt{t} = t^{1/2} - t^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}t^{-1/2} - \tfrac{3}{2}t^{1/2} \end{aligned}$$

la cual equivale a la respuesta de la solución 1. □

En el ejemplo 3, se hace ver que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones que utilizar la regla del producto. Sin embargo, en el ejemplo 2, esta regla es el único método posible.

EJEMPLO 4 □ Si $f(x) = \sqrt{x}\,g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\,g'(x) + g(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \sqrt{x}\,g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(4) = \sqrt{4}\,g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \frac{2}{2\cdot 2} = 6.5$$

□

Regla del cociente

Suponga que f y g son funciones derivables. Si establecemos la hipótesis previa de que la función cociente $F = f/g$ es diferenciable, entonces no es difícil hallar una fórmula para F' en términos de f' y g'.

Dado que $F(x) = f(x)/g(x)$, podemos escribir $f(x) = F(x)g(x)$ y aplicar la regla del producto:

$$f'(x) = F(x)g'(x) + g(x)F'(x)$$

Si se resuelve esta ecuación para $F'(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}\,g'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Aun cuando la fórmula se dedujo suponiendo que F es derivable, se puede probar sin esta hipótesis (véase el Ejerc. 44).

Regla del cociente Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\,\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En palabras, en la regla del cociente se expresa que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

La regla del cociente y las otras fórmulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo que sigue.

□ Podemos usar un aparato graficador para comprobar que la respuesta al ejemplo 5 es plausible. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función de ese ejemplo y su derivada. Advierta que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

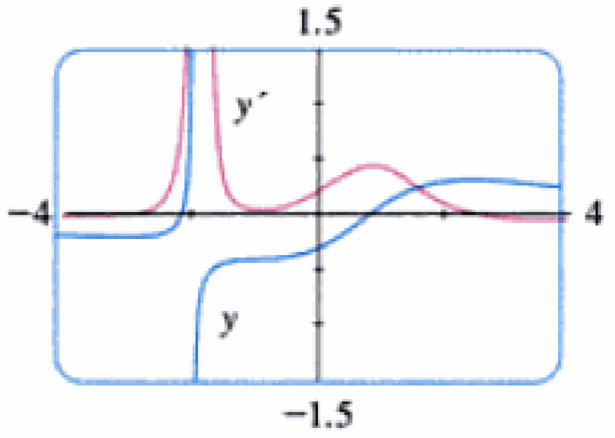


FIGURA 3

EJEMPLO 5 □ Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$.

Entonces

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2} \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 6 □ Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $(1, e/2)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

De modo que la pendiente de la recta tangente en $(1, e/2)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $(1, e/2)$ es horizontal y su ecuación es $y = e/2$. [Véase la Fig. 4. Advierta que la función es creciente y que cruza su recta tangente en $(1, e/2)$.]

□

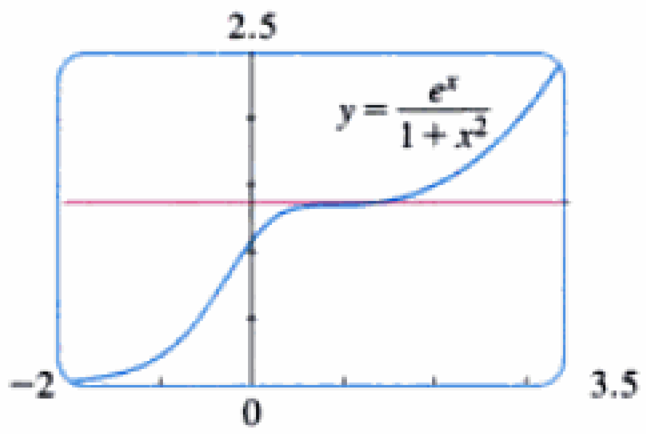


FIGURA 4

NOTA □ No utilice la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces, es más fácil volver a escribir un cociente para ponerlo en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente, es mucho más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

3.2 Ejercicios

1. Encuentre la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Concuerdan sus resultados?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

de dos maneras: aplicando la regla del cociente y simplificándola primero. Muestre que concuerdan sus respuestas. ¿Qué método prefiere?

3–22 □ Derive la función.

3. $f(x) = x^2 e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $h(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

8. $f(u) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$

9. $G(s) = (s^2 + s + 1)(s^2 + 2)$

10. $g(x) = (1 + \sqrt{x})(x - x^3)$

11. $H(x) = (x^3 - x + 1)(x^{-2} + 2x^{-3})$

12. $H(t) = e^t(1 + 3t^2 + 5t^4)$

13. $y = \dfrac{3t - 7}{t^2 + 5t - 4}$

14. $y = \dfrac{4t + 5}{2 - 3t}$

15. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

16. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

17. $y = (r^2 - 2r)e^r$

18. $y = \dfrac{u^2 - u - 2}{u + 1}$

19. $y = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

20. $y = \dfrac{e^x}{x + e^x}$

21. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

22. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

23–26 □ Escriba una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado.

23. $y = \dfrac{2x}{x + 1}$, $(1, 1)$

24. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, $(4, 0.4)$

25. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

26. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

27. (a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se llama **bruja de María Agnesi**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre el inciso a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma plantilla.

28. (a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.
(b) Ilustre el inciso a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

29. (a) Si $f(x) = e^x/x^3$, halle $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable, comparando las gráficas de f y f'.

30. (a) Si $f(x) = x/(x^2 - 1)$, halle $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable, comparando las gráficas de f y f'.

31. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$, y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores de (a) $(fg)'(5)$, (b) $(f/g)'(5)$, y (c) $(g/f)'(5)$.

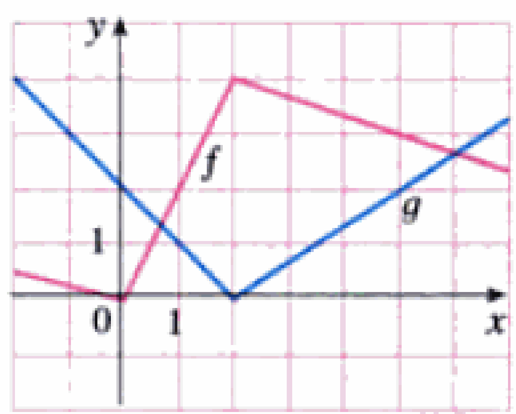
32. Si $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$, y $g'(3) = 5$, halle los números siguientes:
(a) $(f + g)'(3)$ (b) $(fg)'(3)$
(c) $(f/g)'(3)$ (d) $\left(\dfrac{f}{f - g}\right)'(3)$

33. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

34. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

35. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encuentre $u'(1)$. (b) Encuentre $v'(5)$.



36. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las siguientes funciones:
(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$
(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

37. En este ejercicio, estimamos la tasa a que se está elevando el ingreso personal total en el área metropolitana de Miami-Ft. Lauderdale. En julio de 1993, la población de esta área era de 3,354,000 y crecía a razón de unas 45,000 personas por año. El ingreso anual promedio fue de 21,107 dólares *per cápita* y este promedio aumentaba alrededor de 1,900 dólares por año (bien por arriba del promedio nacional de alrededor de 660 dólares al año). Aplique la regla del producto y estos valores para estimar

la tasa a la que crecía el ingreso personal total en Miami–Ft. Lauderdale, en julio de 1993. Explique el significado de cada término en la regla del producto.

38. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) la vende en función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que podemos escribir $q = f(p)$. Entonces el ingreso obtenido con el precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.
(a) ¿Qué significa decir que $f(20) = 10{,}000$ y $f'(20) = -350$?
(b) Tome los valores que se dan en el inciso a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

39. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En cuáles puntos estas tangentes tocan la curva?

40. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = (x - 1)/(x + 1)$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

41. (a) Utilice la regla del producto por dos veces para probar que si f, g, y h son diferenciables, entonces

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

(b) Tome $f = g = h$ en el inciso a) y demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Aplique el resultado del inciso b) para derivar $y = e^{3x}$.

42. (a) Aplique la definición de derivada para probar la **regla del recíproco**: Si g es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(b) Aplique la regla del recíproco para derivar la función del ejercicio 19.

43. Utilice la regla del recíproco para comprobar que la regla de la potencia es válida para los enteros negativos; es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los enteros positivos n.

44. Aplique las reglas del producto y del recíproco para probar la regla del cociente.

3.3 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales

Recuerde —por lo visto en la sección 2.8— que si $y = f(x)$, entonces la derivada dy/dx se puede interpretar como la razón de cambio de y con respecto a x. En esta sección examinaremos algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Con base en la sección 2.7, recordemos la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

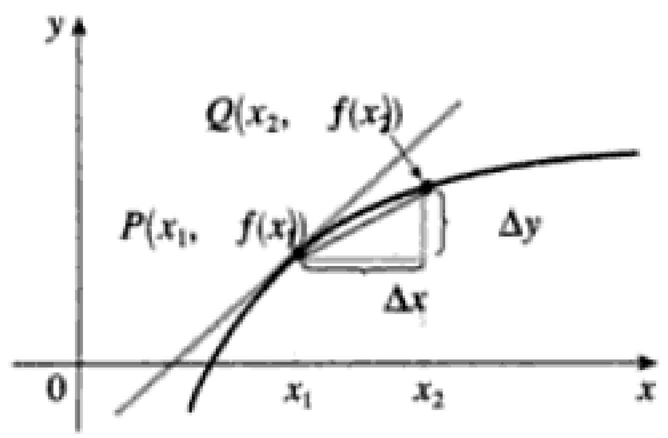
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = razón promedio de cambio
$m = f'(x_1)$ = razón instantánea de de cambio

FIGURA 1

es la **razón promedio de cambio y con respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual, por lo tanto, puede interpretarse como la **razón instantánea de cambio de y con respecto a x**, o sea, la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la Sec. 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas entre las de x.) Veamos ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y sociales.

Física

Si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ representa la velocidad promedio en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo). Esto se vio en las secciones 2.7 y 2.8; pero ahora que conocemos las fórmulas de derivación, somos capaces de resolver los problemas de velocidades con mayor facilidad.

EJEMPLO 1 □ La ecuación que sigue da la posición de una partícula

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.
(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
(c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
(e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
(f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los cinco primeros segundos.

SOLUCIÓN
(a) La función velocidad es la derivada de la función de posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad a los 4 segundos es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. De donde, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.

(d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$, es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Por tanto, la partícula se mueve en dirección positiva en los periodos $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás cuando $1 < t < 3$.

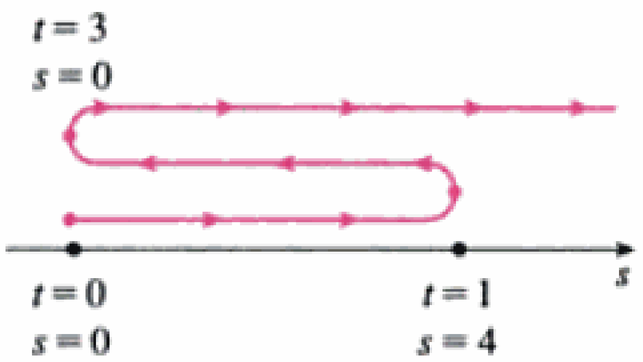


FIGURA 2

(e) En la figura 2, se esquematiza el movimiento de la partícula.

(f) En virtud de lo que vimos en los incisos (d) y (e), necesitamos calcular las distancias recorridas durante los periodos [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$ la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$ la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m. □

EJEMPLO 2 □ Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, entonces su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es $m = f(x)$ como se muestra en la figura 3.

FIGURA 3

La masa de la parte de la varilla que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$ se expresa con $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, de modo que la densidad promedio de esa sección es

$$\text{densidad promedio} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora hacemos que $\Delta x \to 0$ (es decir, $x_2 \to x_1$), calculamos la densidad promedio sobre un intervalo cada vez más pequeño. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estas densidades promedios cuando $\Delta x \to 0$; es decir, la densidad lineal es la razón de cambio de la masa con respecto a la longitud. En forma simbólica,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Así entonces, la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa con respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, en donde x se mide en metros y m en kilogramos, entonces la densidad promedio de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48 \text{ kg/m}$$

en tanto que la densidad en $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50 \text{ kg/m}$$ □

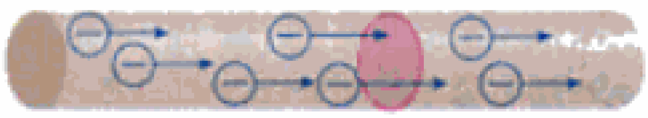


FIGURA 4

EJEMPLO 3 □ Hay corriente siempre que las cargas eléctricas se mueven. En la figura 4 se muestra parte de un alambre con electrones que cruzan una superficie plana sombreada. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, entonces la corriente promedio durante este intervalo se define como

$$\text{corriente promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si tomamos el límite de esta corriente promedio sobre lapsos más y más breves, obtenemos lo que se llama **corriente** I en un instante dado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Por tanto, la corriente es la rapidez con que la carga fluye por una superficie. Se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (a menudo coulombs por segundo, llamados amperes). □

La velocidad, la densidad y la corriente no son las únicas razones de cambio de importancia para la física. Otras incluyen la potencia (la rapidez a la cual se realiza trabajo), la razón de flujo de calor, el gradiente de temperatura (la razón de cambio de la temperatura con respecto a la posición) y la tasa de desintegración de una sustancia radiactiva en la física nuclear.

Química

EJEMPLO 4 □ Una reacción química genera una o más sustancias (llamadas productos) a partir de uno o más materiales de arranque (reactivos). Por ejemplo, la "ecuación"

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de agua. Consideremos la reacción

$$A + B \longrightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles (6.022×10^{23} moléculas) por litro y se denota con [A]. La concentración varía durante una reacción, de modo que [A], [B] y [C] son funciones del tiempo (t). La velocidad promedio de reacción del producto C durante un periodo $t_1 \leq t \leq t_2$ es

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero los químicos tienen más interés en la **velocidad instantánea de reacción**, la cual se obtiene tomando el límite de la velocidad promedio de reacción conforme el intervalo Δt tiende a 0:

$$\text{velocidad instántanea de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

Puesto que la concentración del producto aumenta a medida que la reacción avanza, la derivada $d[C]/dt$ será positiva (Puede ver intuitivamente que la pendiente de la tangente a la gráfica de una función creciente es positiva.) Luego la velocidad de su acción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción; por lo tanto, para que las velocidades de reacción de A y B sean números positivos, ponemos signos negativos delante de las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Dado que [A] y [B] disminuyen con la misma rapidez que [C] crece, tenemos

$$\text{velocidad instantánea de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

De modo más general, resulta que para una reacción de la forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \longrightarrow c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

tenemos

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La velocidad de reacción se puede determinar con métodos gráficos (véase el ejercicio 20). En algunos casos, podemos usar la velocidad de reacción con el fin de hallar fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo (véanse los Ejercs. 9.3). □

EJEMPLO 5 □ Una de las cantidades de interés en la termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a una temperatura constante, entonces su volumen V depende de su presión P. Podemos considerar la razón de cambio del volumen con respecto a la presión: a saber, la derivada dV / dP. Cuando P crece, V decrece, de modo que $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad interna} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Por lo tanto, β mide cuán rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que la ecuación relaciona el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25 °C con la presión P (en kilopascales).

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio de V con respecto a P, cuando $P = 50$ kPa, es

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} &= -\left.\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50} \\ &= -\frac{5.3}{2500} = -0.00212\ \mathrm{m^3/kPa}\end{aligned}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\dfrac{5.3}{50}} = 0.02\ (\mathrm{m^3/kPa})/\mathrm{m^3}$$ □

Biología

EJEMPLO 6 □ Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, de modo que la tasa promedio de crecimiento durante el periodo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{tasa promedio de crecimiento} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **tasa instantánea de crecimiento** se obtiene a partir de esta tasa promedio al hacer que el periodo Δt tienda a 0:

$$\text{tasa instantánea de crecimiento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

En términos estrictos, esto no es muy exacto porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ sería una función escalón que es discontinua siempre que ocurre un nacimiento o una muerte y, por lo tanto, no es diferenciable. Sin embargo, para una población grande de animales o plantas, podemos reemplazar la gráfica con una curva lisa de aproximación (Fig. 5).

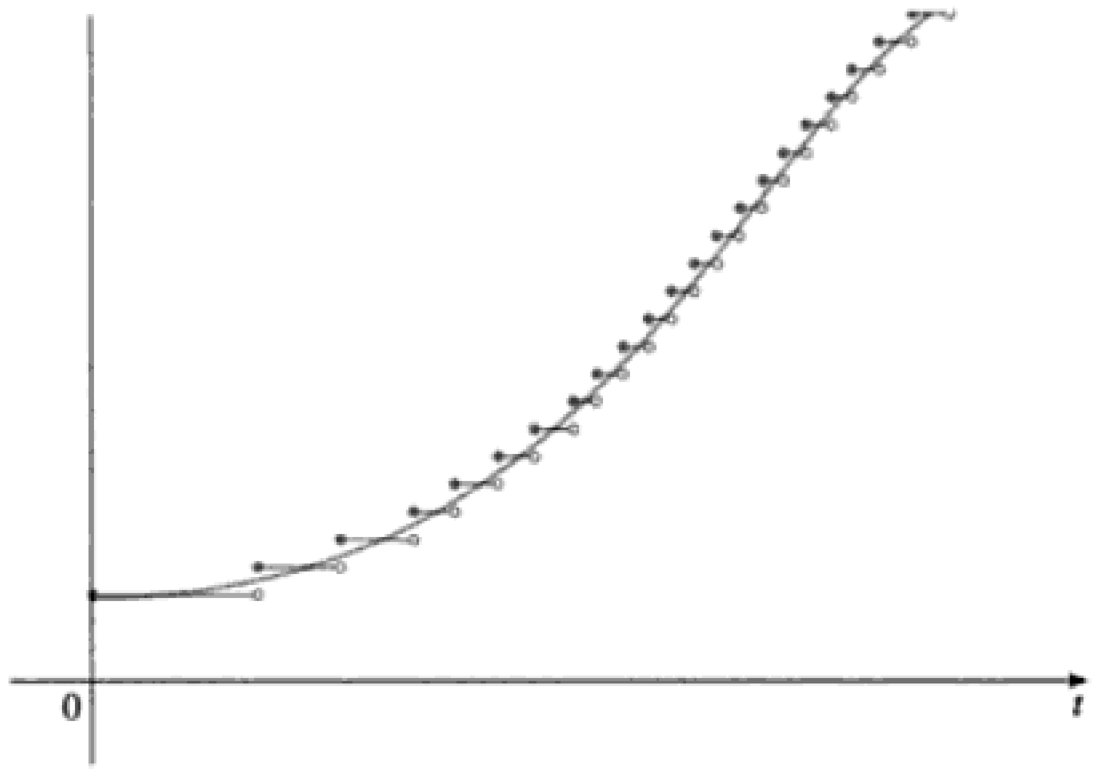


FIGURA 5
Una curva lisa es una aproximación a una función de crecimiento

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, entonces

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

y en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la sección 3.1 analizamos las derivadas de las funciones exponenciales y encontramos que

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento de la población de bacterias, en el tiempo t, es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) \approx n_0(0.69)2^t$$

Por ejemplo, suponga que se parte con una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. Entonces, la tasa de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} \approx 100(0.69)2^4 = 1104$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias crece a razón de unas 1100 bacterias por hora. □

EJEMPLO 7 □ Cuando consideramos el flujo de la sangre por un vaso sanguíneo, en una vena o una arteria, podemos tomar la forma de este vaso como el de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l (Fig.6).

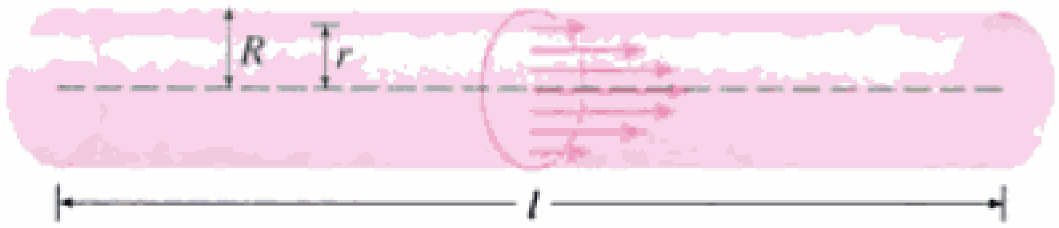


FIGURA 6
Flujo sanguíneo en una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad u de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia r del eje, hasta que v se vuelve 0 en la pared. La **ley del flujo laminar** descubierta por el físico francés Poiseuille en 1840, expresa la relación entre v y r. En ésta se afirma que

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, entonces u es función de r, con dominio $[0, R]$. [Para una información más detallada, véase W. Nichols y M. O'Rourke (edts.) *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 3a. ed. (Filadelfia: Lea & Febiger, 1990).]

La razón promedio de cambio de la velocidad, cuando nos movemos de $r = r_1$ hacia afuera, hasta $r = r_2$ es

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si hacemos que $\Delta r \to 0$, obtenemos el **gradiente de velocidad,** que es la razón instantánea de cambio de la velocidad con respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Con la ecuación 1 obtenemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las arterias humanas más pequeñas, podemos tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm, y P = 4,000, dinas/cm^2, lo cual da

$$\begin{aligned} v &= \frac{4{,}000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2) \\ &\approx 1.85 \times 10^4(6.4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

En $r = 0.002$ cm, la sangre fluye a una velocidad de

$$\begin{aligned} v(0.002) &\approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1.11 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4{,}000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74(\text{cm/s})/\text{cm}$$

Para tener una idea de lo que esto significa, cambiemos nuestras unidades de centímetros a micrómetros (1 cm = 10,000 μm). Entonces el radio de la arteria es de 80 μm. La velocidad en el eje central es de 11,850 μm/s, la cual disminuye hasta 11,110 μm/s a una distancia de $r = 20$ μm. El hecho de que $dv/dr = -74$ (μm/s)/μm significa que cuando $r = 20$ μm, la velocidad disminuye a razón de más o menos 74 μm/s por cada micrómetro que nos alejemos del centro. □

Economía

EJEMPLO 8 □ Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al producir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el número de artículos producidos se incrementa de x_1 hasta x_2, el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, y la razón promedio de cambio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas llaman **costo marginal** al límite de esta cantidad, cuando $\Delta x \to 0$, es decir, la razón instantánea de cambio del costo con respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Como x suele tomar sólo valores enteros, quizá no tenga sentido hacer que Δx tienda a 0, pero siempre podremos reemplazar $C(x)$ con una función lisa de aproximación, como en el Ejem. 6.]

Si se toma $\Delta x = 1$ y n grande (de modo que Δx sea pequeño en comparación con n), tenemos

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Entonces, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la $(n + 1)$ ésima unidad].

A menudo, resulta apropiado representar una función de costo total con un polinomio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (renta, calefacción, mantenimiento) y los demás términos, el costo de las materias primas, la mano de obra, etcétera. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender parcialmente de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y de las faltas de eficiencia relacionados con las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10{,}000 + 5x + 0.01x^2$$

Entonces la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{artículo}$$

Esto da la razón a la cual se incrementan los costos con respecto al nivel de producción, cuando $x = 500$, y predice el costo del 501-ésimo artículo.

El costo real para producir el 501-ésimo artículo es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10{,}000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\quad - [10{,}000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Advierta que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$. □

Los economistas también estudian la demanda, el ingreso y la utilidad marginal, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Éstas se consideran en el capítulo 4, después de desarrollar las técnicas para hallar los valores máximos y mínimos de funciones.

Otras ciencias

Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la razón a la cual una masa intrusiva de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la razón a la cual el agua fluye hacia adentro o hacia afuera de un depósito. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población en una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo se interesa por la razón de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura. (Véase el Ejerc. 15, de la Sec. 9.4.)

En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudian la curva del aprendizaje, la cual presenta en forma de gráfica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprende una habilidad, como función del tiempo de capacitación t. Tiene un interés particular la razón a la cual mejora el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir, dP/dt.

En sociología, el cálculo diferencial se aplica al análisis del esparcimiento de rumores (o de innovaciones, novedades o modas). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que conoce un rumor en el momento t, entonces la derivada dp / dt denota la velocidad de esparcimiento de ese rumor. (Véase el ejercicio sección. 3.5.)

Resumen

La velocidad, la densidad, la corriente, la potencia y el gradiente de temperatura, en física; la velocidad de reacción y la compresibilidad, en química; la tasa de crecimiento y la velocidad de la sangre, en biología; el costo marginal y la utilidad marginal, en economía; la razón de flujo del calor, en geología; la razón de mejora del rendimiento, en psicología, y la velocidad de esparcimiento de un rumor, en sociología, son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.

Ésta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas se apoya en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diferentes en cada ciencia. Cuando desarrollamos las propiedades del concepto matemático, de una vez y por todas, podemos regresar y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768–1830) lo expresó de manera sucinta: "Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los unen".

3.3 Ejercicios

1–6 □ Una partícula se mueve según la ley de movimiento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, donde t se mide en segundos y s en metros.

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
(c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia adelante?
(e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
(f) Dibuje un diagrama, como el de la figura 2, para ilustrar el movimiento de la partícular.

1. $f(t) = t^2 - 10t + 12$

2. $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 10$

3. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$

4. $f(t) = t^4 - 4t + 1$

5. $s = \dfrac{t}{t^2 + 1}$

6. $s = \sqrt{t}\,(3t^2 - 35t + 90)$

7. La función de posición de una partícula está dada por

$$s = t^3 - 4.5t^2 - 7t \qquad t \geqslant 0$$

¿Cuándo alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?

8. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 pies/s, entonces su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.
(a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está 96 pies arriba del piso en su camino hacia arriba? y ¿luego hacia abajo?

9. (a) Una compañía fabrica *chips* para computadora a partir de plaquitas cuadradas de silicio. Se desea conservar la longitud del lado de esas plaquitas muy próxima a 15 mm y, asimismo, saber cómo cambia el área $A(x)$ de ellas cuando cambia la longitud x del lado. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.
(b) Demuestre que la razón de cambio del área de uno de los cuadrados con respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro. Explique geométricamente por qué esto es cierto, dibujando un cuadrado cuya longitud x del lado se incremente en una cantidad Δx. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA si Δx es pequeño?

10. (a) Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x del lado, calcule dV / dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.
(b) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo con respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es cierto; básese en el ejercicio 9b) para establecer una analogía.

11. (a) Encuentre la razón promedio de cambio del área de un círculo con respecto a su radio r, cuando éste cambia de
(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2.5 (iii) 2 a 2.1
(b) Encuentre la razón instantánea de cambio cuando $r = 2$.
(c) Demuestre que la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto dibujando un círculo cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA si Δr es pequeño?

12. Se deja caer una piedra en un lago que crea una onda circular que viaja hacia afuera con una velocidad de 60 cm/s. Encuentre la razón a la cual aumenta el área dentro del círculo después de (a) 1 s, (b) 3 s y (c) 5 s. ¿Qué puede concluir?

13. Se está inflando un globo esférico. Encuentre la razón de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) con respecto al radio r, cuando éste es de (a) 1 pie, (b) 2 pies y (c) 3 pies. ¿A qué conclusiones llega?

14. (a) El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Encuentre la razón promedio de cambio de V con respecto a r, cuando éste cambia de
(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5.1 μm
(b) Halle la razón instantánea de cambio de V con respecto a r, cuando $r = 5\ \mu$m.
(c) Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 11(c).

15. La masa de la parte de una varilla metálica que se encuentra entre su extremo izquierdo y un punto x metros a la derecha es $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (Ejem. 2) cuando x es (a) 1 m, (b) 2 m y (c) 3 m. ¿En dónde es más alta la densidad y dónde es más baja?

16. Si un tanque contiene 5,000 galones de agua, la cual se drena desde el fondo del tanque en 40 min, entonces la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el tanque después de t minutos como

$$V = 5000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 40$$

Encuentre la razón de drenado después de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min y (d) 40 min. ¿En qué momento fluye el agua más rápido hacia afuera? ¿Con mayor lentitud? Resuma sus hallazgos.

17. La cantidad de carga, Q, en coulombs (C) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando (a) $t = 0.5$ s y (b) $t = 1$ s. [Véase el Ejem. 3. La unidad de corriente es el ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué momento la corriente es más baja?

18. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.
(a) Si los cuerpos están moviéndose, encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?
(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a la razón de 2 N/km, cuando r = 20 000 km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando r = 10 000 km?

19. La ley de Boyle expresa que cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.
(a) Encuentre la razón de cambio del volumen en relación con la presión.
(b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.
(c) Pruebe que la compresibilidad isotérmica (véase el Ejem. 5) se expresa con $\beta = 1/P$.

20. Los datos de la tabla se refieren a la lactonización del ácido hidroxivalérico a 25°C. y dan la concentración $C(t)$ de este ácido en moles por litro después de t minutos.

t	0	2	4	6	8
$C(t)$	0.0800	0.0570	0.0408	0.0295	0.0210

(a) Encuentre la velocidad promedio de reacción para los intervalos de tiempo siguientes:
(i) $2 \leq t \leq 6$ (ii) $2 \leq t \leq 4$ (iii) $0 \leq t \leq 2$
(b) Sitúe en una gráfica los puntos de la tabla y dibuje una curva lisa que pase por ellos, como una aproximación para la gráfica de la función de concentración. Luego trace la tangente en $t = 2$ y úsela para estimar la velocidad instantánea de reacción cuando $t = 2$.

21. La tabla proporciona la población en el siglo XX.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1,650	1960	3,020
1910	1,750	1970	3,700
1920	1,860	1980	4,450
1930	2,070	1990	5,300
1940	2,300	1996	5,770
1950	2,520		

(a) Estime la tasa de crecimiento de la población en 1920 y en 1980 promediando las pendientes de 2 rectas secantes.
(b) Use una calculadora graficadora o una computadora para encontrar una función cúbica (es decir, un polinomio de tercer grado) que sirva para modelar los datos (ver la sección 1.2).
(c) Use el modelo de la parte (b) para encontrar un modelo para la tasa de crecimiento de la población en el siglo XX.
(d) Use la parte (c) para estimar las tasas de crecimiento en 1920 y 1980. Compare con sus estimaciones de la parte (a).
(e) Estime la tasa de crecimiento en 1985.

22. La tasa de interés sobre los bonos del Tesoro de los E.U. es una función del tiempo. La tabla siguiente de los valores a medio año de esta función, $I(t)$ a lo largo de un período de 9 años (como un porcentaje anual).

t	$I(t)$	t	$I(t)$
1983	8.62	1988	6.67
1984	9.57	1989	8.11
1985	7.49	1990	7.51
1986	5.97	1991	5.41
1987	5.83	1992	3.46

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de cuarto grado.
(b) Use la parte (a) para encontrar un modelo para $I'(t)$.
(c) Estime la tasa de cambio de las tasas de interés en 1988 y 1991.
(d) Grafique los puntos dato y los modelos para I e I'.

23. Si en el ejemplo 4 se forma una molécula del producto C a partir de una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B y las concentraciones iniciales de A y B tienen un valor común $[A] = [B] = a$ moles/L, entonces

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.
(a) Encuentre la velocidad de reacción en el instante t.
(b) Demuestre que si $x = [C]$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) ¿Qué sucede a la concentración cuando $t \to \infty$?
(d) ¿Qué sucede a la velocidad de reacción cuando $t \to \infty$?
(e) ¿Qué significan en términos prácticos los resultados de los incisos (c) y (d)?

24. Suponga que una población de bacterias se inicia con 500 y que se triplica cada hora.
(a) ¿Cuál es la población después de 3, 4 y t horas?
(b) Use el resultado de (5) de la sección 3.1 con el fin de estimar la razón de aumento de la población de bacterias después de 6 horas.

25. Vea a la ley del flujo laminar del ejemplo 7. Considere un vaso sanguíneo con radio de 0.01 cm, longitud de 3 cm, diferencia de presión de 3,000 dinas/cm^2 y viscosidad $\eta = 0.027$.
(a) Encuentre la velocidad de la sangre a lo largo de la línea central $r = 0$, en el radio $r = 0.005$ cm y en la pared $r = R = 0.01$ cm.
(b) Halle el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$ y $r = 0.01$.
(c) ¿Dónde es máxima la velocidad? ¿Dónde cambia más la velocidad?

26. La frecuencia de las vibraciones de una cuerda vibrante de un violín se expresa mediante

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el Cap. 11 en D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 2a. ed. (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1991).]
(a) Encuentre la razón de cambio de la frecuencia con respecto a
  (i) La longitud (cuando T y ρ son constantes),
  (ii) La tensión (cuando L y ρ son constanes), y
  (iii) La densidad lineal (cuando L y T son constantes).
(b) La frecuencia f (entre más alta es la frecuencia, mayor es la altura) determina la altura de una nota (cuán alto o cuán bajo suena). Use los signos de las derivadas del inciso a) para hallar qué sucede a la altura de una nota
  (i) Cuando se disminuye la longitud efectiva de una cuerda colocando un dedo sobre ésta de modo que vibre una parte más corta de la misma.
  (ii) Cuando se aumenta la tensión haciendo girar una de las clavijas.
  (iii) Cuando se aumenta la densidad lineal cambiando a otra cuerda.

27. El costo, en dólares, para producir x pares de jeans es

$$C(x) = 2000 + 3x + 0.01x^2 + 0.0002x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal.
(b) Halle $C'(100)$ y explique su significado. ¿Qué pronostica?
(c) Compare $C'(100)$ con el costo de fabricación de la 101 ésima yarda.

28. La función de costo para un artículo es

$$C(x) = 84 + 0.16x - 0.0006x^2 + 0.000003x^3$$

(a) Encuentre e interprete $C'(100)$.
(b) Compare $C'(100)$ con el costo para producir el 101 ésimo artículo.
(c) Grafique la función de costo y estime el punto de inflexión.
(d) Calcule el valor de x para el cual C tiene un punto de inflexión. ¿Cuál es el significado de este valor de x?

29. Si $p(x)$ es el valor total de la producción, cuando se tienen x trabajadores en una planta, entonces la *productividad promedio* de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encuentre $A'(x)$. ¿Por qué la compañía desea contratar más trabajadores si $A'(x) > 0$?
(b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

30. Si R denota la reacción del cuerpo a algunos estímulos de intensidad x, la *sensibilidad* S se define como la razón de cambio de la reacción con respecto a x. Un ejemplo particular es que cuando se aumenta la brillantez de una fuente luminosa, el ojo reacciona disminuyendo el área R de la pupila. Se ha usado la fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

para modelar la dependencia de R respecto a x, cuando R se mide en milímetros cuadrados y x en unidades apropiadas de brillantez.
(a) Encuentre la sensibilidad.
(b) Ilustre el inciso (a) trazando las gráficas de R y S como funciones de x. Comente los valores de R y S con bajos niveles de brillantez. ¿Es lo que usted esperaría?

31. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en kelvins) y la presión P (en atmósferas), con un volumen V (en litros), es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante, $P = 8.0$ atm y aumenta a razón de 0.10 atm/min, y

$V = 10$ L y disminuye a razón de 0.15 L/min. Encuentre la razón de cambio de T con respecto al tiempo, en ese instante, si $n = 10$ mol.

32. En una granja piscícola, se introduce una población de peces en un estanque y se cosechan con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población se expresa con la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la tasa de nacimientos, P_c es la población máxima que el estanque puede sostener (llamada *capacidad de contención*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.

(a) ¿Cuál valor de dP/dt corresponde a una población estable?
(b) Si el estanque puede sostener 10,000 peces, la tasa de nacimiento es de 5% y la tasa de cosecha es de 4%, encuentre el nivel estable de la población.
(c) ¿Qué sucede si β se eleva hasta el 5%?

33. En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los modelos *depredador-presa* para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribús, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado por las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) ¿Cuáles valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
(b) ¿Cómo se representaría matemáticamente la afirmación "los caribús van hacia la extinción"?
(c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ y $d = 0.0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones (C, W) que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en armonía o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

3.4 Derivadas de las funciones trigonométricas

□ En el apéndice D se da un repaso de las funciones trigonométricas.

Antes de iniciar esta sección, quizá podría necesitar repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante recordar que cuando hablamos de la función f definida para todos los números reales x por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Se cumple una convención similar para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot. Recuerde, por lo visto en la sección 2.4, que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si hacemos la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y utilizamos la interpretación de $f'(x)$ entonces como la pendiente de la tangente a la curva seno para trazar la gráfica de f' (véase el Ejerc. 14, Sec. 2.9), parece que la gráfica de esta última es la misma que la curva coseno (Fig. 1).

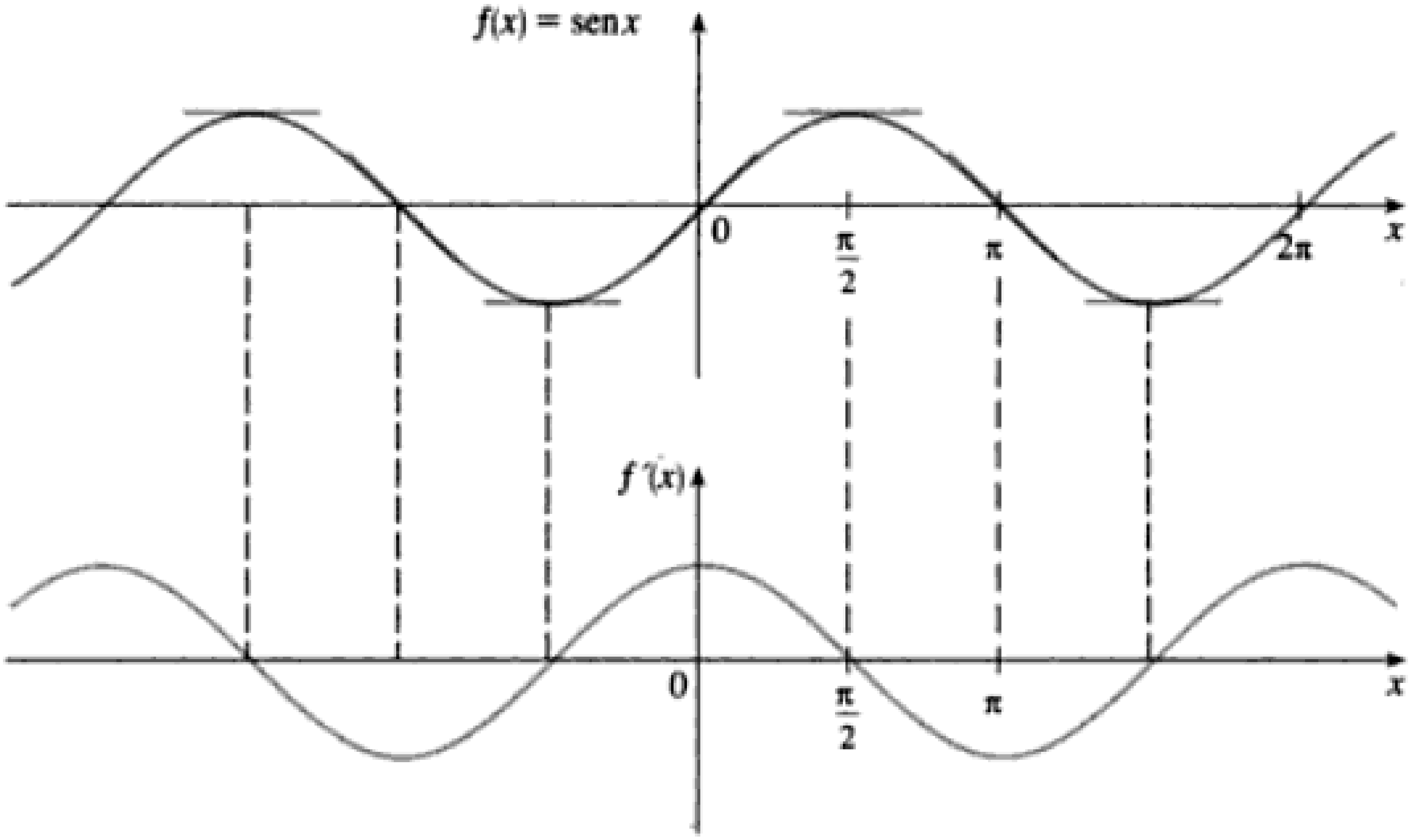


FIGURA 1

Intentemos confirmar nuestra conjetura de que si $f(x)$ sen x, entonces $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada, tenemos

□ Hemos usado la fórmula de la adición para el seno. Vea el apéndice D.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right] \\ \boxed{1} \qquad &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \end{aligned}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que consideramos x como constante cuando calculamos un límite cuando $h \to 0$, tenemos

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2, conjeturamos que

$$\boxed{2} \qquad \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Ahora, usaremos un argumento geométrico para probar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2(a) se muestra un sector de círculo con centro en O, ángulo central θ, y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián, tenemos arc $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB| \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$. Con base en el diagrama, vemos que

$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

Por lo tanto, $\qquad \operatorname{sen}\theta < \theta \qquad$ de modo que $\qquad \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$

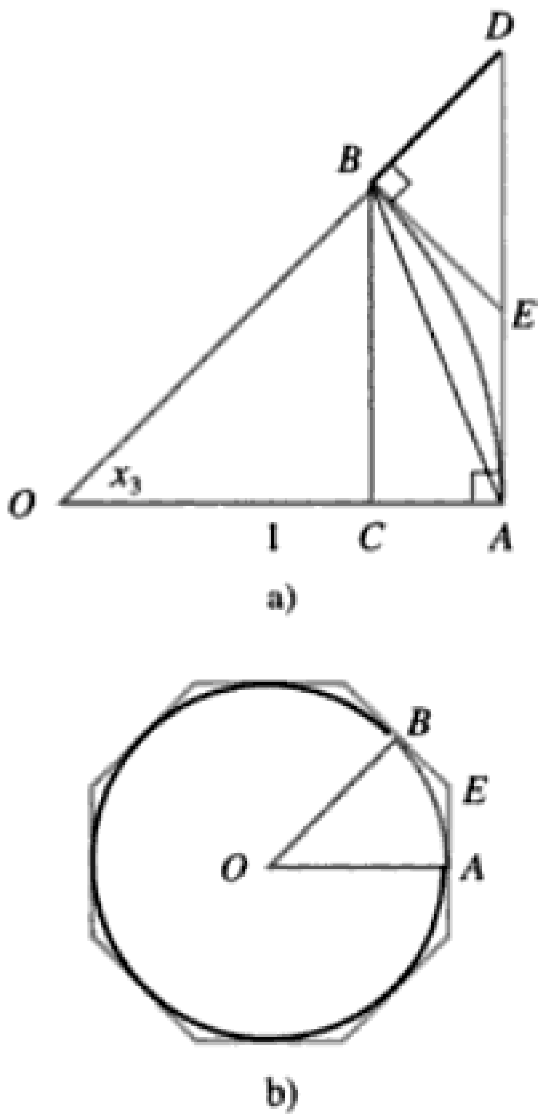


FIGURA 2

Supóngase que las tangentes en A y B se cruzan en E. Puede ver, con base en la figura 2(b) que la circunferencia de un círculo es menor que la longitud de un polígono circunscrito, de modo que arc $AB < |AE| + |EB|$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan\theta \\ &= \tan\theta \end{aligned}$$

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leqslant \tan\theta$ apartir de la definición de longitud sin recurrir intención geométrica que veremos aquí.) Así que

$$\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

de modo que
$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

Sabemos que $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$, por lo tanto, por el teorema de la compresión, tenemos

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una función par, de suerte que sus límites por la derecha y la izquierda deben ser iguales. De donde tenemos

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

de forma que hemos probado la ecuación 2.

□ Multiplicamos el numerador y el denominador por $\cos\theta + 1$ para poner la función en una forma en que podamos usar los límites que conocemos.

Podemos deducir el valor del límite restante en (1), como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1}\right] = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}\\
&= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1}\\
&= -1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)}
\end{aligned}$$

3
$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}$$

Si ahora ponemos los límites (2) y (3) en (1), obtenemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}\\
&= (\operatorname{sen}x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado la fórmula para la derivada de la función seno:

4
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x) = \cos x}$$

□ En la figura 3 se muestran las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Advierta que $y' = 0$ siempre que y tenga una tangente horizontal.

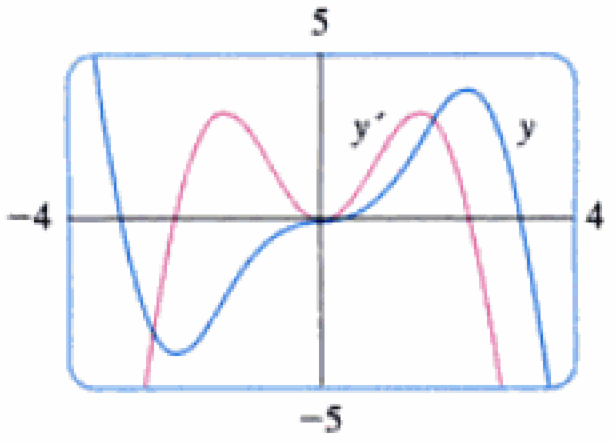


FIGURA 3

EJEMPLO 1 □ Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)\\ &= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x\end{aligned}$$ □

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, se puede probar (véase el Ejerc. 20) que

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

También se puede derivar la función tangente aplicando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

6 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

También es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véanse los Ejercs. 17-19). En la tabla que sigue, reunimos todas las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas:

□ Cuando memorice esta tabla, resulta útil notar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 □ Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una tangente horizontal?

SOLUCIÓN La regla del cociente da

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,[\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x]}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}
\end{aligned}
$$

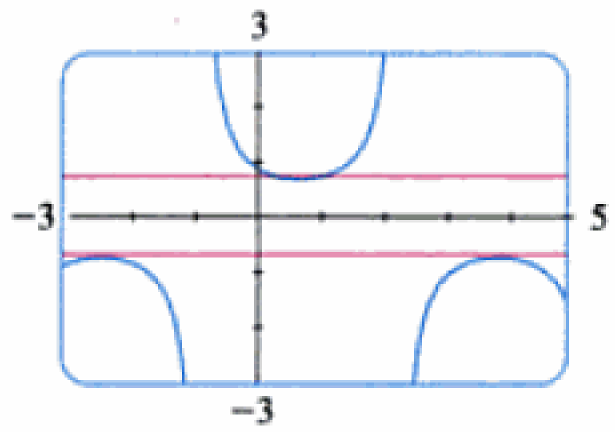


FIGURA 4
Las tangentes horizontales del ejemplo 2

Al simplificar la respuesta, hemos usado la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Como $\sec x$ nunca es 0, vemos que $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero. (Fig. 4.). □

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, las ondas, los movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica se describen con funciones trigonométricas.

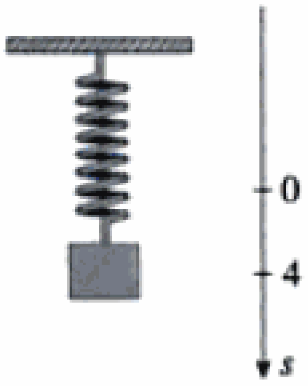


FIGURA 5

EJEMPLO 3 □ Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm más allá de su posición de reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la Fig. 5 y note que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

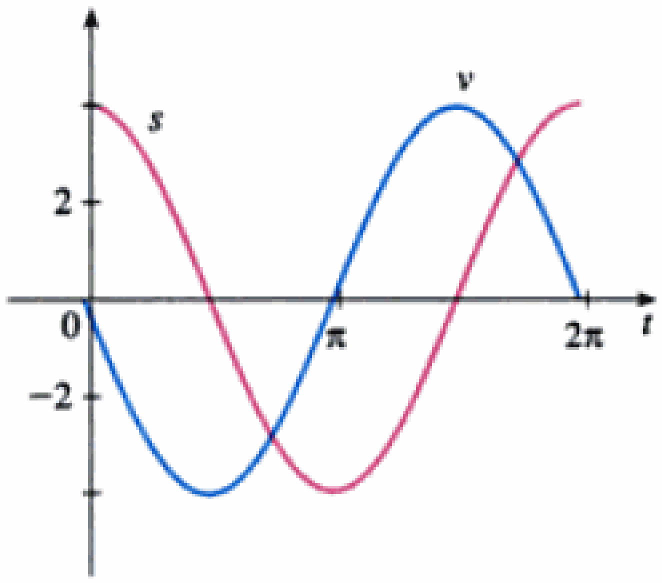


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de $\cos t$.

La rapidez (magnitud de la velocidad) es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$, es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$, esto es, en los puntos alto y bajo. (Fig. 6.) □

Nuestro uso primordial del límite de la ecuación 2 ha sido en la demostración de la fórmula de derivación de la función cero. Pero este límite tambien sirve para calcular otro límite trigonométrico como se ve ahora en el ejemplo.

EJEMPLO 4 □ Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

Note que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Para ampliar la ecuación 2 primero reescribimos la función multiplicando y dividiendo por 7,

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Observe que cuando $x \to 0$, tenemos que $7x \to 0$, con $\theta = 7x$, y, por lo tanto, por la ecuación 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = \lim_{7x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{7x} = 1$$

Del tal modo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$
$$= \frac{7}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$

□

EJEMPLO 5 □ Calcular $\lim_{x \to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN Aquí dividimos el numerador y el denominador por x:

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}$$
$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(por la continuidad de coseno y en la ecuación 2)}$$
$$= 1$$

□

3.4 Ejercicios

1–16 □ Encuentre

1. $f(x) = x - 3 \operatorname{sen} x$
2. $f(x) = x \operatorname{sen} x$
3. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$
4. $y = \cos x - 2 \tan x$
5. $g(t) = t^3 \cos t$
6. $g(t) = 4 \sec t + \tan t$
7. $h(\theta) = \csc \theta + e^{\theta} \cot \theta$
8. $y = e^x \operatorname{sen} x$
9. $y = \dfrac{\tan x}{x}$
10. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$
11. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$
12. $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
14. $y = \tan \theta (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$
15. $y = \csc x \cot x$
16. $y = x \operatorname{sen} x \cos x$
17. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$.
18. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.
19. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.
20. Aplique la definición de derivada y pruebe que si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 □ Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

21. $y = \tan x, \quad (\pi/4, 1)$
22. $y = 2 \operatorname{sen} x, \quad (\pi/6, 1)$
23. $y = x + \cos x, \quad (0, 1)$
24. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}, \quad (0, 1)$

25. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\cos x$ en el punto $(\pi, -\pi)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sec x - 2\cos x$ en el punto $(\pi/3, 1)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

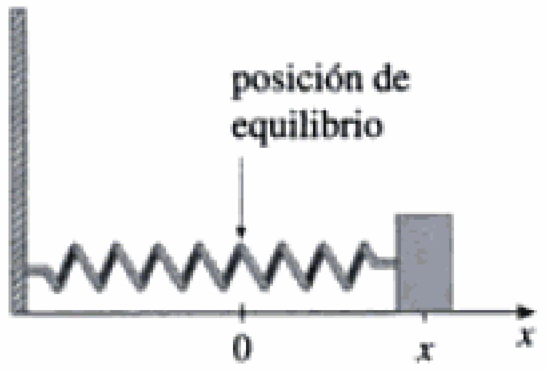
27. (a) Si $f(x) = 2x + \cot x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso a) razonables trazando las gráficas de f y f' para $0 < x < \pi$.

28. (a) Si $f(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable trazando las gráficas de f y f' para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

29. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de $f(x) = x + 2\operatorname{sen} x$ tiene una tangente horizontal?

30. Encuentre los puntos sobre la curva $y = (\cos x)/(2 + \operatorname{sen} x)$ en los cuales la tangente es horizontal.

31. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada. (Véase la Fig.) Su ecuación del movimiento es $x(t) = 8\operatorname{sen} t$, donde t está en segundos y x en centímetros.
(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) Halle la posición, la velocidad de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se mueve en ese instante?



32. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2\cos t + 3\operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tomemos la dirección positiva la correspondiente hacia abajo.)
(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) Grafique las funciones velocidad y posición.
(c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
(d) ¿Cuán lejos de su posición de equilibrio viaja la masa?
(e) ¿Cuándo es máxima la magnitud de la velocidad?

33. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada en una pared vertical. Sea q el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x con respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

34. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción.*
(a) Encuentre la razón de cambio de F con respecto a θ.
(b) ¿Cuándo es igual a 0 esta razón de cambio?
(c) Si $W = 50$ lb y $\mu = 0.6$, dibuje la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de esta última para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿Resulta coherente el valor con su respuesta al inciso (b)?

35–44 □ Halle el límite.

35. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5t}{t}$

36. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 8t}{\operatorname{sen} 9t}$

37. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos\theta)}{\sec\theta}$

38. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}$

39. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta}$

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{4x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot 2x}{\csc x}$

42. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos 2x}$

43. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta + \tan\theta}$

44. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2}$

45. Derive cada identidad trigonométrica para obtener una identidad nueva o conocida.

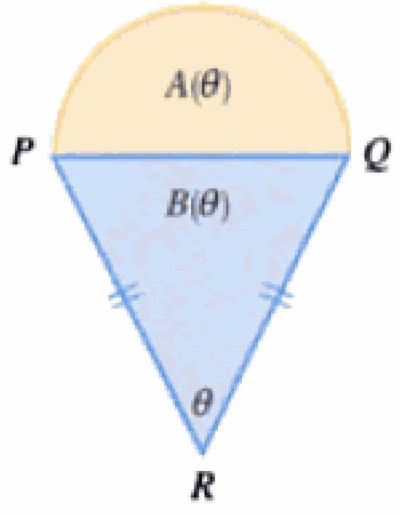
(a) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \cot x}{\csc x}$

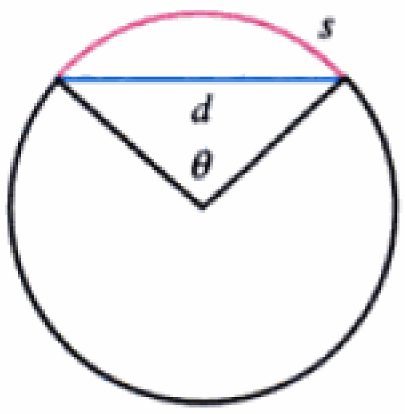
46. Un semicírculo con diámetro PQ descansa sobre un triángulo isósceles PQR para formar una región sombreada semejante a un sorbete, como se muestra en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ la del triángulo, halle

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



47. En la figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, los dos subtendidos por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



3.5 Regla de la cadena

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no lo capacitan para calcular $F'(x)$.

□ Vea la sección 1.3 para repasar el tema de funciones compuestas.

Observe que F es una función compuesta. Si hacemos $y = f(u) = \sqrt{u}$ y establecemos $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces podemos escribir $y = F(x) = f(g(x))$, es decir, $F = f \circ g$. Sabemos cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que nos diga cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Parece plausible, si interpretamos las derivadas como razones de cambio. Considere du/dx como la razón de cambio de u con respecto a x, dy/du como la razón de cambio de y en relación a u y dy/dx como la razón de cambio de y con respecto de x. Si u cambia el doble de rápido que x y y tres veces más rápido que u, entonces resulta razonable que y cambie seis veces más rápido que x y, por consiguiente, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Regla de la cadena Si tanto f como g son funciones derivables y $F = f \circ g$ es la función compuesta definida por $F(x) = f(g(x))$, entonces F es derivable y F' se expresa mediante el producto

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si tanto $y = f(u)$ como $u = g(x)$ son funciones derivables entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Comentario sobre la demostración de la regla de la cadena Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x, es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
\boxed{1} \qquad &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(Note que } \Delta u \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0 \text{ pues } g \text{ es continua.)} \\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

El único defecto de este razonamiento es que, en (1), podría suceder que $\Delta u = 0$ (incluso cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no podemos dividir entre 0. No obstante, este razonamiento por lo menos *sugiere* que la regla de la cadena es verdadera. Al final de la sección se da una demostración completa de la Regla de la Cadena. □

La regla de la cadena se puede escribir con apóstrofes

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque, si dy/du y du/dx fueran cocientes, entonces podríamos cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx como un cociente real.

EJEMPLO 1 □ Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (con la Ec. 2): al principio de esta sección, expresamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}
\end{aligned}
$$

SOLUCIÓN 2 (con la Ec. 3): si hacemos $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, entonces

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ □

Al utilizar la fórmula 3, debemos tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y con respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y respecto de u). Verbigracia, en el ejemplo 1 y se puede considerar como función de x $\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ y como función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Note que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{en tanto que} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA □ En la aplicación de la regla de la cadena, trabajamos del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *derivamos la función exterior f* [*en la función interior g*(*x*)] *y, a continuación, multiplicamos por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en la función}\\\text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\\text{en la función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la función}\\\text{interior}}}$$

EJEMPLO 2 □ Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, entonces la función exterior es la función seno y la interior es la función de elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{en la función}\\\text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la función}\\\text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{de la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la función}\\\text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

(b) Note que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado y la interior es la función seno. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\operatorname{sen}x)^2}_{\substack{\text{función}\\\text{interior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la función}\\\text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen}x)}_{\substack{\text{evaluada}\\\text{de la función}\\\text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de la función}\\\text{interior}}}$$

La respuesta se puede dejar como $2 \operatorname{sen} x \cos x$, o bien, escribirse como $\operatorname{sen} 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como la fórmula del ángulo doble). □

En el ejemplo 2(a), combinamos la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \operatorname{sen} u$, donde u es una función diferenciable de x, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u\frac{du}{dx}$$

De donde, $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De manera semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas se pueden combinar con la regla de la cadena.

Hagamos explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, entonces podemos escribir $y = f(u) = u^n$ donde $u = g(x)$. Si aplicamos la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Advierta que la derivada del ejemplo 1 pudo calcularse al tomar $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 □ Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si en (4), se toma $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ &= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 4 □ Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, volvemos a escribir f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$. De este modo

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) \\ &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 5 □ Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combinan la regla de la potencia, la de la cadena y la del cociente, obtenemos

$$\begin{aligned}g'(t) &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right) \\ &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}\end{aligned}$$ □

□ En la gráfica 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Advierta que y' es grande cuando y crece con rapidez y $y' = 0$ cuando y tiene una tangente horizontal. De modo que nuestra respuesta parece ser razonable.

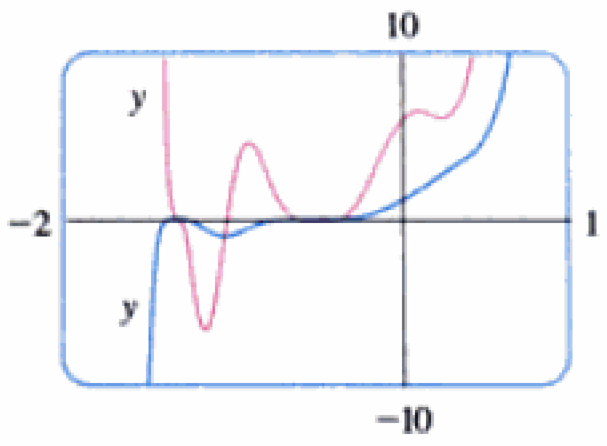


FIGURA 1

EJEMPLO 6 □ Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo debemos aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5 \\ &= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) \\ &\quad + (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1) \\ &= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2\end{aligned}$$

Si se usan los factores comunes, podríamos escribir la respuesta como $2(2x + 1)^4 (x^3 - x + 1)^3$ podemos factorizarlos y escribimos la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$ □

EJEMPLO 7 □ Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso, la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$ y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por lo tanto, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x} \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$ □

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con base $a > 0$. Recuerde, por la visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x} \frac{d}{dx}(\ln a)x \\ &= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a\end{aligned}$$

□ No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia donde x es la *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

porque $\ln a$ es una constante. Así entonces, tenemos la fórmula

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

En particular, si $a = 2$, obtenemos

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, dimos la estimación

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta (6), porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

En el ejemplo 6 de la sección 3.3, consideramos una población de células de bacterias que se duplica cada hora y vimos que la población después de t horas es $n = n_0 2^t$, donde n_0 es la población inicial. La fórmula 6 nos permite hallar la tasa de crecimiento de la población de bacterias:

$$\frac{dn}{dt} = n_0 2^t \ln 2$$

Queda clara la razón del nombre "regla de la cadena" cuando alargamos una cadena, agregando otro eslabón. Suponga que $y = f(u)$, $u = g(x)$, y $x = h(t)$, donde f, g y h son funciones diferenciables. Entonces, para calcular la derivada de y con respecto a t, aplicamos dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

EJEMPLO 8 □ Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x \end{aligned}$$

Advierta que la regla de la cadena se ha aplicado dos veces. □

EJEMPLO 9 □ Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función intermedia es la función secante y la función interior es la función triplicada.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta) \\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\frac{d}{d\theta}(3\theta) \\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta \end{aligned}$$

□

Cómo se demuestra la regla de la cadena

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, hemos definido el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

De acuerdo con la determinación de la derivada, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

De manera que si denotamos mediante ε la diferencia entre el cociente de diferencia y la derivada tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

De manera que para una función derivable f podemos escribir

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde } \varepsilon \to 0 \ \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

Esta propiedad de las funciones derivables es la que permite demostrar la regla de la cadena.

Demostración de la Regla de la Cadena Suponga que $u = g(x)$ es derivable en a y $y = f(u)$ es derivable en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento x y Δu y Δy y son los correspondientes incrementos en u y y, entonces podemos usar la ecuación 7 para escribir

$$\boxed{8} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De forma semejante

$$\boxed{9} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

Donde $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituimos la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtendremos.

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

de modo que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 muestra que $\Delta u \to 0$. Por lo tanto ambos $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Esto demuestra la regla de la cadena. □

3.5 Ejercicios

1–6 □ Escriba la función composición en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$.] Luego, encuentre la derivada dy/dx.

1. $y = (x^2 + 4x + 6)^5$ **2.** $y = \tan 3x$

3. $y = \cos(\tan x)$ **4.** $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \operatorname{sen}(e^x)$

7–42 □ Halle la derivada de la función.

7. $F(x) = (x^3 + 4x)^7$ **8.** $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$

9. $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$ **10.** $f(t) = \dfrac{1}{(t^2 - 2t - 5)^4}$

11. $h(t) = \left(t - \dfrac{1}{t}\right)^{3/2}$ **12.** $f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = e^{-mx}$

16. $y = 4 \sec 5x$

17. $G(x) = (3x - 2)^{10}(5x^2 - x + 1)^{12}$

18. $g(t) = (6t^2 + 5)^3(t^3 - 7)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = xe^{-x^2}$

22. $y = e^{-5x} \cos 3x$

23. $F(y) = \left(\dfrac{y - 6}{y + 7}\right)^3$

24. $s(t) = \sqrt[4]{\dfrac{t^3 + 1}{t^3 - 1}}$

25. $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2z - 1}}$

26. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{7 - 3x}}$

27. $y = \tan(\cos x)$

28. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

29. $y = 5^{-1/x}$

30. $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$

31. $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$

32. $y = \operatorname{sen}^2 (\cos kx)$

33. $y = (1 + \cos^2 x)^6$

34. $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

35. $y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^x}$

36. $y = e^{5 \operatorname{sen} \theta}$

37. $y = e^{x \cos x}$

38. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

39. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

40. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

41. $y = \operatorname{sen}\left(\tan \sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$

42. $y = 2^{3^{x^2}}$

43–46 □ Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

43. $y = \dfrac{8}{\sqrt{4 + 3x}}$, $(4, 2)$

44. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$, $(\pi/6, 1)$

45. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

46. $y = 10^x$, $(1, 10)$

47. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.

(b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

48. (a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ se conoce como **curva de nariz de bala.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, 1)$.

(b) Ilustre el inciso a) graficando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

49. (a) Si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}/x$, encuentre $f'(x)$.

(b) Compruebe que su respuesta al inciso a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

50. (a) Si $f(x) = 1/(\cos^2 \pi x + 9 \operatorname{sen}^2 \pi x)$, encuentre $f'(x)$.

(b) Verifique que su respuesta de la parte (a) resulta razonable al comparar las gráficas de f y f'.

51. Halle todos los puntos de la gráfica de la función $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ en los que la recta tangente es horizontal.

52. Halle las abcisas de todos los puntos de la curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$ en lo que la recta tangente es horizontal.

53. Suponga que $F(x) = f(g(x))$ y $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$, y $f'(6) = 7$. Halle $F'(3)$.

54. Suponga que $w = u \circ v$ y $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $u'(0) = 3$, $u'(2) = 4$, $v'(0) = 5$, y $v'(2) = 6$. Halle $w'(0)$.

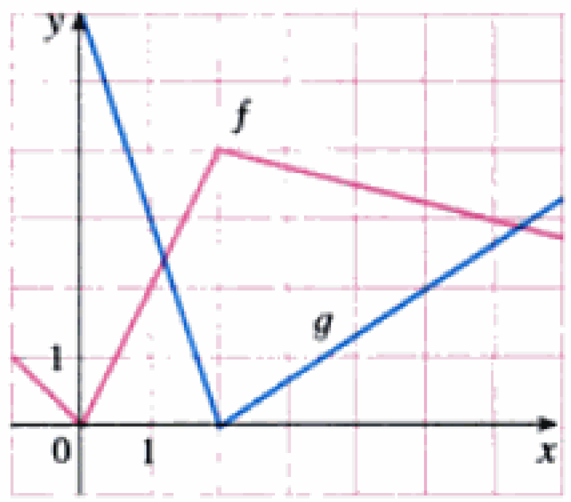
55. Se da una tabla de valores para f, g, f', y g' halle.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

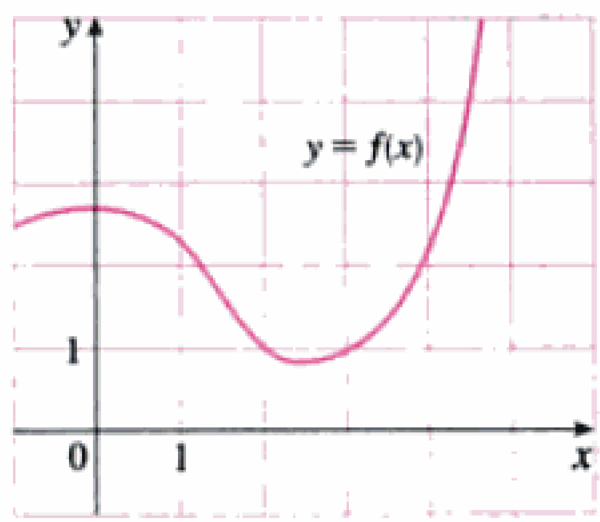
(a) Si $h(x) = f(g(x))$, halle $h'(1)$.
(b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

56. Sean f y g las funciones del ejercicios 5.5.
(a) Si $F(x) = f(f(x))$, halle $F'(2)$.
(b) Si $G(x) = g(g(x))$, halle $G'(3)$.

57. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sean $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre cada derivada, si la hay. Si no existe, explique por qué.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



58. Si f es la función cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Use la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



59. Utilice la tabla para estimar el valor de $h'(0.5)$, donde $h(x) = f(g(x))$.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	12.6	14.8	18.4	23.0	25.9	27.5	29.1
$g(x)$	0.58	0.40	0.37	0.26	0.17	0.10	0.05

60. Si $g(x) = f(f(x))$, use la tabla para estimar el valor de $g'(1)$.

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	1.7	1.8	2.0	2.4	3.1	4.4

61. Suponga que f es diferenciable en $\mathbb{R}$. Sean $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

62. Suponga que f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sean $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

63. El desplazamiento de una partícula en una cuerda que vibra lo representa la ecuación

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$$

donde s se mide en centrímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula después de t segundos.

64. Si $s = A\cos(\omega t + \delta)$, exprese la ecuación del movimiento de una partícula, se dice que esa partícula describe un *movimiento armónico simple*.

(a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
(b) ¿Cuándo la velocidad es 0?

65. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es la Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0 y su brillantez cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t, donde éste se mide en días, se ha modelado por la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35\operatorname{sen}(2\pi t/5.4)$$

(a) Halle la razón de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Encuentre, correcta hasta dos decimales, la razón de cambio del aumento después de un día.

66. En el ejemplo 4 de la sección 1.3 se llegó a un modelo para la duración de la luz del día (en horas) en la ciudad de Filadelfia el día t del año.

$$L(t) = 12 + 2.8\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Use este modelo para comparar cómo aumenta el número de horas de luz del día en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

67. El movimiento de un resorte sujeto a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como es el amortiguador de un automóvil) suele modelarse con el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto de este resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\operatorname{sen}2\pi t$$

Donde s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad a los t segundos y grafique tanto la función de posición como la función velocidad. $0 \leq t \leq 2$.

68. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la Sec. 9.5 veremos que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]

(a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.
(b) Halle la velocidad de esparcimiento del rumor.
(c) Grafique p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$ con t en horas. Use la gráfica para estimar cuánto tiempo transcurrirá para que el 80% de la población escuche el rumor.

69. El *flash* (unidad de destello) de una cámara opera por el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se lanza el destello. Los datos siguientes describen la carga que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos).

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

(a) Use una calculadora graficadora o computadora para encontrar un modelo exponencial para la carga. (Vea la sección 1.2.)
(b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara de destello. Con el resultado del inciso a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2 de la sección 2.1.

70. En la tabla se da la población estadounidense, desde 1790 hasta 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3,929,000	1830	12,861,000
1800	5,308,000	1840	17,063,000
1810	7,240,000	1850	23,192,000
1820	9,639,000	1860	31,443,000

(a) Por medio de un calculadora graficadora o una computadora, ajuste una función exponencial a los datos. Sitúe los puntos dato en una gráfica y grafique el modelo exponencial correspondiente. ¿Cuán bueno es el ajuste?

(b) Estime las tasas de crecimiento de la población en 1800 y 1850, promediando las pendientes de rectas secantes.
(c) Use el modelo exponencial del inciso a) para estimar las tasas de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso b).
(d) Utilice el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38,588,000. ¿Puede explicar la discrepancia?

SAC **71.** Los sistemas algebraicos para computadora (SAC) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga, como consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.
(a) Use un SAC para hallar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Enseguida, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.
(b) Utilice un SAC para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las tangentes horizontales

SAC **72.** (a) Use un SAC para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.
(b) ¿En dónde la gráfica tiene tangentes horizontales?
(c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso a)?

73. Use la regla de la cadena para demostrar lo siguiente;
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

74. Use la regla de la cadena y la regla del producto para dar otra demostración de la regla del cociente.
[*Sugerencia:* Escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

75. (a) Si n es un entero positivo, pruebe que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

(b) Encuentre una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que sea semejante a la del inciso a).

76. Suponga que $y = f(x)$ s una curva simpre situada por arriba del eje de las abcisas y que en ningún punto tiene una tangente horizontal, siendo f derivable en todo punto. ¿Para qué valor de y, la razón de cambio de y^5 con respecto a x veces mayor que la razón de cambio de y con respecto a x?

77. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, entonces

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da una razón para la convención de que siempre se use radios cuando se manejen funciones trigonométricas en el cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usáramos grandes.)

78. (a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y aplique la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde no es diferenciable f?
(c) Si $g(x) = \operatorname{sen}|x|$, halle $g'(x)$ y grafique g y g'. ¿En dónde no es diferenciable g?

3.6 Derivación implícita

Las funciones que hemos encontrado hasta ahora se pueden describir expresando una variable explícitamente en términos de otra variable; por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

o

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de ese tipo para y como una función (o varias funciones) explícita(s) de x. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación 1 para y, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, de modo que dos funciones determinadas por la ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son los semicírculos superior e inferior del círculo $x^2 + y^2 = 25$ (véase la figura 1).

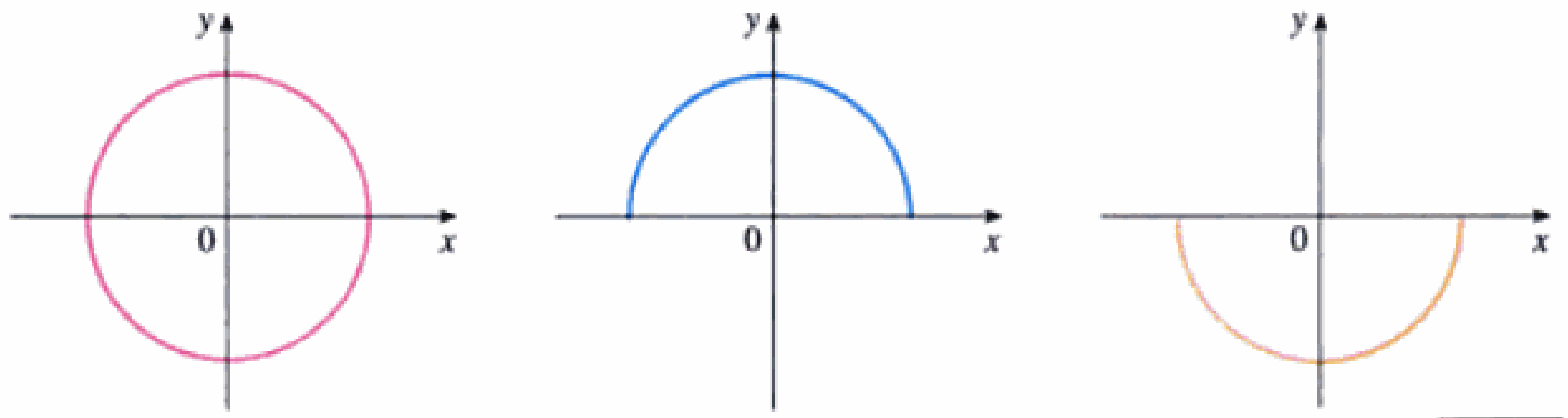


FIGURA 1

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil resolver a mano la ecuación 2 para y explícitamente como función de x. (Con un sistema algebraico para computadora no hay dificultad, pero las expresiones que se obtienen son muy complicadas.) Pero (2) es la ecuación de una curva llamada **folio de Descartes**, (Fig. 2) y, de manera implícita, define y como varias funciones de x. En la figura 3 se muestran las gráficas de tres de esas funciones. Cuando decimos que f es una función definida implícitamente por la ecuación 2, queremos dar a entender que la ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f.

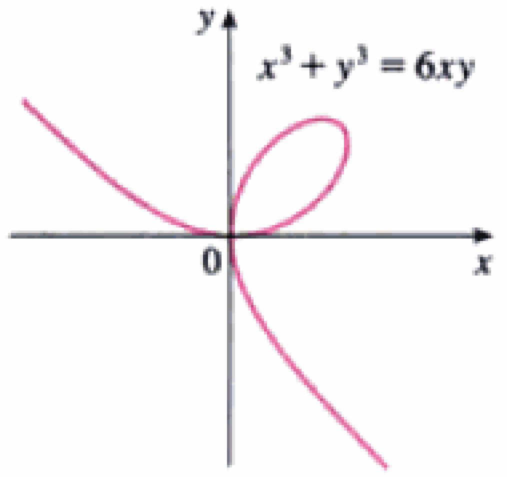


FIGURA 2
Folio de Descartes

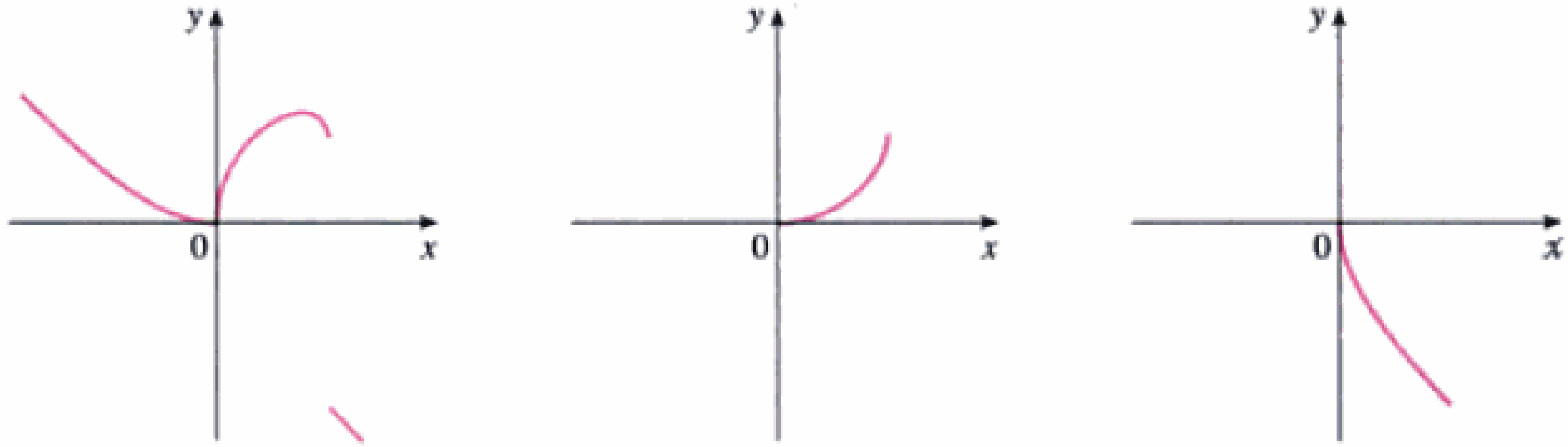


FIGURA 3
Gráficas de tres funciones definidas por el folio de Descartes

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para conocer y en términos de x con el fin de hallar la derivada de y. En lugar de ello, podemos aplicar el método de **derivación implícita**. Éste consiste en derivar ambos miembros de la ecuación con respecto a x y, a continuación, resolver la ecuación resultante en y'. En los ejemplos y ejercicios de esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente como una función diferenciable de x, de modo que puede aplicarse el método de derivación implícita.

EJEMPLO 1 □

(a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encuentre la ecuación de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, 4).

SOLUCIÓN 1

(a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, aplique la regla de la cadena y tendrá

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto,
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora, resolvemos esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) En el punto (3, 4) tenemos $x = 3$ y $y = 4$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto, una ecuación de la tangente al círculo en (3, 4) es

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

(b) Al resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto (3, 4) se encuentra en el semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y, por consiguiente, consideramos la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Al derivar f por la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

Luego
$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

y, como en la solución 1, la ecuación de la tangente es $3x + 4y = 25$ □

NOTA 1 □ En el ejemplo 1 se ilustra que, incluso cuando es posible resolver una ecuación de manera explícita para y en términos de x, puede ser más fácil aplicar la derivación implícita.

NOTA 2 □ La expresión $dy/dx = -x/y$ da la derivada en términos tanto de x como de y. Esto es correcto sin importar cuál función y queda determinada por la ecuación dada. Por ejemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

en tanto que para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EJEMPLO 2 □

(a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.
(b) Halle la tangente al folio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ en el punto (3, 3).
(c) ¿En cuáles puntos de la curva se tiene que la recta tangente es horizontal o vertical?

SOLUCIÓN

(a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ con respecto a x, considerando y como función x y usando la regla de la cadena en el término y^3 y la regla del producto en el término $6xy$, obtenemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$$

o

$$x^2 + y^2y' = 2y + 2xy'$$

Ahora despejamos y':

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

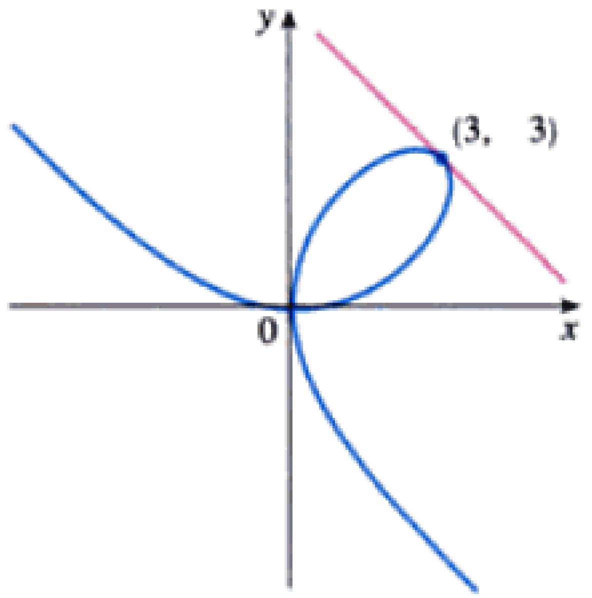


FIGURA 4

(b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

y un vistazo a la figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en (3, 3). De este modo, una ecuación de la recta tangente al folio en (3, 3) es

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{o} \qquad x + y = 6$$

(c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Si se utiliza la expresión para y' del inciso a), vemos que $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$. Al sustituir $y = \frac{1}{2}x^2$ en la ecuación de la curva, obtenemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

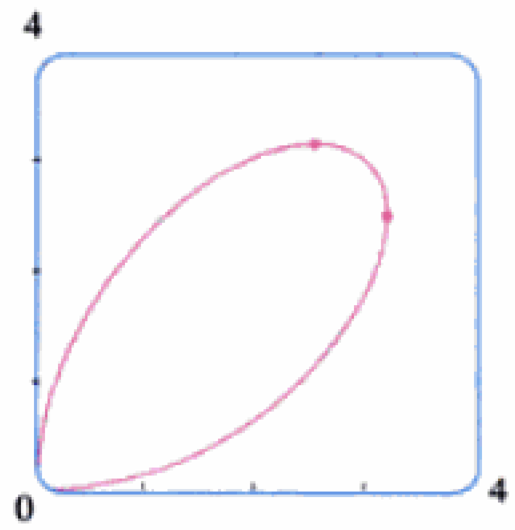


FIGURA 5

lo cual se simplifica para quedar $x^6 = 16x^3$. De modo que $x = 0$ o bien $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, entonces $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Por lo tanto, la tangente es horizontal en (0, 0) y en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, lo cual es aproximadamente (2.5198, 3.1748). Al estudiar la figura 5, vemos que nuestra respuesta es razonable.

La recta tangente es vertical cuando el denominador en la expresión para dy/dx es 0. Otro método es observar que la ecuación de la curva no cambia cuando se intercambian x y y, de modo que la curva es simétrica respecto a la recta $y = x$. Esto significa que las tangentes horizontales en (0, 0) y $(2^{4/3}, 2^{5/3})$ corresponden a tangentes verticales en (0, 0) y $(2^{5/3}, 2^{4/3})$. (Véase Figura 5.) □

NOTA □ Existe una fórmula para las tres raíces de una ecuación cúbica, que es semejante a la fórmula cuadrática pero mucho más complicada. Si usamos esta fórmula (o un SAC) para resolver la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$ para y en términos de x, obtenemos tres funciones determinadas por la ecuación:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

□ El matemático noruego Niels Abel probó en 1824 que no se puede dar una fórmula general para las raíces de una ecuación de quinto grado. Más tarde, el matemático francés Evariste Galois probó que es imposible hallar una fórmula general para las raíces de una ecuación de n-ésimo grado (en términos de operaciones algebraicas sobre los coeficientes), si n es cualquier entero mayor que 4.

y

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Éstas son las tres funciones cuyas gráficas se muestran en la Fig. 3.) Usted puede ver que el método de la derivación implícita ahorra una cantidad enorme de trabajo, en casos como éste. Es más, la derivación implícita funciona con igual facilidad para funciones como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

Para las cuales es *imposible* expresar y en términos de x.

EJEMPLO 3 □ Encuentre y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Si deriva implícitamente con respecto a x y recuerde que y es una función x, obtiene

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = 2yy' \cos x + y^2(-\operatorname{sen} x)$$

(Note que en el primer miembro aplicamos la regla de la cadena y, en el segundo, la regla de la cadena y la del producto.) Si agrupamos los términos que contienen y', obtenemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Por lo que
$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

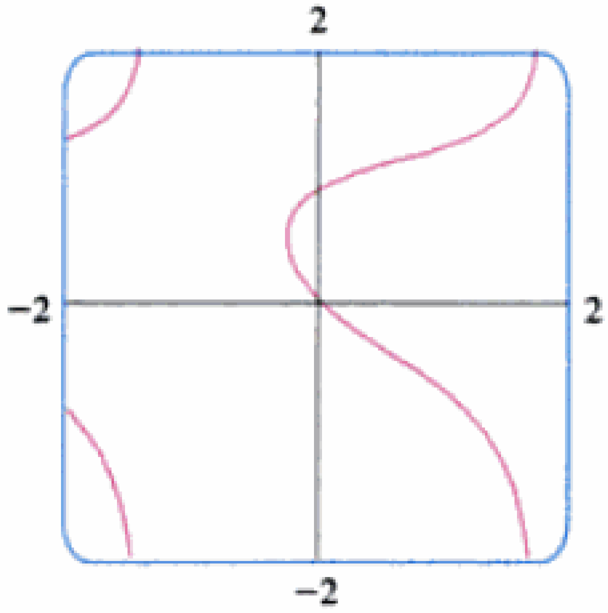


FIGURA 6

En la figura 6 —dibujada con el comando de construir gráficas en forma implícita de un SAC—, se muestra parte de la curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como comprobación de nuestro cálculo, advierta que $y' = -1$ cuando $x = y = 0$ y en la gráfica parece que la pendiente es alrededor de -1 en el origen. □

Se dice que dos curvas son **ortogonales** si en cada punto de intersección sus rectas tangentes son perpendiculares. En el ejemplo que sigue, aplicamos la derivación implícita para demostrar que dos familias de curvas son **trayectorias ortogonales** una de la otra; es decir, cada curva de una de las familias es ortogonal a cada una de las curvas de la otra familia. En varias áreas de la física surgen las familias ortogonales. Por ejemplo, en un campo electrostático las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. En termodinámica, las isotermas (curvas de temperatura igual) son ortogonales a las líneas de flujo del calor. En aerodinámica, las líneas de corriente (curvas de dirección del flujo de aire) son las trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales de las velocidades.

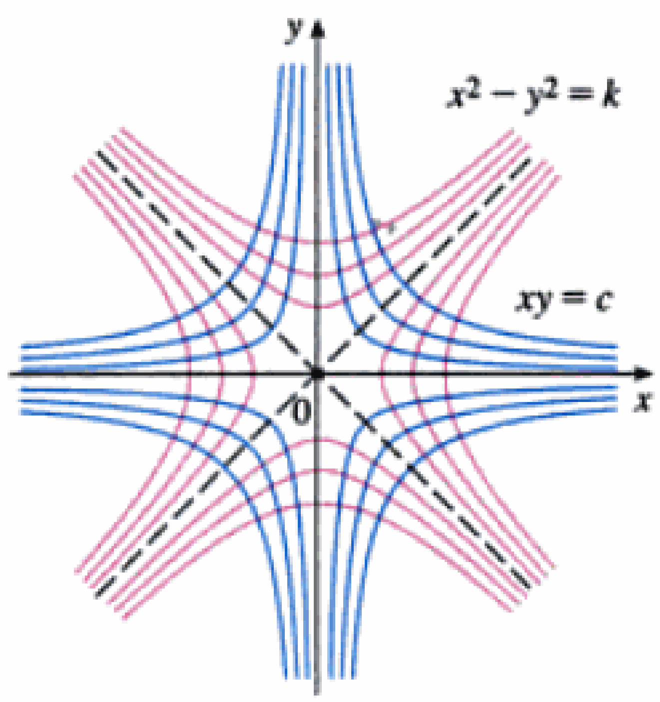


FIGURA 7

EJEMPLO 4 □ La ecuación

$$\boxed{3} \qquad xy = c \qquad c \neq 0$$

representa una familia de hipérbolas. (Los diferentes valores de la constante c dan hipérbolas diferentes. Véase la Fig. 7.) La ecuación

$$\boxed{4} \qquad x^2 - y^2 = k \qquad k \neq 0$$

representa otra familia de hipérbolas con asíntotas $y = \pm x$. Demuestre que cada curva de la familia (3) es ortogonal a cada curva de la familia (4); esto es, las familias son trayectorias ortogonales entre sí.

SOLUCIÓN La derivación de la ecuación 3 da

$$\boxed{5} \qquad y + x\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{de modo que} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

La derivación implícita de la ecuación 4 da

$$\boxed{6} \qquad 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{por lo que} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Con base en (5) y (6) vemos que, en cualquier punto de intersección de las curvas de cada familia, las pendientes de las tangentes son recíprocas negativas una de la otra. Por lo tanto, las curvas intersecan a ángulos rectos. □

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

□ En el apéndice D se repasan las funciones trigonométricas inversas.

Podemos utilizar la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Recuerde que

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \qquad \text{significa que} \qquad \operatorname{sen} y = x \qquad \text{y} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Si se deriva $\operatorname{sen} y = x$ implícitamente con respecto a x, se obtiene

$$\cos y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora bien $\cos y \geqslant 0$, ya que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

□ La figura 8 muestra la gráfica de $f(x) = \tan^{-1}x$ y su derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Note que f aumenta y $f'(x)$ siempre es positiva. El hecho de que $\tan^{-1}x \to \pm\pi/2$ sea $x \to \pm\infty$ se refleja en que $f'(x) \to 0$ sea $x \to \pm\infty$.

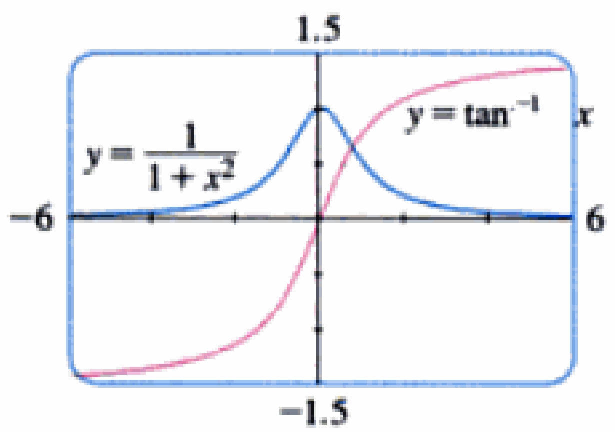


FIGURA 8

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semejante. Si $y = \tan^{-1}x$, entonces $\tan y = x$. Si se deriva esta última ecuación implícitamente con respecto a x, tenemos

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

EJEMPLO 5 □ Derive (a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$ y (b) $f(x) = x\tan^{-1}\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

(b)
$$f'(x) = \tan^{-1}\sqrt{x} + x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)$$
$$= \tan^{-1}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$ □

Las funciones trigonométricas inversas más utilizadas son las que discutimos anteriormente. Las derivadas de las cuatro restantes se dan en la tabla que sigue. Las demostraciones de estas fórmulas se dejan como ejercicio.

□ Las fórmulas para las derivadas de $\csc^{-1}x$ y $\sec^{-1}x$ dependen de las definiciones que se usen para estas funciones. Vea el ejercicio 54.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

3.6 Ejercicios

1–4 □

(a) Encuentre y' por derivación implícita.

(b) Resuelva la ecuación en forma explícita para y y derive para obtener y' en términos de x.

(c) Compruebe que sus soluciones para los incisos (a) y (b) son consistentes, sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

2. $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

5–20 □ Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^2 + y^2 = 1$

6. $x^2 - y^2 = 1$

7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$

8. $x^2 - 2xy + y^3 = c$

9. $x^2y + xy^2 = 3x$

10. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $\dfrac{y}{x-y} = x^2 + 1$

12. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$

13. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

14. $\sqrt{1 + x^2y^2} = 2xy$

15. $4\cos x \operatorname{sen} y = 1$

16. $x \operatorname{sen} y + \cos 2y = \cos y$

17. $\cos(x - y) = xe^x$

18. $x\cos y + y\cos x = 1$

19. $xy = \cot(xy)$

20. $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

21. Si $x[f(x)]^3 + xf(x) = 6$ y $f(3) = 1$, halle $f'(3)$.

22. Si $[g(x)]^2 + 12x = x^2g(x)$ y $g(4) = 12$, halle $g'(4)$.

23–24 □ Considere y como la variable independiente y x como la variable dependiente y utilice la derivación implícita para hallar dx/dy.

23. $y^4 + x^2y^2 + yx^4 = y + 1$

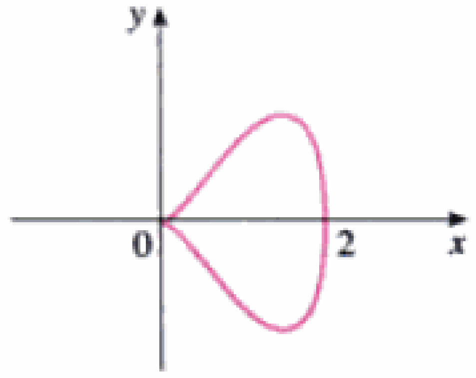
24. $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$

25–30 □ Halle una ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto dado.

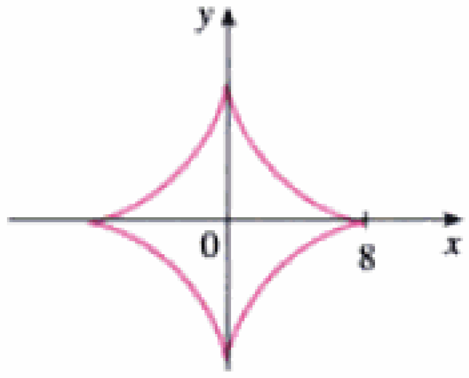
25. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad \left(-5, \frac{9}{4}\right)$ (hipérbola)

26. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1, \quad \left(-1, 4\sqrt{2}\right)$ (elipse)

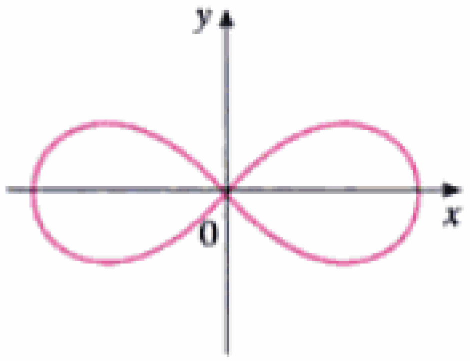
27. $y^2 = x^3(2 - x)$
$(1, 1)$
(piriforme)



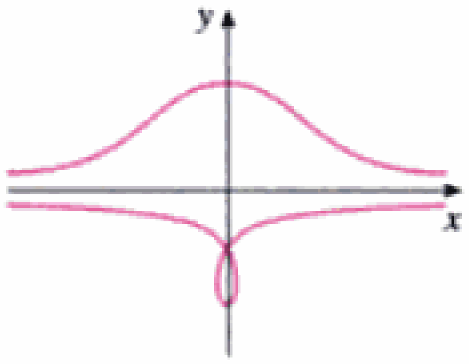
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$\left(-3\sqrt{3}, 1\right)$
(astroide)



29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



30. $x^2y^2 = (y + 1)^2(4 - y^2)$
$(0, -2)$
(concoide de Nicómedes)



31. (a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama **kampila de Eudoxo**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, 2)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la recta tangente en una pantalla común. (Si su aparato graficador puede trazar las gráficas de curvas definidas implícitamente, entonces utilice esa capacidad. Si no es así, puede graficar esta curva trazando sus mitades superior e inferior por separado.)

32. (a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, -2)$.
(b) ¿En cuáles puntos esta curva tiene una tangente horizontal?
(c) Ilustre los incisos (a) y (b) graficando la curva y las rectas tangentes en una pantalla común.

33. Se pueden crear formas caprichosas con las capacidades de construir gráficas en forma implícita de los sistemas algebraicos para computadora (SAC).
(a) Trace la gráfica de la curva con ecuación

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

¿En cuántos puntos esta curva tiene tangentes horizontales? Estime las coordenadas x de estos puntos.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(0, 1)$ y $(0, 2)$.
(c) Halle las coordenadas x exactas de los puntos mencionados en el inciso (a).
(d) Cree curvas incluso más caprichosas modificando la ecuación del inciso (a).

34. (a) La curva con ecuación

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

se ha ligado a un carretón que rebota. Utilice un SAC para graficarla y descubra por qué.
(b) ¿En cuántos puntos tiene tangentes horizontales esta curva? Encuentre las coordenadas x de estos puntos.

35. Halle los puntos de la lemniscata del ejercicio 29 donde la tangente sea horizontal.

36. Demuestre por derivación implícita que la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

37. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0).

38. Determine que la suma de la ordenada al origen y la abcisa al origen, de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ es igual a c.

39. Demuestre, empleando la derivación implícita, que cualquier recta tangente a un círculo, con centro O, en el punto P, es perpendicular al radio OP.

40. La regla de la potencia se puede demostrar utilizando la derivación implícita cuando n es un número racional, $n = p/q$, y si de antemano se supone que $y = f(x) = x^n$ es derivable. Si $y = x^{p/q}$, entonces $y^q = x^p$. Utilice la derivación implícita para demostrar que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

41–50 □ Halle la derivada de la función. Simplifique donde se pueda.

41. $y = \operatorname{sen}^{-1}(x^2)$

42. $y = (\operatorname{sen}^{-1} x)^2$

43. $y = \tan^{-1}(e^x)$

44. $h(x) = \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arcsen} x$

45. $H(x) = (1 + x^2) \arctan x$

46. $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

47. $g(t) = \operatorname{sen}^{-1}(4/t)$

48. $y = x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2}$

49. $y = x^2 \cot^{-1}(3x)$

50. $y = \arctan(\cos \theta)$

51–52 □ Encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

51. $f(x) = e^x - x^2 \arctan x$

52. $f(x) = x \operatorname{arcsen}(1 - x^2)$

53. Demuestre la fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ con el mismo método que el de $(\text{sen}^{-1}/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

54. (a) Una manera de definir $\sec^{-1}x$ es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leq y < \pi/2$ o bien, $\pi \leq y < 3\pi/2$. Demuestre que, si se emplea esta definición, entonces

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Otra manera de definir $\sec^{-1}x$ que se emplea algunas veces es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq 0$. Demuestre que si se utiliza esta definición, entonces

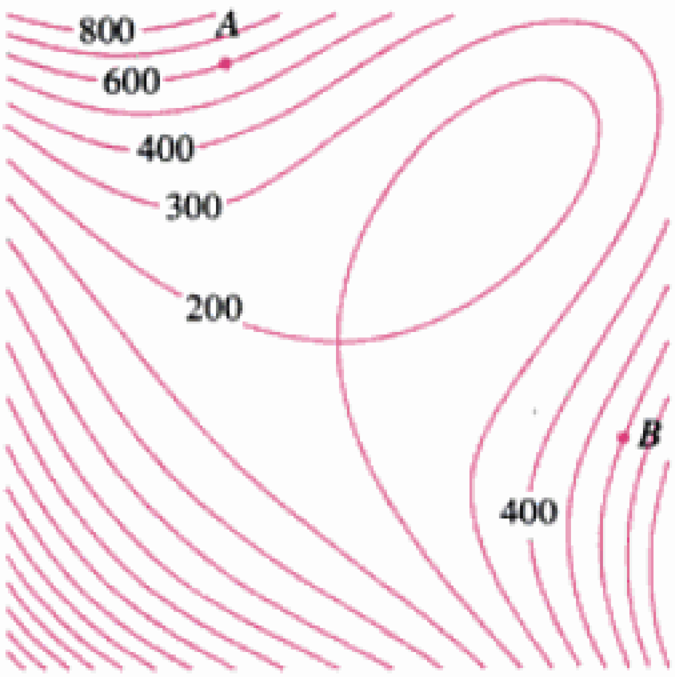
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

55–56 □ Demuestre que las curvas dadas son ortogonales.

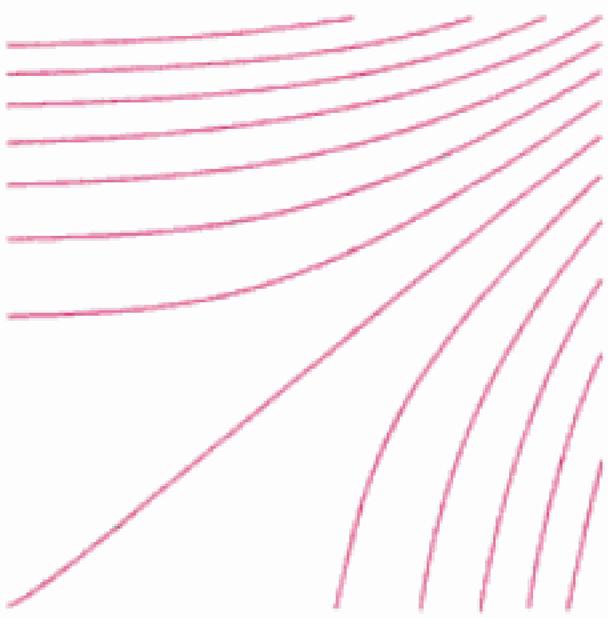
55. $2x^2 + y^2 = 3, \quad x = y^2$

56. $x^2 - y^2 = 5, \quad 4x^2 + 9y^2 = 72$

57. Las curvas de nivel en un mapa de una región montañosa son curvas que unen puntos con la misma elevación. Una pelota que ruede hacia abajo de una colina sigue una curva del descenso más pronunciado, la cual es ortogonal a las curvas de nivel. Dado el mapa de curvas de nivel de una colina que se muestra en la figura, grafique las trayectorias de las pelotas que partan de las posiciones A y B.



58. A menudo, los meteorólogos que aparecen en la TV presentan mapas en que se muestran frentes de presión. En esos mapas se exhiben las *isobaras:* curvas a lo largo de las cuales la presión del aire es constante. Considere la familia de isobaras de la figura. Trace las gráficas de varios miembros de la familia de trayectorias ortogonales de las isobaras. Dado que el viento sopla de las regiones de alta presión del aire hacia las de baja presión, indique qué representa la familia ortogonal.



59–62 □ Demuestre que las familias dadas de curvas son trayectorias ortogonales entre sí. Grafique ambas familias de curvas usando los mismos ejes de coordenadas.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

63. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa una "elipse girada"; es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en que esta elipse cruza el eje x y demuestre que las rectas tangentes en estos puntos son paralelas.

64. (a) ¿Dónde la recta normal a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ en el punto $(-1, 1)$ la cruza por segunda vez?

(b) Ilustre el inciso (a) graficando la elipse y la recta normal.

65. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

66. Halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasen por el punto $(12, 3)$.

67. (a) Suponga que f es una función diferenciable biunívoca y que su función inversa f^{-1} también es diferenciable. Utilice la derivación implícita para demostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el denominador no sea 0.

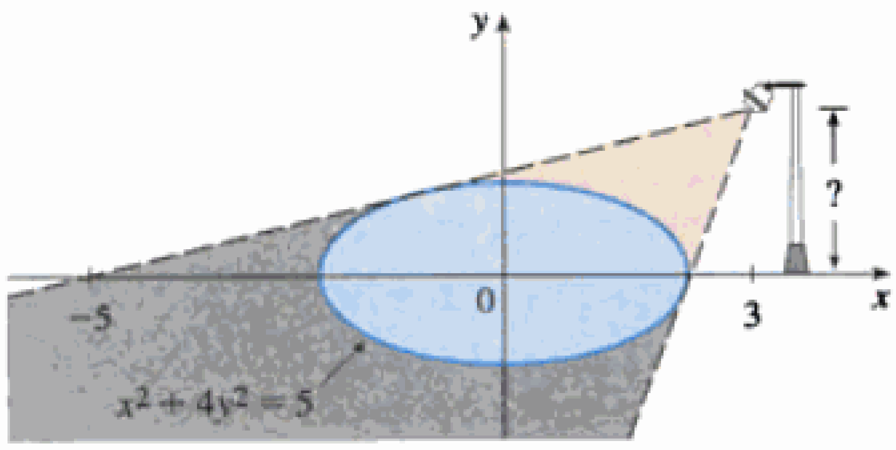
(b) Si $f(4) = 5$ y $f'(4) = \frac{2}{3}$, halle $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Demuestre que $f(x) = 2x + \cos x$ es biunívoca.

(b) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(1)$?

(c) Use la fórmula del ejercicio 6.47a) para hallar $(f^{-1})'(1)$.

69. En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿cuán arriba del eje x está la lámpara?



3.7 Derivadas de orden superior

Si f es una función derivable, su derivada f' también es una función, así que f' puede tener una derivada por derecho propio. Dicha derivada se representa como $(f')' = f''$. Esta nueva función, f'' se llama segunda derivada de f, por ser la derivada de f; usando la notación de Leibniz escribimos la segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Otra notación es $f''(x) = D^2f(x)$.

EJEMPLO 1 □ Si $f(x) = x \cos x$, halle e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN Por la regla del producto tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x) \\ &= -x \operatorname{sen} x + \cos x \end{aligned}$$

Para obtener $f''(x)$ derivamos $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(-x \operatorname{sen} x + \cos x) \\ &= -x\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x\frac{d}{dx}(-x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= -x\cos x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \\ &= -x\cos x - 2\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

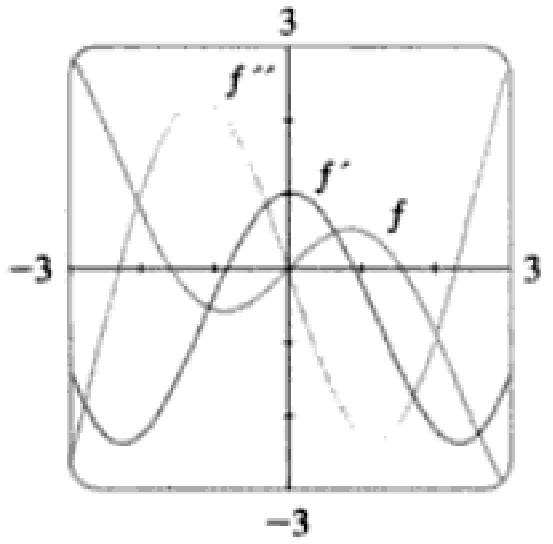


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = x \cos x$ y su primera y segunda derivadas.

Las gráficas de f, f', y f'' se muestran en la figura 1.

Podemos interpretar $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observese en la figura 1 que $f''(x) = 0$ siempre que $y = f'(x)$ tiene una tangente positiva y es negativa cuando, $f''(x)$ tiene pendiente negativa $y = f'(x)$. Así pues, las gráficas nos sirven para verificar nuestros cálculos. □

En general, podemos interpretar una segunda derivada como la razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más famoso de esto es la *aceleración* que definiremos como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función de posición de un objeto que se mueve en línea recta, sabemos que su primera derivada presenta la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

La razón instantánea de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. Así, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, por tanto, es la segunda derivada de la función de posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la anotación de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

EJEMPLO 2 □ La posición de una partícula está por la ecuación

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

(a) Halle la aceleración en el instante t. ¿Qué valor tiene la aceleración a los 4 segundos?

(b) Grafique la posición, la velocidad y la aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.

(c) ¿Cuándo va aumentando la rapidez de la partícula? ¿Cuándo va perdiendo rapidez?

SOLUCIÓN

(a) La función de velocidad es la derivada de la función de posición:

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

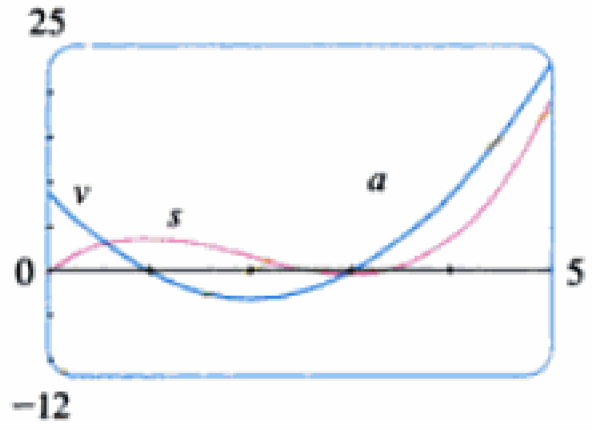


FIGURA 2

(b) La figura 2, muestra las gráficas de s, v, y a.

(c) La partícula gana rapidez cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son ambas negativas). Dicho de otro modo, la partícula aumenta su rapidez cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo. (La partícula es empujada en la dirección en que ya se mueve). En la figura 2 vemos que esto ocurre cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula pierde rapidez cuando v y a son de signos contrarios, es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 3 representa un resumen del movimiento de la partícula.

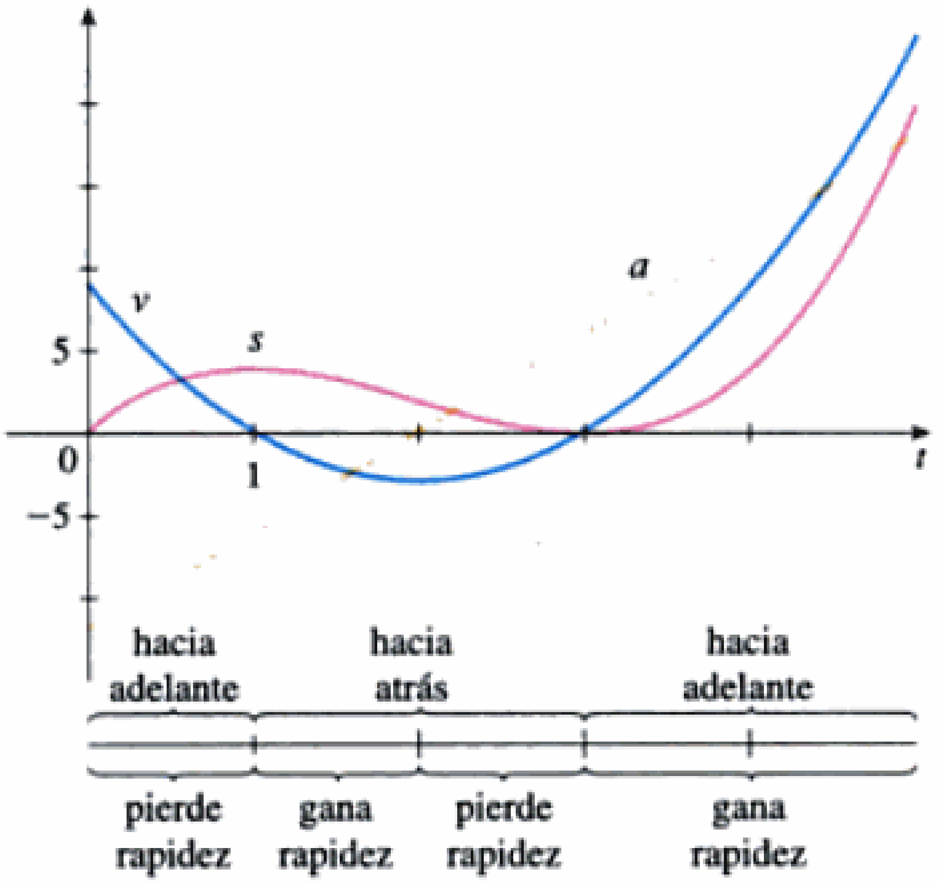


FIGURA 3

□

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De modo que $f'''(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$, o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, las siguientes son alternativas para denotar la tercera derivada.

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = D^3f(x)$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' suele denotarse $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota con $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces la función f. Si $y = f(x)$, escribimos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = D^nf(x)$$

Se puede interpretar la tercera derivada físicamente en el caso de que la función sea la función de posición de un objeto, $s = s(t)$ en movimiento sobre una línea recta. Dado que $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función de posición es la derivada de la función aceleración y se llama tirón (en inglés, **jerk**):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Así, tirón es la razón de cambio de la aceleración. El nombre es apropiado porque un valor grande de tirón significa un cambio súbito en la aceleración, que causa un movimiento abrupto en un vehículo.

EJEMPLO 3 □ Si
$$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$$
entonces
$$y' = 3x^2 - 12x - 5$$
$$y'' = 6x - 12$$
$$y''' = 6$$
$$y^{(4)} = 0$$
y, de hecho, $y^{(n)} = 0$ para todo $n \geqslant 4$. □

EJEMPLO 4 □ Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, determine $f^{(n)}(x)$.

SOLUCIÓN
$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$
$$f''(x) = (-2)(-1)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$f'''(x) = -3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{-4}$$
$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{-5}$$
$$f^{(5)}(x) = -5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{-6} = -5!x^{-6}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot x^{-(n+1)}$$

□ El factor $(-1)^n$ de la fórmula $f^{(n)}(x)$ lo origina cada derivación. Los valores sucesivos de $(-1)^n$ son $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$, cuando n vale 1, 2, 3, … $(-1)^n$ indica el cambio de signo.

o sea $$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

En este caso hemos empleado el símbolo factorial n para representar el producto de los primeros n enteros positivos.

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}$$

□

El ejemplo que sigue se muestra cómo encontrar la segunda derivada de una función definida implícitamente.

□ La figura 4 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del ejemplo 5. Observe que es una versión del círculo $x^2 + y^2 = 4$, estirado y aplanado. Por este motivo se le llama en ocasiones "círculo gordo". En la izquierda comienza con mucha pendiente, pero se aplana con rapidez. Esto se aprecia con la expresión $y' = -x^3/y^3 = -(x/y)^3$

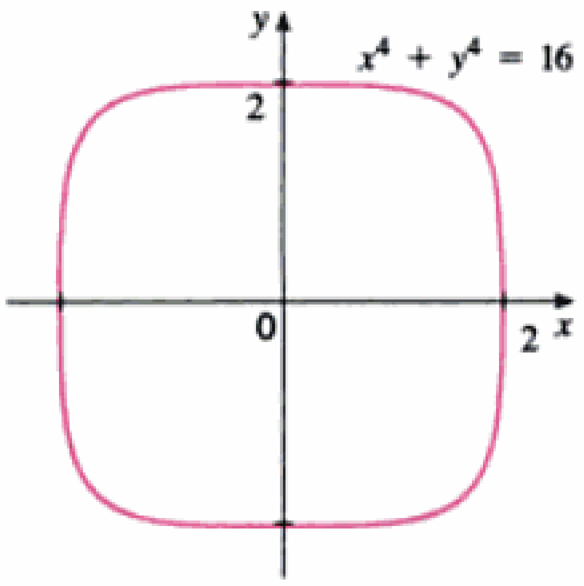


FIGURA 4

EJEMPLO 5 □ Determine y'' si $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUCIÓN Al derivar implícitamente la ecuación con respecto a x obtenemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Al despejar y' llegamos a

$$\boxed{1} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

Para hallar y'' derivamos esta expresión de y' mediante la regla del cociente y recordando que y es función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\,(d/dx)(x^3) - x^3\,(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si ahora sustituimos la ecuación (1) en esta expresión. Obtendremos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(\dfrac{-x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero los valores de x y y deben satisfacer la ecuación original, $x^4 + y^4 = 16$. Entonces, la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\,\frac{x^2}{y^7}$$

□

EJEMPLO 6 □ Determine $D^{27}\cos x$.

SOLUCIÓN Las primeras derivaciones de $\cos x$ son:

■ Busque un modelo.

$$D\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$D^2\cos x = -\cos x$$

$$D^3\cos x = \operatorname{sen} x$$

$$D^4 \cos x = \cos x$$
$$D^5 \cos x = -\operatorname{sen} x$$

Las derivadas sucesivas se repiten en un ciclo de longitud 4 y, en particular, $D^n \cos x = \cos x$ cuando n es múltiplo de 4. Así,

$$D^{24} \cos x = \cos x$$

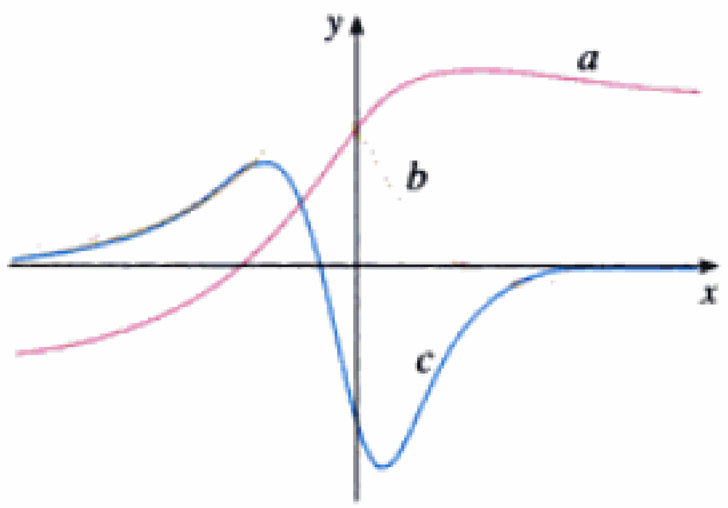
y derivando tres veces más, llegamos a la respuesta

$$D^{27} \cos x = \operatorname{sen} x$$ □

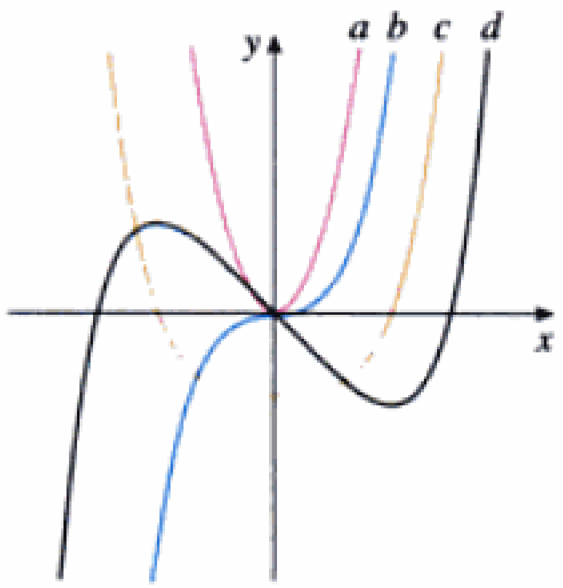
Hemos visto que una aplicación de las derivadas segunda y tercera surge al analizar el movimiento de objetos en términos de aceleración y tirón. Integraremos otra aplicación de las segundas derivadas en el Ejer. 62 y en la Sec. 4.3, donde mostramos cómo el conocimiento de f'' puede darnos información respecto a la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 vemos de qué manera es que las derivadas segunda y tercera y subsiguientes nos permiten representar las funciones como juegos de series infinitas.

3.7 Ejercicios

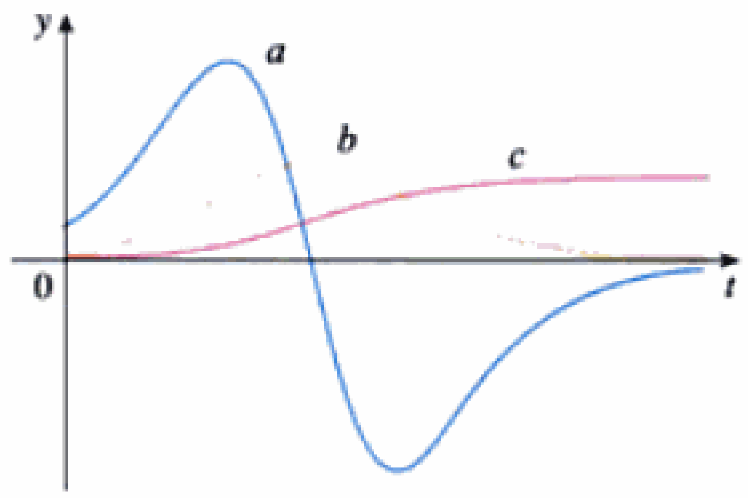
1. Esta figura muestra las gráficas de f, f', y f''. Identifique, cada curva y explique sus eleciones.



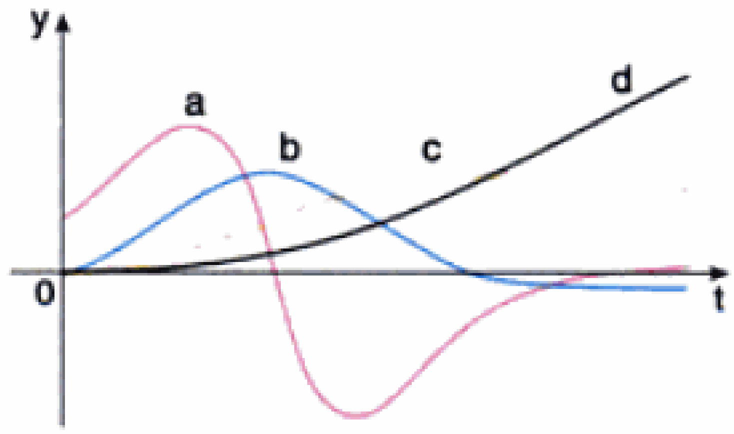
2. La figura muestra las gráficas de f, f', f'', y f'''. Identique cada curva y explique sus respuestas.



3. La figura que sigue presenta las gráficas de tres funciones. Una es la función de posición de un automóvil; otra, la velocidad del mismo, y otra, su aceleración. Identifique, cada, curva y explique su eleción.



4. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones. Una es la función de posición de un automóvil, otra es su velocidad, la tercera es su aceleración y la última, es su tirón. Identifique cada curva y explique sus respuestas.



5–20 □ Determine la primera y segunda derivadas de cada una de estas funciones;

5. $f(x) = x^5 + 6x^2 - 7x$
6. $f(t) = t^8 - 7t^6 + 2t^4$
7. $y = \cos 2\theta$
8. $y = \theta \operatorname{sen} \theta$
9. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
10. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$
11. $F(s) = (3s + 5)^8$
12. $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u}}$

13. $y = \dfrac{x}{1 - x}$

14. $y = xe^{cx}$

15. $y = (1 - x^2)^{3/4}$

16. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$

17. $H(t) = \tan 3t$

18. $g(s) = s^2 \cos s$

19. $g(t) = t^3 e^{5t}$

20. $h(x) = \tan^{-1}(x^2)$

21. (a) Si $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen}^2 x$, halle $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Compruebe que sus respuestas del inciso (a) sean razonables comparando las gráficas de f, f', y f''.

22. (a) Si $f(x) = e^x - x^3$, calcule $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Compruebe que sus respuestas a la parte (a) sean razonables comparando las gráficas de f, f', y f''.

23–24 □ Determine y'''.

23. $y = \sqrt{2x + 3}$

24. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

25. Si $f(x) = (2 - 3x)^{-1/2}$, determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, y $f'''(0)$.

26. Si $g(t) = (2 - t^2)^6$, determine $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$, y $g'''(0)$.

27. Si $f(\theta) = \cot \theta$, encuentre $f'''(\pi/6)$.

28. Si $g(x) = \sec x$, halle $g'''(\pi/4)$.

29–32 □ Calcule y'' mediante derivación implícita.

29. $x^3 + y^3 = 1$

30. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

31. $x^2 + xy + y^2 = 1$

32. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

33–37 □ Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$.

33. $f(x) = x^n$

34. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$

35. $f(x) = e^{2x}$

36. $f(x) = \sqrt{x}$

37. $f(x) = \dfrac{1}{3x^3}$

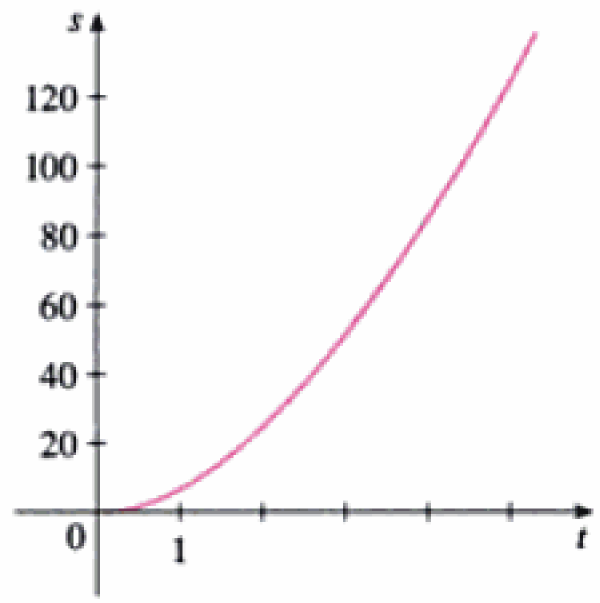
38–40 □ Determine la derivada que se pide a partir de las primeras derivadas, observando el modelo.

38. $D^{99} \operatorname{sen} x$

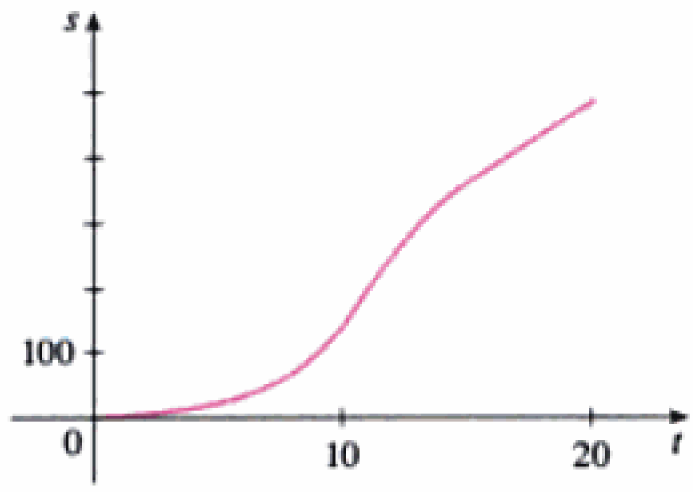
39. $D^{50} \cos 2x$

40. $D^{1000} xe^{-x}$

41. Un auto parado arranca y la gráfica de su función de posición se muestra en la figura, donde s es su medida en pies y t en segundos. Úsela para graficar la velocidad y estimar la aceleración de $t = 2$ seg de la gráfica de velocidad. Después trace una gráfica de la función de aceleración.



42. (a) La gráfica de la función de posición de un auto se muestra más abajo, donde s es la medida en pies y t en segundos. Úsela para graficar la velocidad y aceleración del auto. ¿Cuál es la aceleración a $t = 10$ seg?



(b) Use la curva de aceleración del inciso a) para estimar el tirón a $t = 10$ seg. ¿Cuáles son las unidades del tirón?

43–46 □ Se da la ecuación de movimiento, donde s está en metros y t en segundos. Determine a) cuándo la aceleración es 0 y b) ¿cuánto valen el desplazamiento y la velocidad en esos momentos?

43. $s = t^3 - 3t$

44. $s = t^2 - t + 1$

45. $s = \operatorname{sen} 2\pi t$

46. $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$

47–48 □ Se da una ecuación de movimiento donde s está en metros y t en segundos. Encuentre (a) las veces en que la aceleración es 0 y (b) el desplazamiento y la velocidad en esas veces.

47. $s = t^4 - 4t^3 + 2$

48. $s = 2t^3 - 9t^2$

49. Una partícula se mueve de acuerdo con una ley de movimiento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, $t \geq 0$, donde t es la medida en segundos y s en metros.
(a) Encuentre la aceleración en un tiempo t y después de 3s.
(b) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración de $0 \leq t \leq 8$.
(c) ¿Cuándo aumenta la partícula su velocidad? ¿Cuándo la reduce?

50. Una partícula se mueve a lo largo del eje x, su posición en el tiempo t está dada por $x(t) = t/(1 + t^2)$, $t \geq 0$, donde t es la medida en segundos y x en metros.
(a) Encuentre la aceleración en el tiempo t. ¿Cuándo es 0? disminuye?
(b) Grafique las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 4$.
(c) ¿Cuándo la partícula aumenta su velocidad? ¿Cuándo la disminuye?

51. Una masa sujeta a un resorte vertical tiene la función de posición $y(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, donde A es la amplitud de sus oscilaciones y ω es una constante.
(a) Determine la velocidad y la aceleración en función del tiempo.
(b) Demuestre que la aceleración es proporcional al desplazamiento y.
(c) Demuestre que la velocidad es máxima cuando la aceleración es 0.

52. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con un desplazamiento $s(t)$, una velocidad $v(t)$, y una aceleración $a(t)$. Muestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre las derivadas dv/dt y dv/ds.

53. Deduzca un polinomio de segundo grado P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$, y $P''(2) = 2$.

54. Deduzca un polinomio de tercer grado, Q tal que $Q(1) = 1$, $Q'(1) = 3$, $Q''(1) = 6$, y $Q'''(1) = 12$.

55. Una ecuación $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$ se llama ecuación diferencial porque involucra una función desconocida y y sus derivadas y' y y''. Encuentre las constantes A y B con las cuales la función $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ satisfagan esta ecuación. (Las ecuaciones diferenciales se estudiarán con detalle en el capítulo. 9.)

56. Encuentre las constantes A, B y C con las que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface la ecuación diferencial $y'' + y' - 2y = x^2$.

57. Para qué valores de r satisface la función $y = e^{rx}$ a la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?

58. Ecuentre los valores de λ para los cuales $y = e^{\lambda x}$ satisface la ecuación $y + y' = y''$.

59–61 □ La función g es diferenciable dos veces. Determine f'' en término de g, g', y g''.

59. $f(x) = xg(x^2)$

60. $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

61. $f(x) = g(\sqrt{x})$

62. Si $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 5$, grafica f y f''. ¿En qué intervalos es $f''(x) > 0$? En esos intervalos, ¿cómo se relaciona la gráfica de f con sus tangentes? ¿Qué hay de los intervalos en que $f''(x) < 0$?

63. (a) Derive varias veces la función $f(x) = 1/(x^2 + x)$ hasta que las operaciones algebraicas se vuelvan casi inmanejables.
(b) Con la identidad

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

determine las derivadas. A continuación deduzca una ecuación de $f^{(n)}(x)$. Este método de descomponer una fracción en términos de otras más sencillas, llamadas *fracciones parciales*, se describirá con más detalle en la sección 7.4.

64. (a) Si $F(x) = f(x)g(x)$, en donde f y g tienen derivadas de todos los órdenes, demuestre que

$$F'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

(b) Deduzca fórmulas semejantes para F''' y $F^{(4)}$.
(c) Trate de proponer una fórmula para $F^{(n)}$.

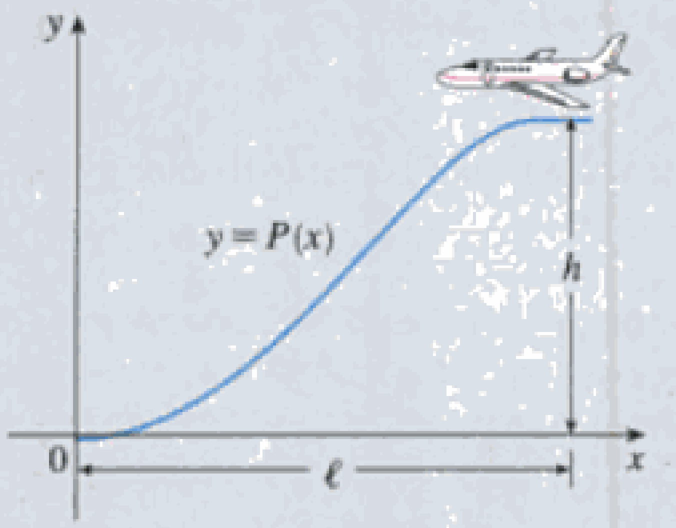
65. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en donde f y g son funciones derivables dos veces, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

66. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en donde f y g tienen tercera derivada, deduzca una fórmula para d^3y/dx^3 semejante a la del ejercicio 65.

Proyecto de aplicación

¿Dónde debe iniciar el descenso el piloto?



En la figura se muestra una trayectoria de aproximación de un avión hacia la pista de aterrizaje. Satisface las condiciones:

(i) La altitud del avión es h cuando inicia el descenso a una distancia horizontal ℓ hasta que toca la tierra.

(ii) El piloto debe mantener su velocidad horizontal constante v durante todo el descenso.

(iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe exceder la constante k (que es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Halle un polinomio de tercer grado $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga (i) poniendo condiciones apropiadas sobre $P(x)$ y $P'(x)$ en el instante de iniciar el descenso y el de tocar tierra.

2. Use las condiciones (ii) y (iii) para mostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponga que una aerolínea decide no pemitir que la aceleración vertical exceda a $k = 860$ mi/h^2. Si la altitud de crucero de un avión es de 35,000 pies y la velocidad de 300 mi/h, ¿a qué distancia del aeropuerto deberá iniciar el descenso el piloto?

4. Grafique la trayectoria de aproximación si las condiciones del problema 3 se satisfacen.

3.8 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección usaremos la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ en particular, de la función logarítmica natural $y = \ln x$.

1 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

Demostración Sea $y = \log_a x$. Entonces

$$a^y = x$$

□ La fórmula 5 de la sección 3.5 expresa que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Si se deriva esta ecuación implícitamente con respecto a x, con la fórmula 5 de la sección 3.5 obtenemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

y por consiguiente,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$ □

Si en la fórmula 1 ponemos $a = e$ entonces el factor $\ln a$ del segundo miembro se convierte en $\ln e = 1$ y obtenemos la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Si se comparan las fórmulas 1 y 2, vemos una de las razones principales por la que se usan los logaritmos naturales (logaritmos con base e) en el cálculo. La fórmula de derivación es más sencilla cuando $a = e$ porque $\ln e = 1$.

EJEMPLO 1 □ Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para aplicar la regla de la cadena, hacemos $u = x^3 + 1$. Entonces $y = \ln u$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1} \qquad \square$$

En general, si combinamos la fórmula 2 con la regla de la cadena como en el ejemplo 1, obtenemos

$$\boxed{3} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{o} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

EJEMPLO 2 □ Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Al aplicar (3), tenemos

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x \qquad \square$$

EJEMPLO 3 □ Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, de modo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \qquad \square$$

EJEMPLO 4 □ Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Si se usa la fórmula 1 con $a = 10$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) = \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10} \end{aligned} \qquad \square$$

EJEMPLO 5 □ Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\ln\frac{x + 1}{\sqrt{x - 2}} &= \frac{1}{\dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}}\frac{d}{dx}\frac{x + 1}{\sqrt{x - 2}} \\ &= \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 1}\,\frac{\sqrt{x - 2}\cdot 1 - (x + 1)\left(\tfrac{1}{2}\right)(x - 2)^{-1/2}}{x - 2} \\ &= \frac{x - 2 - \tfrac{1}{2}(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{x - 5}{2(x + 1)(x - 2)} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si en primer lugar simplificamos la función dada aplicando las leyes de los logaritmos, entonces la derivación se vuelve más fácil:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$
$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Esta respuesta se puede dejar como está pero, si usáramos un denominador común, veríamos que da la misma respuesta que en la solución 1.) □

□ La figura 1 muestra la gráfica de la función f del ejemplo 5 junto con la gráfica de su derivada. Esto nos da una comprobación visual de nuestros cálculos. Note que $f'(x)$ es negativa grande cuando f decrece con rapidez.

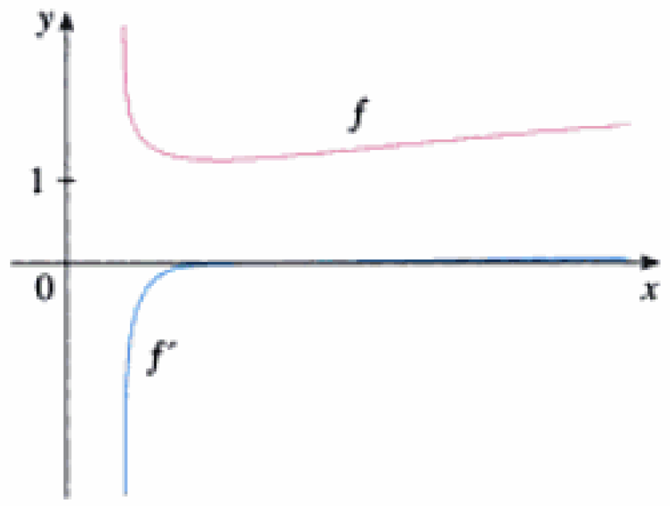


FIGURA 1

EJEMPLO 6 □ Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se concluye que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$. □

□ En la figura 2 $f(x) = \ln|x|$ se muestra la gráfica de la función $f'(x) = 1/x$. Note que cuando x es pequeña, la gráfica de $y = \ln|x|$ está inclinada y, por tanto $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

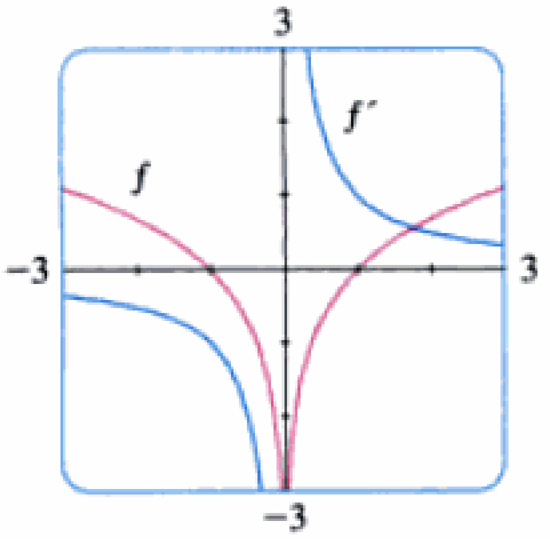


FIGURA 2

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 6:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}$$

Derivación logarítmica

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias se puede simplificar tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 7 □ Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tomamos logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplicamos las leyes de los logaritmos para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 5\ln(3x + 2)$$

Al derivar implícitamente con respecto a x, resulta

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2 + 1} - 5\cdot\frac{3}{3x + 2}$$

Resolvemos para dy/dx, y obtenemos

□ Si prescindimos de la derivación en el ejercicio 7, tenemos que usar la regla del cociente y la regla del producto. Los cálculos resultan tremendos.

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2}\right)$$

$$= \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2}\right)$$ □

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tome logaritmos naturales de ambos miembros de una ecuación $y = f(x)$ y utilice las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derive implícitamente con respecto a x.
3. Resuelva la ecuación resultante para obtener y'.

Si $f(x) < 0$ para algunos valores de x entonces $\ln f(x)$ no está definida, pero podemos escribir $|y| = |f(x)|$ y aplicar la ecuación 4. Ilustraremos este procedimiento probando la versión general de la regla de la potencia, según prometimos en la sección 3.1.

Regla de la potencia Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

□ Si $x = 0$, podemos demostrar que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ de modo directo a partir de la definición de derivada.

Demostración Sea $y = x^n$ y apliquemos la derivación logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

De donde,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$ □

Debe distinguir con cuidado la regla de la potencia $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, —donde la base es variable y el exponente constante— de la regla para derivar funciones exponenciales $[(a^x)' = a^x \ln a]$, donde la base es constante y el exponente es variable. En general, se tiene cuatro casos para exponentes y bases:

En general, se tiene cuatro casos para exponentes y bases:

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0$ $\quad$ (a y b son constantes)

2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, se puede aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 8 □ Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUCIÓN 1 Con la derivación logarítmica, tenemos

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$y' = y\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right)$$

□ En la figura se ilustra el ejemplo 8, mostrando las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

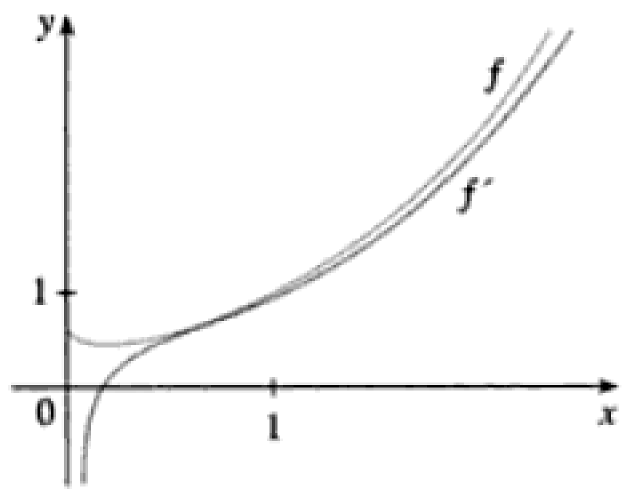


FIGURA 3

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}\ln x})$$

$$= e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln x)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como antes)}$$

□

El número e como límite

Hemos demostrado que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$. Por lo tanto, $f'(1) = 1$. Apliquemos ahora esto para expresar el número e como un límite.

A partir de la definición de derivada como un límite, tenemos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] \qquad \text{(dado que ln es continua)}$$

Debido a que $f'(1) = 1$, entonces

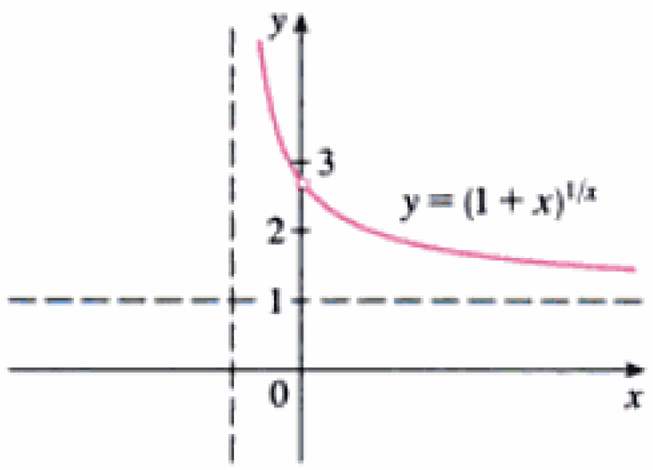
$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1$$

Por tanto,

5
$$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e}$$

En la figura 4 se ilustra la fórmula 5 mediante la gráfica de la función $y = (1 + x)^{1/x}$ y una tabla de valores para valores pequeños de x. Con esto se ilustra el hecho de que

$$e \approx 2.7182818$$



x	$(1 + x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

FIGURA 4

Si ponemos $n = 1/x$ en la fórmula 5, entonces $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y, por consiguiente, una expresión alternativa para e es

6
$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.8 Ejercicios

1. Explique por qué en cálculo se usa con mucha más frecuencia la función logarítmica natural, $y = \ln x$ que las otras funciones logarítmicas $y = \log_a x$.

2–20 □ Derive la función.

2. $f(x) = \ln(2 - x)$
3. $f(\theta) = \ln(\cos \theta)$
4. $f(x) = \cos(\ln x)$
5. $f(x) = \log_3(x^2 - 4)$
6. $f(x) = \log_{10}\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)$
7. $F(x) = \ln \sqrt{x}$
8. $G(x) = \sqrt[3]{\ln x}$
9. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$
10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$
11. $g(x) = \ln \dfrac{a - x}{a + x}$
12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
13. $F(x) = e^x \ln x$
14. $h(y) = \ln(y^3 \operatorname{sen} y)$
15. $y = \dfrac{\ln x}{1 + x}$
16. $y = (\ln \tan x)^2$
17. $y = \ln |x^3 - x^2|$
18. $G(u) = \ln \sqrt{\dfrac{3u + 2}{3u - 2}}$
19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
20. $y = \ln(x + \ln x)$

21–24 □ Encuentre y' y y''.

21. $y = x \ln x$
22. $y = \ln(1 + x^2)$
23. $y = \log_{10} x$
24. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

25–28 ▫ Derive f y encuentre su dominio.

25. $f(x) = \ln(2x + 1)$

26. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

27. $f(x) = x^2 \ln(1 - x^2)$

28. $f(x) = \ln \ln \ln x$

29. Si $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, halle $f'(e)$.

30. Si $f(x) = x^2 \ln x$, halle $f'(1)$.

31–32 ▫ Halle una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto que se da.

31. $y = \ln \ln x$, $(e, 0)$

32. $y = \ln(x^2 + 1)$, $(1, \ln 2)$

33. Si $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

34. Encuentre ecuaciones de las tangente a la curva $y = (\ln x)/x$ en los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1/e)$. Ilustre graficando la curva y sus rectas tangentes

35–46 ▫ Aplique la derivación logarítmica para hallar la derivada de la función.

35. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

36. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

37. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \tan^4 x}{(x^2 + 1)^2}$

38. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

39. $y = x^x$

40. $y = x^{1/x}$

41. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

42. $y = (\operatorname{sen} x)^x$

43. $y = (\ln x)^x$

44. $y = x^{\ln x}$

45. $y = x^{e^x}$

46. $y = (\ln x)^{\cos x}$

47. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

48. Halle y' si $x^y = y^x$.

49. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

50. Halle $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

51. Use la definición de derivada para probar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

52. Demuestre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para cualquier $x > 0$.

3.9 Funciones hiperbólicas

Ciertas combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} se presentan con tanta frecuencia en las matemáticas y sus aplicaciones, que merecen identificarse con nombres especiales. En muchos aspectos son análogas a las funciones trigonométricas y están relacionadas con la hipérbola de la misma manera que las funciones trigonométricas con el círculo. Por este motivo se les llama, en conjunto, **funciones hiperbólicas** e individualmente, se les denomina **seno hiperbólico**, **coseno hiperbólico**, etcétera.

Definición de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Las gráficas del seno y coseno hiperbólicas se pueden trazar empleando la suma gráfica, como en las figuras 1 y 2.

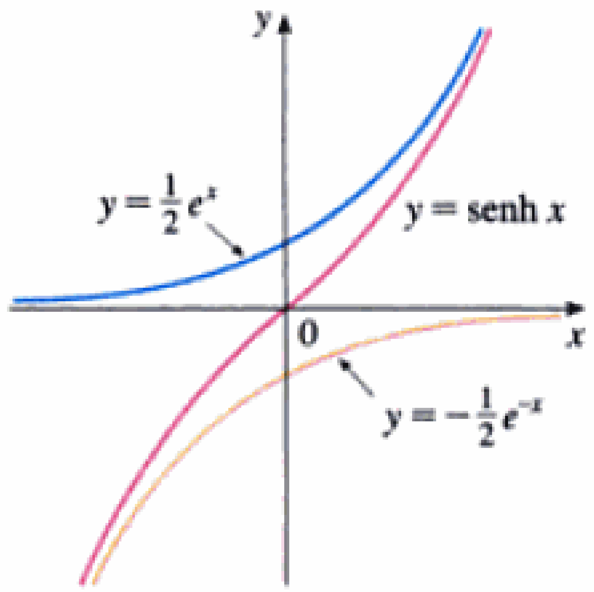


FIGURA 1
$y = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

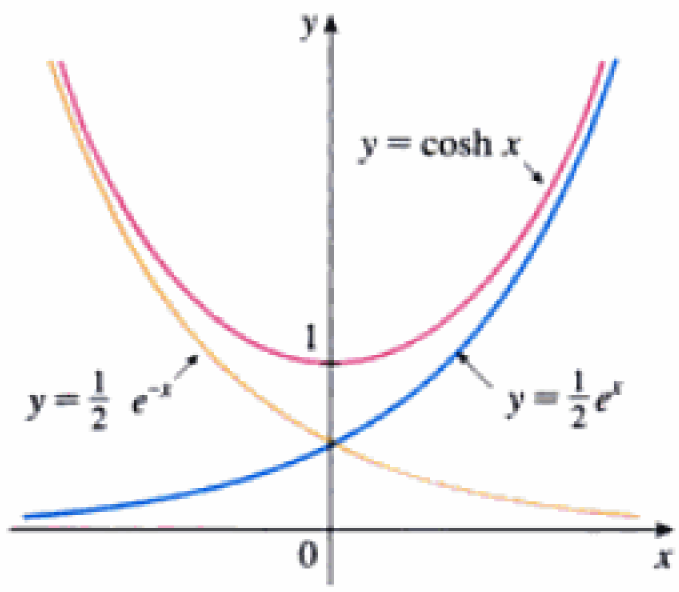


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

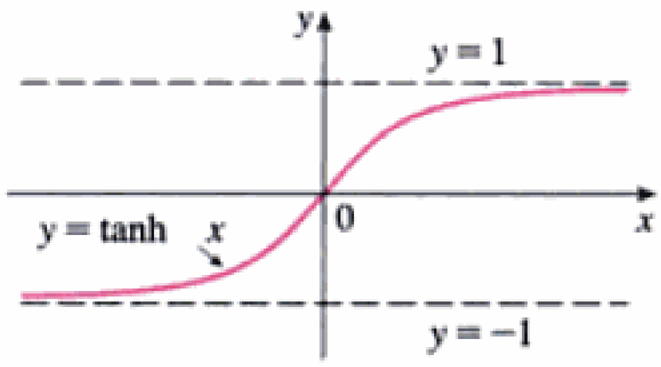


FIGURA 3

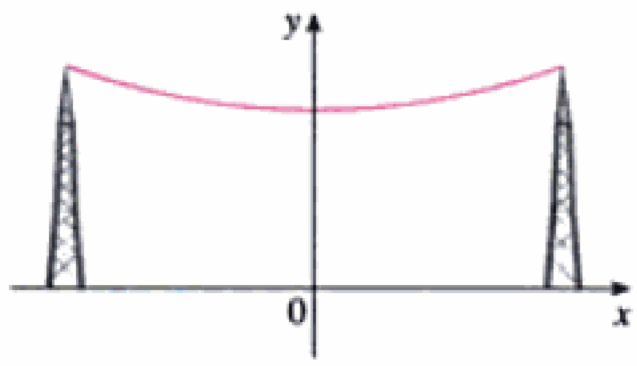


FIGURA 4
Una catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$

Notará que senh tiene dominio $\mathbb{R}$ y la imagen $\mathbb{R}$, mientras que cosh tiene dominio $\mathbb{R}$ e imagen $[1, \infty)$. En la figura 3 se muestra la gráfica de tanh. Tiene las asíntotas horizontales $y = \pm 1$. (Ejer. 23).

Algunas aplicaciones matemáticas de las funciones hiperbólicas se describen en el capítulo 7. En las ciencias y en la ingeniería se presentan siempre que una entidad como la luz, la velocidad, la electricidad o la radiactividad se absorbe o extingue en forma gradual, porque el decaimiento se puede representar con funciones hiperbólicas. La aplicación más famosa es el empleo del coseno hiperbólico para describir la forma de un cable colgante. Se puede demostrar que si se suspende un cable pesado y flexible, como el de una línea telefónica o de una línea de transmisión, entre dos puntos a la misma altura, adoptará la forma de una curva cuya ecuación es $y = c + a\cosh(x/a)$ y esa curva se llama *catenaria* (Fig. 4). La palabra *catena*, en latín, quiere decir "cadena".

Las funciones hiperbólicas satisfacen varias identidades, que son análogas a las conocidas identidades trigonométricas. A continuación mencionaremos algunas y dejaremos la mayor parte de sus demostraciones como ejercicios.

Identidades hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

EJEMPLO 1 □ Demuestre que (a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ y (b) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \tfrac{4}{4} = 1$$

(b) Comenzaremos con la identidad demostrada en la parte (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Si dividimos ambos lados entre $\cosh^2 x$, llegamos a

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

o sea

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$ □

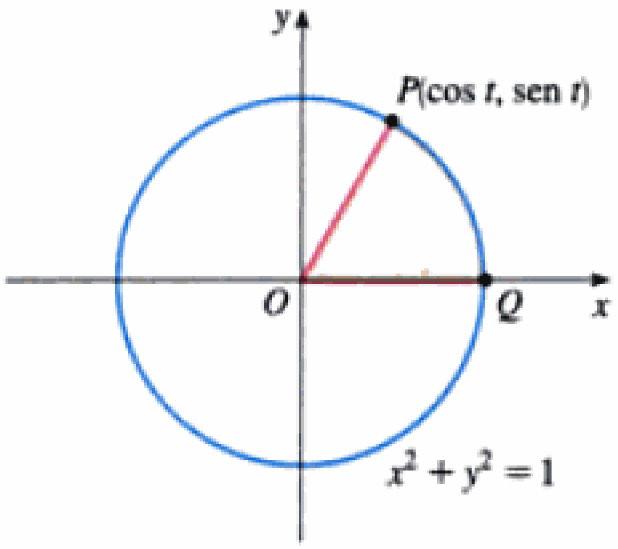


FIGURA 5

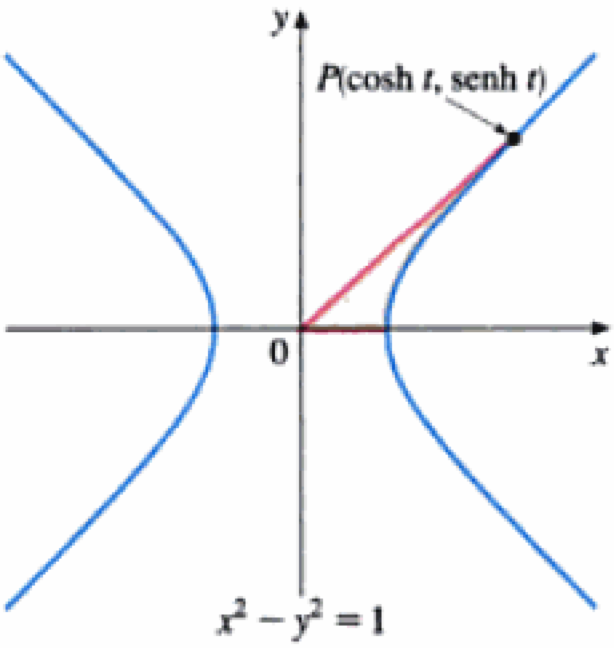


FIGURA 6

En la identidad que demostramos en el ejemplo 1a) vemos una pista de la razón de ser del nombre "hiperbólicas".

Si t es cualquier número real, el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ queda en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ porque $\cos^2 t + \operatorname{senh}^2 x = 1$. De hecho, se puede interpretar que t es la medida en radianes del $\angle POQ$ en la figura 5. Por este motivo, a las funciones trigonométricas se les llama en ocasiones funciones circulares.

De igual modo, si t es cualquier número real, el punto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ permanece en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ porque $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t) = 1$ y $\cosh t \geqslant 1$. En esta ocasión t no representa la medida de un ángulo. Sin embargo, sucede que t denota el doble del área sombreada del sector hiperbólico de la figura 6, exactamente como en el caso trigonométrico t representa el doble del área sombreada del sector circular de la figura 5.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas se determinan con facilidad; por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

A continuación listamos las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas. Dejamos como ejercicios las demostraciones restantes, se observará la analogía con las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas, pero cuidado, porque a veces los signos son distintos.

1 Tabla de las derivadas de las funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = (\operatorname{senh} x) = \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

EJEMPLO 2 □ Cualquiera de las reglas anteriores de derivación se puede combinar con la regla de la cadena; por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh \sqrt{x}) = \operatorname{senh}\sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$ □

Funciones hiperbólicas inversas

En las figuras 1 y 3, podemos ver que senh y tanh son funciones biúnivocas y, por consiguiente, tienen funciones inversas que se indican con senh^{-1} y $\tanh^{-1}$. La figura 2 muestra que cosh no es biúnivoca, pero se convierte en tal cuando la restringimos al dominio $[0, \infty)$. La función coseno hiperbólico inverso se define como la inversa de esta función restringida.

2

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \operatorname{senh}^{-1}x &&\iff \operatorname{senh} y = x \\ y &= \cosh^{-1}x &&\iff \cosh y = x \quad \text{y} \quad y \geqslant 0 \\ y &= \tanh^{-1}x &&\iff \tanh y = x \end{aligned}}$$

Las funciones hiperbólicas inversas restantes se definen de modo análogo (Ejer. 28).

En las gráficas de senh^{-1}, $\cosh^{-1}$ y $\tanh^{-1}$ de las figuras 7, 8 y 9, hemos partido de las figuras 1, 2 y 3.

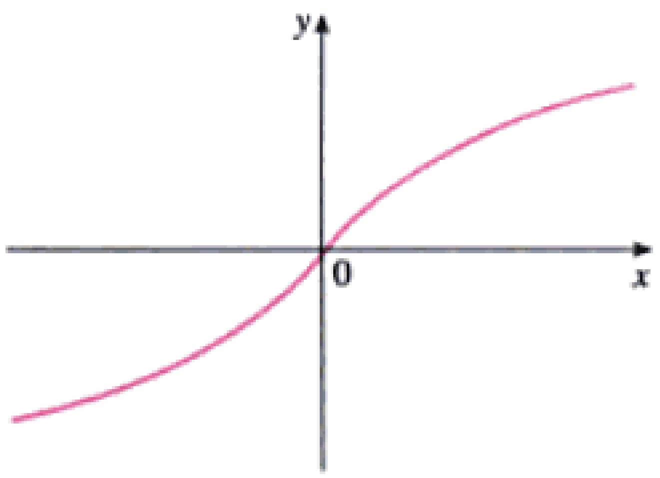


FIGURA 7
$y = \operatorname{senh}^{-1} x$
dominio $= \mathbb{R}$
imagen $= \mathbb{R}$

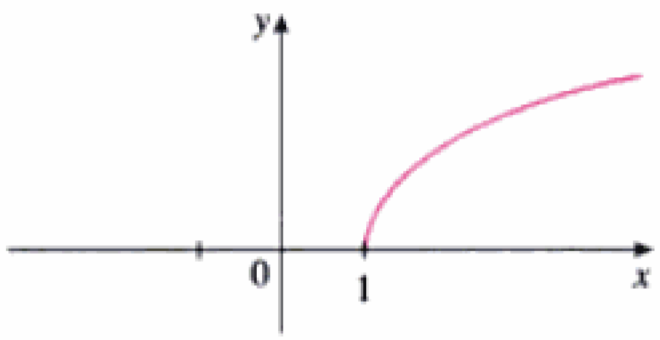


FIGURA 8
$y = \cosh^{-1} x$
dominio $= [1, \infty)$
imagen $= [0, \infty)$

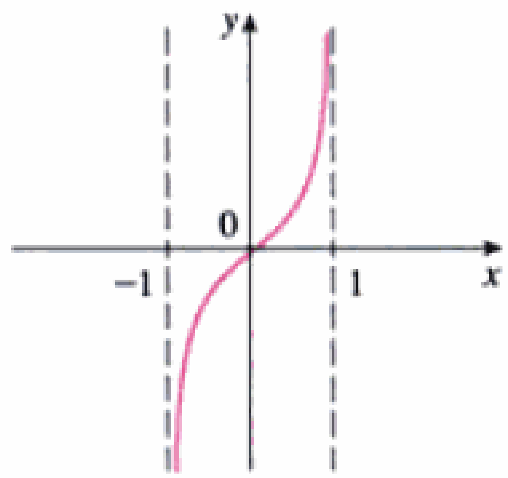


FIGURA 9
$y = \tanh^{-1} x$
dominio $= (-1, 1)$
imagen $= \mathbb{R}$

Como las funciones hiperbólicas inversas se definen en términos de funciones exponenciales, no es de sorprender que las funciones hiperbólicas inversas se puedan expresar en términos de logaritmos. En particular:

□ La fórmula 3 se da en el ejemplo 3. Las demostraciones de las fórmulas 4 y 5 se requieren en los ejercicios 26 y 27.

3 $$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

EJEMPLO 3 □ Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

SOLUCIÓN Sea $y = \operatorname{senh}^{-1} x$. Entonces

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

así que

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

o bien, multiplicando por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

En realidad se trata de una ecuación cuadrática en e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Al resolverla con la fórmula cuadrática resulta

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Notará que $e^y > 0$, pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ $\left(\text{porque } x < \sqrt{x^2 + 1}\right)$. Por lo tanto, es inadmisible el signo menos y llegamos a

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

entonces $$y = \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

(Véase otro método en el Ejer. 25.) □

6 Tabla de derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Todas las funciones hiperbólicas inversas se pueden derivar, porque también son derivables. Las fórmulas de la tabla (6) se pueden demostrar por el método para las funciones inversas o por derivación de las fórmulas 3, 4 y 5.

EJEMPLO 4 □ Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Entonces $\operatorname{senh} y = x$. Si derivamos implícitamente esta ecuación con respecto a x resulta

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Ya que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ y $\cosh y \geqslant 0$, tenemos $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUCIÓN 2 De acuerdo con la ecuación (3)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) &= \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 5 □ Determine $\dfrac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)]$.

SOLUCIÓN Si empleamos la tabla (6) y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)] &= \frac{1}{1-(\operatorname{sen} x)^2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)\\ &= \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x\end{aligned}$$

□

3.9 Ejercicios

1–6 □ Calcule el valor numérico de cada expresión.

1. (a) $\operatorname{senh} 0$ (b) $\cosh 0$

2. (a) $\tanh 0$ (b) $\tanh 1$

3. (a) $\operatorname{senh}(\ln 2)$ (b) $\operatorname{senh} 2$

4. (a) $\cosh 3$ (b) $\cosh(\ln 3)$

5. (a) $\operatorname{sech} 0$ (b) $\cosh^{-1} 1$

6. (a) $\operatorname{senh} 1$ (b) $\operatorname{senh}^{-1} 1$

7–19 □ Demuestre cada una de las identidades siguientes:

7. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
(Con esto queda claro que senh es una función impar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Con esto se evidencia que cosh es una función par.)

9. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$

10. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

11. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

12. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

13. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

14. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

15. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

17. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$
(n cualquier número real)

20. Si $\operatorname{senh} x = \frac{3}{4}$, calcule los valores de las demás funciones hiperbólicas en x.

21. Si $\tanh x = \frac{4}{5}$, calcule los valores de las demás funciones hiperbólicas en x.

22. (a) Emplee las gráficas de senh, cosh y tanh en las figuras 1 a 3 para trazar las de csch, sech, y coth.
(b) Compruebe las gráficas que trazó en la parte a) con una graficadora.

23. Parta de las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar los límites siguientes:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{senh} x$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \coth x$

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \coth x$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \coth x$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{csch} x$

24. Demuestre las fórmulas de la tabla 1, con las derivadas de las funciones siguientes: (a) cosh, (b) tanh, (c) csch, (d) sech y (e) coth.

25. Presente una solución alternativa del ejemplo 3, escribiendo $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ para después aplicar el resultado del ejercicio 9 y del ejemplo 1 (a), reemplazando x con y.

26. Demuestre la ecuación (4).

27. Demuestre la ecuación (5) empleando (a) el método del ejemplo 3 y (b) el ejercicio 18, sustituyendo x con y.

28. Para cada una de las funciones siguientes, (i) cite una definición como las que aparecen en (2); (ii) trace la gráfica, y (iii) deduzca una fórmula semejante a la ecuación (3).

(a) csch^{-1} (b) sech^{-1} (c) $\coth^{-1}$

29. Demuestre las fórmulas de la tabla 6, de las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $\cosh^{-1}$ (b) $\tanh^{-1}$ (c) csch^{-1}

(d) sech^{-1} (e) $\coth^{-1}$

30–47 □ Determine la derivada de cada función.

30. $f(x) = \tanh 4x$

31. $f(x) = x \cosh x$

32. $g(x) = \operatorname{senh}^2 x$

33. $h(x) = \operatorname{senh}(x^2)$

34. $F(x) = \operatorname{senh} x \tanh x$

35. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

36. $f(t) = e^t \operatorname{sech} t$

37. $h(t) = \coth\sqrt{1 + t^2}$

38. $f(t) = \ln(\operatorname{senh} t)$

39. $H(t) = \tanh(e^t)$

40. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

41. $y = e^{\cosh 3x}$

42. $y = x^2 \operatorname{senh}^{-1}(2x)$

43. $y = \tanh^{-1}\sqrt{x}$

44. $y = x \tanh^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

45. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

46. $y = \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{1 - x^2}, \quad x > 0$

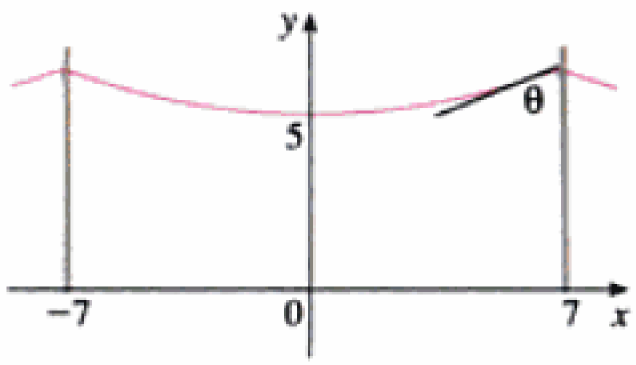
47. $y = \coth^{-1}\sqrt{x^2 + 1}$

48. Un cable flexible cuelga siempre en forma de una catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$, donde c y a son constantes y $a > 0$ (vea la figura 4 y el ejercicio 50). Grafique diversos miembros de la familia de funciones $y = a\cosh(x/a)$. ¿Cómo cambia la gráfica conforme a varía?

49. Una línea telefónica cuelga entre dos postes separados uno de otro a 14 m en forma de catenaria $y = 20\cosh(x/20) - 15$, donde x y y están en metros.

(a) Encuentre la pendiente de la curva que toca al poste derecho.

(b) Encuentre el ángulo θ entre la línea y el poste.



50. Con los principios de la estática se demuestra que un cable colgante entre dos postes tiene la forma de la curva $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, g es la aceleración debida a la gravedad, T es la tensión del cable en su punto más bajo, y el sistema de coordenadas se ha escogido apropiadamente. Verifique que la función

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

es una solución de esta ecuación diferencial.

51. (a) Demuestre que cualquier función de la forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B \cosh mx$$

satisface la ecuación diferencial $y'' = m^2 y$.

(b) Encuentre $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$, y $y'(0) = 6$.

52. Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$.

53. ¿En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1?

54. Si $x = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$, demuestre que $\sec\theta = \cosh x$.

3.10 Tasas relacionadas

Al inflar un globo aumentan su volumen y su radio, y las razones de cambio correspondientes están relacionadas. Pero es mucho más fácil medir la tasa de crecimiento del volumen que la del radio.

En todo problema de tasa relacionada, se calcula la rapidez de cambio de una cantidad en términos de la tasa de cambio de otra cantidad que se pueda medir con más facilidad. El procedimiento es deducir una ecuación que relacione las dos cantidades y después aplicar la regla de la cadena y derivar ambos lados con respecto al tiempo.

EJEMPLO 1 □ Se bombea aire a un globo esférico, de tal modo que su volumen aumenta con una rapidez de 100 cm^3/s. ¿Con qué rapidez aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

■ De acuerdo con los principios de solución de problemas que se describieron en la página 78 el primer paso es comprender el problema. Esto incluye leerlo con cuidado para identificar los datos, qué se desconoce e introducir una notación adecuada.

SOLUCIÓN Comenzaremos identificando dos cosas:

la *información dada:*

La rapidez con que aumenta el volumen del aire es de 100 cm^3/s

y lo *desconocido*:

La rapidez con que aumenta el radio cuando el diámetro es de 50 cm

Para expresar estas cantidades en términos matemáticos, adoptaremos una *notación* adecuada:

Sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que hay que recordar es que las tasas de cambio son derivadas. En este problema el volumen y el radio son funciones del tiempo t. La rapidez de aumento del volumen con respecto al tiempo es la derivada dV/dt y la rapidez de aumento del radio es dr/dt. De este modo podemos volver a enunciar como sigue el dato y la incógnita:

$$\textit{Dato:} \qquad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Incógnita:} \qquad \frac{dr}{dt} \quad \text{donde } r = 25 \text{ cm}$$

■ La segunda etapa de solución de un problema consiste en imaginar un plan que vincule el dato con la incógnita.

A fin de relacionar dV/dt con dr/dt primero relacionaremos V con r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Con objeto de usar la información disponible, derivamos ambos lados de esta ecuación con respecto a t. Para derivar el lado derecho necesitamos la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora despejamos la cantidad desconocida:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Si en esta ecuación sustituimos $r = 25$ y $dV/dt = 100$ obtendremos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo aumenta con una rapidez o tasa de $1/(25\pi)$ cm/s. □

EJEMPLO 2 □ Una escalera de 10 pies de longitud se apoya en un muro vertical. Si su extremo inferior se resbala y aleja de la pared a una velocidad de 1 pie/s, ¿con qué velocidad se desliza el extremo superior por el muro cuando el extremo inferior está a seis pies de la pared?

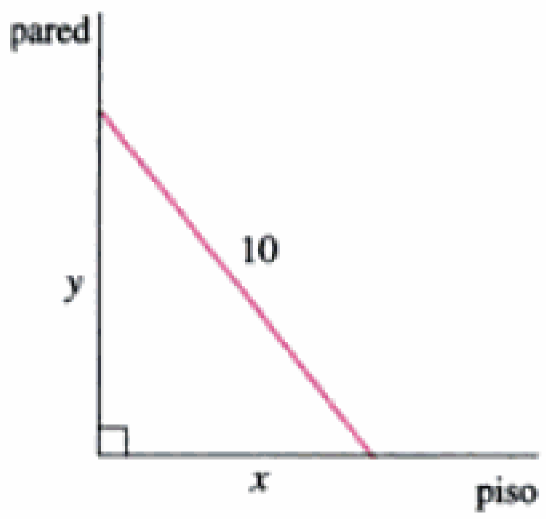


FIGURA 1

SOLUCIÓN Primero trazamos y etiquetamos un diagrama, como en la figura 1. Sean x pies la distancia del extremo inferior al muro y y pies la del extremo superior al piso. Vemos que x y y son funciones de t, el tiempo.

Se nos dice que $dx/dt = 1$ pie/s, y se nos pide calcular dy/dt cuando $x = 6$ pies (Fig. 2). En este caso, la relación entre x y y la expresa el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar cada lado con respecto a t y aplicar la regla de la cadena, tenemos que

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

y al despejar de esta ecuación la rapidez o tasa que buscamos, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

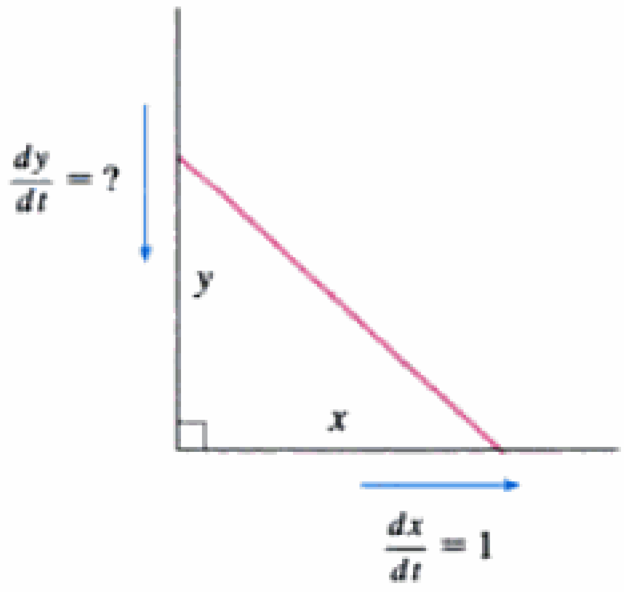


FIGURA 2

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da como resultado $y = 8$ y así, al sustituir esos valores en $dx/dt = 1$, llegamos a

$$\frac{dy}{dt} = -\tfrac{6}{8}(1) = -\tfrac{3}{4}\text{ pies/s}$$

El hecho de que dy/dx sea negativo significa que la distancia del extremo superior de la escalera al piso *decrece* a un rango de $\frac{3}{4}$ pies/s, es decir, que el extremo superior de la escalera se resbala por la pared a un rango de $\frac{3}{4}$ pies/s. □

EJEMPLO 3 □ Un tanque de agua tiene forma de cono circular invertido, con radio de la base igual a 2 m y 4 m de altura. Si se le bombea agua, con un gasto de 2 m^3/min, calcule la velocidad con que sube el nivel del agua cuando la profundidad alcanza tres metros.

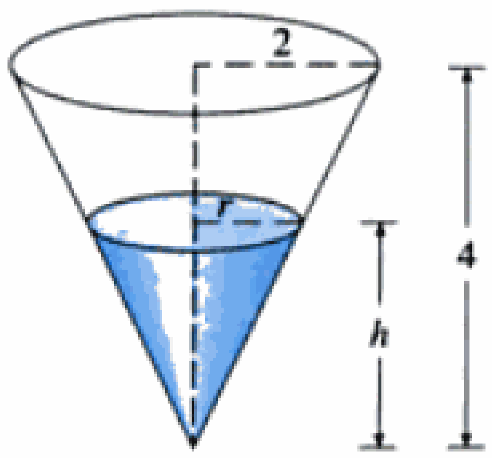


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero esquematizamos el cono y adoptamos la nomenclatura de la figura 3. Sean V, r, y h el volumen del agua, el radio de la superficie y la altura, cuando el tiempo es t, con t expresado en minutos.

Se nos dice que $dV/dt = 2$ m^3/min y se nos pide calcular dh/dt cuando h es 3 m. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

pero es útil expresar a V tan sólo en función de h. Para eliminar r recurrimos a los triángulos semejantes (Fig. 3) y escribimos

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la ecuación de V se transforma en

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ya podemos diferenciar ambos lados con respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de modo que
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir los valores $h = 3$ m y $dV/dt = 2$ m³/min, obtenemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi} \approx 0.28 \text{ m/min}$$

□

■ Retrospectiva: ¿qué hemos aprendido en los ejemplos 1 a 3 que nos ayude a resolver problemas en el futuro?

Precaución: Un error muy frecuente consiste en sustituir demasiado pronto la información numérica dada sobre cantidades que varían con el tiempo. Esto sólo se debe hacer *después* de derivar (el paso 7 sigue al paso 6), así, en el ejemplo 3 manejamos valores generales de h hasta que acabamos sustituyendo $h = 3$ en la última etapa. (Si hubiéramos hecho $h = 3$ *antes*, habríamos llegado a $dV/dt = 0$, lo cual es claramente incorrecto.)

Estrategia Es útil recordar algunos de los principios de la solución de problemas de la de la página 59 para adaptarlos a las tasas relacionadas, en vista de lo que tuvimos en los ejemplos 1 a 3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Trace, si es posible, un diagrama.
3. Adopte una notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que sean funciones de tiempo.
4. Exprese la información dada y la tasa requerida en términos de derivadas.
5. Deduzca una ecuación que relacione las diversas cantidades del problema. Si es necesario, use la geometría del caso que se ve para eliminar una de las variables por sustitución (como en el Ejem. 3).
6. Utilice la regla de la cadena para derivar ambos lados de la ecuación, con respecto a t.
7. Sutituya la información dada en la ecuación resultante y despeje la rapidez o tasa desconocida.

Los ejemplos que siguen aclaran mejor la estrategia.

EJEMPLO 4 El automóvil A viaja hacia el oeste, a 50 millas por hora (mph), y el auto B hacia el norte, a 60 mph. Los dos se dirigen al cruce de las dos carreteras. ¿A qué velocidad se acercan entre sí, cuando A está a 0.3 millas y B a 0.4 millas del cruce?

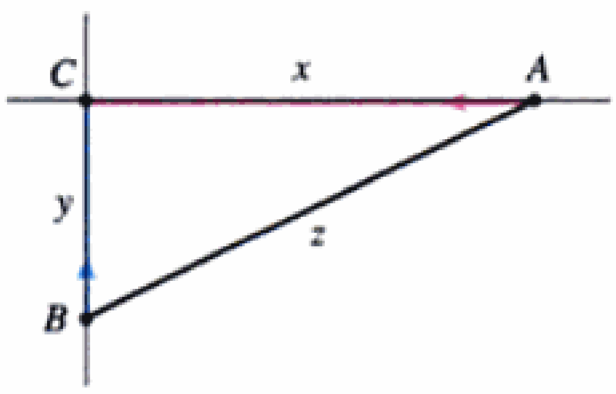


FIGURA 4

SOLUCIÓN Trazamos la figura 4, en donde C es el cruce de las carreteras. En cierto momento t, sea x la distancia del auto A a C; y, del auto B a C, y z la distancia entre los vehículos; x, y y z se expresan en millas.

Se nos dice que $dx/dt = -50$ mi/h y que $dy/dt = -60$ mi/h. (Las derivadas son negativas, porque x y y están disminuyendo.) Se nos pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z se deduce con el teorema de Pitágoras :

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados con respecto a t,

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5$ millas, así que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ mi/h}$$

Los coches se acercan a 78 mi/h. □

EJEMPLO 5 □ Una persona camina en línea recta a una velocidad de 4 pies/s. En el piso, a 20 pies de distancia del camino, hay un faro, que se mantiene dirigido hacia el caminante. ¿A qué velocidad gira el faro cuando el sujeto se encuentra a 15 pies del punto del camino más cercano al faro?

SOLUCIÓN Trazamos la figura 5 y hacemos que x sea la distancia entre el punto del camino más próximo al faro y la persona. Sea θ el ángulo que forma el haz de luz con la perpendicular al camino.

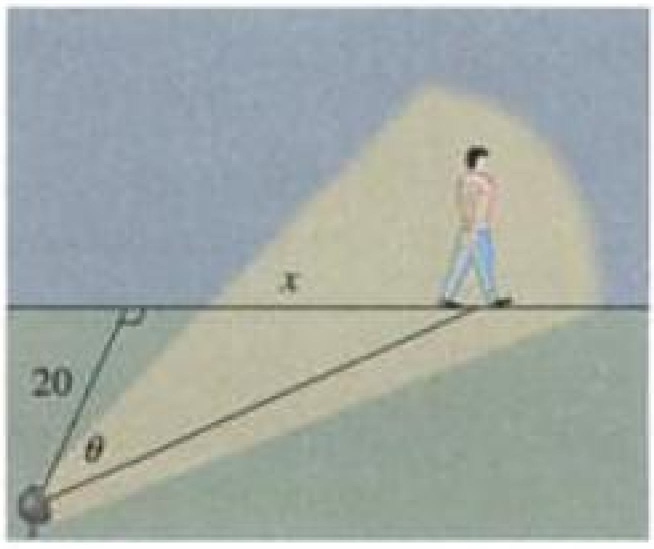


FIGURA 5

Se nos dice que $dx/dt = 4$ pies/s y se nos pregunta cuánto vale $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona a x con θ se deduce con ayuda de la figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan\theta \qquad x = 20\tan\theta$$

Al diferenciar ambos lados con respecto a t, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

así $$\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{20}\cos^2\theta\frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{20}\cos^2\theta(4) = \tfrac{1}{5}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 15$, la longitud del haz luminoso es 25, así que $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El faro gira a la velocidad de 0.128 rad/s. □

3.10 Ejercicios

1. Si V es el volumen de un cubo cuya arista mide x, calcule dV/dt en función de dx/dt.

2. (a) Si A es el área de un círculo con radio r, y el círculo se expande al pasar el tiempo, halle dA/dt en términos de dr/dt.
   (b) Suponga que un barco de transporte de petróleo se ha averiado y el petróleo sale y se extiende circularmente. Si el radio de la mancha crece a velocidad constante de 1m/s; ¿cuál es la velocidad de crecimiento de la mancha cuando el radio es 30 m?

3. Si $y = x^3 + 2x$ y $dx/dt = 5$, halle dy/dt cuando $x = 2$.

4. Una partícula se mueve sobre la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. Al llegar al punto (2, 3), la ordenada crece a razón de 4 cm/s. ¿Con qué rapidez cambia la abscisa en ese instante?

5–8 □
(a) ¿Cuáles con las cantidades que se dan en el problema?
(b) ¿Cuál es la incógnita?
(c) Haga un dibujo de la situación para cualquier tiempo t.
(d) Escriba una ecuación que relacione las cantidades.
(e) Termine de resolver el problema.

5. Un aeroplano vuela horizontalmente a una altura de 1 mi y con velocidad de 500 mi/h. Pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la velocidad con que aumenta la distancia del avión a la estación, cuando se encuentra a 2 mi de ella.

6. Si una bola de nieve se licúa de tal suerte que su área superficial disminuye con una tasa de 1 cm²/min, calcule la tasa con que se reduce el diámetro en el momento en que mide 10 cm.

7. Un semáforo está en el extremo de un poste de 15 pies de altura. Un hombre, de 6 pies de talla, se aleja de él con una velocidad de 5 pies/s en línea recta. ¿Con qué rapidez se relaja la parte superior de su sombra cuando él se encuentra a 40 pies de distancia del poste?

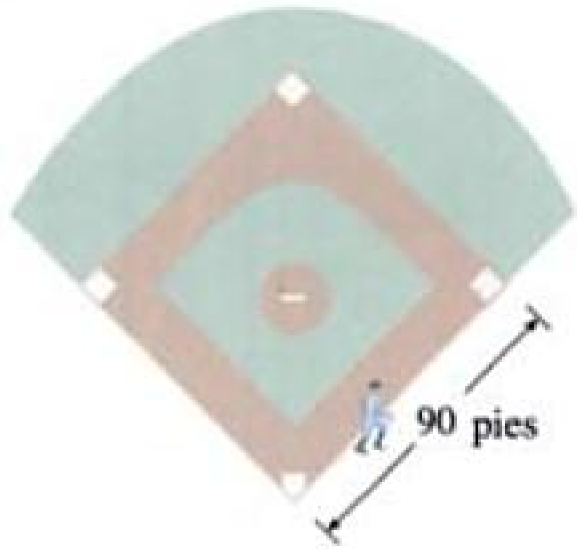
8. A mediodía el barco A está a 150 km al oeste del barco B. La embarcación A navega hacia el este a 35 km/h y B hacia el norte a 25 km/h. ¿Con qué velocidad cambia la distancia entre ambos a las 4:00 PM?

9. Dos automóviles parten del mismo punto. Uno va hacia el sur a 60 mi/h y el otro hacia el oeste, a 25 mi/h. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre ellos después de dos horas?

10. Un reflector en el piso alumbra un muro a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de altura camina del reflector hacia el muro a una velocidad de 1.6 m/s, ¿con qué velocidad disminuye la altura de su sombra en el edificio cuando está a 4 m de la pared?

11. Una persona comienza a caminar hacia el norte a 4 pies/s desde un punto P. Cinco minutos después una señora empieza a dirigirse hacia el sur, a 5 pies/s, partiendo de un punto a 500 pies hacia el este de P. ¿Con qué velocidad se separan los dos a los 15 min de que la señora inició su caminata?

12. Un diamante de beisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Un bateador le pega a la bola y corre hacia la primera base a una velocidad de 24 pies/s.
   (a) ¿Con qué velocidad disminuye su distancia a la segunda base cuando está a la mitad del camino a la primera?
   (b) ¿Con qué velocidad aumenta su distancia a la tercera base en ese momento?



13. La altura de un triángulo aumenta con una velocidad de 1 cm/min, mientras que su área lo hace a una velocidad de 2 cm²/min. ¿Con qué velocidad aumenta la base del triángulo cuando la altura es 10 cm y el área es 100 cm²?

14. Una lancha es remolcada hacia un muelle con una cuerda fija a su proa que pasa por una polea en el muelle. Esa polea está 1 m más alta que la proa del bote. Si se corre la cuerda a una velocidad de 1 m/s, ¿con qué velocidad se acerca la lancha al muelle cuando está a 8 m de distancia de él?

15. Al mediodía, el barco A se encuentra al oeste del barco B a una distancia de 100 kms. A navega al sur a 35 km/h y B al norte a 25 km/h ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre A y B a las 4 de la tarde?

16. Una partícula se mueve por la curva $y = \sqrt{x}$. Al pasar por el punto (4, 2), su abcisa crece a razón de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la partícula al origen en ese instante?

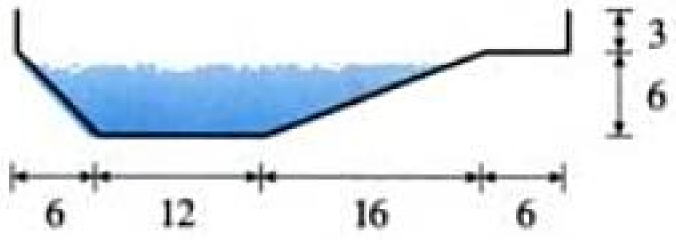
17. Un tanque cónico invertido sale del agua con un gasto de 10,000 cm³/min y al mismo tiempo se bombea agua al tanque con un gasto constante. Ese tanque tiene 6 m de altura y 4 m de diámetro en la parte superior. Si el nivel de agua se eleva a una velocidad de 20 cm/min cuando la altura del nivel es 2 m, calcule el flujo de agua hacia el tanque.

18. Un canal tiene 10 pies de largo y sus extremos presentan la forma de triángulos isósceles, de 3 pies transversales en la parte superior y una altura de 1 pie. Si el canal se llena con agua a un flujo de 12 pies³/min, ¿con qué velocidad cambia el nivel del agua cuando hay seis pulgadas de profundidad?

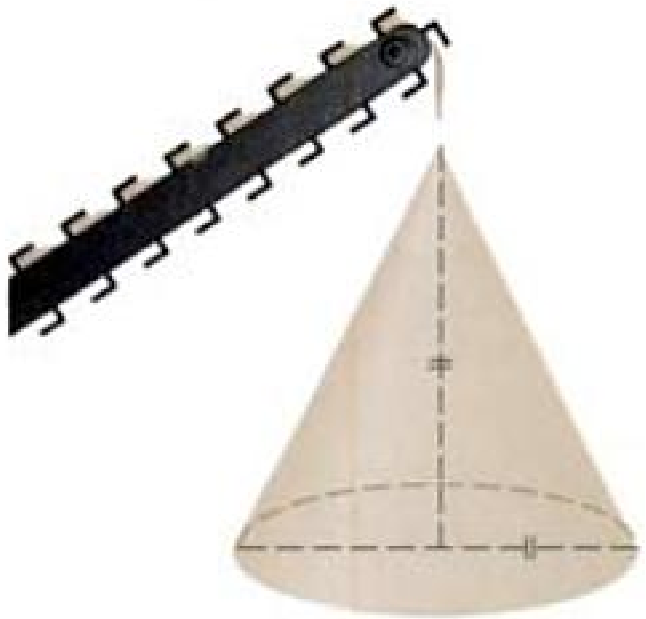
19. Un canal de agua tiene 10 m de longitud y su sección transversal posee la forma de un trapezoide isósceles, de 30 cm de ancho en el fondo, 80 cm de ancho en la parte superior y 50 cm de

altura. Si el canalón se llena con 0.2 m^3/min, de agua, ¿con qué velocidad sube el nivel del agua cuando la profundidad de ésta es de 30 centímetros?

20. Una alberca mide 20 pies de ancho, 40 de longitud, 3 de fondo en la parte baja y 9 pies en la parte honda. (En la figura que sigue se ilustra una sección longitudinal.) Si se llena con un flujo de 0.8 pies^3/min, ¿con qué velocidad sube el nivel de agua cuando la profundidad, respecto a la parte honda, alcanza 5 pies?



21. Con una banda transportadora se descarga grava en un montón a una capacidad de 30 pies^3/min; su tamaño es tal que el montón que se forma es un cono cuyo diámetro en la base siempre es igual a su altura. ¿Con qué velocidad cambia la altura del montón cuando mide 10 pies de altura?



22. Una cometa a 100 pies del suelo se mueve horizontalmente con una velocidad de 8 pies/s. ¿Con qué velocidad cambia el ángulo formado por el hilo y la horizontal, cuando se han soltado 200 pies de cuerda?

23. Dos lados de un triángulo miden 4 m y 5 m, y el ángulo entre ellos aumenta con una rapidez de 0.06 rad/s. Calcule la rapidez con que el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados, de longitud fija, es de $\pi/3$.

24. Dos lados de un triángulo tiene longitudes de 12 m y 15 m. El ángulo que forman aumenta con una velocidad de 2 °/min. ¿Con qué rapidez crece el tercer lado cuando el ángulo entre los de longitud fija es de 60 grados?

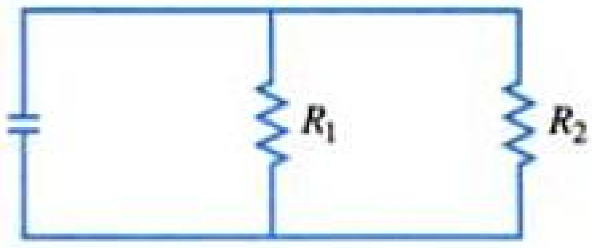
25. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. En determinado instante el volumen es 600 cm^3, la presión es 150 kPa y crece a una razón de cambio de 20 kPa/min. ¿Con qué velocidad disminuye el volumen en este momento?

26. Cuando el aire se expande adiabáticamente (sin ganar ni perder calor), su presión P y su volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. En cierto instante el volumen es 400 cm^3 y la presión es 80 kPa y disminuye a 10 kPa/min. ¿Con qué velocidad aumenta el volumen en ese momento?

27. Si dos resistores R_1 y R_2 están conectados en paralelo, como en la figura, entonces la resistencia total R, medida en Ohms (Ω), está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

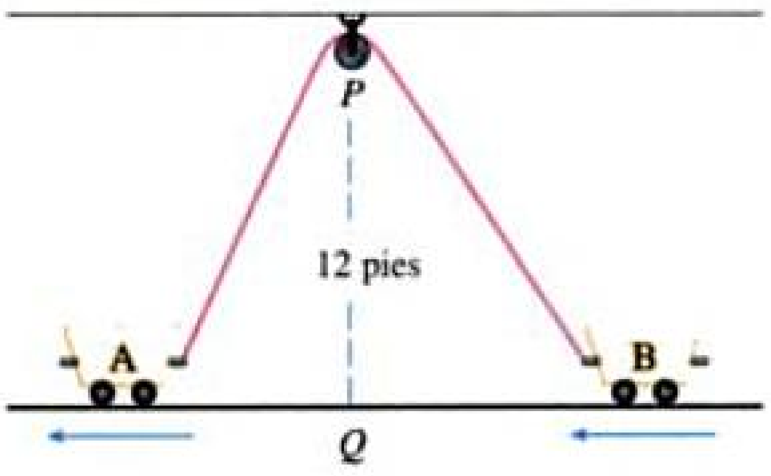
Si R_1 y R_2 crecen a razón de 0.3 Ω/s y 0.2 Ω/s, respectivamente, ¿con qué rapidez cambia R en el instante en que $R_1 = 80\ \Omega$ y $R_2 = 100\ \Omega$?



28. El peso del cerebro B como función del peso corporal W en los peces se ha modelado con la función de potencia $B = 0.007W^{2/3}$, donde B y W se miden en gramos. Un modelo para el peso corporal como función de la longitud L del cuerpo (en centímetros) es $W = 0.12L^{2.53}$. Si a lo largo de 10 millones la longitud promedio de cierta especie de pez evolucionó de 15 cm a 20 cm con rapidez constante, ¿con qué rapidez estaba creciendo el cerebro de esta especie cuando la longitud promedio era de 18 cm?

29. Una escalera de 10 pies de longitud se apoya en un muro vertical. Si su extremo inferior se desliza alejándose de la pared con una velocidad de 2 pies/s, ¿con qué velocidad cambia el ángulo formado entre la parte superior de la escalera y el muro, cuando ese ángulo mide $\pi/4$ radianes?

30. Dos góndolas, A y B, están unidas por una cuerda de 39 pies de longitud que pasa por una polea P. El punto Q está sobre el piso, a 12 pies directamente abajo de P y entre las góndolas. Se remolca A, apartándola de Q, a una velocidad de 2 pies/s. ¿Con qué velocidad se mueve la góndola B hacia Q en el momento en que A está a 5 pies de Q?



31. Se emplea una cámara de TV a 4,000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. Un cohete asciende verticalmente, con una velocidad de 600 pies/s cuando ya se encuentra a 3,000 pies del suelo.

(a) ¿Con qué velocidad crece la distancia de la cámara de TV al cohete en ese momento?

(b) Si la cámara siempre se encuentra enfocada en el cohete, ¿a qué tasa se modifica su ángulo de elevación en ese momento?

32. Un faro se encuentra en una isleta a 3 km del punto más cercano, P, de una costa recta, y su linterna gira a 4 rpm. ¿Con qué velocidad el haz luminoso barre la costa cuando pasa por un punto a 1 km de P?

33. Un avión vuela a velocidad constante de 300 km/h y pasa a 1 km de altura sobre un radar terrestre. La nave va en ascenso, en un ángulo de 30°. ¿Con qué velocidad aumenta la distancia del aeroplano a la estación de radar después de un minuto?

34. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 mi/h y la otra hacia el noreste, a 2 mi/h. ¿Con qué velocidad cambia la distancia entre ellas después de 15 minutos?

35. Un corredor entrena en una pista circular de 100 m de radio, a una velocidad constante de 7 m/s. Su amigo está parado a 200 m del centro de la pista. ¿Con qué velocidad cambia la distancia entre ambos cuando se encuentran a 200 metros?

36. El minutero de un reloj mide 8 mm de longitud y el horario, 4 mm. ¿Con qué velocidad cambia la distancia entre las puntas de las manecillas a la una en punto?

3.11 Aproximaciones lineales y diferenciales

Hemos visto que una curva está muy cerca de su recta tangente en la vecindad del punto de tangencia. De hecho, al hacer una aproximación hacia un punto en la gráfica de una función vemos que la curva se parece más y más a su tangente (véase la figura 2 de la sección 2.7 y la figura 3 de la sección 2.8). Esta observación es la base de un método para la aproximación de valores funcionales.

La idea es que podría ser fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil o aun imposible calcular los valores cercanos de f. De manera que nos conformamos con los valores fácilmente calculables de la función lineal L que tiene como gráfica a la recta tangente de f en el punto $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

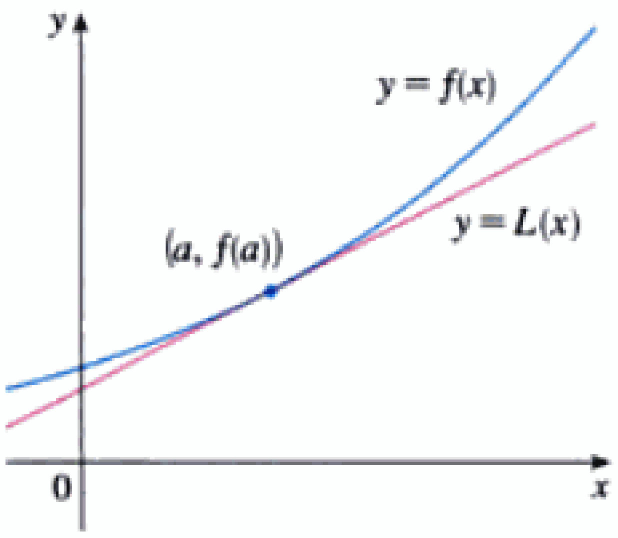


FIGURA 1

En otras palabras, usamos la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación de esta recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

es denominada la **aproximación lineal** o **aproximación por la recta tangente** de f en a. La función lineal que tiene como gráfica a esta recta tangente, es decir

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se llama la **linealización** de f en a.

El siguiente ejemplo es típico de las situaciones en donde usamos una aproximación lineal para predecir el comportamiento futuro de una función de la que se tienen datos empíricos.

EJEMPLO 1 □ Supongamos que luego de rellenar un pavo su temperatura es de 50 °F y entonces lo mete a un horno a 325 °F. Pasada una hora el termómetro de carne indica que el pavo esta a 93 °F y después de dos horas indica 129 °F. Prediga la temperatura del pavo a las tres horas.

SOLUCIÓN Si $T(t)$ representa la temperatura del pavo a las t horas, sabemos que $T(0) = 50$, $T(1) = 93$ y $T(2) = 129$. Para hacer una aproximación lineal con $a = 2$ necesitamos una estimación de la derivada $T'(2)$. Puesto que

$$T'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{T(t) - T(2)}{t - 2}$$

podríamos estimar $T'(2)$ por medio del cociente de diferencias con $t = 1$:

$$T'(2) \approx \frac{T(1) - T(2)}{1 - 2} = \frac{93 - 129}{-1} = 36$$

Esto equivale a aproximar la tasa instantánea de cambio de la temperatura por la tasa promedio de cambio entre $t = 1$ y $t = 2$ que es 360 °F/h. Con esta estimación la aproximación (1) lineal a la temperatura después de tres horas es

$$\begin{aligned} T(3) &\approx T(2) + T'(2)(3 - 2) \\ &\approx 129 + 36 \cdot 1 = 165 \end{aligned}$$

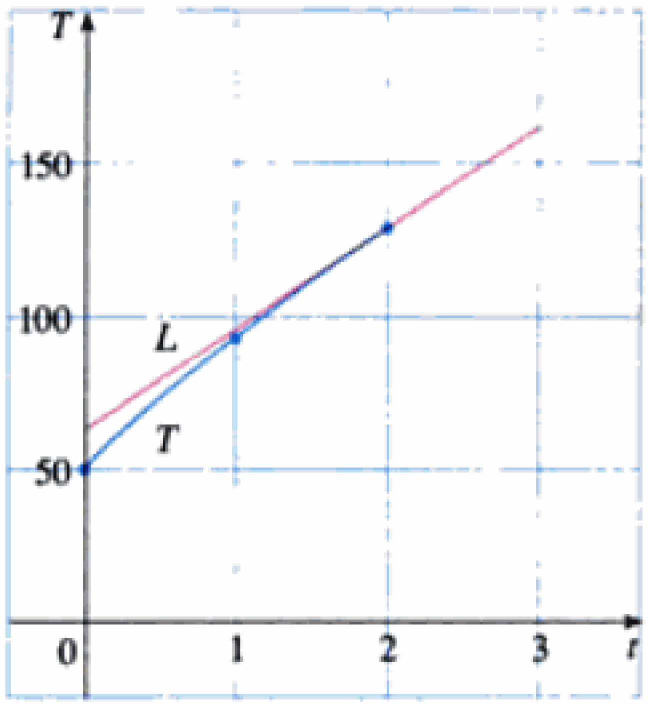


FIGURA 2

De manera que la temperatura que se pronostica a las tres horas es 165 °F.

Podemos obtener una estimación más exacta para $T'(2)$ al marcar los datos en un sistema de ejes como en la figura 2 y estimar la pendiente de la recta tangente en $t = 2$ como

$$T'(2) \approx 33$$

Entonces, nuestra aproximación lineal viene a ser

$$T(3) \approx T(2) + T'(2) \cdot 1 \approx 129 + 33 = 162$$

y nuestro pronóstico mejorado de la temperatura es 162 °F.

Dado que la curva de temperatura está por debajo de la recta tangente parece que la temperatura real a las tres horas es algo menor de 162 °F, tal vez más cerca de 160 °F. □

EJEMPLO 2 □ Determine la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $a = 1$ y empléela para calcular los valores aproximados de $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

y, por consiguiente, $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Al introducir estos valores en la ecuación (2), la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación lineal correspondiente (1) es

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

En particular,

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

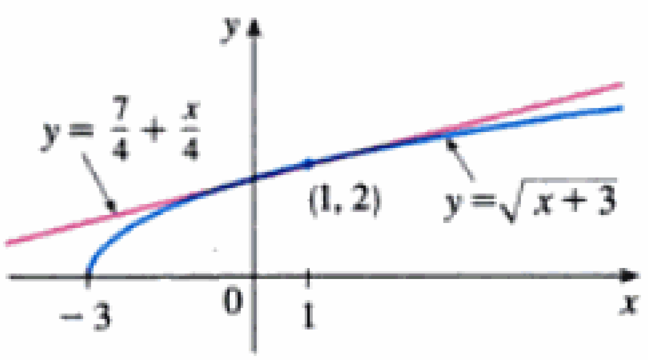


FIGURA 3

En la figura 3 vemos la aproximación lineal del ejemplo 2. Se puede observar que la aproximación por la recta tangente a la función dada es buena cuando x es casi 1. También vemos que hemos hecho sobreestimaciones porque la recta tangente va por arriba de la curva.

Por supuesto que una calculadora proporciona aproximaciones de $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal de una aproximación en todo un intervalo. □

En la tabla que sigue comparamos los valores estimados por la aproximación lineal del ejemplo 2 con los verdaderos. Se observará, a partir de la tabla y de la figura 3, que la aproximación con la recta tangente da buenas estimaciones para x cercano a 1, pero la exactitud de la aproximación se deteriora cuando x se encuentra algo lejos de 1.

	x	Desde $L(x)$	Valor actual
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

¿Qué tan buena es la aproximación obtenida en el ejemplo 2? El ejemplo siguiente muestra que al usar una calculadora graficadora o una computadora podemos determinar un intervalo tal que en toda su extensión una aproximación lineal proporciona una exactitud específica.

EJEMPLO 3 □ ¿Para qué valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

posee exactitud con un margen de 0.5? y ¿dentro de un margen de 0.1?

SOLUCIÓN Exactitud con margen de 0.5 significa que las funciones sólo deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

En forma equivalente se escribe

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

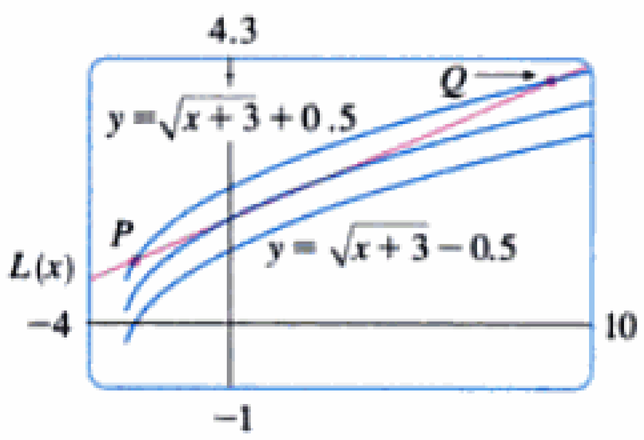


FIGURA 4

Esto nos dice que la aproximación lineal debe estar entre las curvas obtenidas desplazando la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba o hacia abajo la cantidad 0.5. En la figura 4 vemos la tangente $y = (7 + x)/4$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y Q. Con la función de amplificación y empleando el cursor podemos estimar que la abscisa de P es –2.66 y que la de Q es 8.66. Así, en la gráfica vemos que la aproximación

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

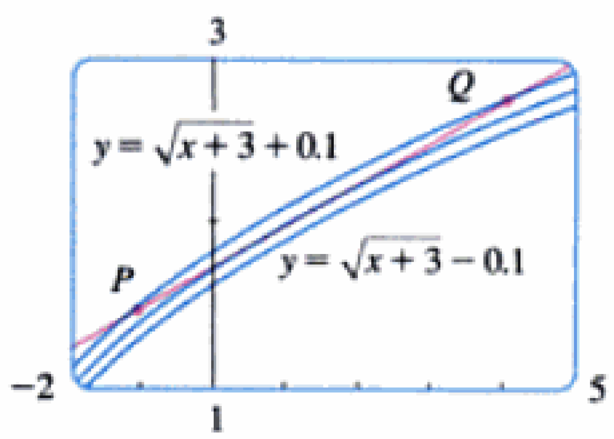


FIGURA 5

tiene 0.5 de exactitud cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Ya redondeado al valor de la seguridad.)

De igual forma, en la figura 5 apreciamos que la aproximación es con error de 0.1 dentro de $-1.1 < x < 3.9$. □

Aplicaciones a la física

En la física se acostumbra usar aproximaciones lineales. Al analizar las consecuencias de una ecuación los físicos a veces reemplazan una función por una aproximación lineal de ella. Por ejemplo, al deducir una fórmula para el periodo de un péndulo en los textos de física se obtiene la expresión $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial y luego reemplazan sen θ por θ haciendo la observación de que sen θ es muy cercano a θ si el valor de θ mismo no es muy grande. (Véase, por ejemplo, *Physics: Calculus,* de Eugene Hecht Pacific Grove California, 1996, pág. 457.) El lector puede verificar que la linealización de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$ de manera que la aproximación lineal de 0 es

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(véase el ejercicio 46). Así pues, la deducción de la fórmula para el periodo del péndulo, en efecto utiliza la aproximación por la recta tangente a la función seno.

Otro ejemplo lo proporciona la teoría de la óptica donde los rayos de luz que llegan con ángulo relativamente pequeño con respecto al eje óptico se llaman *rayos paraxiales*. En la óptica paraxial o gaussiana tanto sen θ como cos θ se reemplazan por sus linealizaciones. En otras palabras se usan las aproximaciones lineales

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \qquad \text{y} \qquad \cos \theta \approx 1$$

ya que θ es cercano a 0. Los resultados de los cálculos hechos con estas aproximaciones se convierten en los instrumentos básicos en el diseño de lentes. [Véase *Optics,* 2da edición, por Eugene Hecht (Reading, MA: Addison-Wesley, 1987), p. 134.]

En la sección 11.12 se presentarán otras aplicaciones de la idea de aproximación lineal a la física.

Diferenciales

Las ideas que hay detrás de las aproximaciones lineales a veces se presentan y formulan en la terminología y notación de las *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente que puede tomar cualquier valor real. La **diferencial** dy se define en términos de dx por la ecuación

□ Si $dx \neq 0$, dividimos ambos lados de la ecuación 3 por dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Hemos visto ecuaciones parecidas antes, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse como una razón de diferenciales.

$$\boxed{3} \qquad dy = f'(x)\,dx$$

Así, dy es la variable dependiente; depende del valor de x y de dx. Si a dx se le da un valor específico y x toma un valor real dentro del dominio de f queda determinado el valor numérico de dy.

El significado geométrico de las diferenciales se muestra en la figura 6. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos de la gráfica de f; y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

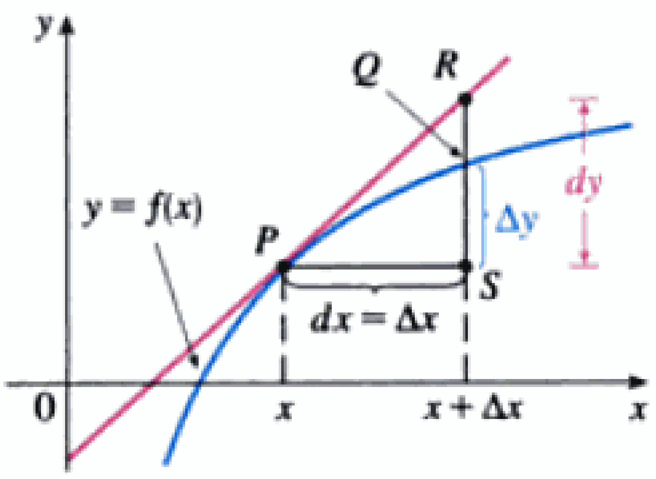


FIGURA 6

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Así, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)\,dx = dy$. Por lo tanto, dy representa la cantidad que se eleva o que desciende la recta tangente (el cambio en la linealización) mientras que Δy representa la cantidad en que la curva $y = f(x)$ se eleva o disminuye cuando x cambia en una cantidad dx.

EJEMPLO 4 □ Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x varía (a) de 2 a 2.05 y (b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN
(a) Tenemos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$
$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$
$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

□ La figura 7 muestra la función del ejemplo 4, y una comparación entre dy y Δy cuando $a = 2$. La pantalla mide $[1.8, 2.5]$ por $[6, 18]$.

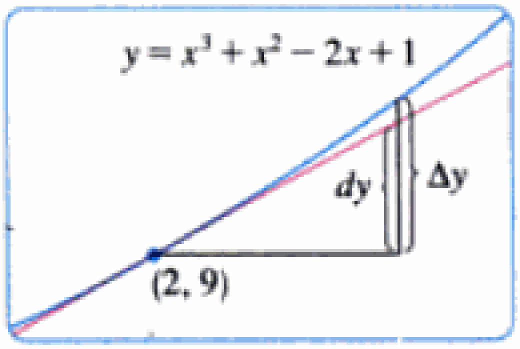


FIGURA 7

En general, $$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

(b) $$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$
$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.01 = 0.14$$ □

Observe que la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora cuando Δx se reduce en el ejemplo 4. También notamos que fue más fácil calcular dy que Δy. Cuando las funciones son más complicadas puede ser imposible calcular Δy con exactitud. En estos casos la aproximación mediante diferenciales tiene especial utilidad.

En la notación de las diferenciales, la aproximación lineal (1) puede escribirse como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en el ejemplo 2, tenemos

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, entonces

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y $$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

tal como hallamos en el ejemplo 2.

Nuestro último ejemplo ilustra el uso de las diferenciales al estimar los errores debidos a las medidas aproximadas.

EJEMPLO 5 □ Se midió el radio de una esfera y dio como resultado 21 cm, con un posible error de medición, cuando mucho, de 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo si se emplea el valor del radio, cuando se calcula el volumen de la esfera?

SOLUCIÓN Si el radio de la esfera es r, su volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si se representa el error en el valor medido de r como $dr = \Delta r$, el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, que se puede establecer aproximadamente mediante la diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se transforma en

$$dV = 4\pi(21)^2 0.05 \approx 277$$

El error máximo en el volumen calculado es de unos 277 cm^3. □

NOTA □ Aunque podrá parecer que el error posible en el ejemplo 5 es demasiado grande, el **error relativo** brinda un panorama mejor; este error se calcula dividiendo el error calculado entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Así, el error relativo en el volumen es como el triple del error relativo en el radio. Con el ejemplo 5 el error relativo en el radio es aproximadamente $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de aproximadamente 0.007 en el volumen. Los errores podrían también expresarse como **errores porcentuales** de 0.24% en el radio y de 0.7% en el volumen.

3.11 Ejercicios

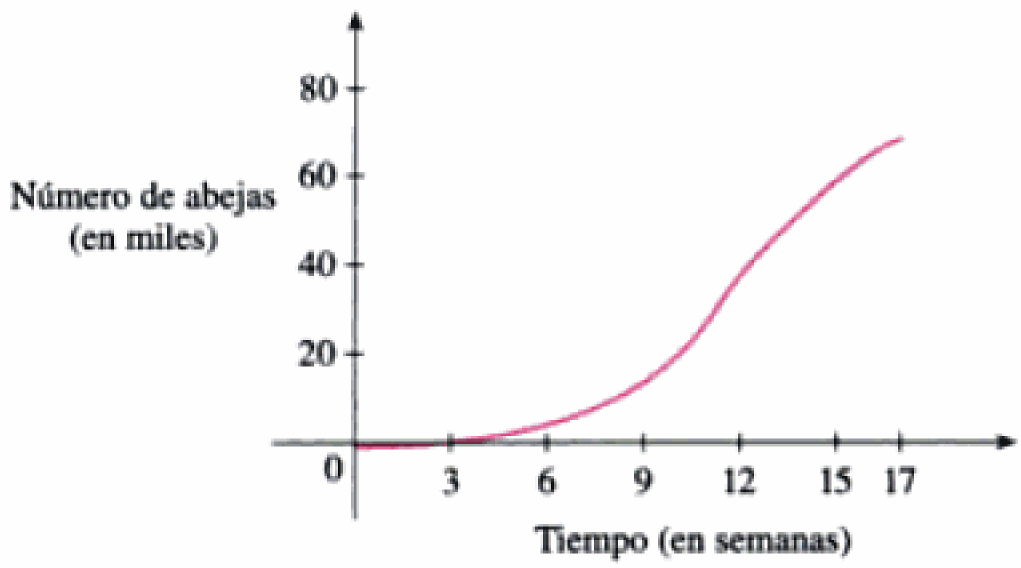
1. El pavo del ejemplo 1 se saca del horno cuando su temperatura alcanza 185 °F y se le pone sobre una mesa en un cuarto donde la temperatura ambiente es 75 °F. Al cabo de 10 minutos la temperatura del pavo es 172 °F y pasados 20 minutos es 160 °F. Use una aproximación lineal para predecir la temperatura del pavo después de media hora; ¿piensa qué es una sobreestimación o una subestimación su predicción? ¿Por qué?

2. La presión atmosférica p disminuye al aumentar la altitud h. A una temperatura de 15 °C la presión es 101.3 kilopascales (kPa) a nivel del mar, 87.1 kPa a la altitud $h = 1$ km y 74.9 kPa en $h = 2$ km. Use una aproximación lineal para estimar la presión atmosférica a la altitud de 3 km.

3. La tabla es una lista de las cantidades de dinero circulante *per cápita* el 30 de junio de cada uno de los años progresivos indicados. Use una aproximación lineal para estimar la cantidad de dinero circulante *per cápita* en el año 2000. ¿La predicción se subestima o sobreestima? ¿Por qué?

Año	1960	1970	1980	1990
Circulante *per cápita*	\$177	\$265	\$571	\$1063

4. La figura muestra la gráfica de una población de abejas en un apiario.
   (a) Use una aproximación lineal para predecir la población a las 18 y a las 20 semanas.
   (b) ¿Las predicciones precedentes se sobreestiman o subestiman? ¿Por qué?
   (c) ¿Cuál de las predicciones piensa que sea la más exacta? ¿Por qué?



5–8 □ Encuentre la linealización $L(x)$ de la función en a.

5. $f(x) = x^3,\quad a = 1$

6. $f(x) = \ln x,\quad a = 1$

7. $f(x) = e^{-2x},\quad a = 0$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x},\quad a = -8$

9. Encuentre la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$ en $a = 0$ y utilícela para aproximar los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Grafique f y la tangente lineal.

10. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ en $a = 0$ y úsela para aproximar los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Grafique g y la tangente lineal.

11–14 □ Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. Luego determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es apropiada dentro de 0.1.

11. $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

12. $\tan x \approx x$

13. $1/(1 + 2x)^4 \approx 1 - 8x$

14. $e^x \approx 1 + x$

15–20 □ Halle la diferencial de la función.

15. $y = x^4 + 5x$

16. $y = \cos \pi x$

17. $y = x \ln x$

18. $y = \sqrt{1 + t^2}$

19. $y = \dfrac{u + 1}{u - 1}$

20. $y = (1 + 2r)^{-4}$

21–26 □ (a) Halle la diferencial dy y (b) evalúe dy para los valores dados de x y dx.

21. $y = x^2 + 2x, \quad x = 3, \; dx = \frac{1}{2}$

22. $y = e^{x/4}, \quad x = 0, \; dx = 0.1$

23. $y = (x^2 + 5)^3, \quad x = 1, dx = 0.05$

24. $y = \sqrt{1 - x}, \quad x = 0, dx = 0.02$

25. $y = \cos x, \quad x = \pi/6, dx = 0.05$

26. $y = \operatorname{sen} x, \quad x = \pi/6, dx = -0.1$

27–30 □ Calcule Δy y dy para los valores de x y $dx = \Delta x$ que se dan. Luego, haga un diagrama como en la figura 6 que muestre los segmentos rectilíneos de longitudes dx, dy, y Δy.

27. $y = x^2, \quad x = 1, \Delta x = 0.5$

28. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \Delta x = 1$

29. $y = 6 - x^2, \quad x = -2, \Delta x = 0.4$

30. $y = 16/x, \quad x = 4, \Delta x = -1$

31–36 □ Use diferenciales (o, en forma equivalente, una aproximación lineal) para estimar el número indicado.

31. $\sqrt{36.1}$

32. $\sqrt[3]{1.02} + \sqrt[4]{1.02}$

33. $\frac{1}{10.1}$

34. $(1.97)^6$

35. $\operatorname{sen} 59°$

36. $\ln 1.07$

37–38 □ Explique por qué es buena la aproximación.

37. $\sec 0.08 \approx 1$

38. $(1.01)^6 \approx 1.06$

39. Se encontró que el contorno de un cubo era de 30 m con un posible error de medición de 0.1 cm. Use diferenciales para estimar el posible error máximo al calcular (a) el volumen del cubo y (b) su área superficial.

40. El radio de un disco circular de 24 cm está dado con un error de medición máximo de 0.2 cm.
(a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada ¿Cuál es el error relativo?
(b) Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

41. La circunferencia de una esfera midió 84 cm, con error posible de 0.5 cm.
(a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?
(b) Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

42. Use diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una capa de pintura de 0.05 cm de ancho en un domo hemisférico con un diámetro de 50 m.

43. (a) Use diferenciales para encontrar una fórmula para el volumen aproximado de una capa delgada de altura h, cilíndrica r y grosor Δr.
(b) ¿Qué error se comete al usar la fórmula de la parte a)?

44. Cuando la sangre fluye a través del vaso sanguíneo, el flujo F (volumen de sangre por unidad de tiempo que fluye por un punto dado) es proporcional al radio R elevado a la cuarta potencia del vaso sanguíneo:

$$F = kR^4$$

(Esto se conoce como la ley de Poiseuille; demostraremos por qué es verdadera en la sección 8.4.) Una arteria parcialmente obstruida puede expandirse mediante una operación llamada angioplastia, en la cual un catéter de punta redonda se infiltra en la arteria para destaparla y restablecer el flujo sanguíneo normal.

Muestre que el cambio relativo en F es de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectaría el aumento de 5% del radio en el flujo sanguíneo?

45. Establezca las siguientes reglas para el trabajo con diferenciales (donde c denota una constante y u y v son funciones de x).
(a) $dc = 0$
(b) $d(cu) = c\,du$
(c) $d(u + v) = du + dv$
(d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$
(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
(f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

46. En la gráfica 457 de *Physics: Calculus*, de Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks-Cole, 1996), en donde se deduce la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el periodo de un péndulo de longitud L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial del péndulo. Entonces dice, "para ángulos pequeños el valor de θ en radianes es casi igual al valor de sen θ; su diferencia es menor que 2% hasta aproximadamente 20 grados".

(a) Verifique la aproximación lineal en 0 para la función seno:

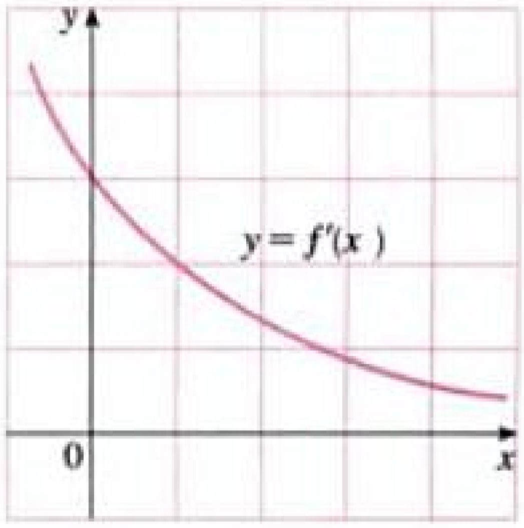
$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(b) Use un graficador para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren en menos de 2%. Entonces verifique la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados.

47. La única información que tenemos de la función f es que $f(1) = 5$ y que la gráfica de la *derivada* es como se muestra.

(a) Use una aproximación lineal para estimar $f(0.9)$ y $f(1.1)$.

(b) ¿Son demasiado grandes o pequeñas sus estimaciones en la parte (a)? Explique.



48. Suponga que no se tiene una fórmula para $g(x)$ pero que se sabe que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x.

(a) Use una aproximación lineal para estimar $g(1.95)$ y $g(2.05)$.

(b) Sus estimaciones de la parte (a), ¿son demasiado grandes o pequeñas? Explique.

Proyecto de laboratorio

Polinomios de Taylor

La aproximación por la recta tangente $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$, cerca de $x = a$, porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma razón de cambio (derivada) en a. Para tener una aproximación mejor, que una lineal, intentemos una aproximación de segundo grado (cuadrática) $P(x)$. En otras palabras, aproximemos una curva mediante una parábola, en lugar de por una recta. Para tener la seguridad de que la aproximación es buena, estipulemos lo siguiente:

(i) $P(a) = f(a)$ (P y f deben tener el mismo valor en a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P y f deben tener la misma razón de cambio en a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (Las pendientes de P y f deben tener la misma razón de cambio.)

1. Encuentre la aproximación cuadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para la función $f(x) = \cos x$ que satisfaga las condiciones (i), (ii), y (iii) con $a = 0$. Grafique P, f, y la aproximación lineal $L(x) = 1$ en una pantalla común. Comente qué tan bien las funciones P y L se aproximan a f.

2. Determine los valores de x para los que la aproximación cuadrática $f(x) = P(x)$ del problema 1 es exacta con una diferencia menor de 0.1. [*Sugerencia*: Grafique $y = P(x)$, $y = \cos x - 0.1$, y $y = \cos x + 0.1$ en una pantalla común.]

3. Para obtener una aproximación de una función f mediante una función cuadrática P cerca de un número a, lo mejor es escribir P en la forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Demuestre que la función cuadrática que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) es

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encuentre la aproximación cuadrática para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ cerca de $a = 1$. Trace las gráficas de f, la aproximación cuadrática y la aproximación lineal del ejemplo 3 de la sección 3.11 en una pantalla común. ¿Qué podría concluir?

5. En lugar de quedarnos conformes con una aproximación lineal o una cuadrática para $f(x)$ cerca de $x = a$, intentemos hallar mejores aproximaciones, con polinomios de grado más alto. Busquemos un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus n primeras derivadas tengan los mismos valores en $x = a$ como f y sus n primeras derivadas. Derive repetidas veces y haga $x = a$, para demostrar que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ y, en general,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

se llama **polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f, con centro en a.**

6. Encuentre el polinomio de Taylor de octavo grado, con centro en $a = 0$ para la función $f(x) = \cos x$. Grafique f y los polinomios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8 en el rectángulo de visión $[-5, 5]$ by $[-1.4, 1.4]$ y comente qué tan bien se aproximan a f.

3 Repaso

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

1. Exprese cada una de las siguientes reglas de derivación, tanto en símbolos como en palabras.
   (a) Regla de la potencia
   (b) Regla del múltiplo constante
   (c) Regla de la suma
   (d) Regla de la diferencia
   (e) Regla del producto
   (f) Regla del cociente
   (g) Regla de la cadena

2. Dé las derivadas de cada función.
   (a) $y = x^n$ (b) $y = e^x$ (c) $y = a^x$
   (d) $y = \ln x$ (e) $y = \log_a x$ (f) $y = \operatorname{sen} x$
   (g) $y = \cos x$ (h) $y = \tan x$ (i) $y = \csc x$
   (j) $y = \sec x$ (k) $y = \cot x$ (l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
   (m) $y = \cos^{-1} x$ (n) $y = \tan^{-1} x$ (o) $y = \operatorname{senh} x$
   (p) $y = \cosh x$ (q) $y = \tanh x$ (r) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
   (s) $y = \cosh^{-1} x$ (t) $y = \tanh^{-1} x$

3. (a) ¿Cómo se define el número e?
   (b) Exprese e como un límite.
   (c) ¿Por qué en cálculo se usa la función exponencial natural, $y = e^x$ con más frecuencia que las demás funciones exponenciales, $y = a^x$?
   (d) ¿Por qué en el cálculo se usa más la función logarítmica natural, $y = \ln x$ que las demás funciones logarítmicas, $y = \log_a x$?

4. (a) Explique cómo funciona la derivación implícita.
   (b) Explique cómo trabaja la derivación logarítmica.

5. ¿Qué son la segunda y la tercera derivada de una función f? Si f es la función de posición de un objeto, ¿cómo interpreta f'' y f'''?

6. (a) Escriba una expresión para la linealización f en a.
   (b) Si $y = f(x)$, escriba una expresión para la diferencial dy.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera, explique por qué. Si es falsa explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son derivables, entonces
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Si f y g son derivables, entonces
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Si f y g son derivables, entonces
$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Si $y = e^2$, entonces $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Si $g(x) = x^5$, entonces $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

13. Una ecuación de la tangente a la parábola $y = x^2$ en $(-2, 4)$ es $y - 4 = 2x(x + 2)$.

EJERCICIOS

1–46 □ Calcule y'.

1. $y = (x + 2)^8(x + 3)^6$

2. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

3. $y = \dfrac{x}{\sqrt{9 - 4x}}$

4. $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

5. $y = \operatorname{sen}(\cos x)$

6. $y = \operatorname{sen}^{-1}(e^x)$

7. $y = xe^{-1/x}$

8. $y = x^r e^{sx}$

9. $y = \tan\sqrt{1 - x}$

10. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$

11. $y = \dfrac{x}{8 - 3x}$

12. $y = \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}}$

13. $y = \sec 2\theta$

14. $y = -2/\sqrt[4]{t^3}$

15. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

16. $y = \ln(\csc 5x)$

17. $y = e^{cx}(c \operatorname{sen} x - \cos x)$

18. $y = \ln(x^2e^x)$

19. $y = e^{e^x}$

20. $y = 5^{x\tan x}$

21. $x^2y^3 + 3y^2 = x - 4y$

22. $x\tan y = y - 1$

23. $y = \sqrt[5]{x\tan x}$

24. $y = \sec(1 + x^2)$

25. $x^2 = y(y + 1)$

26. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

27. $y = \dfrac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 2)(x - 3)}$

28. $y = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$

29. $y = \log_{10}(x^2 - x)$

30. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

31. $y = \ln\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$

32. $y = \arctan(\operatorname{arcsen}\sqrt{x})$

33. $y = \operatorname{sen}(\tan\sqrt{1 + x^3})$

34. $xe^y = y - 1$

35. $y = \cot(3x^2 + 5)$

36. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

37. $y = \cos^2(\tan x)$

38. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$

39. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}\,(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

40. $y = \ln|\csc 3x + \cot 3x|$

41. $y = x\operatorname{senh}(x^2)$

42. $y = x^{\cos x}$

43. $y = \ln(\cosh 3x)$

44. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

45. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$

46. $y = x\tanh^{-1}\sqrt{x}$

47. Si $f(x) = 1/(2x - 1)^5$, halle $f''(0)$.

48. Si $g(t) = \csc 2t$, halle $g'''(-\pi/8)$.

49. Encuentre y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

50. Halle $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = 1/(2 - x)$.

51. Use la inducción matemática para mostrar que si $f(x) = xe^x$, entonces $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

52. Evalúe $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3}{\tan^3 2t}$.

53–57 □ Halle una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

53. $y = \dfrac{x}{x^2 - 2}$, $(2, 1)$

54. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$, $(4, 1)$

55. $y = \tan x$, $(\pi/3, \sqrt{3})$

56. $y = x\sqrt{1 + x^2}$, $(1, \sqrt{2})$

57. $y = \ln(e^x + e^{2x})$, $(0, \ln 2)$

58. Si $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, halle $f'(x)$. Grafique f y f' en la misma pantalla y comente.

59. (a) Si $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, halle $f'(x)$.
(b) Halle ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x\sqrt{5 - x}$ en los puntos $(1, 2)$ y $(4, 4)$.
(c) Ilustre la parte (b) graficando la curva y las rectas tangentes.
(d) Verifique que sea razonable su respuesta en (a) comparando las gráficas de f y f'.

60. (a) Si $f(x) = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, halle f' y f''.
(b) Verifique que sean coherentes sus respuestas de la parte (a) comparando las gráficas de f, f' y f''.

61. ¿En qué puntos de la curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, es horizontal la tangente?

62. Halle los puntos de la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde la tangente tenga pendiente.

63. Si $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, muestre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

64. (a) Derivando la fórmula del coseno del ángulo doble

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

obtenga la correspondiente para la función seno.

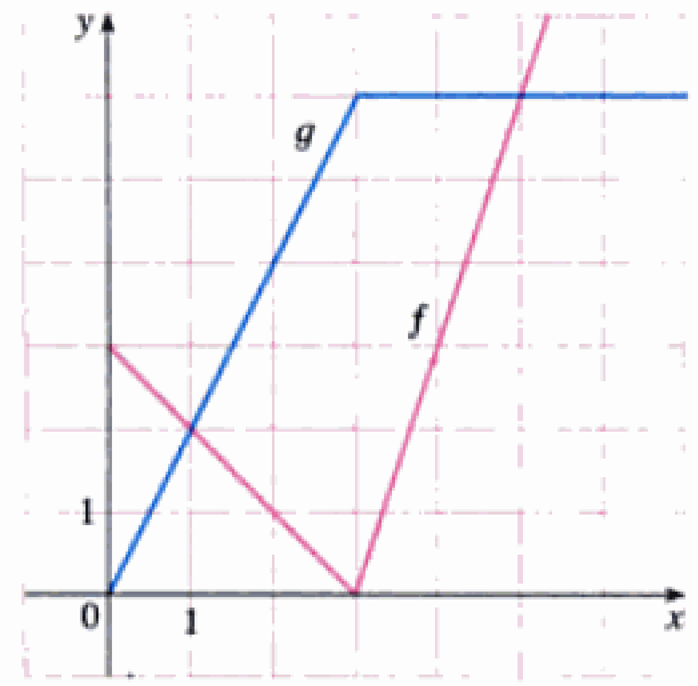
(b) Derivando la fórmula de adición

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

obtenga la correspondiente para la función coseno.

65. Suponga que $h(x) = f(x)g(x)$ y $F(x) = f(g(x))$, donde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $f'(5) = 11$. Encuentre (a) $h'(2)$ y (b) $F'(2)$.

66. Si f y g son las gráficas que se muestran, sea $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$, y $C(x) = f(g(x))$. Encuentre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$, y (c) $C'(2)$.



67–74 □ Halle f' en términos de g'.

67. $f(x) = x^2 g(x)$

68. $f(x) = g(x^2)$

69. $f(x) = [g(x)]^2$

70. $f(x) = g(g(x))$

71. $f(x) = g(e^x)$

72. $f(x) = e^{g(x)}$

73. $f(x) = \ln |g(x)|$

74. $f(x) = g(\ln x)$

75–77 □ Halle h' en términos de f' y g'.

75. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

76. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

77. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} 4x))$

78. (a) Grafique la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ en la pantalla $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.

(b) ¿En qué intervalo es mayor la tasa promedio de cambio: $[1, 2]$ o $[2, 3]$?

(c) ¿En qué valor de x la velocidad es mayor: en $x = 2$ o en $x = 5$?

(d) Verifique sus estimaciones visuales en la parte (c) calculando $f'(x)$ y comparando los valores numéricos de $f'(2)$ y $f'(5)$.

79. ¿En cuál punto de la curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ la tangente es horizontal?

80. (a) Encuentre una ecuación de la tangente a la curva $y = e^x$ que es paralela a la recta $x - 4y = 1$.

(b) Halle una ecuación de la tangente a la curva $y = e^x$ que pase por el origen.

81. Determine una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por $(1, 4)$ y cuyas tangentes en $x = -1$ y en $x = 5$ tengan las pendientes 6 y -2, respectivamente.

82. La función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b, y K son constantes positivas y $b > a$, se usa para modelar la concentración en el instante t de un medicamento inyectado en la corriente sanguínea.

(a) Demuestre que $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.

(b) Encuentre $C'(t)$, la rapidez con que el medicamento se disipa en la circulación.

(c) ¿Cuándo esta razón es igual a 0?

83. Una ecuación de movimiento como $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa la oscilación amortiguada de un cuerpo. Halle la velocidad y la aceleración del cuerpo.

84. Una partícula se mueve sobre una horizontal de modo que su coordenada en el instante t es $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geq 0$, donde b y c son constantes positivas.

(a) Encuentre las funciones de velocidad y aceleración.

(b) Demuestre que la partícula se mueve siempre en dirección positiva.

85. Una partícula se mueve sobre una vertical y su coordenada en el instante t es $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.

(a) Encuentre las funciones de velocidad y aceleración.

(b) ¿Cuándo la partícula se mueve hacia arriba y cuándo hacia abajo?

(c) Encuentre la distancia que la partícula recorre en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 3$.

86. El volumen de un cono circular recto es $V = \pi r^2 h/3$, donde r es el radio de la base y h es la altura.

(a) Halle la razón de cambio del volumen con respecto a la altura, si el radio es constante.

(b) Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al radio, si la altura es constante.

87. Parte de la masa de un alambre es $x(1 + \sqrt{x})$ kilogramos, donde x se mide en metros desde uno de sus extremos. Encuentre la densidad lineal del alambre cuando $x = 4$ m.

88. El costo, en dólares, de producir x unidades de un artículo es

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal

(b) Halle $C'(100)$ y explique su significado.

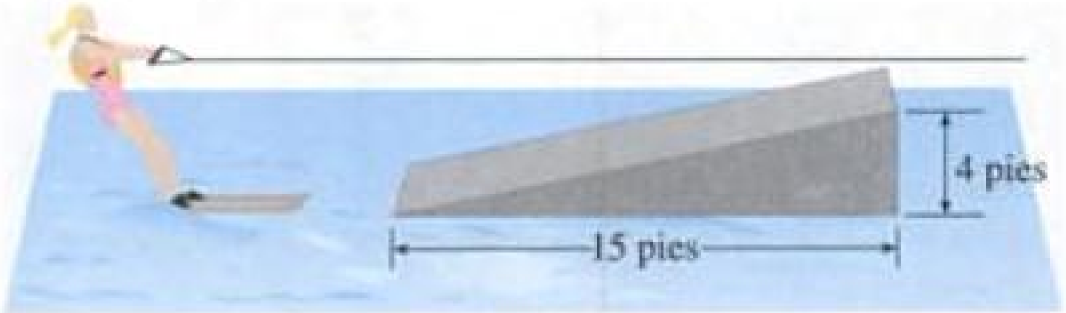
(c) Compare $C'(100)$ con el costo para producir el 101-ésimo artículo.

89. El volumen de un cubo está creciendo a razón de 10 cm^3/min. ¿Qué tan rápido está creciendo la superficie lateral en el momento en que la arista del cubo mide 30 cm?

90. Un vaso de papel tiene la forma de un cono con altura 10 cm y radio de 3 cm (máximo). Si se vierte agua en el vaso a razón de 2 cm^3/s, ¿qué tan rápido aumenta el nivel del agua en el instante en que la altura del agua es 5 cm?

91. Un globo se eleva a velocidad constante de 5 pies/s. Un chico pedalea su bicicleta por un camino recto a 15 pies/s. Al pasar debajo del globo le separa del mismo una distancia de 45 pies. Tres segundos después, ¿qué tan rápido aumenta la distancia entre ambos?

92. Una esquiadora acuática pasa sobre la rampa del dibujo a una velocidad de 30 pies/s. ¿Con qué rapidez se va elevando al salir de la rampa?



93. El ángulo de elevación del sol disminuye a una velocidad de 0.25 radianes por hora? ¿Qué tan rápido aumenta la sombra de un edificio de 400 pies de alto en el momento en que el sol tiene ángulo de elevación de $\pi/6$?

94. (a) Halle la aproximación lineal a $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en la vecindad de 3.
(b) Ilustre la parte (a) graficando f y la aproximación lineal.
(c) ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal es correcta dentro de un margen de 0.1?

95. (a) Halle la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Dé la aproximación lineal correspondiente y úsela para proporcionar un valor aproximado de $\sqrt[3]{1.03}$.
(b) Determine los valores de x para los que la aproximación lineal dada en el inciso (a) sea exacta con una diferencia menor que 0.1.

96. Evalúe dy si $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ y $dx = 0.2$.

97. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm, con un error posible en la medición de 0.1 cm. Use diferenciales para estimar el error posible máximo al calcular el área de la ventana.

98–100 □ Exprese el límite como una derivada y evalúelo.

98. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{17} - 1}{x - 1}$

99. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

100. $\lim\limits_{\theta \to \pi/3} \dfrac{\cos \theta - 0.5}{\theta - \pi/3}$

101. Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

102. Suponga que f es una función diferenciable de modo que $f(g(x)) = x$ y $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Muestre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

103. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

104. Demuestre que la longitud de la parte de cualquier recta tangente a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ limitada por los ejes de coordenadas es constante.

Probl[illegible]

Intente resolver el problema del ejemplo.

Ejemplo ¿Cuántas rectas tangentes comunes a las dos parábolas $y = -1 - x^2$ y $y = 1 + x^2$ existen? Encuentre, las coordenadas de los puntos en que estas tangentes tocan las parábolas.

Solución Para entender el problema es esencial hacer un dibujo. De modo que dibujamos las parábolas $y = 1 + x^2$ (que es la parábola estándar $y = x^2$ trasladada una unidad hacia arriba) y $y = -1 - x^2$ (que es la reflexión de la primera parábola respecto al eje de las abscisas). Si intentamos trazar una tangente común a las dos parábolas pronto descubrimos que hay sólo dos posibilidades, como en la figura 1.

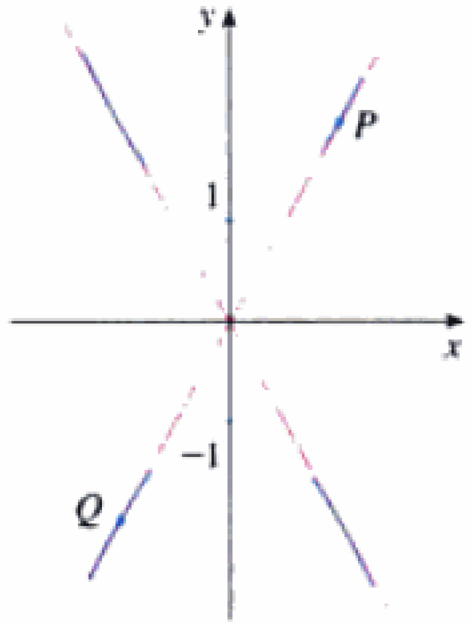


FIGURA 1

Sea P un punto en que una de estas tangentes toca la parábola superior y sea a su abscisa. (Es importante la selección de la notación para la incógnita. Por supuesto, pudimos usar b, c, x_0 o x_1 en lugar de a; pero no es recomendable usar x en lugar de a porque x podría confundirse con la variable x de la ecuación de la parábola.) Entonces, como P está sobre la parábola $y = 1 + x^2$, su coordenada y debe ser $1 + a^2$. Debido a la simetría que se muestra en la figura 1, las coordenadas del punto Q, donde la tangente toca la parábola inferior, deben ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar la información dada de que la recta es una tangente, igualamos la pendiente de la recta PQ a la pendiente de la recta tangente en P. Tenemos

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Si $f(x) = 1 + x^2$, entonces la pendiente de la recta tangente en P es $f'(a) = 2a$. Por consiguiente, la condición que necesitamos usar es que

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Al resolver esta ecuación obtenemos $1 + a^2 = 2a^2$, de modo que $a^2 = 1$ y $a = \pm 1$. Por lo tanto, los puntos son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. Por simetría, los dos puntos restantes son $(-1, 2)$ y $(1, -2)$.

Ejemplo 2 ¿Para cuáles valores de c la ecuación $\ln x = cx^2$ tiene exactamente una solución?

Solución Uno de los principios más importantes de la solución de problemas es dibujar un diagrama, incluso si el problema —según se enuncia—, no menciona en forma explícita una situación geométrica. El problema que nos ocupa se puede reformular en términos geométricos, como sigue: ¿para cuáles valores de c la curva $y = \ln x$ interseca la curva $y = cx^2$ exactamente en un punto?

Empecemos trazando las gráficas de $y = \ln x$ y $y = cx^2$ para diversos valores de c. Sabemos que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ es una parábola que se abre hacia arriba si $c > 0$ y, hacia abajo, si $c < 0$. En la figura 2 se muestran las parábolas $y = cx^2$ para varios valores positivos de c. La mayor parte no se cruzan con $y = \ln x$ y una la corta dos veces. Tenemos la sensación de que debe haber un valor de c (en alguna parte entre 0.1 y 0.3) para el cual las curvas se cruzan exactamente una vez, como en la figura 3.

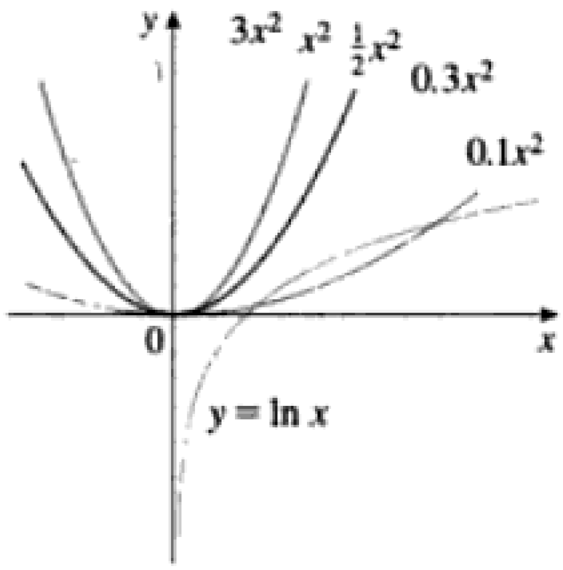


FIGURA 2

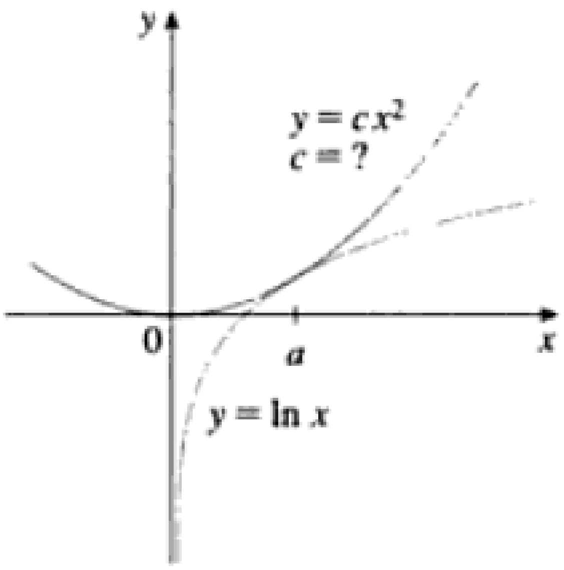


FIGURA 3

Para hallar ese valor de c, denotemos con a la coordenada x del punto único de intersección. En otras palabras, $\ln a = ca^2$, de modo que a sea la solución única de la ecuación dada. En la figura 3 vemos que las curvas sólo se tocan, de modo que tienen una tangente común cuando $x = a$. Esto significa que las curvas $y = \ln x$ y $y = cx^2$ tienen la misma pendiente cuando $x = a$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Si se resuelven las ecuaciones $\ln a = ca^2$ y $1/a = 2ca$, se obtiene

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

De donde, $a = e^{1/2}$ y

$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

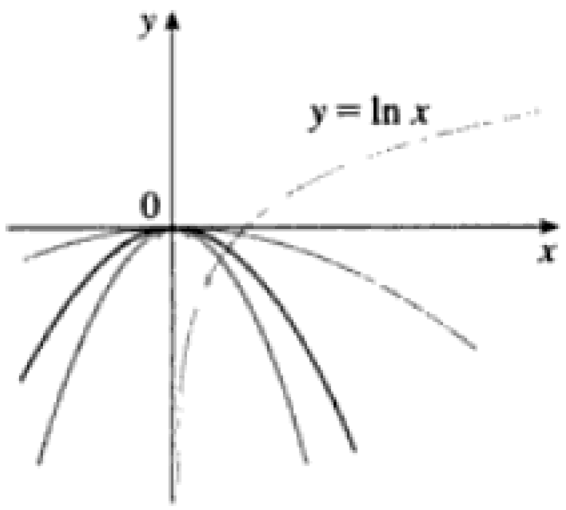


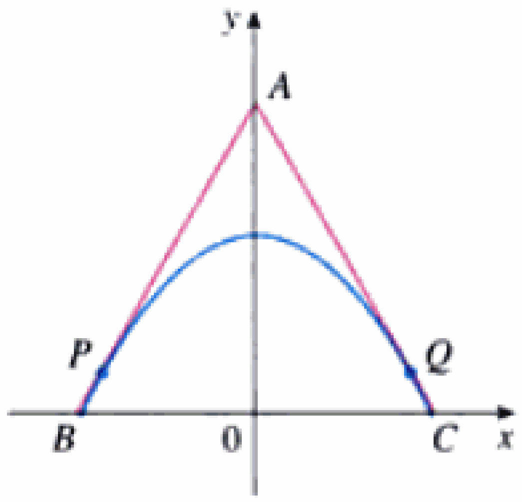
FIGURA 4

Para los valores negativos de c, tenemos la situación ilustrada en la figura 4: todas las parábolas $y = cx^2$ con valores negativos de c cruzan $y = \ln x$ exactamente una vez. Y no olvidemos lo referente acerca de $c = 0$. La curva $y = 0x^2 = 0$ es el eje x, el cual cruza $y = \ln x$ exactamente una vez.

Para resumir, los valores que buscamos de c son $c = 1/(2e)$ y $c \leqslant 0$.

Problemas

1. Halle los puntos P y Q en la parábola $y = 1 - x^2$ de modo que el triángulo ABC formado por el eje de las ordenadas y las rectas tangentes en P y Q sea un triángulo equilátero.



2. Halle el punto en que las curvas $y = x^3 - 3x + 4$ y $y = 3(x^2 - x)$ sean tangentes entre sí; es decir, tienen una recta tangente común. Ilustre lo anterior trazando las dos curvas y la tangente común.

3. Muestre que $\operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

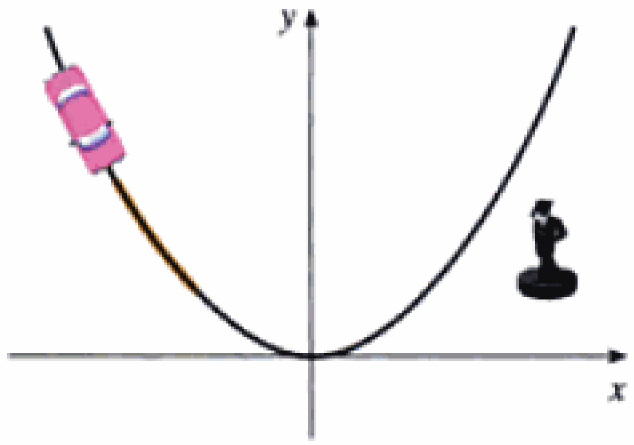


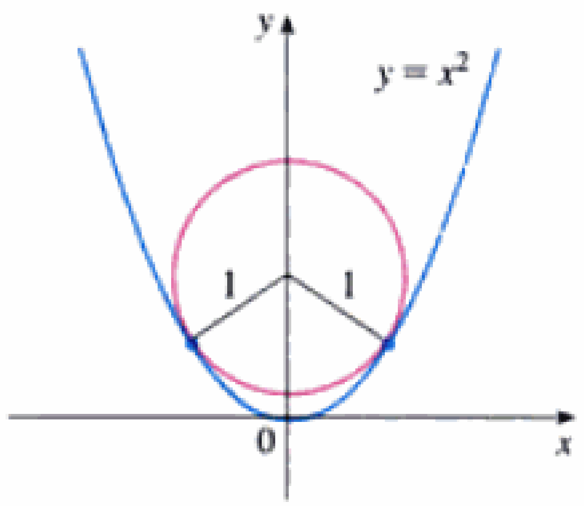
FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

4. Un automóvil se desplaza por una carretera en forma de parábola con vértice en el origen. El automóvil inicia el viaje en un punto situado a 100 m al oeste y 100 m al norte del origen y viaja en dirección este. Hay un monumento situado 100 m al este y 50 al norte del origen. ¿En qué punto de la carretera estará el automóvil cuando ilumine el monumento con los faros?

5. Pruebe que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

6. Halle la n-ésima derivada de la función $f(x) = x^n/(1 - x)$.

7. En la figura se muestra un círculo con radio 1 inscrito en la parábola $y = x^2$. Encuentre el centro del círculo.



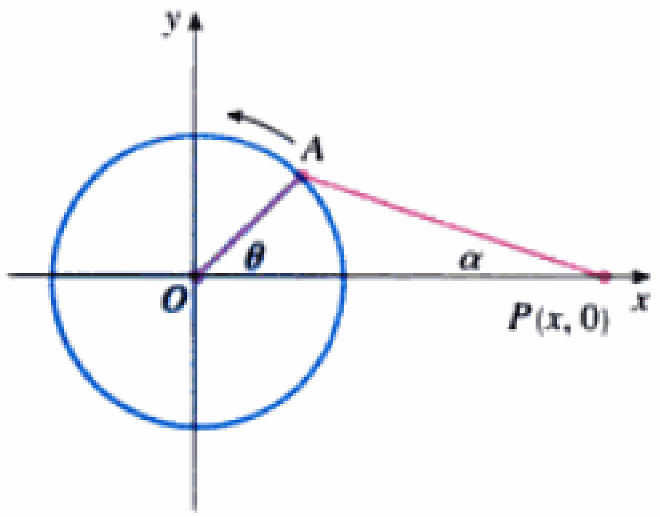


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

8. Si f es diferenciable en a, donde $a > 0$, evalúe el siguiente límite en términos de $f'(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

9. En la figura se muestra una rueda giratoria, con radio de 40 cm y una biela AP de longitud 1.2 m. El pasador P se desliza hacia atrás y hacia adelante, a lo largo del eje x, conforme la rueda gira en sentido contrario a las manecillas de un reloj con una rapidez de 360 revoluciones por minuto.
   (a) Encuentre la velocidad angular de la biela, $d\alpha/dt$, en radianes por segundo, cuando $\theta = \pi/3$.
   (b) Exprese la distancia $x = |OP|$ en términos de θ.
   (c) Halle una expresión para la velocidad del pasador P, en términos de θ.

10. Se trazan las rectas tangentes T_1 y T_2 en los dos puntos P_1 y P_2 sobre la parábola $y = x^2$ y se cruzan en un punto P. Se traza otra recta tangente T en un punto entre P_1 y P_2; ésta cruza T_1 en Q_1 y T_2 en Q_2. Demuestre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

11. Demuestre que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax} \text{ sen } bx = r^n e^{ax} \text{ sen}(bx + n\theta)$$

en donde a y b son números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$, y $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

12. Evalúe $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{e^{\text{sen}\,x} - 1}{x - \pi}$.

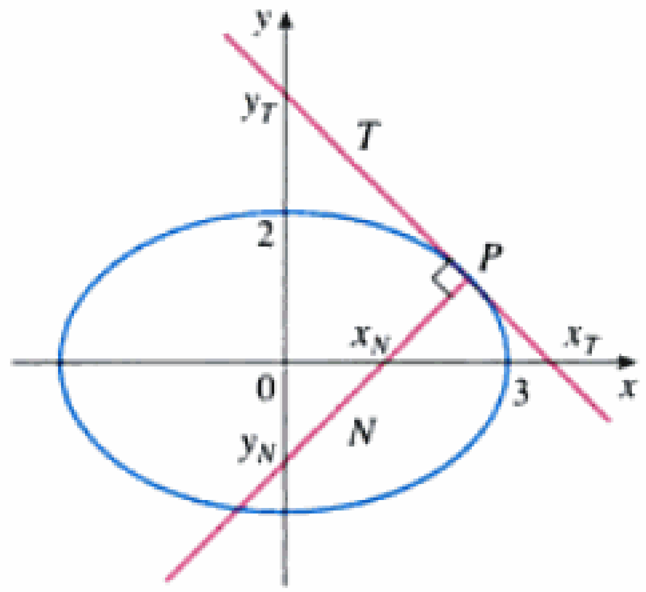


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

13. Sean T y N las rectas tangentes y normal a la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ en cualquier punto P de ésta en el primer cuadrante. Sean x_T y y_T las intersecciones de T con los ejes x y y, y x_N y y_N las intersecciones de N. Conforme P se mueve a lo largo de la elipse en el primer cuadrante (pero no sobre los ejes), ¿qué valores pueden tomar x_T, y_T, x_N, y y_N? En primer lugar, intente inferir las respuestas con sólo observar la figura. A continuación, aplique el cálculo para resolver el problema y vea cuán buena es su intuición.

14. Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(3 + x)^2 - \text{sen } 9}{x}$.

15. (a) Use la identidad de tan $(x - y)$ (vea la Ec. 14b del Ap. D) para demostrar que, si dos rectas L_1 y L_2 se cruzan formando un ángulo α, entonces

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

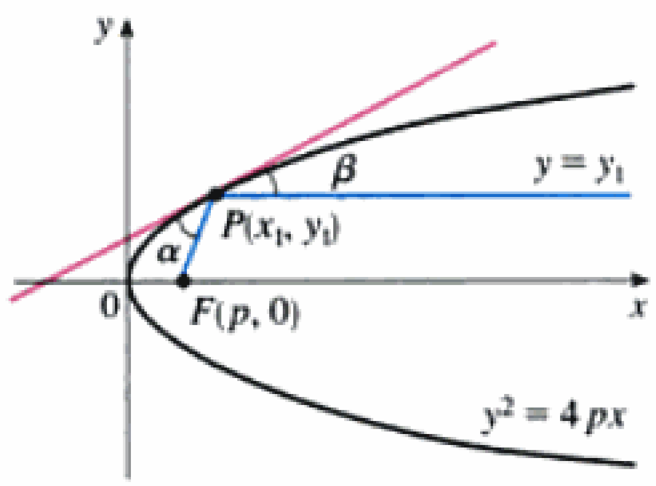
donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.

(b) El **ángulo entre las curvas** C_1 y C_2 en un punto de intersección P, se define como el ángulo entre las rectas tangentes a C_1 y C_2 en P (si estas rectas tangentes existen). Use el resultado del inciso (a) para hallar, hasta el grado más cercano, el ángulo entre cada par de curvas, en cada punto de intersección.

(i) $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ y $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

16. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la parábola $y^2 = 4px$ con foco $F(p, 0)$. Sea α el ángulo entre la parábola y el segmento rectilíneo FP y sea β el ángulo entre la recta horizontal $y = y_1$ y la misma parábola, como en la figura. Pruebe que $\alpha = \beta$. (Por lo tanto, por un principio de la óptica geométrica, la luz de una fuente colocada en F se refleja a lo largo de una recta paralela al eje x. Esto explica por qué se usan paraboloides, superficies obtenidas al hacer girar parábolas alrededor de sus ejes, como la forma de los faros de algunos automóviles y de los espejos para telescopios.)



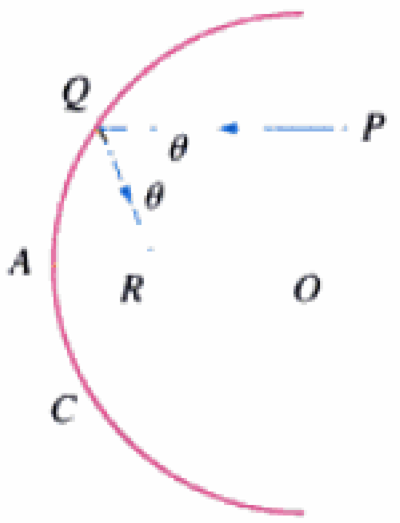


FIGURA PARA EL PROBLEMA 17

17. Suponga que sustituimos el espejo parabólico del problema 16 con uno esférico. Aun cuando este espejo no tiene foco, podemos demostrar la existencia de un foco *aproximado*. En la figura, C es un semicírculo con centro en O. Un rayo de luz que entre hacia el espejo paralelo al eje x, a lo largo de la recta PQ, se refleja hacia el punto R sobre el eje, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). ¿Qué sucede al punto R cuando P se toma cada vez más cercano al eje?

18. Si f y g son funciones derivables con $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$, muestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

19. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$.

20. ¿Para cuáles números positivos a se cumple que $a^x \geq 1 + x$ para toda x?

21. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

muestre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

22. Dada una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a \neq b$, encuentre la ecuación del conjunto de todos los puntos desde los cuales hay dos tangentes a la curva cuyas pendientes son (a) recíprocas y (b) recíprocas negativas.

23. Halle los dos puntos sobre la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una recta tangente común.

24. Tres puntos de la parábola $y = x^2$ tienen la propiedad de que las rectas normales en dichos puntos son concurrentes. Muestre que la suma de sus abscisas es 0.

25. Un punto del plano con coordenadas enteras se llama punto de retícula. Se trazan círculos con radio r y centrados en puntos de la retícula. Encuentre el valor más pequeño de r tal que cualquier recta con pendiente $\frac{2}{5}$ corte a algunos de estos círculos.

26. Un cono de radio r centímetros y altura h centímetros baja con la punta hacia abajo, a razón de 1 cm/s, al interior de un cilindro alto de radio R centímetros que está parcialmente lleno con agua. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua en el instante en que el cono está sumergido por completo?

27. Un recipiente en forma de cono invertido tiene una altura de 16 cm y un radio de 5 cm en la parte superior. Está parcialmente lleno con un líquido que exuda a través de los lados con una razón proporcional al área del recipiente que está en contacto con el líquido. (El área superficial de un cono es $\pi r l$, donde r es el radio y l es el apotema.) Si vertemos líquido en el recipiente a razón de 2 cm^3/min, la altura del líquido disminuye a razón de 0.3 cm/min, cuando esa altura es de 10 cm. Si nuestro propósito es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿con qué rapidez debemos verter el líquido en el recipiente?

4 Aplicaciones de la derivación

En estas fotografías se ilustran tres de las aplicaciones de la derivación, consideradas en este capítulo. La formación y ubicación de los arco iris se explican en el proyecto de la página 286. En el ejercicio 56 de la página 338, se determina el ángulo óptimo para la ramificación de los vasos sanguíneos, con el fin de minimizar la energía consumida por el corazón. En el proyecto de la página 339, se investiga el costo de fabricación de las latas para explicar por qué las más pequeñas tienden a ser relativamente altas, en tanto que las más grandes suelen ser casi cuadradas.

Ya hemos investigado algunas aplicaciones de las derivadas, pero ahora que conocemos las reglas de derivación nos encontramos en mejor posición para continuar con las aplicaciones de la derivación, con mayor profundidad. Aprenderemos cómo afectan las derivadas la forma de la gráfica de una función y en particular cómo nos ayudan a localizar los valores máximos y mínimos de las funciones. Numerosos problemas prácticos nos exigen minimizar un costo o maximizar un área o, de alguna manera, encontrar el mejor resultado en alguna situación.

4.1 Valores máximos y mínimos

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se nos pide la manera óptima (la mejor) de hacer algo. Enseguida tenemos ejemplos de estos problemas, los cuales resolveremos en este capítulo.

- ¿Cuál es la forma de una lata que minimice sus costos de fabricación?
- ¿Cuál es la aceleración máxima de un transbordador espacial? (Ésta es una cuestión importante para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas se reducen a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. Expliquemos con exactitud lo que queremos decir por valores máximos y mínimos.

> **1 Definición** Una función f tiene un **máximo absoluto** (o **máximo global**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en D, donde D es el dominio de f. El número $f(c)$ se llama **valor máximo** de f en D. De manera análoga, f tiene un **mínimo absoluto** en c si $f(c) \leqslant f(x)$ para toda x en D; el número $f(c)$ se denomina **valor mínimo** de f en D. Los valores máximo y mínimo de f se conocen como **valores extremos** de f.

En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en d y mínimo absoluto en a. Note que $(d, f(d))$ es el punto más alto de la gráfica y $(a, f(a))$ es el más bajo.

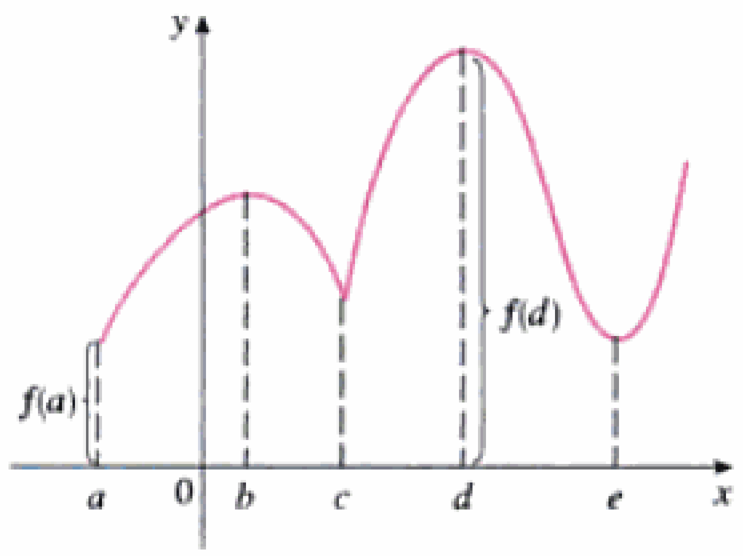


FIGURA 1
Valor mínimo $f(a)$,
Valor máximo $f(d)$

Si sólo consideramos valores de x cercanos a b en la figura 1 [por ejemplo, si restringimos nuestra atención al intervalo (a, c)], entonces $f(b)$ es el más grande de esos valores de

$f(x)$ y se conoce como *valor máximo local* de f. De modo semejante, $f(c)$ es un *valor mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercano a c [por ejemplo, en el intervalo (b, d)]. La función f también tiene un mínimo local en e. En general, tenemos la definición siguiente:

2 Definición Una función f posee un **máximo local** (o **máximo relativo**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cercano a c. [Esto significa que $f(c) \geqslant f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a c.] De manera análoga, f tiene un **mínimo local** en c si $f(c) \leqslant f(x)$, cuando x está cerca de c.

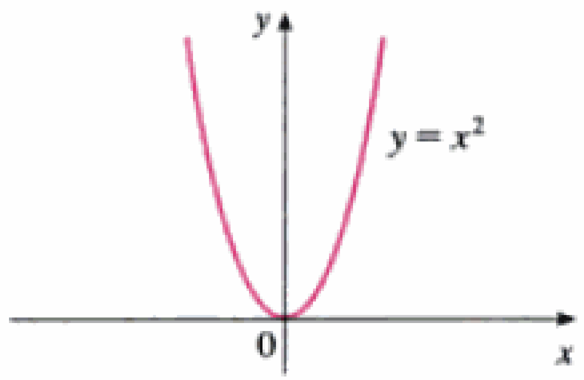


FIGURA 2
Valor mínimo 0, no hay máximo

EJEMPLO 1 □ La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) de 1 una infinidad de veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, para toda x. Del mismo modo, $\cos (2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero. □

EJEMPLO 2 □ Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$, porque $x^2 \geqslant 0$ para toda x. Por lo tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo de la parábola $y = x^2$ (Fig. 2). Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo. □

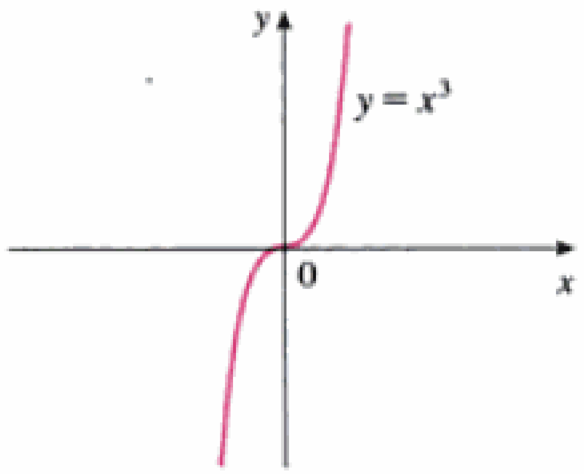


FIGURA 3
No hay valor mínimo ni máximo

EJEMPLO 3 □ En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, mostrada en la figura 3, vemos que esta función no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales. □

EJEMPLO 4 □ La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

se muestra en la figura 4. Puede ver que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. [Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.] Asimismo, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Obsérvese que f no tiene máximo local ni absoluto en $x = 4$.

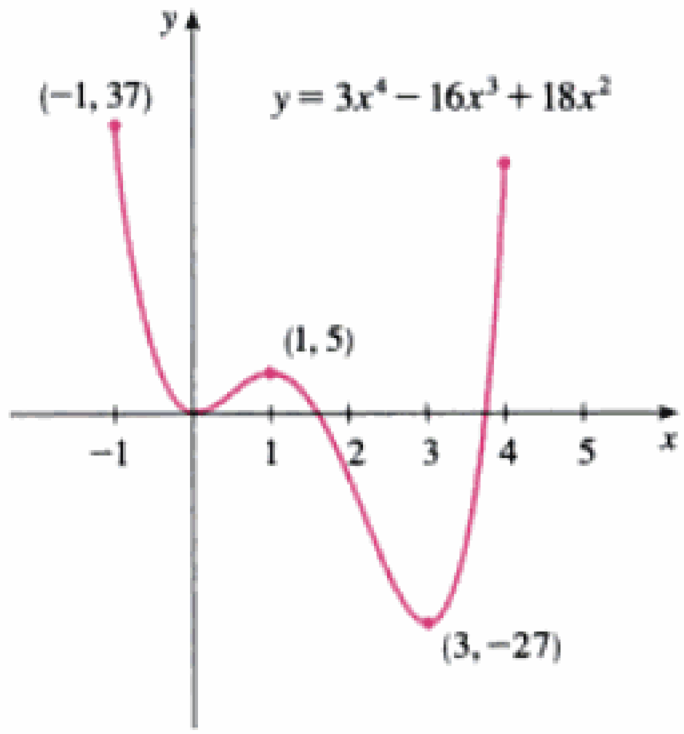


FIGURA 4 □

Hemos visto que algunas funciones tienen valores extremos y otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

> **3 Teorema del valor extremo** Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 5 se ilustra el teorema del valor extremo. Note que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el teorema del valor extremo es muy plausible a nivel intuitivo, es difícil de probar y, por consiguiente, omitiremos la demostración.

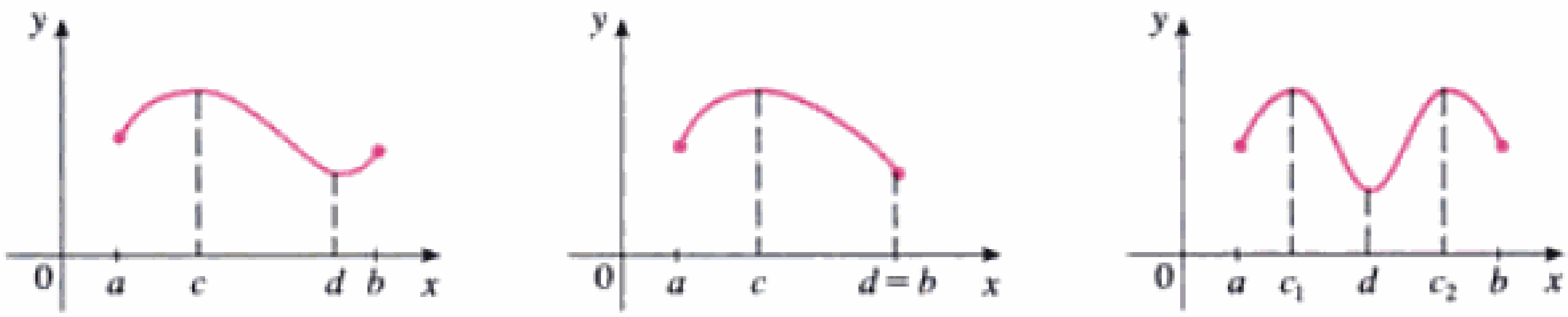


FIGURA 5

En las figuras 6 y 7 se hace ver que una función no tiene que poseer valores extremos si se omite cualquiera de las dos hipótesis (continuidad e intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

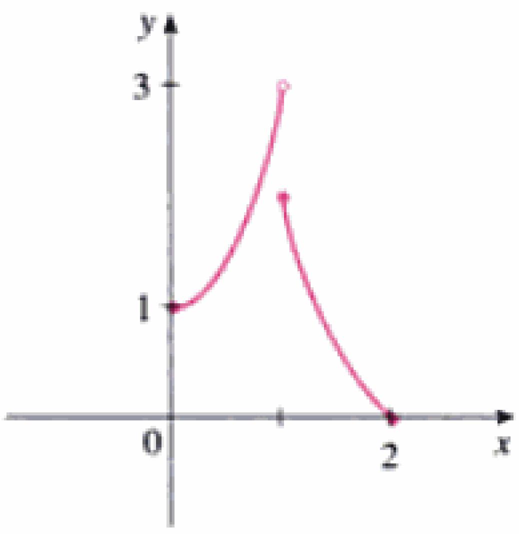


FIGURA 6
Esta función tiene un valor mínimo de $f(2) = 0$, pero no un valor máximo.

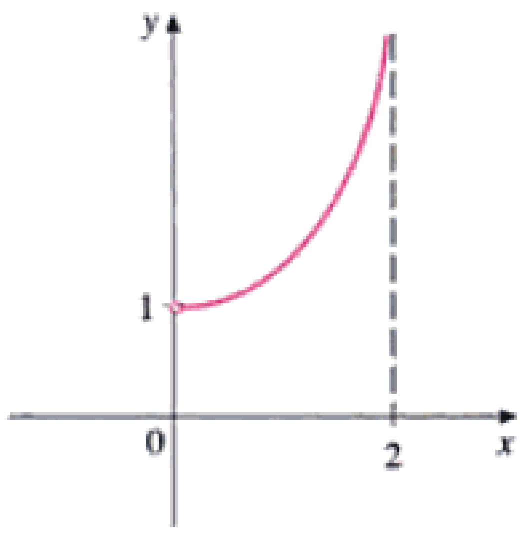


FIGURA 7
Esta función continua g no tiene máximo o mínimo.

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 6, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$ pero no tiene valor máximo. (Advierta que la imagen de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua *pudiera* tener valores máximo y mínimo. Véase el ejercicio 13(b).]

La función g, que se muestra en la figura 7, es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [La imagen de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo dice que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Empecemos por buscar valores extremos locales.

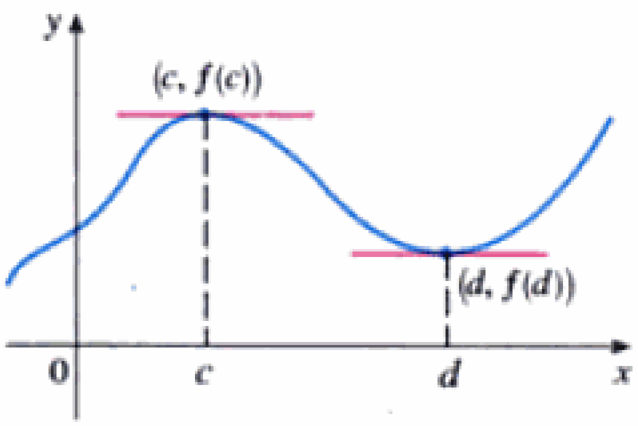


FIGURA 8

En la figura 8 se muestra la gráfica de una función f con un máximo local en c y un mínimo local en d. Se ve que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

□ El teorema de Fermat lleva ese nombre en honor de Pierre Fermat (1601–1665), abogado francés que tomó las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención de los límites y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del cálculo diferencial.

4 Teorema de Fermat Si f tiene un máximo o un mínimo local en c y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración Supongamos, para fijar ideas, que f tiene un máximo local en c. Entonces, de acuerdo con la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x está suficientemente cerca de c. Esto implica que si h es suficientemenete cercano a 0, h puede ser positivo o no, entonces

$$f(c) \geqslant f(c+h)$$

y por tanto

$$f(c+h) - f(c) \leqslant 0 \tag{5}$$

Podemos dividir ambos lados de una desigualdad por un número positivo. Luego, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeño, tenemos

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando el límite derecho de ambos lados de esta desigualdad (usando el teorema 2 de la sección 2.3), obtenemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Pero, dado que $f'(c)$ existe, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

y así hemos demostrado que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, entonces el sentido de la desigualdad (5) se invierte al dividir por h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

De modo que tomando el límite izquierdo, tenemos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Se ha mostrado que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. La única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Así se ha demostrado el teorema de Fermat para el caso de un máximo local. El caso de un mínimo local se demuestra de manera semejante o puede deducirse del caso demostrado con el ejercicio 78 (véase el ejercicio 79). □

Los ejemplos que siguen nos previenen de no malinterpretar el teorema de Fermat. No podemos localizar valores extremos con simplemente poner $f'(x) = 0$ y resolver para x.

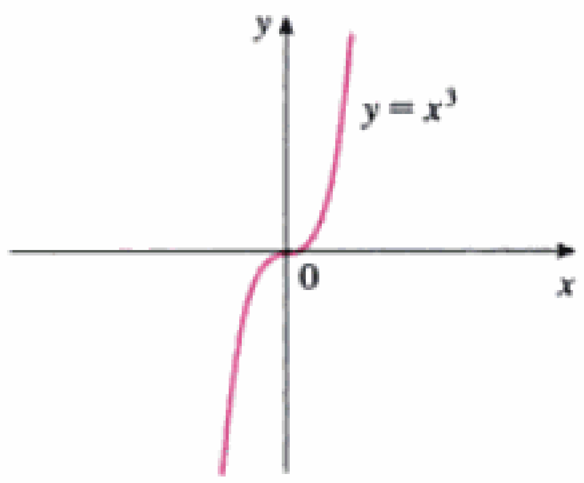


FIGURA 9
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$, pero f no tiene mínimo ni máximo.

EJEMPLO 5 □ Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo ni mínimo en 0, como puede observarse en la gráfica de la figura 9. (Note que $x^3 > 0$ para $x > 0$, pero $x^3 < 0$ cuando $x < 0$.) El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una tangente horizontal en (0, 0). En lugar de tener un máximo o un mínimo en (0, 0), la curva cruza allí su tangente horizontal. □

EJEMPLO 6 □ La función $f(x) = |x|$ tiene su mínimo (local y absoluto) en 0, pero ese valor no puede encontrarse escribiendo $f'(x) = 0$ porque, como se mostró en el ejemplo 6 de la sección 2.9, $f'(0)$ no existe. (Véase la figura 10).

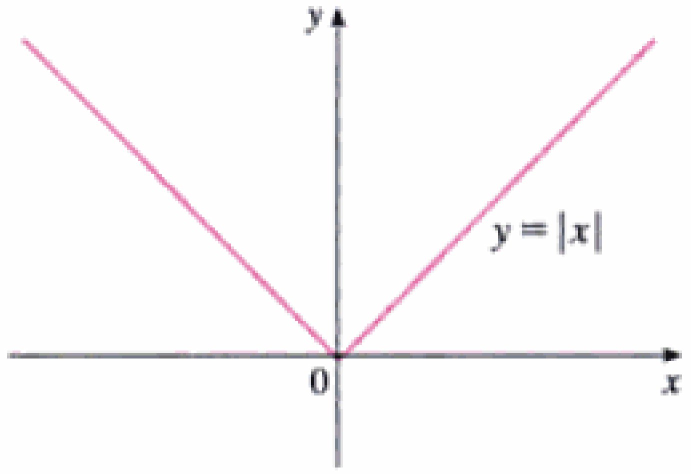


FIGURA 10
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

□

AVISO IMPORTANTE □ Los ejemplos 5 y 6 hacen ver que debe tenerse cuidado en la aplicación del teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$ no necesariamente existe máximo o mínimo en c. (En otras palabras, en general, el inverso del teorema de Fermat es falso.) Además, puede existir un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat sugiere que debemos empezar a buscar los valores extremos de f en los números c donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

> **6 Definición** Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

□ En la figura 11 se muestra una gráfica de la función f del ejemplo 7. Sirve de apoyo a nuestra respuesta porque hay una tangente horizontal cuando $x = 1.5$ y una vertical cuando $x = 0$.

EJEMPLO 7 □ Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto da

$$f'(x) = \tfrac{3}{5}x^{-2/5}(4 - x) + x^{3/5}(-1)$$
$$= \frac{3(4 - x) - 5x}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

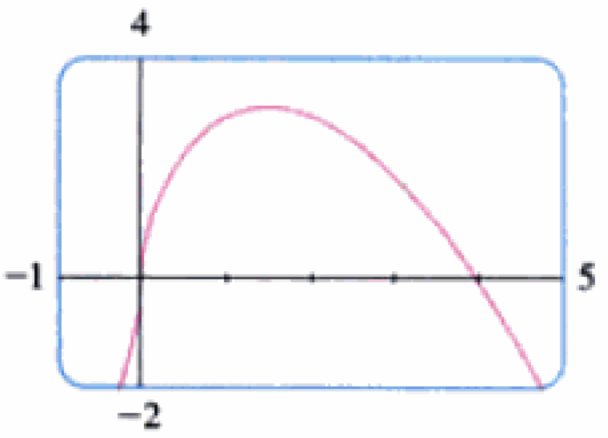


FIGURA 11

[Pudo obtenerse el mismo resultado escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$; esto es, $x = \tfrac{3}{2}$, y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por tanto, los números críticos son $\tfrac{3}{2}$ y 0. □

En términos de los números críticos, el teorema de Fermat se puede volver a redactar como sigue (compare la definición 6 con el teorema 4):

> **7** Si f tiene un extremo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado, observamos que tiene un extremo local [en cuyo caso, por (7), se presenta en un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el procedimiento siguiente de tres pasos siempre funciona:

Método del intervalo cerrado Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 8 Encuentre los valores máximo y mínimo absoluto de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Como f es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, se emplea el método del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Ya que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos números críticos de f se presentan cuando $f'(x) = 0$; o sea, $x = 0$ o $x = 2$. Notará que cada uno de esos números críticos está en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. En esos números críticos, los valores de f son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Al comparar estos cuatro números, el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

Observará que en este ejemplo el valor máximo absoluto se da en un extremo, mientras que el valor mínimo absoluto se da en un número crítico. En la figura 12 se presenta la gráfica de f. □

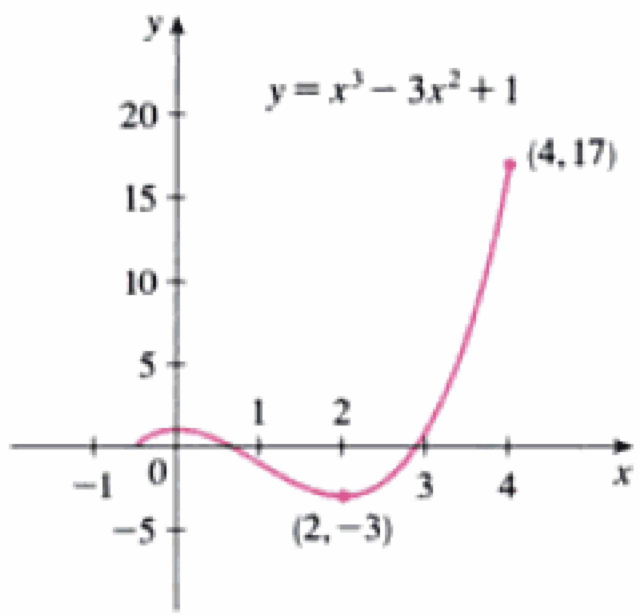


FIGURA 12

Si tiene acceso a una calculadora graficadora o a una computadora con programas de graficación, podrá estimar con mucha facilidad los valores máximos y mínimos. Pero, como se muestra en el ejemplo que sigue, se necesita el cálculo para determinar los valores *exactos*.

EJEMPLO 9 □

(a) Use un aparato graficador para estimar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(b) Aplique el cálculo para hallar los valores mínimo y máximo exactos.

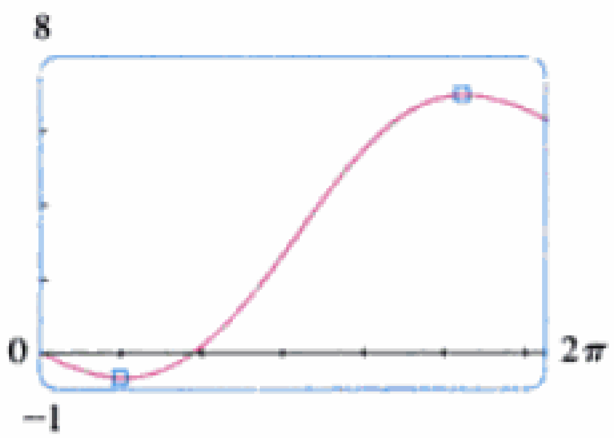


FIGURA 13

SOLUCIÓN

(a) En la figura 13 se muestra una gráfica de f en la pantalla $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Al acercar el cursor al punto máximo, vemos que las coordenadas y no cambian mucho en la vecindad del máximo. El valor máximo absoluto es alrededor de 6.97 y se presenta cuando $x \approx 5.2$. De manera análoga, al mover el cursor cerca del punto mínimo, vemos que el valor mínimo absoluto es alrededor de -0.68 y se presenta cuando $x \approx 1.0$. Es posible lograr estimaciones más exactas al hacer una amplificación de los puntos máximo y mínimo pero, en lugar de ello, apliquemos el cálculo.

(b) La función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, 2\pi]$. Puesto que $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, tenemos $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \cos x = \frac{1}{2}$ y esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o $5\pi/3$. Los valores de f en estos puntos críticos son

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Si se comparan estos cuatro números y se aplica el método del intervalo cerrado, el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el valor máximo absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso (a) sirven de comprobación de nuestro trabajo. □

EJEMPLO 10 El 24 de abril de 1990, el transbordador espacial *Discovery* desplegó el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el despegue en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieron en $t = 126$ s, se expresa mediante

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies/s). Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.

SOLUCIÓN Se nos piden los valores extremos no de la función velocidad que se da sino de la función aceleración. De modo que primero debemos derivar para hallar la aceleración

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083) \\ &= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61 \end{aligned}$$

Ahora el método cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leq t \leq 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico ocurre cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Al evaluar $a(t)$ en el número crítico y los extremos, tenemos

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

De modo que la acelación máxima es aproximadamente 62.87 pies/s^2 y la aceleración mínima es como de 21.52 pies/s^2. □

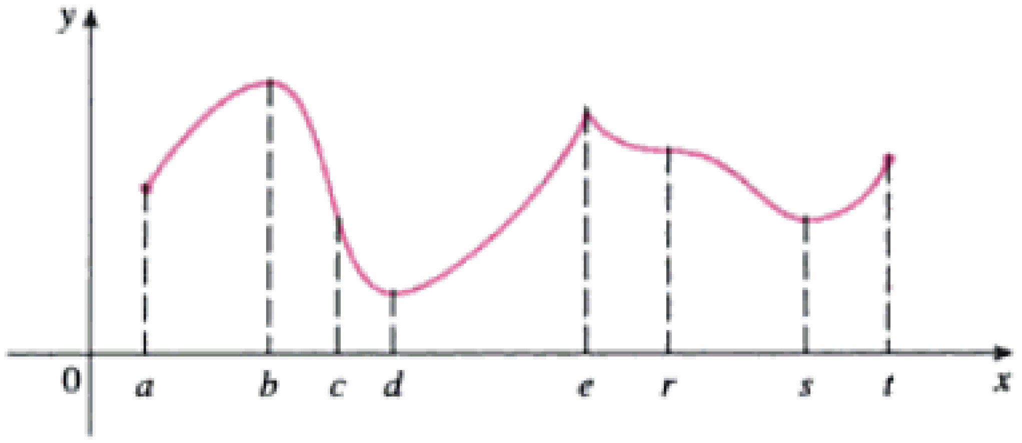
4.1 Ejercicios

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

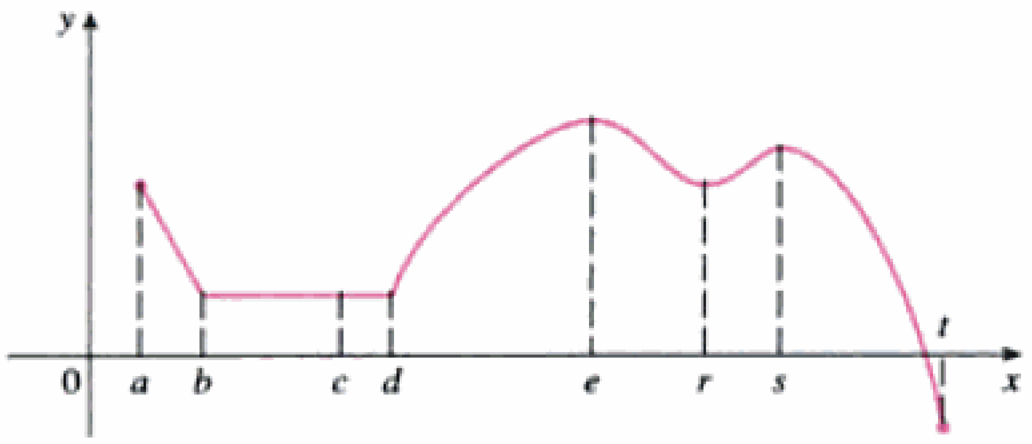
2. Suponga que f es una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$.
(a) ¿Cuál teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y de uno mínimo absoluto para f?
(b) ¿Qué pasos tomaría para hallar esos valores máximo y mínimo?

3–4 □ Para cada uno de los números a, b, c, d, e, r, s y t, diga si la función cuya gráfica se muestra tiene un máximo o un mínimo absolutos, un máximo o un mínimo locales o no tiene máximo ni mínimo.

3.

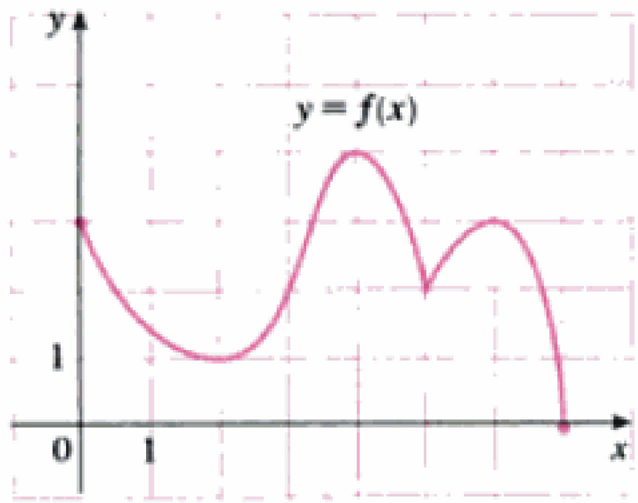


4.

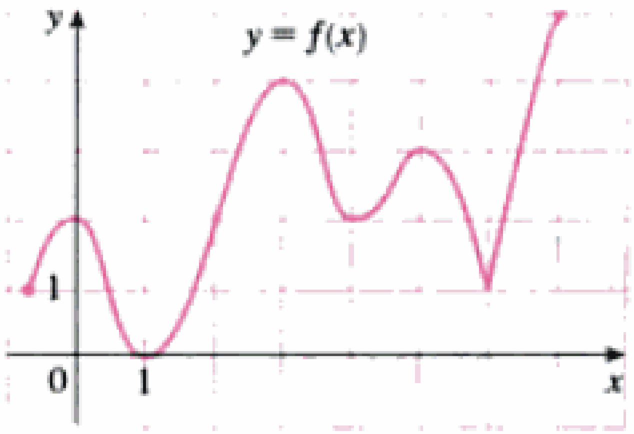


5–6 □ Use la gráfica para dar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5.



6.



7–10 □ Dibuje la gráfica de una función f que sea continua sobre $[0, 3]$ y tenga las propiedades dadas.

7. Máximo absoluto en 0, mínimo absoluto en 3, mínimo local en 1 y máximo local en 2.

8. Máximo absoluto en 1 y mínimo absoluto en 2.

9. 2 es un número crítico, pero f no tiene máximo ni mínimo locales.

10. Mínimo absoluto en 0, máximo absoluto en 2, máximos locales en 1 y 2, mínimo local en 1.5.

11. (a) Grafique una función que tenga un máximo local en 2 y sea derivable en 2.
(b) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y sea continua pero no derivable en 2.
(c) Dibuje la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea continua en 2.

12. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo absoluto pero no máximo local.
(b) Grafique una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo local pero no máximo absoluto.

13. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo absoluto pero no mínimo absoluto.
(b) Dibuje la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que sea discontinua pero que tenga tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto.

14. (a) Trace la gráfica de una función que tenga dos máximos locales, un mínimo local y ningún mínimo absoluto.
(b) Grafique una función que tenga tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15–30 □ Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f. Empiece por dibujar su gráfica a mano. (Use las gráficas y las transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geq 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leq 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leq 2$

19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leq x < 2$

20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$

21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leq x \leq 2$

22. $f(x) = 1 + (x + 1)^2, \quad -2 \leq x < 5$

23. $f(t) = 1/t, \quad 0 < t < 1$

24. $f(t) = 1/t, \quad 0 < t \leq 1$

25. $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta, \quad -2\pi \leq \theta \leq 2\pi$

26. $f(\theta) = \tan\theta, \quad -\pi/4 \leq \theta < \pi/2$

27. $f(x) = x^5$

28. $f(x) = 2 - x^4$

29. $f(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0$

30. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

31–48 □ Encuentre los números críticos de la función.

31. $f(x) = 5x^2 + 4x$

32. $f(x) = 5 + 6x - 2x^3$

33. $f(t) = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 4$

34. $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$

35. $s(t) = 2t^3 + 3t^2 - 6t + 4$

36. $s(t) = t^4 + 4t^3 + 2t^2$

37. $f(r) = \dfrac{r}{r^2 + 1}$

38. $f(z) = \dfrac{z + 1}{z^2 + z + 1}$

39. $g(x) = |2x + 3|$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $g(t) = 5t^{2/3} + t^{5/3}$

42. $g(t) = \sqrt{t}\,(1 - t)$

43. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

44. $G(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

45. $f(\theta) = \operatorname{sen}^2(2\theta)$

46. $g(\theta) = \theta + \operatorname{sen}\theta$

47. $f(x) = x \ln x$

48. $f(x) = xe^{2x}$

49–64 □ Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

49. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

51. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4, \quad [-2, 1]$

52. $f(x) = 18x + 15x^2 - 4x^3, \quad [-3, 4]$

53. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \quad [-3, 2]$

54. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1, \quad [-2, 2]$

55. $f(x) = x^2 + 2/x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

56. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad [-1, 2]$

57. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

58. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad [1, 2]$

59. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad [0, \pi/3]$

60. $f(x) = x - 2\cos x, \quad [-\pi, \pi]$

61. $f(x) = xe^{-x}, \quad [0, 2]$

62. $f(x) = (\ln x)/x, \quad [1, 3]$

63. $f(x) = x - 3\ln x, \quad [1, 4]$

64. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

65–66 □ Use una gráfica para estimar los números críticos de f con un decimal.

65. $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$

66. $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$

67–70 □

(a) Use una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo absolutos de la función hasta dos decimales.

(b) Aplique el cálculo para hallar los valores máximo y mínimo exactos.

67. $f(x) = x^3 - 8x + 1, \quad -3 \leq x \leq 3$

68. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leq x \leq 0$

69. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

70. $f(x) = (\cos x)/(2 + \operatorname{sen} x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

71. Entre 0 °C y 30 °C, el volumen V (en cm^3) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

72. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva llamada *coeficiente de fricción* y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Demuestre que F se minimiza cuando $\tan\theta = \mu$.

73. Un modelo del índice de precios de alimentos (el precio de una "canasta" representativa) entre 1984 y 1994 está dado por la función

$$I(t) = 0.00009045t^5 + 0.001438t^4 - 0.06561t^3 + 0.4598t^2 - 0.6270t + 99.33$$

donde t representa el número de años desde mediados de 1984 de modo que $0 \leq t \leq 10$, e $I(t)$ se mide en dólares de 1987 y ajustada de modo que $I(3) = 100$. Estime los instantes en que la comida fue más barata y más cara en el periodo 1984–1994.

CAS **74.** El 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Válvula de estrangulación al 89%	20	447
Válvula de estrangulación al 67%	32	742
Válvula de estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación del combustible sólido del cohete auxiliar	125	4151

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para hallar el polinomio cúbico que mejor modele la velocidad del transbordador espacial para el intervalo $t \in [0, 125]$. A continuación, grafique este polinomio.

(b) Encuentre un modelo para la aceleración del transbordador y úselo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 s.

75. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento de la presión en los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo cual se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, éste debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más amplio. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un acceso de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad v de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leq r \leq r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se atiesa bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\frac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).

(a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ en el cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se equipara esto con la evidencia experimental?

(b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v en el intervalo?

(c) Grafique v sobre el intervalo $[0, r_0]$

76. Muestre que 5 es un número crítico de la función $g(x) = 2 + (x - 5)^3$ pero que g no tiene un valor extremo local en 5.

77. Pruebe que la función $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ no tiene un máximo local ni un mínimo local.

78. Si f tiene un valor mínimo en c, muestre que la función $g(x) = -f(x)$ tiene un valor máximo en c.

79. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en el cual f tiene un mínimo local en c.

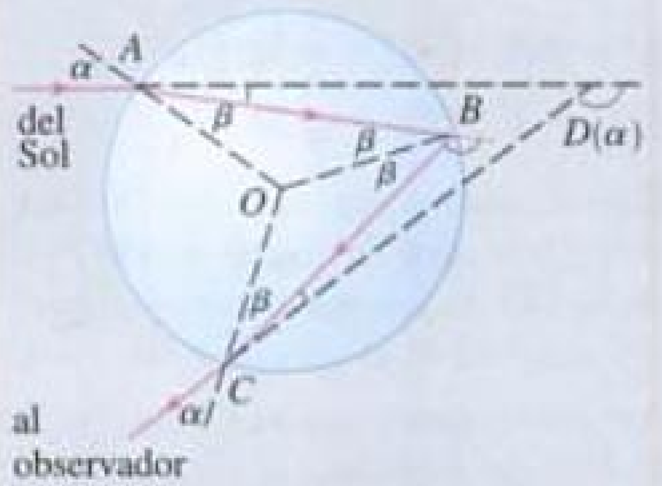
80. Una función cúbica es un polinomio de grado 3; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

(a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos números críticos, uno o ninguno. Dé ejemplos y dibuje gráficas para ilustrar las tres posibilidades.

(b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

Proyecto de aplicación — Cálculo de los arco iris

Los arco iris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto usamos las ideas de Descartes y Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcos iris.



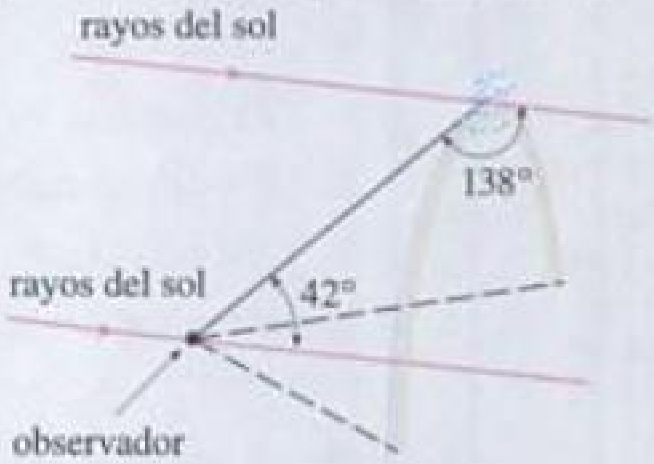
Formación del arco iris primario

1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que entra en una gota de lluvia esférica en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Advierta que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k = \frac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B, algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja pero, por el momento, estamos más interesados en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Advierta que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por tanto,

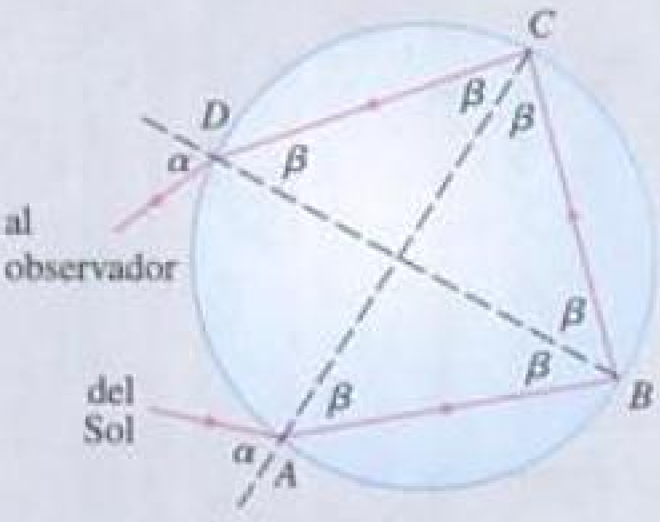
$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.

El significado de la desviación mínima es que, cuando $\alpha \approx 59.4°$, tenemos $D'(\alpha) \approx 0$, de modo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que muchos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ resultan desviados en más o menos la misma cantidad. La *concentración* de los rayos que vienen de las cercanías de la desviación mínima crea la brillantez del arco iris primario. En la figura se muestra que el ángulo de elevación desde el observador, hacia arriba hasta el punto más alto del arco iris es $180° - 138° = 42°$. (Este ángulo se conoce como *ángulo del arco iris*.)



2. En el problema 1 se explica la ubicación del arco iris primario, ¿pero cómo explicamos los colores? La luz solar comprende una gama de longitudes de onda, desde el rojo, hasta el naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Como Newton descubrió en sus experimentos del prisma, en 1666 que el índice de refracción es diferente para cada color. (El efecto se llama *dispersión*.) Para la luz roja, el índice de refracción es $k \approx 1.3318$, en tanto que para la luz violeta es $k \approx 1.3435$. Al repetir el cálculo del problema 1 para estos valores de k, se demuestra que el ángulo del arco iris es alrededor de 42.3° para el arco rojo y de 40.6° para el arco violeta. Así pues, el arco iris en realidad consta de siete arcos separados que corresponden a los siete colores.



Formación del arco iris secundario

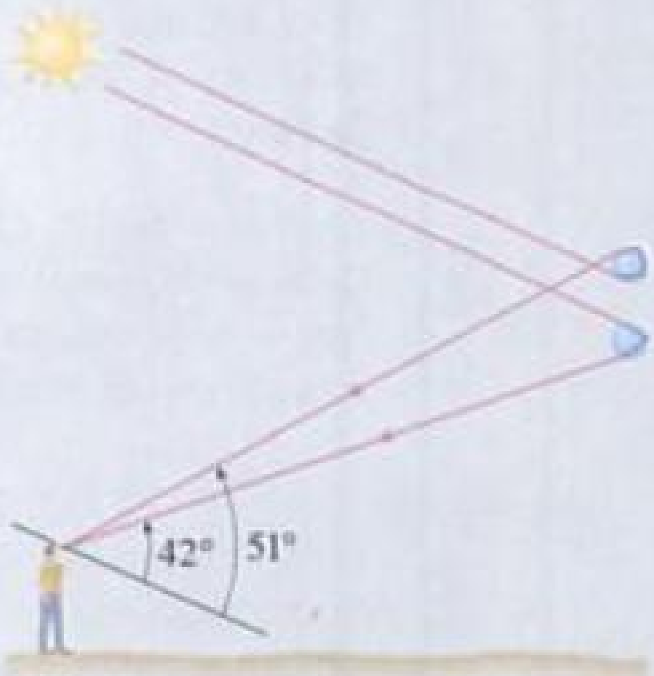
3. Quizá haya visto un arco iris secundario más tenue, arriba del arco iris primario. Se produce por la parte de un rayo que entra en una gota de lluvia y se refracta en A, se refleja dos veces (en B y C) y se refracta al salir de la gota en D (véase la figura). En esta ocasión, el ángulo de desviación $D(\alpha)$ es la magnitud total de la rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj que describe el rayo en este proceso de cuatro etapas. Demuestre que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

y $D(\alpha)$ tiene un valor mínimo cuando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Si se toma $k = \frac{4}{3}$, demuestre que la desviación mínima es alrededor de 129° y, por tanto, el ángulo del arco iris secundario es de más o menos 51°, como se muestra en la figura.



4. Demuestre que los colores del arco iris secundario aparecen en orden opuesto al del primario.

4.2 Teorema del valor medio

En este capítulo, muchos de los resultados dependen de un hecho básico, que se llama teorema del valor medio. Pero para llegar a él necesitaremos primero el siguiente resultado.

□ Michel Rolle, matemático francés (1652-1719), publicó por primera vez el teorema de Rolle en su libro titulado *Méthode pour résoudre les égalitéz*. Sin embargo, después se volvió crítico de los métodos de su época y atacó el cálculo infinitesimal tachándolo de ser "un conjunto de falacias ingeniosas".

Teorema de Rolle Sea f una función que satisface las tres hipótesis siguientes:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces hay un número c, en (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

Antes de presentar la demostración, echemos un vistazo a las gráficas de algunas funciones características que satisfacen las tres hipótesis. La figura 1 muestra las gráficas de cuatro de esas funciones. En cada caso, parece que al menos hay un punto $(c, f(c))$ de la gráfica donde la tangente es horizontal y, por consiguiente, $f'(c) = 0$. Por lo anterior, el teorema de Rolle parece aceptable.

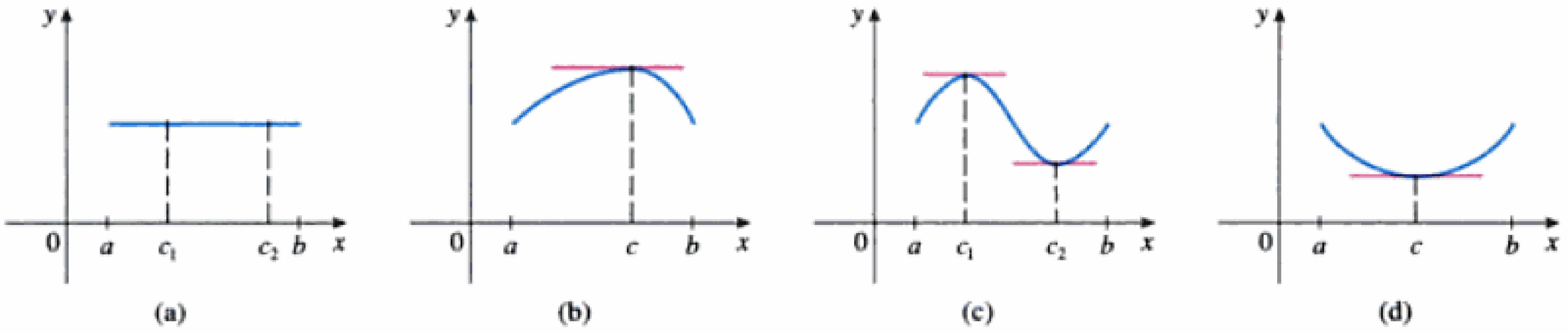


FIGURA 1

■ Casos

Demostración Hay tres casos:

CASO I □ **$f(x) = k$, una constante**
Entonces $f'(x) = 0$, así que c se puede ser cualquier número en (a, b).

CASO II □ **$f(x) > f(a)$ para algunas x en (a, b)** [como en la figura 1(*b*) o (*c*)]
De acuerdo con el teorema del valor extremo (que podemos aplicar, según la hipótesis 1, f tiene un valor máximo en algún lugar de $[a, b]$. Dado que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar ese valor máximo en un número c, en el intervalo abierto (a, b). Entonces f tiene un máximo *local* en c y, según la hipótesis 2, f es derivable en c; por consiguiente, según el teorema de Fermat $f'(c) = 0$.

CASO III □ **$f(x) < f(a)$ para valores en (a, b)** [como en la figura 1(*c*) o (*d*)]
De acuerdo con el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$ y, ya que $f(a) = f(b)$, alcanza este valor mínimo en un número c en (a, b). Otra vez $f'(c) = 0$, de acuerdo con el teorema de Fermat.

□

EJEMPLO 1 □ Aplicaremos el teorema de Rolle a la función de posición $s = f(t)$ de un objeto en movimiento. Si el objeto se encuentra en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle dice que hay un momento cuando $t = c$, entre a y b, en que $f'(c) = 0$; esto es, cuando la velocidad es 0. (Puede ver que esto es cierto en un caso particular arrojando una pelota verticalmente hacia arriba.) □

□ La figura 2 muestra una gráfica de la función $f(x) = x^3 + x - 1$, descrita en el ejemplo 2. El teorema de Rolle indica que, sea cual sea la amplificación que hagamos en la pantalla, nunca encontraremos una segunda intersección de la abscisa al origen.

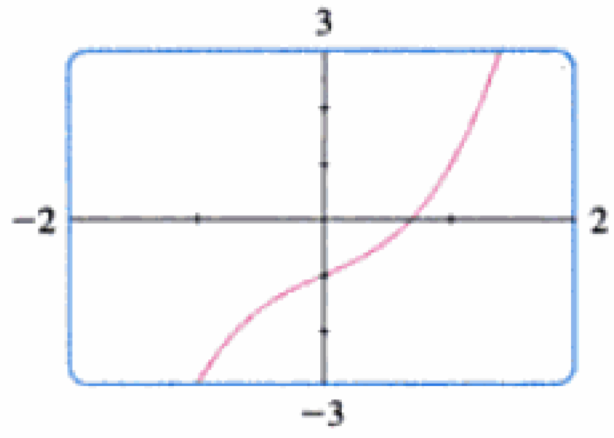


FIGURA 2

EJEMPLO 2 □ Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una y sólo una raíz real.

SOLUCIÓN Primero aplicaremos el teorema del valor intermedio (teorema 10 de la sección 2.5) para demostrar que existe una raíz. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$, entonces $f(0) = -1 < 0$, y $f(1) = 1 > 0$. Como f es un polinomio es continua, así que el teorema del valor intermedio establece que hay un número c entre 0 y 1, tal que $f(c) = 0$; por consiguiente, la ecuación dada tiene una raíz.

Para demostrar que la ecuación no tiene otra raíz real, recurrimos al teorema de Rolle y el argumento será por contradicción. Supongamos que tuviera dos raíces, a y b, entonces $f(a) = 0 = f(b)$ es continuo en $[a, b]$. Así, según el teorema de Rolle hay un número c entre a y b, tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para toda } x$$

(porque $x^2 \geqslant 0$), por lo que $f'(x)$ jamás puede ser 0. Esto es una contradicción y, en consecuencia, la ecuación no puede tener dos raíces reales. □

Nuestra aplicación principal del teorema de Rolle será con el fin de demostrar este importante teorema, enunciado por primera vez por otro matemático francés, Joseph-Louis Lagrange.

Teorema del valor medio Sea f una función que satisface las siguientes hipótesis:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces, hay un número c en (a, b), tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o bien, lo que es lo mismo

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demostrar este teorema podemos ver que es razonable por interpretación geométrica. En las figuras 3 y 4 se muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ en las gráficas de dos funciones diferenciables. La pendiente de la recta secante AB es

$$\boxed{3} \qquad m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

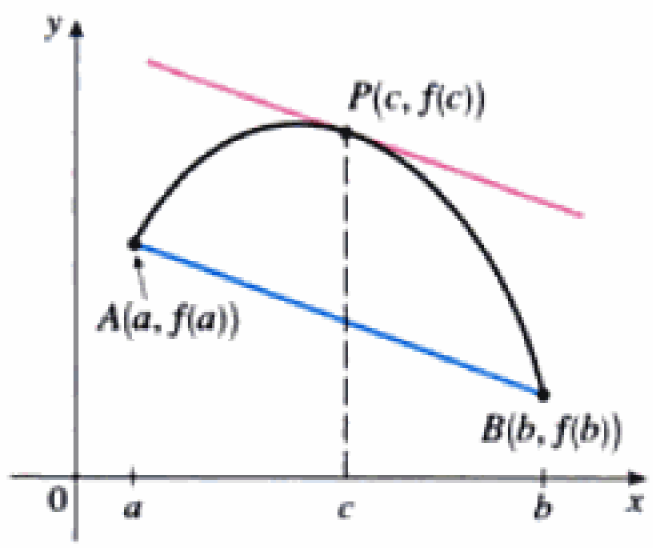


FIGURA 3

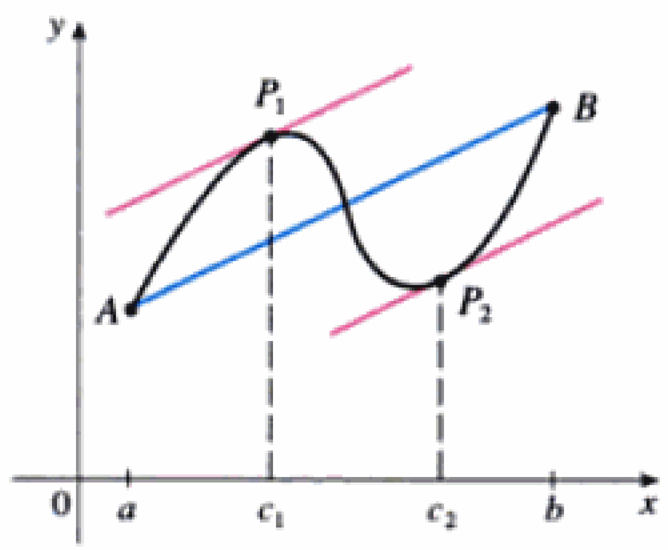


FIGURA 4

que es la misma expresión que la del lado derecho de la ecuación (1). Ya que $f'(c)$ es la pendiente de la tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en su forma expresada por la ecuación (1), dice que al menos hay un punto, $P(c, f(c))$, en la gráfica en que la pendiente de la tangente es igual a la pendiente de la secante AB; en otras palabras, existe un punto, P, donde la tangente es paralela a la secante AB.

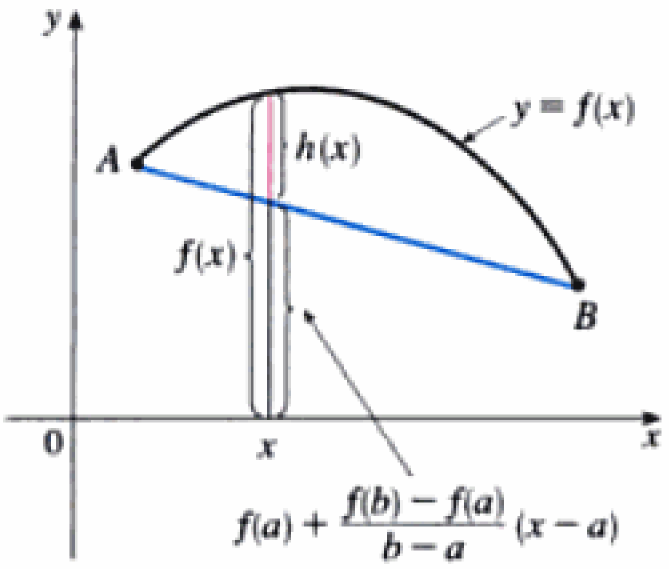


FIGURA 5

Demostración Aplicaremos el teorema de Rolle a una nueva función, h, definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la secante AB. Al emplear la ecuación (3), vemos que la ecuación de la recta AB se puede escribir en la siguiente forma:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o bien

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Así que, como se aprecia en la figura 5,

$$\boxed{4} \qquad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

primero debemos comprobar que h satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle.

1. La función h es continua en $[a, b]$ por ser la suma de f y un polinomio de primer grado, y ambos son continuos.
2. La función h es derivable en (a, b) pues tanto f como el polinomio de primer grado son derivables. De hecho, podemos calcular h' directamente mediante la ecuación (4):

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

{Observará que $f(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ son constantes.}

3. $$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$
$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Por consiguiente, $h(a) = h(b)$.

Dado que h cumple con las hipótesis del teorema de Rolle, según ese teorema hay un número c, en (a, b), tal que $h'(c) = 0$; por lo tanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y así

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ □

EJEMPLO 3 □ Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, tomaremos $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$ y $b = 2$. Ya que f es un polinomio, es continua y derivable

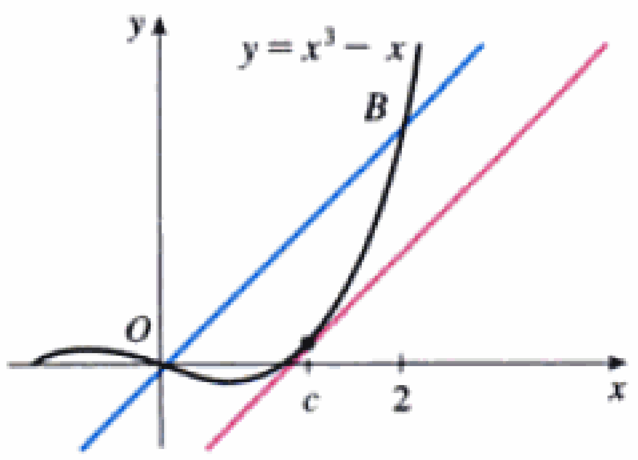


FIGURA 6

para toda x, así que seguramente es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$; por consiguiente, de acuerdo con el teorema del valor medio, hay un número c, en $(0, 2)$, tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora bien, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, así que esta ecuación se transforma en

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

que da como resultado $c^2 = \frac{4}{3}$, esto es, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero c debe estar en $(0, 2)$, de modo que $c = 2/\sqrt{3}$. La figura 6 ilustra este cálculo; en este valor de c, la tangente es paralela a la secante OB. □

EJEMPLO 4 □ Si un objeto se mueve en línea recta y su función de posición es $s = f(t)$, la velocidad media entre $t = a$ y $t = b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la velocidad en el momento $t = c$ es $f'(c)$. Así, el teorema del valor medio nos dice que en algún momento $t = c$ entre a y b, y la velocidad instantánea $f'(c)$ es igual a la velocidad promedio; por ejemplo, si un automóvil recorriera 180 km en 2 h, el velocímetro debería indicar, al menos una vez, 90 km/h. □

□ El teorema del valor medio fue formulado por primera vez por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nacido en Italia de padre francés y madre italiana. Fue un niño prodigio y profesor en Turín, a la temprana edad de 19 años. Lagrange hizo grandes aportaciones a las teorías de los números, de las funciones, de las ecuaciones, así como a la mecánica analítica y celeste. En particular, aplicó el cálculo al análisis de la estabilidad del Sistema Solar. Por invitación de Federico el Grande, sustituyó a Euler en la Academia de Berlín y, cuando murió Federico, aceptó una invitación del rey Luis XVI de ir a París, donde se le asignaron departamentos en el Louvre. Fue un hombre bondadoso y tranquilo, que sólo vivió para las ciencias.

La ventaja más importante del teorema del valor medio es que permite obtener datos en torno a una función a partir de información sobre su derivada. El siguiente ejemplo es uno de los casos donde se aplica este principio.

EJEMPLO 5 □ Supongamos que $f(0) = -3$ y que $f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande puede ser $f(2)$?

SOLUCIÓN Se dice que f es diferenciable y, por consiguiente, siempre es continua. En particular, el teorema del valor medio es aplicable al intervalo $[0, 2]$ Existe un número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

y así
$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Se dice que $f'(x) \leqslant 5$ para toda x, así que, en particular, sabemos que $f'(c) \leqslant 5$. Al multiplicar ambos lados de esta desigualdad por 2, se llega a $2f'(c) \leqslant 10$, entonces

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

El valor máximo posible de $f(2)$ es 7. □

El teorema del valor medio sirve para establecer algunos de los hechos básicos del cálculo diferencial, uno de las cuales es el siguiente teorema. En las próximas secciones nos encontraremos con otros más.

5 Teorema Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b) entonces f es constante en (a, b).

Demostración Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en (a, b), con $x_1 < x_2$; como f es derivable en (a, b), debe serlo en (x_1, x_2), y continua en $[x_1, x_2]$. Con el teorema del valor medio aplicado a f en el intervalo $[x_1, x_2]$ obtenemos un número c tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$\boxed{6} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Dado que $f'(x) = 0$ pàra toda x, $f'(c) = 0$ y así la ecuación (6) se transforma en

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

En vista de ello, f tiene el mismo valor en dos números *cualesquiera* x_1 y x_2 en (a, b). Esto quiere decir que f es constante en (a, b). ◻

> $\boxed{7}$ **Corolario** Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en el intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante en (a, b); esto es, $f(x) = g(x) + c$, donde c es una constante.

Demostración Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. Entonces

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Así, de acuerdo con el teorema (5), F es constante; esto es, $f - g$ es constante. ◻

NOTA ◻ Hay que tener cuidado al aplicar el teorema 5. Sea

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de f es $D = \{x \mid x \neq 0\}$ y $f'(x) = 0$ para toda x en D; pero es obvio que f no es una función constante. Ello no contradice al teorema (5) porque D no es un intervalo. Observará que f es constante en el intervalo $(0, \infty)$ y en el intervalo $(-\infty, 0)$.

EJEMPLO 6 ◻ Demuestre la identidad $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Aunque no se necesita el cálculo diferencial para demostrar esta identidad, su uso la simplifica. Si $f(x) = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos los valores de x; por consiguiente $f(x) = C$, una constante. Para determinar el valor de C, sea $x = 1$. Entonces

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Así $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$. ◻

4.2 Ejercicios

1–4 □ Compruebe que cada una de las funciones siguientes satisfaga las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo mencionado. A continuación determine todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $[0, 4]$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$, $[0, 2]$

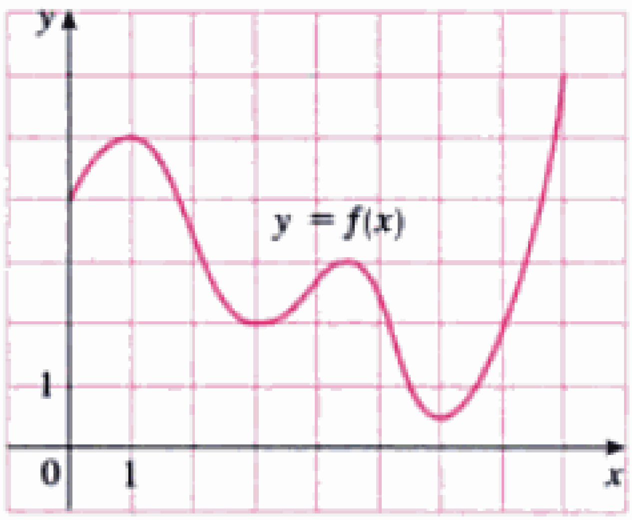
3. $f(x) = \operatorname{sen} 2\pi x$, $[-1, 1]$

4. $f(x) = x\sqrt{x + 6}$, $[-6, 0]$

5. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$ pero no hay un número c en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema de Rolle?

6. Sea $f(x) = (x - 1)^{-2}$. Demuestre que $f(0) = f(2)$ pero no existe un número c en $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice al teorema de Rolle?

7. Emplee la gráfica de f para estimar los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.



8. Utilice la gráfica de f del ejercicio 7 para estimar los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[1, 7]$.

9. (a) Grafique la función $f(x) = x + 4/x$ en la pantalla $[0, 10]$ por $[0, 10]$.
(b) Grafique la recta secante que pasa por los puntos $(1, 5)$ y $(8, 8.5)$ en la misma pantalla que f.
(c) Determine al número c que cumple con la conclusión del teorema del valor medio para esta función f y el intervalo $[1, 8]$. A continuación grafique la tangente en el punto $(c, f(c))$ y observe que sea paralela a la línea secante.

10. (a) En la pantalla $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, grafique la función $f(x) = x^3 - 2x$ y su secante que pasa por los puntos $(-2, -4)$ y $(2, 4)$. Con la gráfica estime las abscisas de los puntos en que la tangente es paralela a la secante.
(b) Calcule los valores exactos de los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[-2, 2]$ y compare sus respuestas con las del inciso (a).

11–14 □ Compruebe que la función satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo citado. A continuación determine todos los números c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio.

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $[-1, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x - 1$, $[0, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$, $[1, 4]$

15. Sea $f(x) = |x - 1|$. Demuestre que no hay un valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice al teorema del valor medio?

16. Sea $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Demuestre que no hay un valor de c tal que $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$. ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema del valor medio?

17. Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene una raíz y sólo una.

18. Demuestre que la ecuación $3x - 2 + \cos(\pi x/2) = 0$ tiene una raíz y sólo una.

19. Demuestre que la ecuación $x^5 - 6x + c = 0$ tiene cuando mucho una raíz en el intervalo $[-1, 1]$.

20. Demuestre que la ecuación $x^4 + 4x + c = 0$ tiene cuando más dos raíces reales.

21. (a) Demuestre que un polinomio de grado 3 tiene, cuando más, tres raíces reales.
(b) Demuestre que un polinomio de grado n tiene, cuando más, n raíces reales.

22. (a) Si f es derivable en $\mathbb{R}$ y tiene dos raíces, demuestre que f' posee una raíz cuando menos.
(b) Suponga que f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y que tiene tres raíces. Demuestre que f'' posee una raíz real, cuando menos.
(c) ¿Puede generalizar las partes (a) y (b)?

23. Si $f(1) = 10$ y $f'(x) \geq 2$ cuando $1 \leq x \leq 4$, ¿cuán pequeña puede ser $f(4)$?

24. Suponga que f es continua en $[2, 5]$ y que $1 \leq f'(x) \leq 4$ para toda x en $(2, 5)$. Demuestre que $3 \leq f(5) - f(2) \leq 12$.

25. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leq 2$ para toda x?

26. Sean f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). También $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ cuando $a < x < b$. Demuestre que $f(b) < g(b)$. [*Sugerencia:* aplique el teorema del valor medio a la función $h = f - g$.]

27. Demuestre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ si $x > 0$.

28. Si f es una función impar y derivable en todo punto, demuestre que para todo número positivo b, existe un número c en $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Emplee el teorema del valor medio a fin de demostrar la desigualdad

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b| \qquad \text{para toda } a \text{ y } b$$

30. Si para toda x, $f'(x) = c$ es constante, aplique el corolario (7) con objeto de demostrar que $f(x) = cx + d$ para alguna constante d.

31. Sean $f(x) = 1/x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en sus dominios. A partir del corolario (7), ¿se puede deducir que $f - g$ es constante?

32. Emplee el método del ejemplo 6 para demostrar la identidad

$$2\operatorname{sen}^{-1}x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geq 0$$

33. Demuestre la identidad

$$\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{x+1} = 2\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. A las 2:00 P.M., el velocímetro del automóvil indica 30 mi/h: a las 2:10 P.M., 50 mi/h. Demuestre que en algún momento entre las 2:00 y las 2:10 la aceleración es 120 mi/h^2, exactamente.

35. Dos corredores arrancan al mismo tiempo en una competencia y terminan empatados. Demuestre que en cierto momento de la carrera tuvieron la misma velocidad. [*Sugerencia*: defina $f(t) = g(t) - h(t)$ donde g y h son las funciones de posición de los dos corredores.]

36. Un número a se dice que es un **punto fijo** de una función f si $f(a) = a$. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x, entonces f tiene cuando más un punto fijo.

4.3 Cómo afectan las derivadas la forma de una gráfica

Numerosas aplicaciones del cálculo dependen de nuestra capacidad para deducir hechos referentes a la función f a partir de información concerniente de sus derivadas. Como $f'(x)$ representan la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, nos dice cuál es la dirección en que avanza la curva en cada punto. Es pues razonable esperar que lo que sepamos de $f'(x)$ nos ayudará a saber más de $f(x)$.

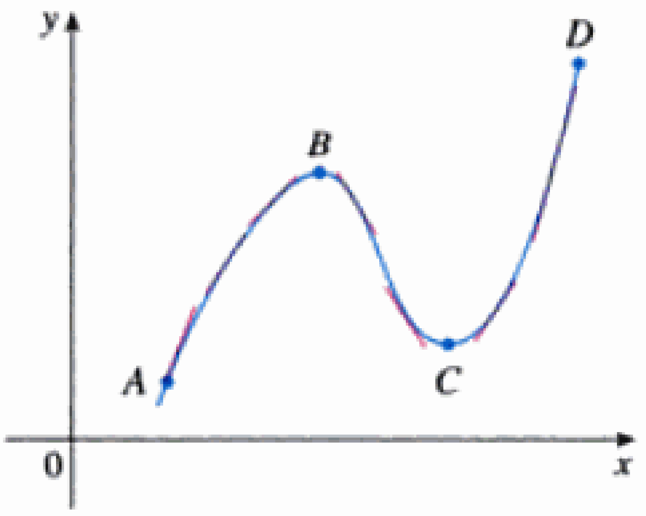


FIGURA 1

¿Qué revela f' respecto a f?

Para ver cómo la derivada de f puede decirnos dónde es creciente o decreciente una función, nos fijamos en la figura 1. (Las funciones crecientes y decrecientes se definieron en la sección 1.1). Entre A y B y entre C y D, las rectas tangentes tienen pendiente positiva y, por tanto, $f'(x) > 0$. Entre B y C la rectas tangentes tienen pendiente negativa y, por tanto, $f'(x) < 0$. Así se ve que f crece cuando $f'(x)$ es positiva y decrece cuando $f'(x)$ es negativa. Para demostrar que así ocurre siempre usamos el teorema del valor medio.

□ Abreviamos el nombre de esta prueba como prueba C/D.

Prueba creciente/decreciente

(a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

(b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Demostración

(a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo, y que $x_1 < x_2$. De acuerdo con la definición de una función creciente (pág. 21) debemos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como se nos dice que $f'(x) > 0$ sabemos que f es derivable con $[x_1, x_2]$. De modo que por el teorema del valor medio, hay un número c, entre x_1 y x_2, tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora bien, por hipótesis $f'(c) > 0$, y $x_2 - x_1 > 0$, porque $x_1 < x_2$; por lo tanto, el lado derecho de la ecuación (1) es positivo, y así

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

Esto demuestra que f es creciente.

La parte (b) se demuestra de igual modo. □

EJEMPLO 1 □ Determinar dónde es creciente y dónde decreciente la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

SOLUCIÓN $$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

Para aplicar la prueba creciente/decreciente hay que saber dónde $f'(x) > 0$ y donde $f'(x) < 0$. Ello depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$, que son $12x$, $x - 2$ y $x + 1$. Dividimos la recta numérica real en intervalos cuyos extremos sean los números críticos -1, 0 y 2, y el trabajo se ordena en una tabla. Un signo + indica que la expresión dada es positiva y un signo –, que es negativa. La última columna de la tabla presenta la conclusión, basada en la prueba anterior. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ en $(0, 2)$. (También podría decirse que f decrece en $[0, 2]$.)

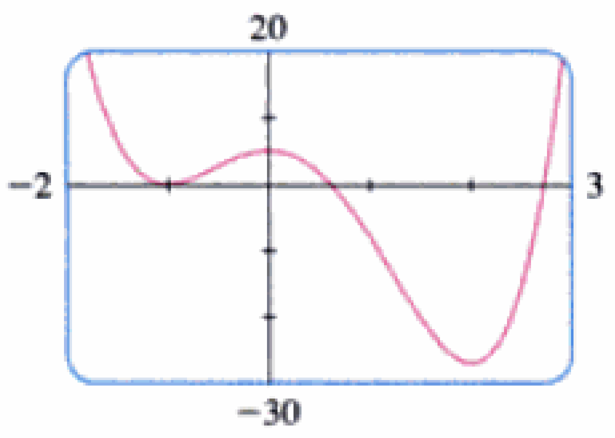


FIGURA 2

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente en $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	creciente en $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente en $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente en $(2, \infty)$

La gráfica de f se muestra en la figura 2 y confirma lo anterior. □

De acuerdo con la sección 4.1, si f tiene un máximo o mínimo local en c, entonces c debe ser un número crítico de f (según el teorema de Fermat), pero no todo número crítico da lugar a un extremo. Por ello, se precisa una prueba que indique si f tiene un extremo local en un número crítico, o no.

En la figura 2 podemos ver que $f(0) = 5$ es un valor máximo local de f porque f crece en $(-1, 0)$ y decrece en $(0, 2)$, o, en términos de las derivadas $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 2$. En otras palabras, el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en 0. La siguiente prueba se basa en esta observación.

Prueba de la primera derivada Si c es un número crítico de una función continua f.

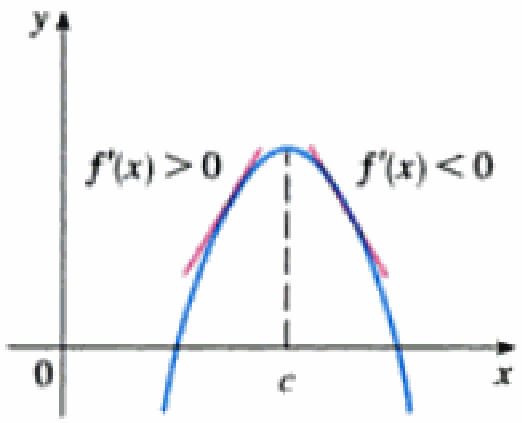
(a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

(b) Si f' pasa de negativa a positiva en c, entonces f posee un mínimo local en c.

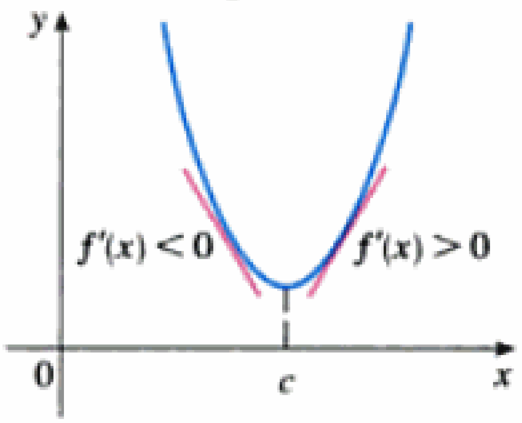
(c) Si f' no cambia de signo en c (esto es, f' es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados), entonces f carece de extremo local en c.

La prueba de la primera derivada es una consecuencia de la prueba C/D. En la parte (a) por ejemplo, ya que el signo $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, f es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha de c. Se sigue que f tiene un máximo local en c.

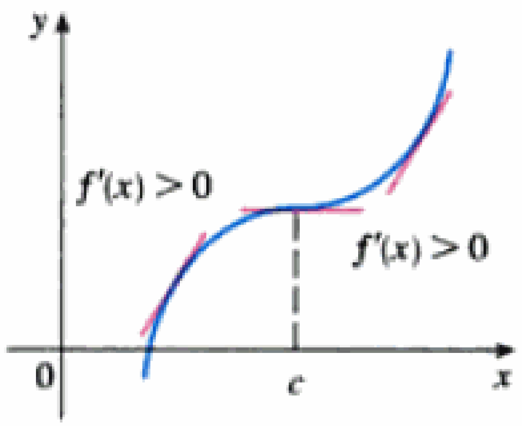
Es fácil recordar la prueba de la primera derivada visualizando diagramas como los de la figura 3.



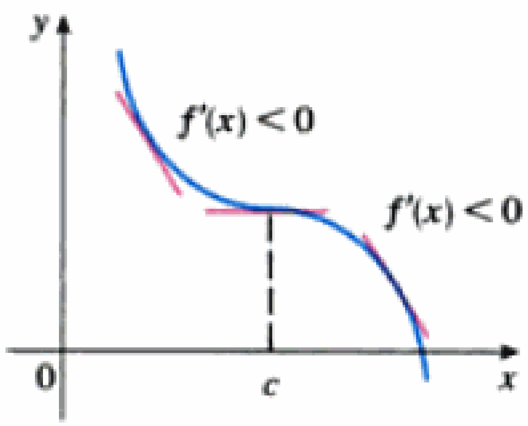
(a) Máximo local



(b) Mínimo local



(c) Sin extremo



(d) Sin extremo

FIGURA 3

EJEMPLO 2 □ Halle los valores máximos y mínimos de la función f del ejemplo 1.

SOLUCIÓN De la tabla de la solución del ejemplo 1 vemos que $f'(x)$ cambia de negativo a positivo en -1, de modo que $f(-1) = 0$ es un valor mínimo local por la prueba de la primera derivada. Análogamente, f' cambia de negativo a positivo en 2, de modo que $f(2) = -27$ es también un valor mínimo local. Como ya se hizo ver, $f(0) = 5$ es un máximo local porque $f'(x)$ cambia de ser un número positivo a negativo en el valor 0. □

EJEMPLO 3 □ Halle los valores máximos y mínimos locales de la función

$$g(x) = x + 2\operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN Para encontrar los valores críticos de g derivamos:

$$g'(x) = 1 + 2\cos x$$

De modo que $g'(x) = 0$ cuando $\cos x = -\frac{1}{2}$. Las soluciones de esta ecuación son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Dado que g es derivable en todo punto, los únicos números críticos son $2\pi/3$ y $4\pi/3$ y, por tanto, analizamos g en la tabla siguiente.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	creciente en $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	decreciente en $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	creciente en $(4\pi/3, 2\pi)$

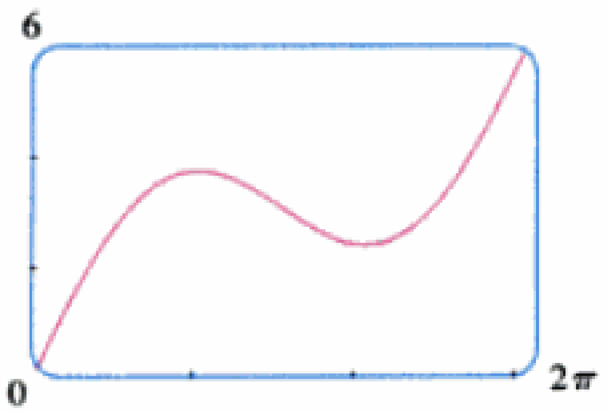


FIGURA 4
$y = x + 2\operatorname{sen} x$

Puesto que $g'(x)$ cambia de positivo a negativo en $2\pi/3$, la prueba de la primera derivada nos dice que hay un máximo local en $2\pi/3$ y el valor máximo local es

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

Asimismo, $g'(x)$ cambia de negativo a positivo en $4\pi/3$ y así

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

es un valor mínimo local. La gráfica de g en la figura 4 confirma nuestra conclusión. □

¿Qué dice f'' acerca de f?

La figura 5 muestra las gráficas de dos funciones crecientes en (a, b). Ambas gráficas unen el punto A con el punto B, pero se ven distintas porque se tuercen, la primera para arriba, y la segunda para abajo. ¿Cómo distinguir entre estos dos tipos de comportamiento? En diversos puntos de la figura 6 se han trazado tangentes a esas curvas. En (a), la curva queda arriba de las tangentes, y se dice que f es *cóncava hacia arriba* en (a, b). En (b) la curva está abajo de las tangentes, y se dice que g es *cóncava hacia abajo* en (a, b).

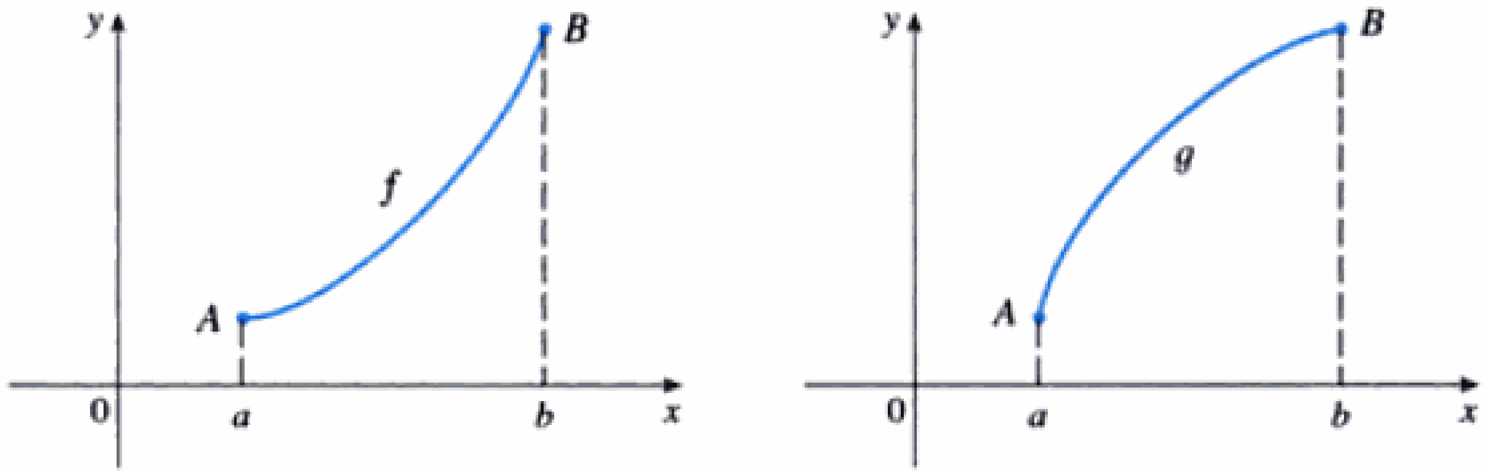


FIGURA 5 (a) (b)

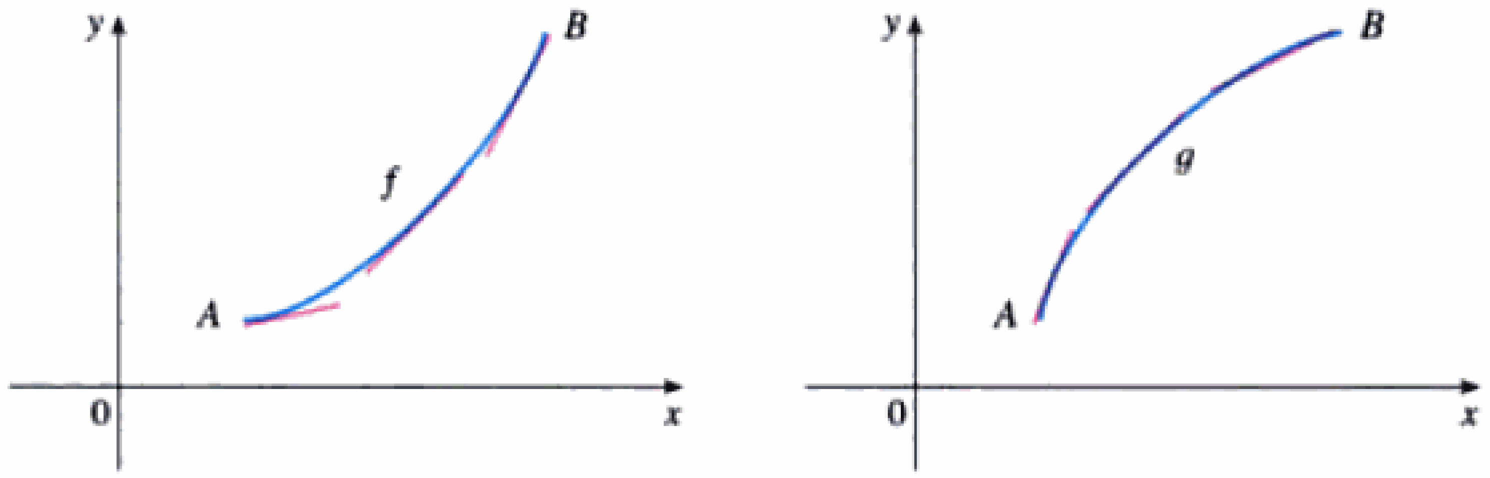


FIGURA 6 (a) Cóncava hacia arriba (b) Cóncava hacia abajo

Definición Si la gráfica de f está arriba de sus tangentes en un intervalo I, se dice que es **cóncava hacia arriba** en I. Si queda abajo de sus tangentes en I, se llama **cóncava hacia abajo** en I.

La figura 7 presenta la gráfica de una función cóncava hacia arriba (allí se abrevia CAR) en los intervalos (b, c), (d, e) y (e, p) y cóncava hacia abajo (CAB) en los intervalos (a, b), (c, d) y (p, q).

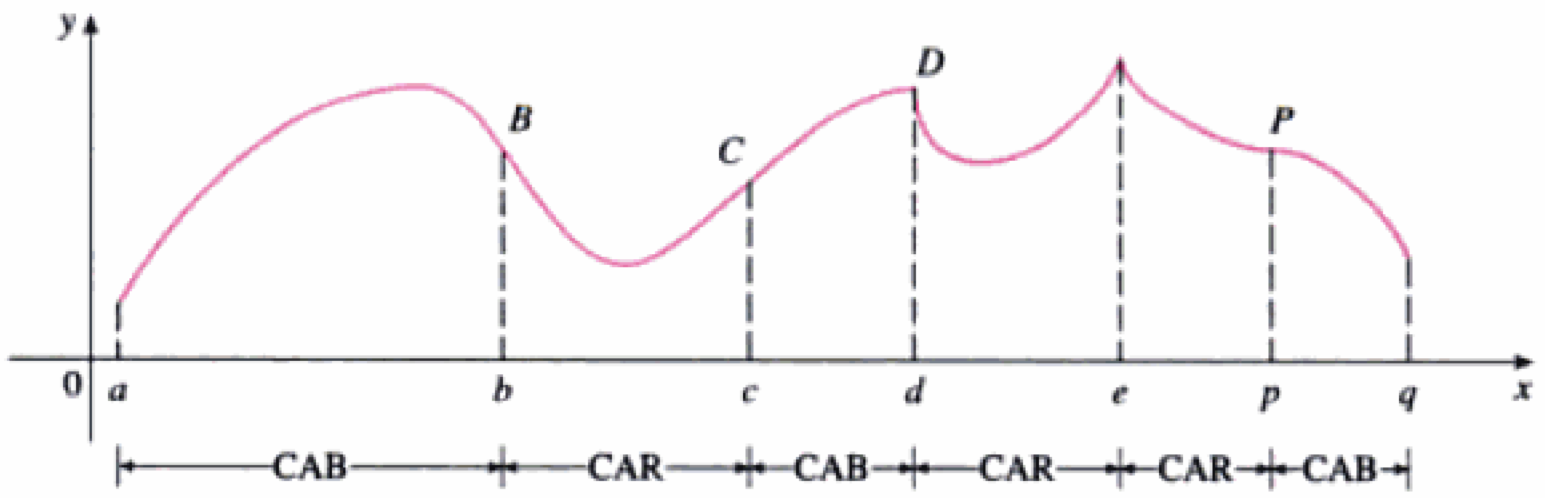


FIGURA 7

Veamos cómo nos ayuda la segunda derivada a determinar los intervalos de concavidad. En la figura 6(a) se advierte que la pendiente de la tangente aumenta al avanzar de izquierda a derecha. Esto significa que la derivada f' es una función creciente y, por lo tanto, su derivada, f'', es positiva. Asimismo, en la figura 6(b) la pendiente de la tangente disminuye de izquierda a derecha por lo cual f' decrece y, por ello, f'' es negativa. Este razonamiento se puede invertir y nos sugiere la validez del siguiente teorema, del que se da una demostración en el apéndice F.

Prueba de concavidad

(a) Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.

(b) Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

EJEMPLO 4 □ La figura 8 muestra una gráfica de población para abejas melíferas de Chipre criadas en un apiario. ¿Cómo cambia la tasa de crecimiento de población respecto al tiempo? ¿Cuándo es máxima esta tasa? ¿En qué intervalos es P cóncava hacia abajo y en qué intervalos hacia arriba?

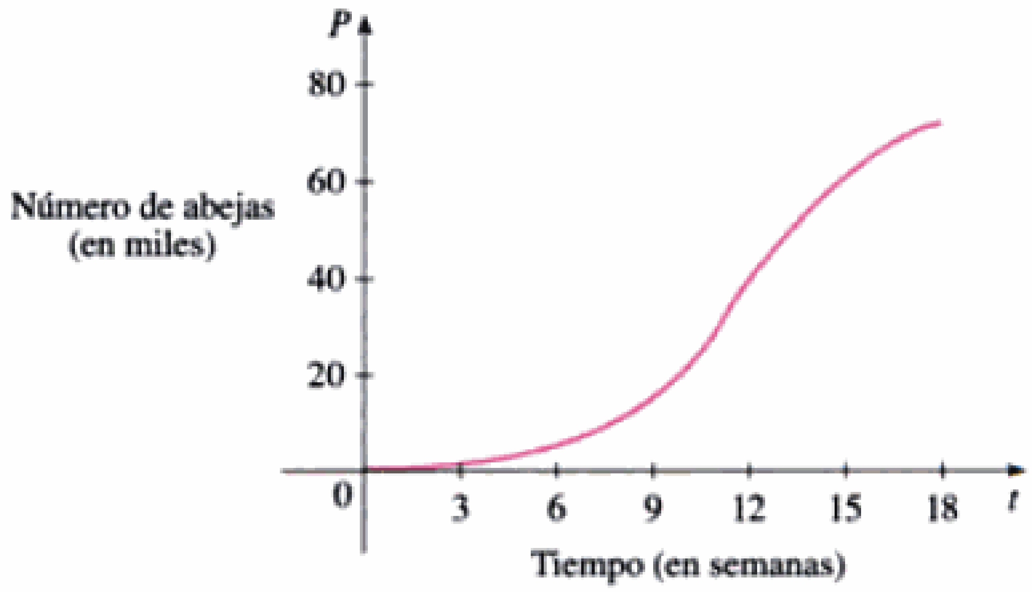


FIGURA 8

SOLUCIÓN Viendo la pendiente de la curva al crecer t, nos percatamos de que la razón de crecimiento de la población es inicialmente muy pequeña, aumenta después hasta alcanzar un máximo en aproximadamente $t = 12$ semanas y decrece cuando la población se aproxima a su valor máximo cercano a 75,000 (llamado *capacidad máxima*) la tasa de crecimiento $P'(t)$, tiende a cero. La curva se ve cóncava hacia arriba en $(0, 12)$ y hacia abajo en $(12, 18)$. □

En el ejemplo 4, la curva de población cambió de cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo en la proximidad del punto (12, 38,000). Este punto se llama *punto de inflexión* de la curva. Lo significativo de este punto es que la tasa de crecimiento poblacional tiene su valor máximo ahí. En general, un punto de inflexión es un punto donde una curva cambia el sentido de su concavidad.

Definición Un punto P de una curva se llama **punto de inflexión** si en él la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Por ejemplo, en la figura 7, B, C, D, y P son puntos de inflexión. Notará que si una curva tiene una tangente en un punto de inflexión, la curva cruza la tangente allí.

De acuerdo con la prueba de la concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

EJEMPLO 5 □ Dibuje una gráfica posible para una función f sujeta a ciertas condiciones que son:

(i) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ en $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

SOLUCIÓN La condición (i) dice que f crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, \infty)$. La condición (ii) dice que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$. De la condición (iii) sabemos que la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales: $y = -2$ y $y = 0$.

Primero trazamos la asíntota horizontal $y = -2$ como línea segmentada (Fig. 9). Entonces trazamos la gráfica de f acercándose a esta asíntota lejos a la izquierda aumentando a su punto máximo en $x = 1$ y disminuyendo hacia el eje x lejos a la derecha. También nos aseguramos de que la gráfica tiene puntos de inflexión cuando $x = -2$ y 2. Obsérvese que hicimos a la curva tornarse hacia arriba para $x < -2$ y $x > 2$, y tornarse hacia abajo para x entre -2 y 2.

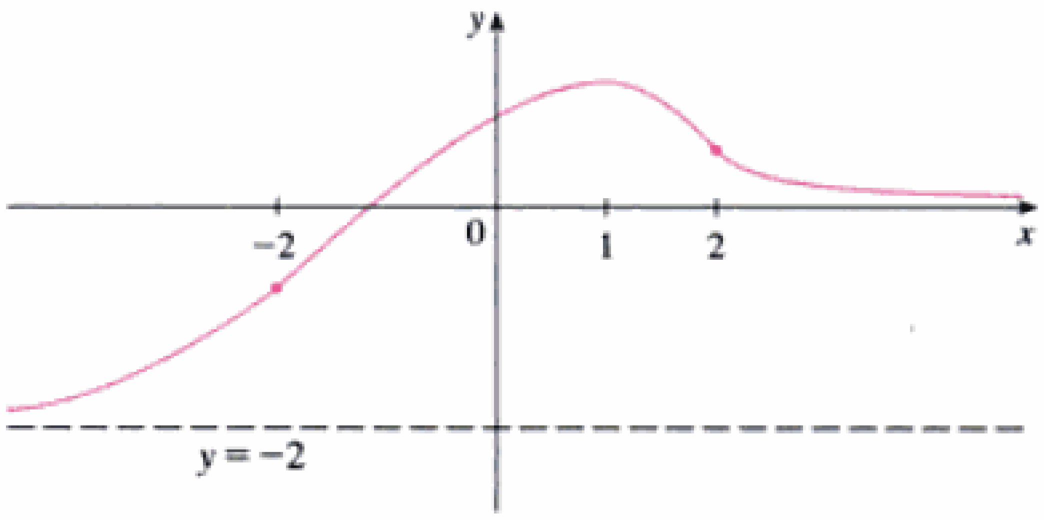


FIGURA 9

□

Otra aplicación de la segunda derivada es la prueba siguiente para determinar los valores máximo y mínimo de una función. Es consecuencia de la prueba de concavidad.

Prueba de la segunda derivada Si f'' es continua en la vecindad de c.

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo local en c.

(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, f posee un máximo local en c.

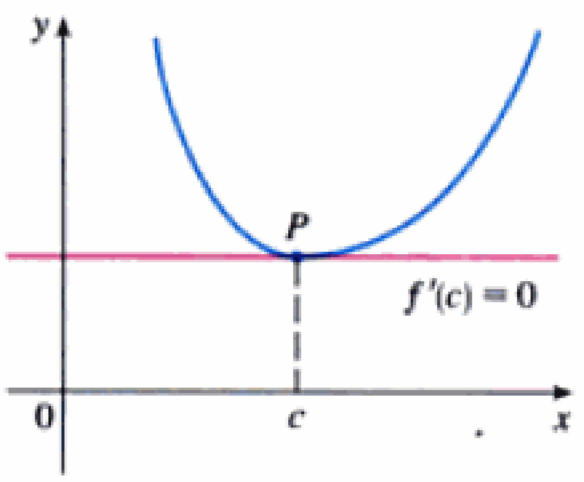


FIGURA 10
$f''(c) > 0$, cóncava hacia arriba

Por ejemplo, la parte (a) es verdad porque $f''(x) > 0$ en la vecindad de c, de modo que f es cóncava hacia arriba cerca de c. Esto significa que la gráfica de f se encuentra *arriba* de su tangente horizontal en c y luego f tiene un mínimo local en c (Fig. 10).

EJEMPLO 6 □ Describa la curva $y = x^4 - 4x^3$ en cuanto concavidad, punto de inflexión y extremos locales. Con esta información trace la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para hallar los números críticos sea $f'(x) = 0$ y obtenemos $x = 0$ y $x = 3$. A fin de emplear la prueba de la segunda derivada evaluamos f'' en ambos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Dado que $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. Como $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no aporta información acerca del número crítico 0. Pero ya que $f'(x) < 0$ cuando $x < 0$ y cuando $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada dice que f no tiene extremo local en 0. [En efecto, la expresión de $f'(x)$ muestra que f decrece a la izquierda de 3 y crece a la derecha de 3.]

Puesto que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o 2, dividimos la recta real en intervalos con esos números como extremos y llenamos esta tabla.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	+	hacia arriba
$(0, 2)$	−	hacia abajo
$(2, \infty)$	+	hacia arriba

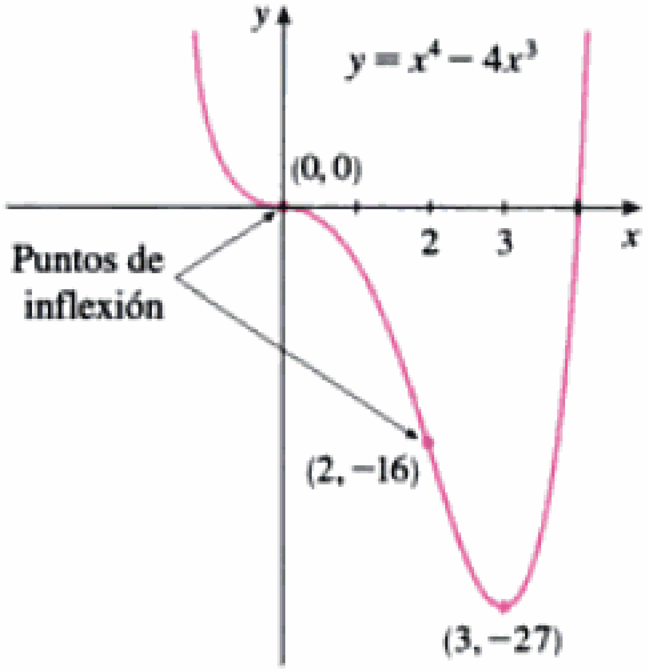


FIGURA 11

El punto (0, 0) es un punto de inflexión porque la curva pasa de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en él. También (2, −16) es un punto de inflexión, pues allí la curva pasa de ser cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Con el mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, se traza la curva de la figura 11. □

NOTA □ La prueba de la segunda derivada no aporta nada cuando $f''(c) = 0$. En otras palabras, en este punto podría haber un máximo, un mínimo o ninguno de los dos (como en el ejemplo 6). Esta prueba también falla cuando no existe $f''(c)$. En estas circunstancias hay que emplear la prueba de la primera derivada. De hecho, aunque se apliquen las dos pruebas, con frecuencia la de la primera derivada resulta más fácil de usar.

EJEMPLO 7 □ Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

SOLUCIÓN Al determinar las dos primeras derivadas se obtiene

□ Use la derivación para comprobar.

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

Ya que $f'(x) = 0$ cuando $x = 4$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4, y 6.

Intervalo	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decreciente en $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	creciente en $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decreciente en $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decreciente en $(6, \infty)$

Para ubicar los valores extremos locales aplicamos la prueba de la primera derivada. Como f' cambia de negativa a positiva en 0, $f(0) = 0$ es un mínimo local. Dado que f' pasa de positiva a negativa en 4, entonces $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no se modifica en 6, así que allí no hay un extremo. (Se podría emplear la prueba de la segunda derivada en 4, pero no en 0 ni en 6, pues ahí no existe f''.)

Al revisar la expresión de $f''(x)$ y observando que $x^{4/3} \geqslant 0$ para toda x, resulta $f''(x) < 0$ cuando $x < 0$ y $0 < x < 6$ y $f''(x) > 0$ cuando $x > 6$. Entonces f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$, cóncava hacia arriba en $(6, \infty)$, y el único punto de inflexión está en $(6, 0)$. La gráfica aparece en la figura 12. La curva tiene tangentes verticales en $(0, 0)$ y en $(6, 0)$ porque $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to 6$.

□ Si cuenta con una calculadora graficadora o una computadora, trate de reproducir la gráfica de la figura 12. Ciertas máquinas exhiben la gráfica completa, algunas sólo la parte a la derecha del eje y otras más sólo la sección entre $x = 0$ y $x = 6$. Para conocer la explicación y el remedio, revise el ejemplo 7 de la sección 1.4. Una expresión equivalente con que se obtiene la gráfica correcta es

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6 - x}{|6 - x|} |6 - x|^{1/3}$$

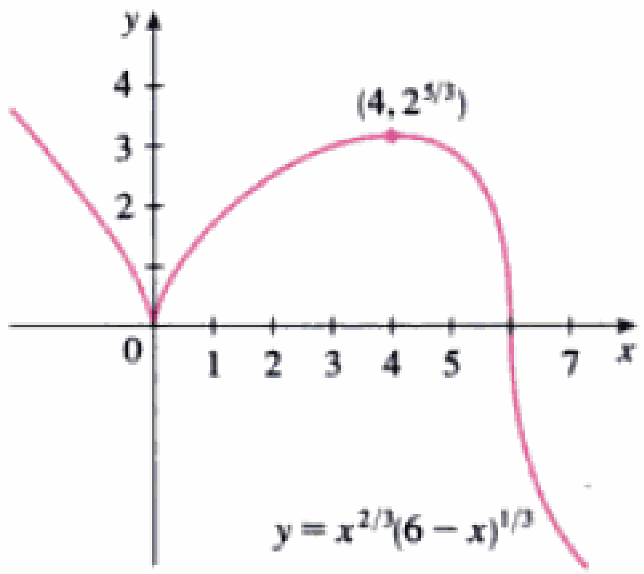


FIGURA 12

□

EJEMPLO 8 □ Use la primera y segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, más las asíntotas para dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN Advierta que el dominio de f es $\{x \mid x \neq 0\}$, de modo que haremos la comprobación en relación con las asíntotas verticales calculando los límites por la izquierda y por la derecha cuando $x \to 0$. Cuando $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, de suerte que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

y esto hace ver que $x = 0$ es una asíntota vertical. Cuando $x \to 0^-$, tenemos $t = 1/x \to -\infty$, por tanto

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

Como $x \to \pm\infty$, tenemos $1/x \to 0$ y así

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Esto demuestra que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Calculemos ahora la derivada. La regla de la cadena da

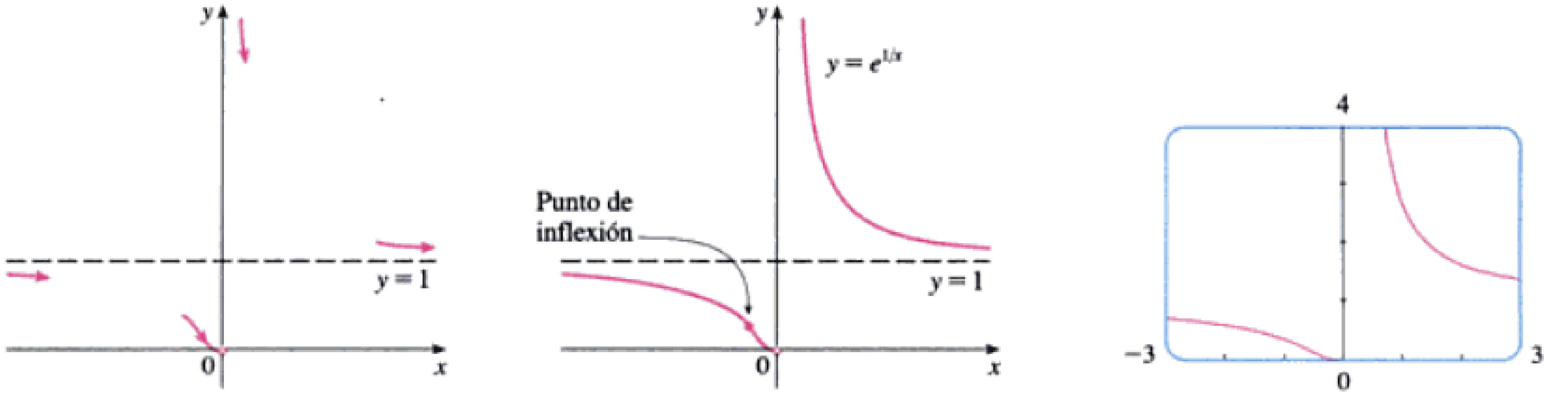
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Dado que $e^{1/x} > 0$ y $x^2 > 0$ para toda $x \neq 0$, tenemos $f'(x) < 0$ para toda $x \neq 0$. Por tanto, f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y sobre $(0, \infty)$. No hay número crítico, de forma que la función no tiene máximo ni mínimo. La segunda derivada es

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

Puesto que $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$, tenemos $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. De este modo, la curva es cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y sobre $(0, \infty)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para graficar f primero trazamos la asíntota horizontal $y = 1$ (como una línea punteada), junto con las partes de la curva que están cerca de ella, en un esquema preliminar [Fig. 13(a)]. Estas partes reflejan la información referente a los límites y al hecho de que f es decreciente tanto sobre $(-\infty, 0)$ como sobre $(0, \infty)$. Advierta que hemos indicado que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0^-$ aun cuando $f(0)$ no exista. En la figura 13(b) terminamos el dibujo incorporando la información referente a la concavidad y al punto de inflexión. En la figura 13(c) comprobamos el trabajo con un dispositivo graficador.



(a) Esquema preliminar (b) Dibujo terminal (c) Comprobación por computadora

FIGURA 13

4.3 Ejercicios

1–2 □ Use la gráfica de f para hallar lo siguiente.

(a) Los intervalos abiertos más grandes donde crece f.

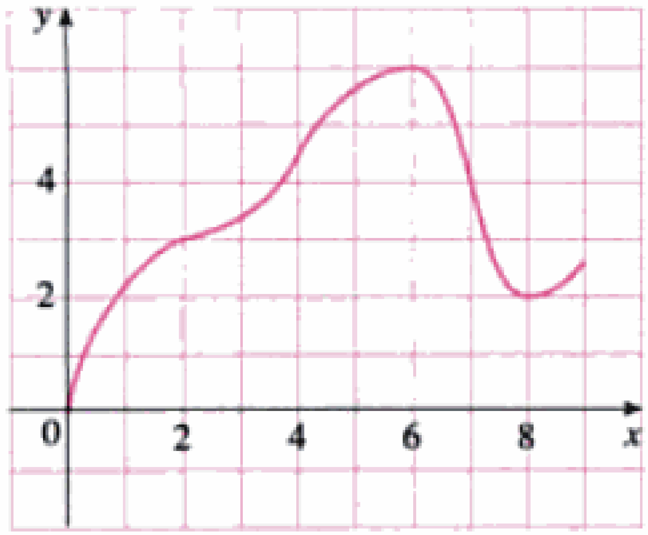
(b) Los intervalos abiertos más grandes donde f decrece.

(c) Los intervalos abiertos más grandes donde f es cóncava hacia arriba.

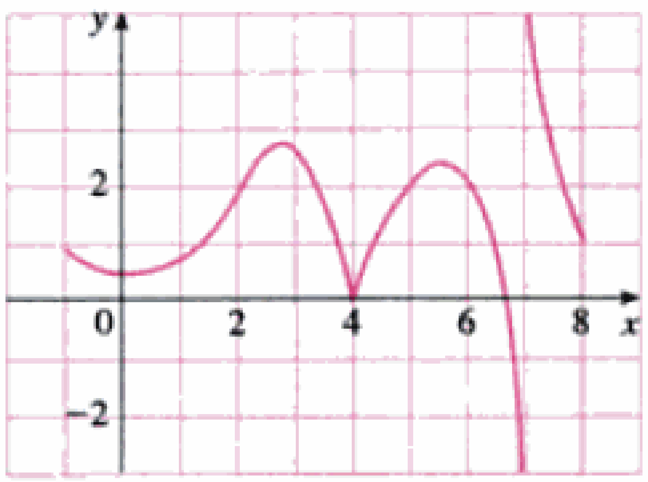
(d) Los intervalos abiertos más grandes donde f es cóncava hacia abajo.

(e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

1.



2.



3. Suponga que se le ha proporcionado la fórmula para una función f.

(a) ¿Cómo determina dónde f es creciente o decreciente?

(b) ¿Cómo determina dónde la gráfica f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

(c) ¿Cómo localiza los puntos de inflexión?

4. (a) Enuncie la prueba de la primera derivada.

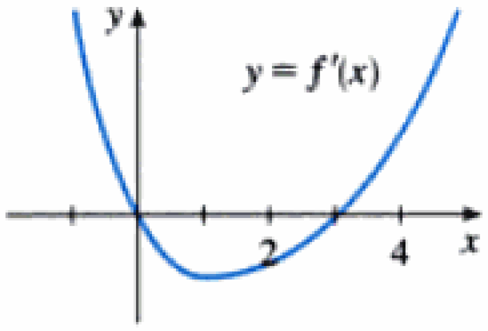
(b) Enuncie la prueba de la segunda derivada. ¿En qué condiciones es determinante? ¿Qué se hace si falla?

5–6 □ Se muestra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.

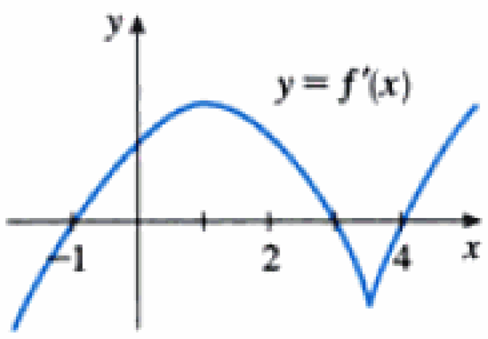
(a) ¿En qué intervalos es creciente o decreciente f?

(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local?

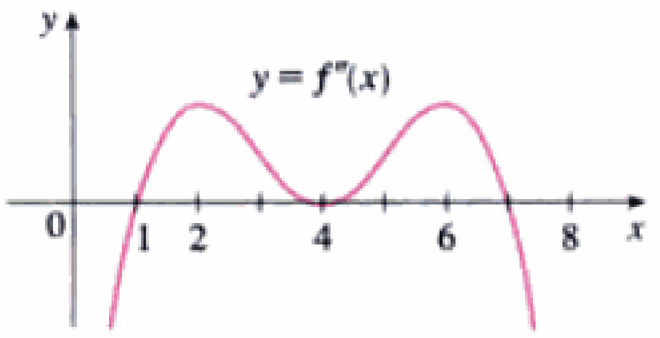
5.



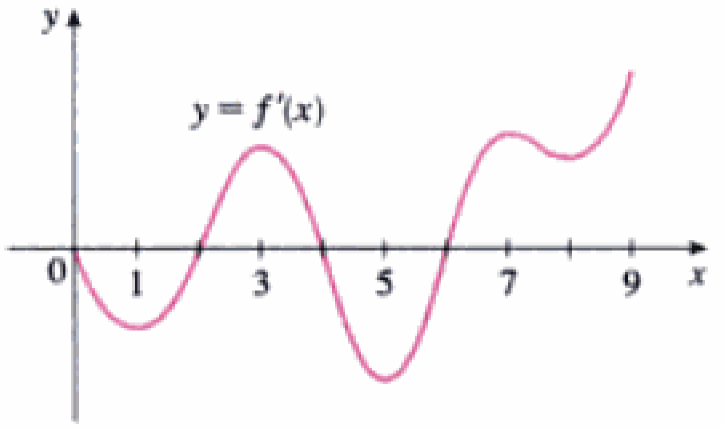
6.



7. Se muestra la gráfica de la segunda derivada f'' de una función f. Diga cuáles son las abscisas de los puntos de inflexión de f. Justifique.

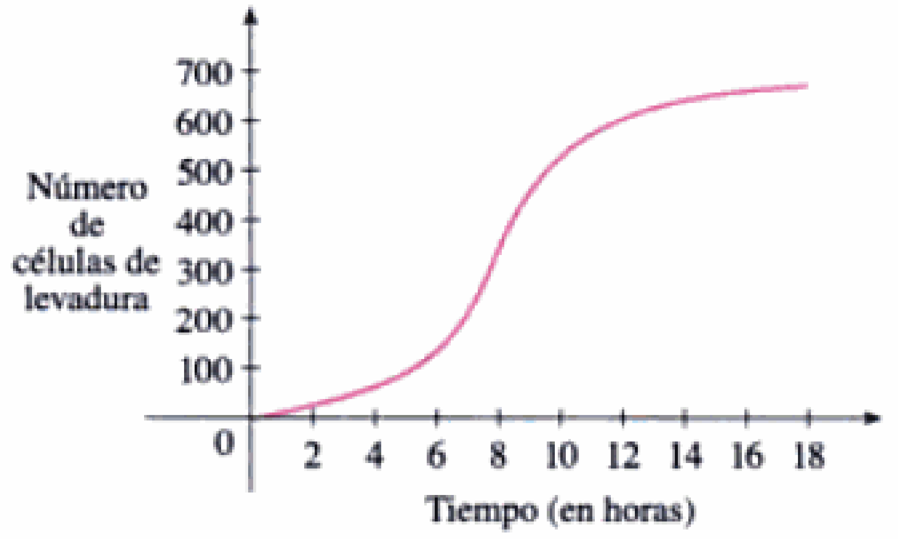


8. A continuación se muestra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.
(a) ¿En qué intervalos crece la función f? Explique.
(b) ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.
(c) ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba o abajo? Explique.
(d) ¿Cuáles son las abscisas de los puntos de inflexión f? ¿Por qué?



9. Bosqueje la gráfica de una función que tiene primera y segunda derivadas.

10. Se muestra la gráfica de la población de células de levadura en un nuevo cultivo de laboratorio, como función del tiempo.
(a) Describa la variación de la tasa de aumento de la población.
(b) ¿Cuándo es más alta esta tasa?
(c) ¿En qué intervalos es cóncava hacia arriba o hacia abajo la gráfica de la función de población?
(d) Estime las coordenadas del punto de inflexión.



11–20 □
(a) Halle los intervalos en los que f es creciente, o decreciente.
(b) Halle los valores máximos o mínimos de f.
(c) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

11. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

12. $f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$

13. $f(x) = x^6 + 192x + 17$

14. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x)^2}$

15. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

16. $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $f(x) = xe^x$

18. $f(x) = x^2 e^x$

19. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

20. $f(x) = x \ln x$

21–23 □ Halle los valores máximos y mínimos locales de f usando tanto la prueba de la primera como la de la segunda derivada. ¿Qué método prefiere?

21. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

22. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

23. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

24. (a) Halle los números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) ¿Qué le dice la prueba de la segunda derivada respecto del comportamiento de f en estos números críticos?
(c) ¿Qué le dice la prueba de la primera derivada?

25–28 □ Trace la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones en cada ejercicio.

25. $f'(-1) = f'(1) = 0, \quad f'(x) < 0$ si $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ si $|x| > 1, \quad f(-1) = 4, \quad f(1) = 0$,
$f''(x) < 0$ si $x < 0, \quad f''(x) > 0$ si $x > 0$

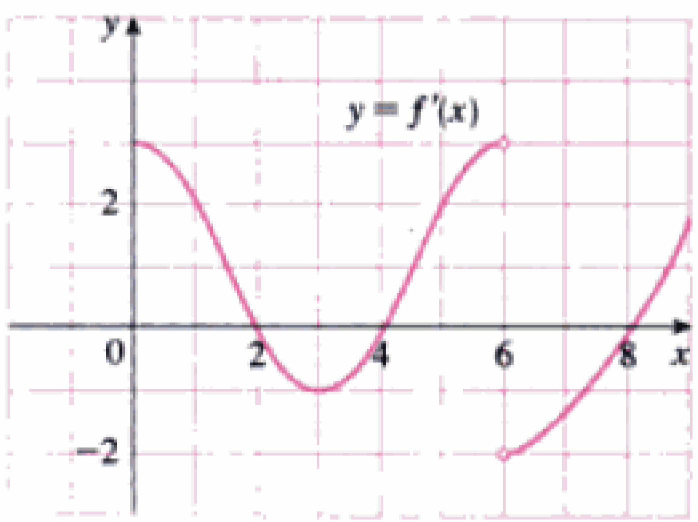
26. $f'(-1) = 0, \quad f'(1)$ no existe,
$f'(x) < 0$ si $|x| < 1, \quad f'(x) > 0$ si $|x| > 1$,
$f(-1) = 4, \quad f(1) = 0, \quad f''(x) < 0$ si $x \neq 1$

27. $f'(2) = 0, \quad f(2) = -1, \quad f(0) = 0$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2, \quad f'(x) > 0$ si $x > 2$,
$f''(x) < 0$ si $0 \leqslant x < 1$ o si $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 4, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$,
$f(-x) = f(x)$ para toda x

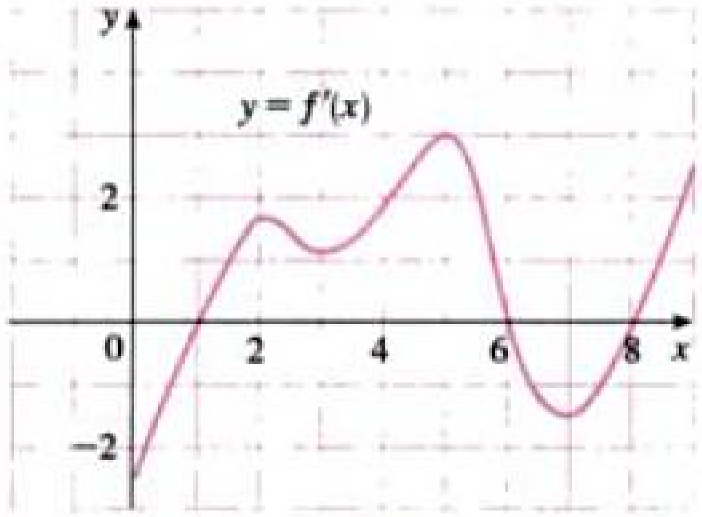
28. $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty, \quad f''(x) < 0$ si $x \neq 3, \quad f'(0) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $x > 3, \quad f'(x) < 0$ si $0 < x < 3$

29–30 □ Abajo aparece la gráfica de la derivada f' de una función continua f.
(a) ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?
(b) ¿En qué valores de x la función f tiene un máximo o un mínimo local?
(c) ¿En qué intervalos f es cóncava hacia arriba o abajo?
(d) Defina las abscisas de los puntos de inflexión.
(e) Sea $f(0) = 0$, trace una gráfica de f.

29.



30.



31–42 □
(a) Halle los intervalos de crecimiento o de decrecimiento.
(b) Halle los valores máximos y mínimos locales.
(c) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(d) Use la información de los partes (a), (b), y (c) para bosquejar la gráfica. Verifique con un aparato de graficación.

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

32. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

33. $f(x) = x^4 - 6x^2$

34. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

35. $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$

36. $h(x) = (x^2 - 1)^3$

37. $P(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

38. $Q(x) = x - 3x^{1/3}$

39. $Q(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$

40. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

41. $f(\theta) = \operatorname{sen}^2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

42. $f(t) = t + \cos t, \quad -2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

43–50 □
(a) Halle las asíntotas verticales y las horizontales.
(b) Halle los intervalos de crecimiento o de decrecimiento.
(c) Halle los valores máximos y mínimos locales.
(d) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(e) Use la información de las partes (a)–(d) para bosquejar la gráfica f.

43. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

44. $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$

45. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

46. $f(x) = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

47. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

48. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

49. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

50. $f(x) = \ln(\tan^2 x)$

51–52 □
(a) Use una gráfica de f para estimar los valores máximos y los valores mínimos. Después, halle los valores exactos.
(b) Estime el valor de x donde f crece con más rapidez. Después, halle el valor exacto.

51. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

52. $f(x) = x^2 e^{-x}$

53–54 □
(a) Use una gráfica de f para dar una estimación burda de los intervalos de concavidad y las coordenadas de los puntos de inflexión.
(b) Use una gráfica de f'' para dar mejores estimaciones.

53. $f(x) = 3x^5 - 40x^3 + 30x^2$

54. $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

SAC **55–56** □ Estime los intervalos de concavidad hasta el primer decimal utilizando un SAC para el cálculo y la gráfica de f''.

55. $f(x) = \dfrac{x^3 - 10x + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$

56. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3(x^2 + 5)}{(x^3 + 1)(x^2 + 4)}$

57. Sea $K(t)$ una medida del conocimiento adquirido al estudiar para un examen por un tiempo de t horas. ¿Qué será mayor, $K(8) - K(7)$ o $K(3) - K(2)$? ¿La gráfica de K es cóncava hacia arriba, o hacia abajo? ¿Por qué?

58. Se está sirviendo café en la taza de la figura a razón constante (medida en volumen por unidad de tiempo). Bosqueje una gráfica preliminar de la altura del café en la taza como función del tiempo. Describa la forma de la gráfica en términos de concavidad. ¿Qué significa el punto de inflexión?

59. Para el lapso 1980-1994 se ha modelado el porcentaje de hogares estadounidenses con una videocasetera (por lo menos) por medio de la función

$$V(t) = \frac{75}{1 + 74e^{-0.6t}}$$

donde el tiempo t se mide en años desde julio de 1980, de modo que $0 \leqslant t \leqslant 14$. Use una gráfica para estimar el momento en que $V(t)$ crecía con más rapidez. Después, dé una respuesta más exacta usando la derivación.

60. La familia de curvas con forma de campana

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

ocurre en las teorías de probabilidad y estadística donde recibe el nombre de la *función de densidad normal*. La constante μ se llama la *media* y la constante positiva σ es llamada la *desviación estándar*. Para simplificar, cambiamos la escala para desaparecer el factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y analizamos el caso especial $\mu = 0$. De modo que estudiaremos la función

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Halle la asíntota, el valor máximo y los puntos de inflexión f.
(b) ¿Qué papel desempeña σ en la forma de la curva?
(c) Ilustre mediante gráfica 4 miembros de la familia en una misma pantalla.

61. Halle una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga valor máximo local igual a 3 en $x = -2$ y un mínimo local de 0 en $x = 1$.

62. ¿Para qué valores de los números a y b

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

alcanza el valor máximo $f(2) = 1$?

63–66 □ Suponga que todas las funciones son dos veces derivables y las segundas derivadas nunca se anulan.

63. Si f y g son cóncavas hacia arriba en I, demuestre que $f + g$ es cóncava hacia arriba en I.

64. Si f es positiva y cóncava hacia arriba en I, muestre que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba en I.

65. Si f y g son positivas crecientes y cóncavas hacia arriba en I, muestre que el producto fg es cóncavo hacia arriba en I.

66. Suponga que f y g son cóncavas hacia arriba en $(-\infty, \infty)$. ¿Bajo qué condición de f la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ será cóncava hacia arriba?

67. Muestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugerencia:* demuestre que $f(x) = \tan x - x$ es creciente en $(0, \pi/2)$.]

68. (a) Muestre que $e^x \geq 1 + x$ para $x \geq 0$.
(b) Deduzca que $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geq 0$.
(c) Use la inducción matemática para probar que para $x \geq 0$ y cualquier entero positivo n,

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

69. Muestre que una función cúbica (polinomio de tercer grado) siempre tiene exactamente un punto de inflexión. Si su gráfica tiene tres puntos en común con el eje de las abscisas x_1, x_2 y x_3, muestre que la abscisa del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

70. ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tiene dos puntos de inflexión? ¿Un punto de inflexión? ¿Ninguno? Ilustre graficando P para un buen número de valores de c. ¿Cómo varía la gráfica al disminuir c?

71. Demuestre que si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica f y si existe f'' en un intervalo abierto que contenga a c, entonces $f''(c) = 0$. [*Sugerencia:* aplique la prueba de la primera derivada y el teorema de Fermat a la función $g = f'$.]

72. Muestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero que $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

73. Demuestre que la función $g(x) = x|x|$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$ pero no existe $g''(0)$.

74. Sean f'' continua y $f'(c) = f''(c) = 0$, pero $f'''(c) > 0$, ¿f tiene un máximo o mínimo local en c? ¿Tiene un punto de inflexión en c?

4.4 Formas indeterminadas y la regla de l'Hopital

Suponga que intentamos analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aunque F no está definida cuando $x = 1$, necesitamos saber cómo se comporta F *cerca* de 1. En particular, nos gustaría conocer el valor del límite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Pero no podemos aplicar la ley 5 de los límites (el límite del cociente es el cociente de los límites, vea la sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aun cuando el límite en (1) existe, su valor no es obvio porque el numerador y el denominador tienden a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido.

En general, si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to 0$ como $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, entonces este límite puede existir o no y se conoce como **forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$**. En el capítulo 2 encontramos algunos límites de este tipo. Para las funciones racionales, podemos cancelar los factores comunes:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Aplicamos un argumento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Pero estos métodos dan resultado para límites como el (1) de modo que, en esta sección, presentaremos un método sistemático conocido como *regla de l'Hopital*, para la evaluación de formas indeterminadas.

Se tiene otra situación en que un límite no es obvio cuando buscamos una asíntota horizontal de F y necesitamos evaluar el límite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

No es evidente cómo evaluar este límite porque el numerador y el denominador se hacen grandes cuando $x \to \infty$. Existe una lucha entre el numerador y el denominador. Si el numerador gana, el límite será ∞; si gana el denominador, la respuesta será 0. O puede haber un término medio, en cuyo caso la respuesta puede ser algún número positivo finito.

En general, si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to \infty$ (o $-\infty$) como $g(x) \to \infty$ (o $-\infty$), entonces el límite puede existir o no y se conoce como **forma indeterminada del tipo ∞/∞**. En la sección 2.6 vimos que este tipo de límite se puede evaluar para ciertas funciones, incluyendo las racionales, al dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que se tenga. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Este método no funciona para límites como el (2), pero también puede aplicarse la regla de l'Hopital a este tipo de forma indeterminada.

□ La regla de l'Hopital recibe este nombre en honor de un noble francés, el marqués de l'Hopital (1661–1704), pero fue descubierta por un matemático suizo, John Bernoulli (1667–1748). Véase el ejercicio 75 en relación con el ejemplo que usó el marqués para ilustrar su regla. Véase el proyecto en la página 313 respecto a los detalles históricos.

Regla de l'Hopital Supóngase que f y g son derivables y que $g'(x) \neq 0$ cerca de a (excepto quizás en a). Supóngase que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o de ∞/∞.) Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite del segundo miembro existe (o es ∞ o es $-\infty$).

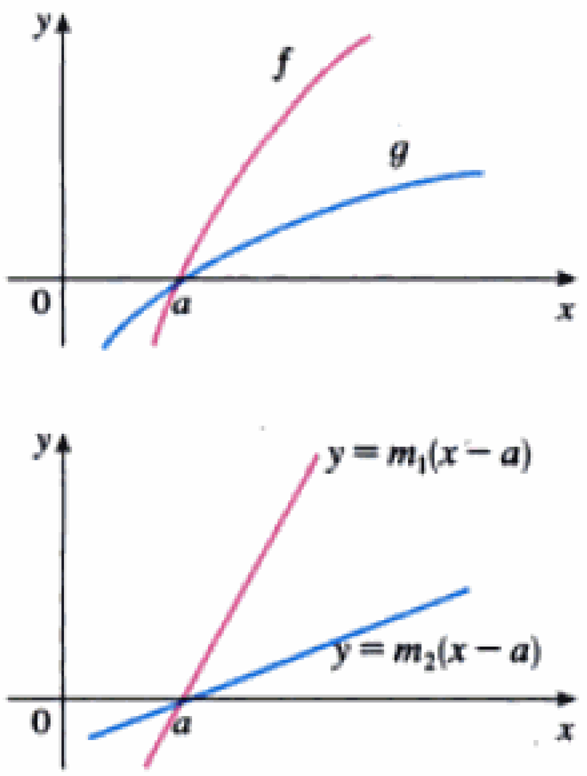


FIGURA 1

▫ En la figura 1 se sugiere visualmente por qué la regla de l'Hopital podría ser verdadera. En la primera gráfica se muestran dos funciones diferenciables f y g, cada una de las cuales tiende a 0 cuando $x \to a$. Con una amplificación en el punto $(a, 0)$, las gráficas empezarían a verse casi lineales. Pero si las funciones fueran en realidad lineales, como en la segunda gráfica, entonces su razón sería

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

lo cual es la razón entre sus derivadas. Esto sugiere que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NOTA 1 ▫ La regla de l'Hopital afirma que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se satisfagan las condiciones dadas. Es muy importante comprobar las condiciones referentes a los límites de f y g, antes de aplicar la regla de l'Hopital.

NOTA 2 ▫ La regla de l'Hopital también es válida para los límites laterales y los límites en el infinito o en el infinito negativo; es decir, "$x \to a$" se puede reemplazar con cualquiera de los símbolos siguientes: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

NOTA 3 ▫ Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de l'Hopital es verdadera. En efecto, si se aplica la forma alterna de la definición de la derivada, tenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

La versión general de la regla de l'Hopital es más difícil; véase el Apéndice F.

EJEMPLO 1 ▫ Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} (x-1) = 0$$

podemos aplicar la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

▫

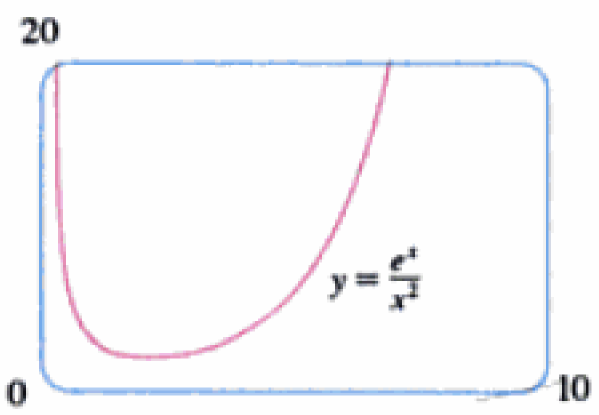


FIGURA 2

▫ En la figura 2 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 2. Con anterioridad hemos hecho ver que, con mucho, las funciones exponenciales crecen con más rapidez que las potencias, de modo que el resultado del ejemplo 2 no es inesperado. Véase también el ejercicio 71.

EJEMPLO 2 ▫ Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Tenemos que $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, de modo que la regla de l'Hopital da

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Puesto que $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, el límite del segundo miembro también es indeterminado, pero una segunda aplicación de la regla de l'Hopital da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$ □

□ En la figura 3 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 3. Ya analizamos el crecimiento lento de los logaritmos, de suerte que no es sorprendente que esta razón tienda a 0 cuando $x \to \infty$. Véase también el ejercicio 72.

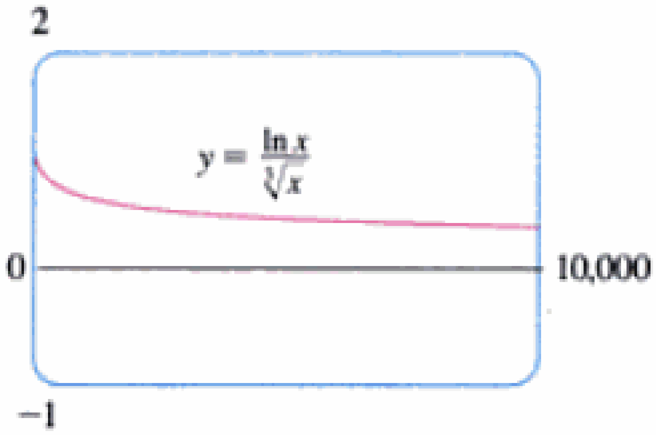


FIGURA 3

EJEMPLO 3 □ Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCIÓN Dado que $\ln x \to \infty$ y $\sqrt[3]{x} \to \infty$ cuando $x \to \infty$, puede aplicarse la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Advierta que ahora el límite del segundo miembro es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Pero, en lugar de aplicar la regla de l'Hopital por segunda vez, como en el ejemplo 2, simplificamos la expresión y vemos que una segunda aplicación es innecesaria:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$ □

□ La gráfica de la figura 4 da una confirmación visual del resultado del ejemplo 4. Sin embargo, si hiciéramos un acercamiento muy grande, obtendríamos una gráfica inexacta, porque $\tan x$ está cercana a x cuando esta última es pequeña. Véase el ejercicio 36(d) de la sección 2.2.

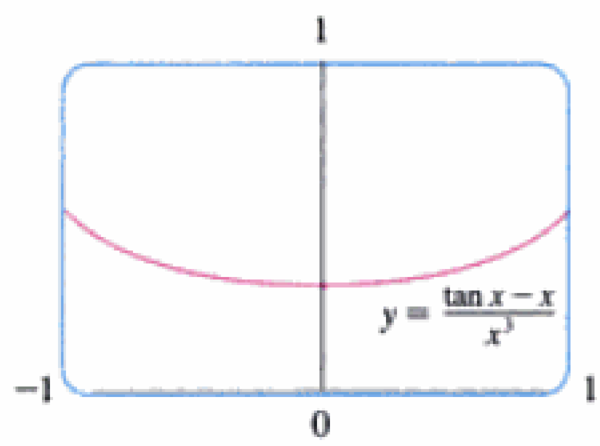


FIGURA 4

EJEMPLO 4 □ Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$. (Véase el ejercicio 36 de la sección 2.2.)

SOLUCIÓN Al observar que tanto $\tan x - x \to 0$ como $x^3 \to 0$ cuando $x \to 0$, aplicamos la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Como el límite del segundo miembro todavía es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos una vez más dicha regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

De nuevo, numerador y denominador tienden a 0, de modo que se necesita una tercera aplicación de la regla de l'Hopital. Reunimos los tres pasos y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ □

EJEMPLO 5 □ Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si intentamos aplicar la regla de l'Hopital a ciegas, obtendríamos

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

¡Esto es *erróneo*! Aun cuando el numerador sen $x \to 0$, cuando $x \to \pi^-$, advierta que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, de modo que en este caso no se puede aplicar la regla de l'Hopital.

De hecho, el límite requerido es fácil de hallar porque la función es continua y el denominador es diferente de cero en π:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \frac{\text{sen } \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$ □

El ejemplo 5 hace ver cómo podemos equivocarnos si aplicamos la regla de l'Hopital sin pensar. Se *pueden* hallar otros límites aplicando dicha regla, pero se encuentran con mayor facilidad con otros métodos. (Véanse los ejemplos 3 y 5 de la Sec. 2.3, el ejemplo 3 de la Sec. 2.6 y el análisis al principio de esta sección.) Por tanto, al evaluar cualquier límite, considere otros métodos antes de aplicar la regla de l'Hopital.

Productos indeterminados

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces no resulta claro cuál es el valor de $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$, si lo hay. Se tiene una lucha entre f y g. Si f gana, la respuesta es 0; si g gana, la respuesta es ∞ (o $-\infty$). O puede haber un término medio donde la respuesta es un número finito diferente de cero. Esta clase de límite se llama **forma indeterminada del tipo $0 \cdot \infty$**. Podemos manejarla escribiendo el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞, de modo que podemos aplicar la regla de l'Hopital.

□ La figura 5 muestra la gráfica del ejemplo 6. Obsérvese que la función es indefinida en $x = 0$; la gráfica se acerca al origen, pero no lo alcanza.

EJEMPLO 6 □ Evalúe $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

SOLUCIÓN El límite dado es indeterminado porque, cuando $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, en tanto que el segundo ($\ln x$) lo hace a $-\infty$. Si se escribe $x = 1/(1/x)$, tenemos $1/x \to \infty$, cuando $x \to 0^+$, de modo de la regla de l'Hopital da

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$ □

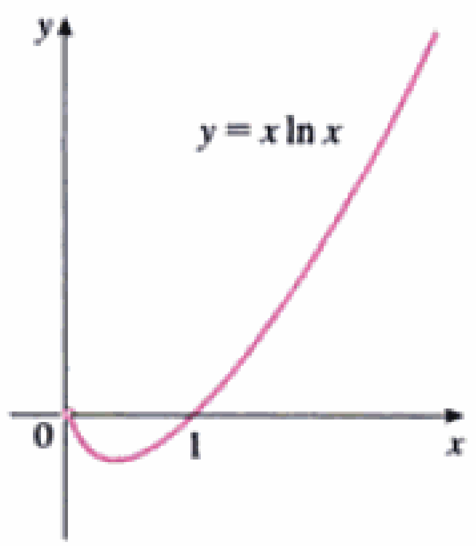


FIGURA 5

NOTA □ En el ejemplo 6 otra opción podía ser escribir

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da una forma indeterminada de tipo 0/0, pero si aplicamos la regla de l'Hopital obtenemos una expresión más complicada que la inicial. Cuando reescribimos un producto indeterminado tratamos de elegir la opción que conduce al límite más simple.

Diferencias indeterminadas

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces el límite

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

se conoce **como forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$**. Una vez más, existe una competencia entre f y g. ¿La respuesta es ∞ (f gana), o será $-\infty$ (g gana) o se tiene un término medio en un número finito? Para averiguarlo, intentemos convertir la diferencia en un cociente (por ejemplo, usando un denominador común o racionalización o factorizando un factor común) de modo que tengamos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 ▫ Calcule $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$.

SOLUCIÓN En primer lugar, advierta que $\sec x \to \infty$ y $\tan x \to \infty$ cuando $x \to (\pi/2)^-$, de modo que el límite es indeterminado. En este caso, usemos un denominador común:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Observe que se justifica el uso de la regla de l'Hopital porque $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ y $\cos x \to 0$ cuando $x \to (\pi/2)^-$. ▫

Potencias indeterminadas

Varias formas indeterminadas surgen del límite

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada uno de estos tres casos se pueden tratar tomando el logaritmo natural:

$$\text{si} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{entonces} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o bien, al escribir la función como una exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

(Recuerde que se usaron estos dos métodos al derivar esas funciones.) Cualquiera de los dos conduce al producto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 8 ▫ Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, advierta que cuando $x \to 0^+$, tenemos $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, por lo que el límite es indeterminado. Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $$\ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$$

de modo que la regla de l'Hopital da

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora hemos calculado el límite de ln y, pero lo que deseamos es el límite y. Para hallarlo apliquemos $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$ □

□ En la figura 6 se muestra la gráfica de la función $y = x^x, x > 0$. Advierta que aun cuando 0^0 no está definido, los valores de la función tienden a 1 cuando $x \to 0^+$. Esto confirma el resultado del ejemplo 9.

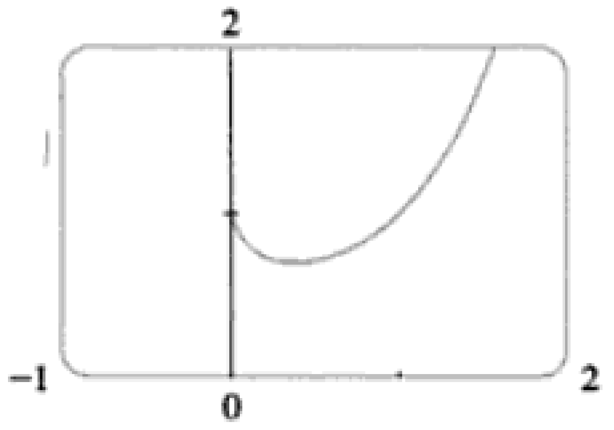


FIGURA 6

EJEMPLO 9 □ Encuentre $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Advierta que este límite es indeterminado puesto que $0^x = 0$ para cualquier $x > 0$, pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Podríamos proceder como en el ejemplo 8 o escribir la función como una exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

En el ejemplo 6 aplicamos la regla de l'Hopital para demostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$ □

4.4 Ejercicios

1–4 □ Supóngase que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

¿Cuáles de los siguientes límites son formas indeterminadas? Para los que no sean una forma indeterminada, evalúe el límite, si es posible hacerlo.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$
(d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$
(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$
(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$
(d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–66 □ Encuentre el límite. Aplique la regla de l'Hopital donde resulte apropiado. Si existe un método más elemental, úselo. Si no puede aplicar la regla de l'Hospital, explique por qué.

5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

6. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

10. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x + \tan x}{\operatorname{sen} x}$

11. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$

12. $\displaystyle \lim_{x\to \pi} \frac{\tan x}{x}$

13. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan px}{\tan qx}$

14. $\displaystyle \lim_{x\to 3\pi/2} \frac{\cos x}{x - (3\pi/2)}$

15. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$

16. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x}$

17. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

18. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{\ln \ln x}{x}$

19. $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{5^t - 3^t}{t}$

20. $\displaystyle \lim_{t\to 16} \frac{\sqrt[4]{t} - 2}{t - 16}$

21. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

22. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - (x^2/2)}{x^3}$

23. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^3}$

24. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$

25. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

26. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{senh} x}$

27. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

28. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

29. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}$

30. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

31. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan \alpha x}{x}$

32. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

33. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln(1 + 2e^x)}$

34. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x + \tan 2x}{x - \tan 2x}$

35. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tanh 3x}$

36. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-2x}}{\sec x}$

37. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2x - \operatorname{sen}^{-1} x}{2x + \cos^{-1} x}$

38. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2x - \operatorname{sen}^{-1} x}{2x + \tan^{-1} x}$

39. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

40. $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

41. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} e^{-x} \ln x$

42. $\displaystyle \lim_{x\to (\pi/2)^-} \sec 7x \cos 3x$

43. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

44. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \sec x$

45. $\displaystyle \lim_{x\to \pi} (x - \pi) \cot x$

46. $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} (x - 1) \tan(\pi x/2)$

47. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)$

48. $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

49. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \csc x\right)$

50. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right)$

51. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

52. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

53. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

54. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} (xe^{1/x} - x)$

55. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

56. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$

57. $\displaystyle \lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

58. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$

59. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)^x$

60. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

61. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

62. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

63. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(\frac{x}{x + 1}\right)^x$

64. $\displaystyle \lim_{x\to 0} (\cos 3x)^{5/x}$

65. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (-\ln x)^x$

66. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 5}\right)^{2x+1}$

67–68 □ Use una gráfica para estimar el valor del límite. Enseguida, utilice la regla de l'Hopital para hallar el valor exacto.

67. $\displaystyle \lim_{x\to \infty} x[\ln(x + 5) - \ln x]$

68. $\displaystyle \lim_{x\to \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$

69–70 □ Illustre la regla de l'Hopital graficando $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$ para ver que estas razones tienen el mismo límite cuando $x \to 0$. Asimismo, calcule el valor exacto del límite.

69. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

70. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

71. Pruebe que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier entero n. Esto hace ver que la función exponencial tiende al infinito con mayor rapidez que cualquier potencia de x.

72. Pruebe que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica tiende a ∞ más despacio que cualquier potencia x.

73. Si se invierte una cantidad inicial A_0 de dinero a una tasa de interés i, compuesta n veces al año, el valor de la inversión después de t años es

$$A = A_0\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Si hacemos que $n \to \infty$, lo denominamos *composición continua* del interés. Aplique la regla de l'Hopital para demostrar que si el interés se compone de manera continua, entonces el monto después de n años es

$$A = A_0 e^{it}$$

74. Si un objeto con masa m se deja caer desde el reposo, un modelo para su velocidad v después de t segundos, tomando en cuenta la resistencia del aire, es

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y c es una constante positiva. (En el capítulo 7, podremos deducir esta ecuación a partir de la hipótesis de que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. ¿Cuál es el significado de este límite?

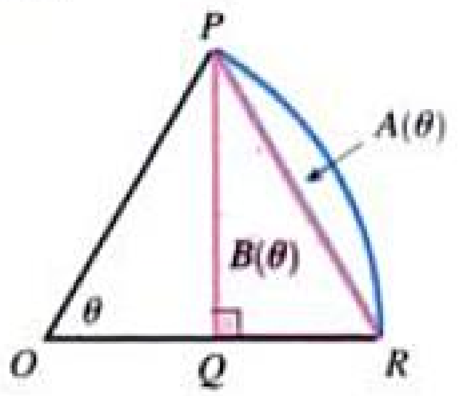
(b) Para t fijo, aplique la regla de l'Hopital a fin de calcular $\lim_{m \to \infty} v$. ¿Qué puede concluir acerca de la velocidad de un objeto muy pesado que esté cayendo?

75. La primera aparición impresa de la regla de l'Hopital fue en el libro *Analyse des Infiniment Petits*, publicado por el marqués de l'Hopital en 1696. Fue el primer libro de texto de cálculo alguna vez publicado y el ejemplo que allí utilizó el marqués para ilustrar su regla fue hallar el límite de la función

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, donde $a > 0$. (En aquel tiempo era común escribir aa en lugar de a^2.) Resuelva este problema.

76. En la figura se muestra un sector de un círculo, con ángulo θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre $\lim_{\theta \to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



77. Si f' es continua, aplique la regla de l'Hopital para demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Explique el significado de esta ecuación con ayuda de un diagrama.

78. Si f'' es continua, muestre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

79. Sea
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{sí } x \neq 0 \\ 0 & \text{sí } x = 0 \end{cases}$$

(a) Use la definición de derivada para calcular $f'(0)$.
(b) Mostrar que f tiene derivadas de todos los órdenes definidas sobre $\mathbb{R}$. [*Sugerencia:* primero muestre por inducción que hay un polinomio $p_n(x)$ y un entero no negativo k_n tales que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

80. Sea
$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en 0.
(b) Investigue gráficamente si f es diferenciable en 0 mediante varios acercamientos al punto (0, 1) de la gráfica de f.
(c) Demuestre que f no es derivable en 0. ¿Cómo puede reconciliar este hecho con el aspecto de las gráficas del inciso (b)?

Proyecto de investigación histórica

Orígenes de la regla de l'Hopital

La regla de l'Hopital se publicó por primera vez en 1696, en el libro de texto, *Analyse des Infiniment Petits*, pero la regla fue descubierta en 1694 por el matemático suizo John Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el marqués de l'Hopital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. Los detalles, incluyendo una traducción de la carta de l'Hopital a Bernoulli en la que propone el arreglo, se pueden hallar en el libro escrito por Eves [1].

Escriba un informe sobre los orígenes históricos y matemáticos de la regla de l'Hopital. Empiece por dar breves detalles biográficos de los dos hombres (el diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente) y describa el trato de negocios entre ellos. A continuación, dé el enunciado de l'Hopital de su regla, el cual se encuentra en el libro fuente de Struik [4] y, más sintetizado, en el libro de Katz [3]. Advierta que l'Hopital y Bernoulli formularon la regla geométricamente y dieron la respuesta en términos de diferenciales. Compare el enunciado de ellos con la versión de la regla de l'Hopital dada en la sección 4.4 y demuestre que, en esencia, los dos enunciados son los mismos.

1. Howard Eves, *In Mathematical Circles (Volume 2: Quadrants III and IV)* (Boston: Prindle, Weber y Schmidt, 1969), pp. 20–22.
2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scribner's, 1974). Véase el artículo de Johann Bernoulli de E. A. Fellmann y J. O. Fleckenstein en el volumen II y el artículo sobre el marqués de l'Hopital por Abraham Robinson en el volumen VIII.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (New York: HarperCollins, 1993), p. 484.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), pp. 315–316.

4.5 Resumen de trazo de curvas

Hasta ahora nos hemos ocupado de algunos aspectos particulares del trazo de curvas: dominio, imagen y simetría en el capítulo 1; límites, continuidad y asíntotas en el capítulo 2; derivadas y tangentes en los capítulos 3 y 2; y extremos, intervalos de monotonía, concavidad, puntos de inflexión y la Regla de l'Hopital en este capítulo. Ya es tiempo de poner toda esta información junta para trazar gráficas que revelen los aspectos importantes de las funciones.

Podría preguntar: ¿Qué hay de malo si tan sólo empleamos una calculadora para situar puntos y después los unimos con una curva uniforme? Para darse cuenta de lo incorrecto de este método, suponga que usa una calculadora a fin de producir una tabla de valores y los puntos correspondientes de la figura 1.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-5	22	1	7
-4	7	2	10
-3	-2	3	11
-2	-4	4	10
-1	-2	5	8
0	3	6	-8

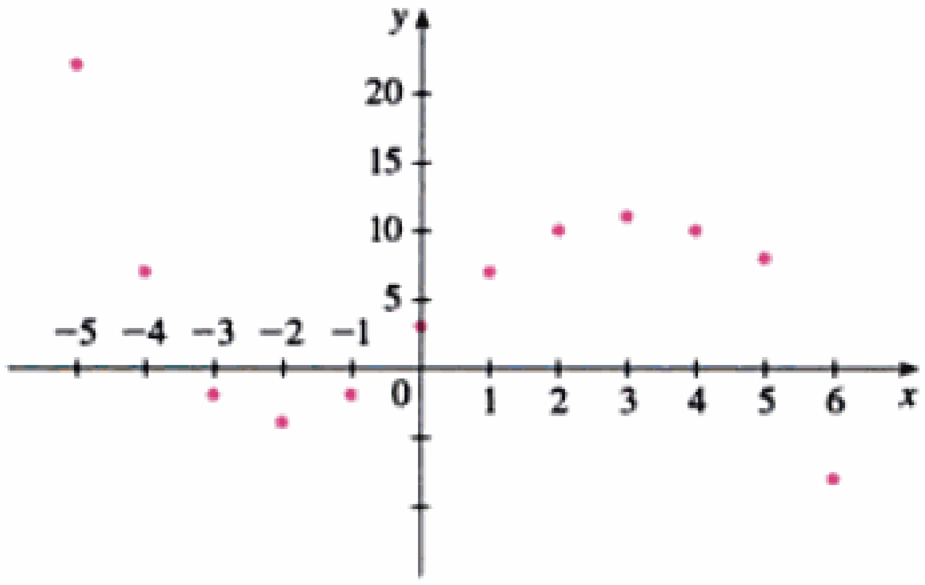


FIGURA 1

Después una los puntos para obtener la curva de la figura 2, pero la gráfica correcta podría ser la que aparece en la figura 3. Con esto podrá advertir los inconvenientes del método de graficar puntos. Puede omitir algunas características esenciales de la gráfica, como los valores máximos y mínimos entre -2 y -1, o entre 2 y 5. Si sólo grafica puntos, no sabría cuándo detenerse. (¿Hasta dónde graficar hacia la izquierda o hacia la derecha?) En cambio, utilizar el cálculo diferencial asegura que estén presentes todos los aspectos importantes de la curva.

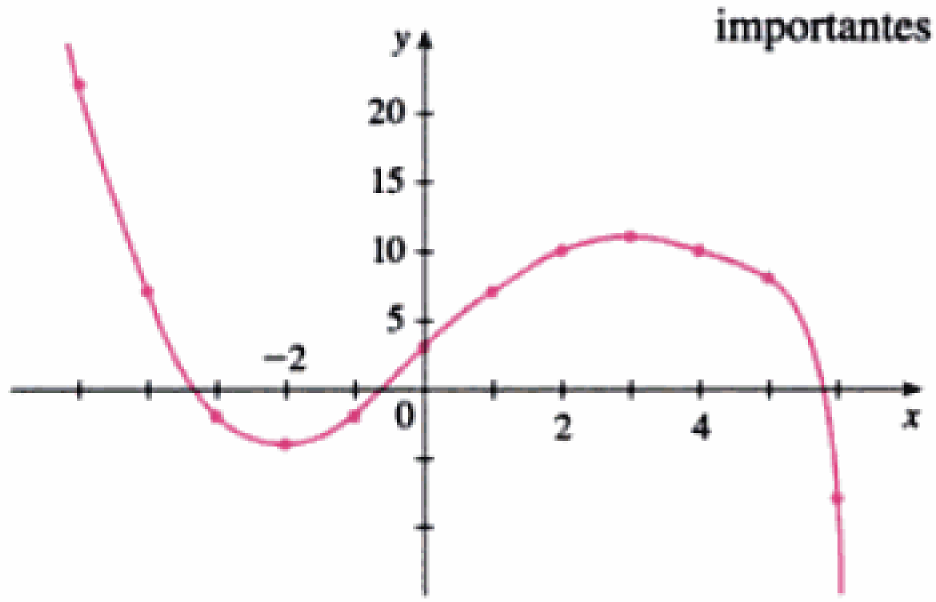


FIGURA 2

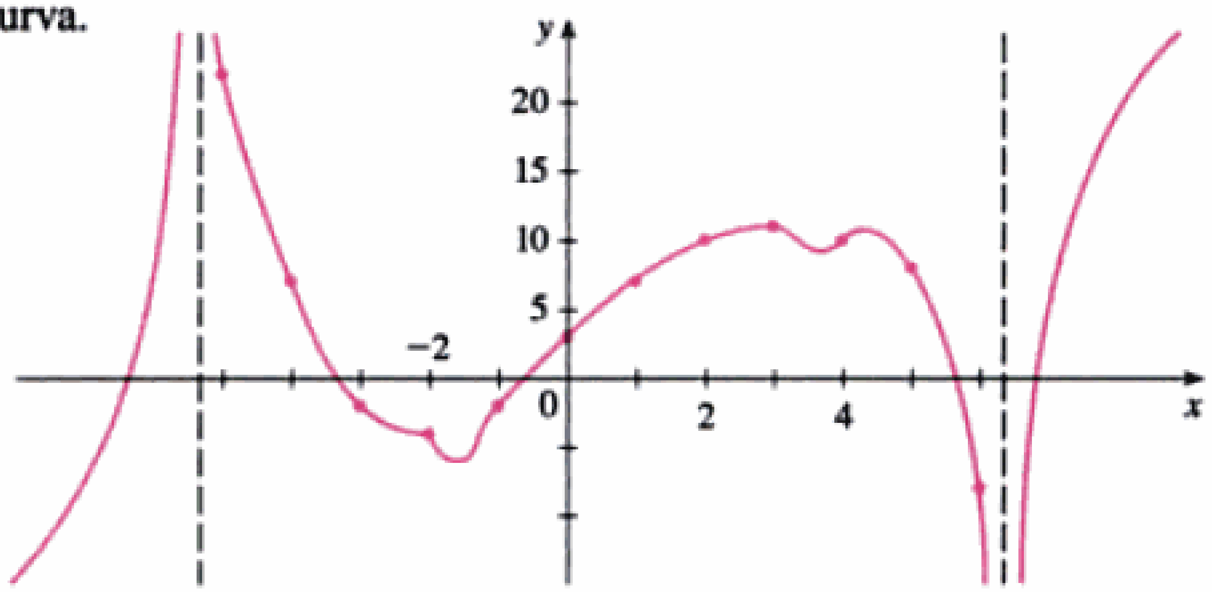


FIGURA 3

¿Podría responder: "Sí, pero, ¿las calculadoras graficadoras y computadoras no grafican una cantidad tan grande de puntos que es improbable que sucedan los tipos de incertidumbre que vemos en las figuras 2 y 3?"

Si bien es cierto que con la tecnología moderna se pueden obtener gráficas muy exactas, aun las mejores graficadoras se tienen que utilizar con bases matemáticas firmes. En la sección 1.4 vimos que es muy importante elegir una pantalla adecuada para evitar llegar a una gráfica engañosa. (Consulte los Ejems. 1, 3, 4 y 5 de esa sección.) Con el cálculo

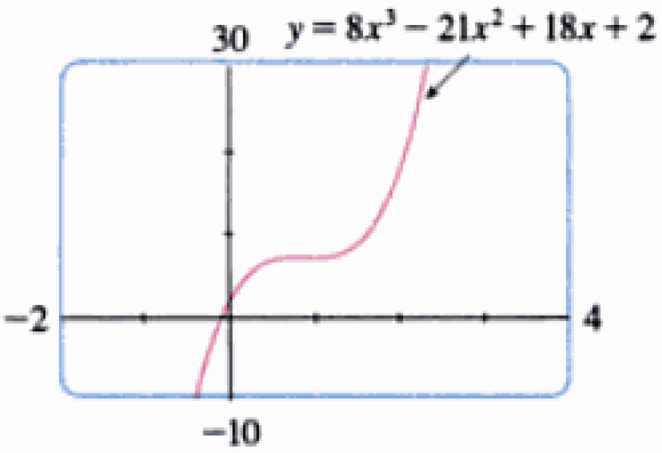


FIGURA 4

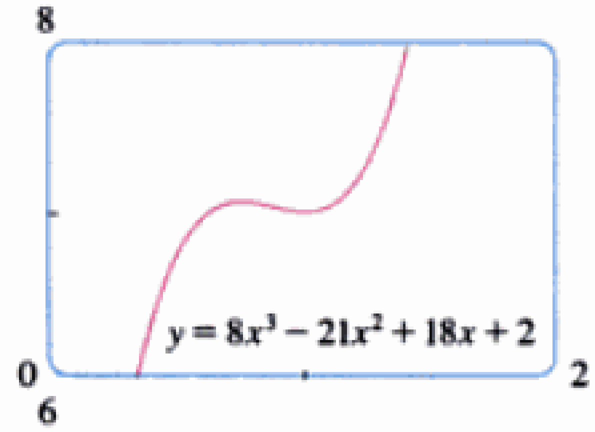
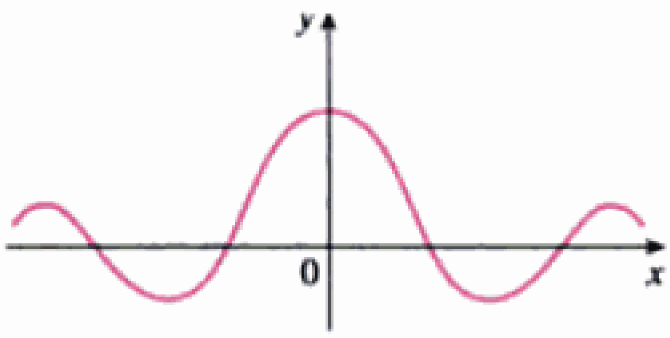
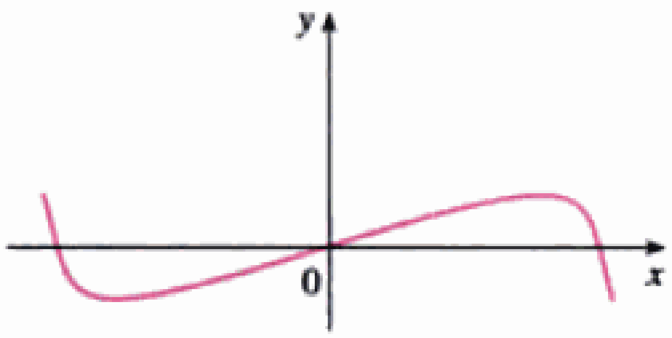


FIGURA 5



(a) Función par: simetría de reflexión



(b) Función impar: simetría de rotación

FIGURA 6

diferencial podemos descubir los aspectos más interesantes de las gráficas y, en muchos casos, también determinar los puntos máximos y mínimos y los de inflexión *exactamente*, en lugar de sólo en forma aproximada.

Por ejemplo, en la figura 4 observamos la gráfica de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. A primera vista, se ve razonable porque tiene la misma forma de las curvas cúbicas como $y = x^3$, y parece no tener puntos máximos o mínimos. Pero si determinamos la derivada advertiremos que hay un máximo cuando $x = 0.75$ y un mínimo cuando $x = 1$. En realidad, usando la función *zoom* en esta parte de la gráfica, veremos el comportamiento que presenta la figura 5. Sin el cálculo diferencial podríamos haberlo pasado por alto con suma facilidad.

En la próxima sección graficaremos funciones empleando la interacción entre el cálculo diferencial y las graficadoras. En esta sección trazaremos gráficas basándonos primero en la siguiente información. No damos por hecho que cuente con una graficadora, pero si la tiene, utilícela a fin de comprobar los resultados.

Lineamientos para trazo de una curva

La lista siguiente se propone como una guía para el trazo a mano de una curva $y = f(x)$. No todos los rubros son pertinentes en un caso particular. (Por ejemplo, muchas curvas no tienen asíntotas, o carecen de simetría). Pero esta pauta proporciona toda la información que se necesita para hacer un bosquejo que muestre los aspectos más importantes de la función.

A. Dominio Suele ser útil comenzar por determinar el dominio D de f, esto es, el conjunto de valores de x para los cuales $f(x)$ está definida.

B. Coordenadas al origen o intersecciones con los ejes La ordenada al origen es $f(0)$ e indica donde interseca la curva al eje y. A fin de determinar las abscisas al origen se iguala $y = 0$ y se despeja x. (Si esto no resulta fácil, puede omitir el paso.)

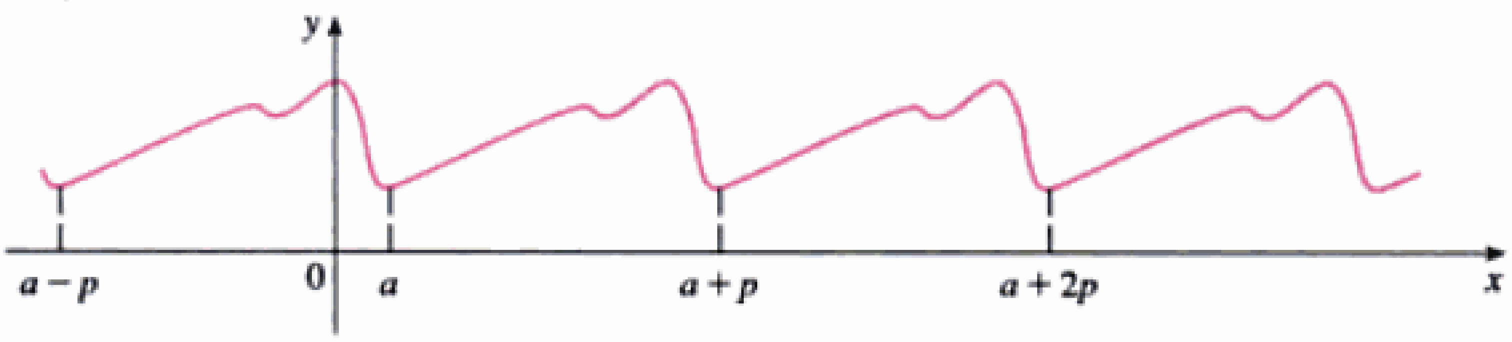
C. Simetría Tenemos tres casos:

(i) Si $f(-x) = f(x)$ para toda x de D, esto es, si la curva no cambia cuando se sustituye x con $-x$, entonces f es una **función par** y la curva es simétrica respecto al eje y. Esto quiere decir que hemos reducido el trabajo a la mitad. $x \geqslant 0$, basta reflejarla en el eje y para obtener la curva completa [Fig. 6(a)]. Ejemplo de lo anterior son: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$, y $y = \cos x$.

(ii) Si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en D, f es una **función impar** y la curva es simétrica respecto al origen. De nuevo, podemos obtener la curva completa si sabemos cómo se ve cuando $x \geqslant 0$. [Fig. 6(b).] Ejemplos de funciones impares son $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$, y $y = \operatorname{sen} x$.

(iii) Si $f(x + p) = f(x)$ para toda x en D, donde p es una constante positiva, f se llama **función periódica** y la p mínima, **periodo;** por ejemplo, el periodo de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π y el de $y = \tan x$ es π. Si sabemos cómo se ve la gráfica en un intervalo de longitud p, podemos emplear la traslación para trazar toda la gráfica (Fig. 7).

FIGURA 7
Función periódica: simetría de traslación.



D. Asíntotas

(i) *Asíntotas horizontales.* Recordemos que, de acuerdo con la sección 2.6, si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$. Si sucediera que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), no tenemos una asíntota a la derecha, lo cual es información útil para trazar la curva.

(ii) *Asíntotas verticales.* Recordemos que, según la sección 2.2, la recta $x = a$ es una asíntota vertical si resulta cierta al menos una de las afirmaciones siguientes:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para funciones racionales se pueden ubicar las asíntotas verticales igualando a 0 el denominador después de simplificar cualquier factor común. Pero para otras funciones este método no se aplica.) Además, es muy útil conocer con exactitud cuál de las afirmaciones en (1) es cierta a fin de trazar la curva. Si $f(a)$ no está definida, pero a es frontera del dominio de f, se calcula el $\lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\lim_{x\to a^+} f(x)$, sea o no infinito ese límite.

(iii) *Asíntotas oblicuas.* Las describiremos al final de esta sección.

E. Intervalos de monotonía Se emplea la prueba de las funciones monótonas. Se determina $f'(x)$ y los intervalos en que es positiva (f es creciente) y aquellos en que es negativa (f es decreciente).

F. Valores máximos y mínimos locales Se definen los números críticos de f que son los números c en que $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. A continuación se aplica la prueba de la primera derivada, Si f' cambia de positiva a negativa en un número crítico c, entonces $f(c)$ es un máximo local. Si f' pasa de de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo local. Aunque casi siempre es preferible la prueba de la primera derivada, la prueba de la segunda derivada funciona si c es un número crítico tal que $f''(c) \neq 0$. Así $f''(c) > 0$ significa que $f(c)$ es un mínimo local, mientras que si $f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es un máximo local.

G. Concavidad y puntos de inflexión Se calcula $f''(x)$ y se aplica la prueba de la concavidad. La curva es cóncava hacia arriba donde $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo donde $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión se presentan donde cambia la dirección de la concavidad.

H. Trazar la curva Con la información obtenida en los incisos A a G se puede trazar la curva. Las asíntotas se dibujan como líneas punteadas. Se grafican las coordenadas al origen, los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión. A continuación se hace pasar la curva por esos puntos, subiendo y bajando según lo establecido en el punto E, pero con la concavidad de acuerdo con los valores del punto G y tendiendo hacia las asíntotas. Si se desea más exactitud con relación a cualquier punto, se calcula el valor de la derivada en él. La tangente indica la dirección que sigue la curva.

EJEMPLO 1 □ Describa la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ atendiendo los puntos A a H.

SOLUCIÓN

A. El dominio es

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. La ordenada al origen y la abscisa al origen son 0.

C. Como $f(-x) = f(x)$, entonces f es par. La curva es simétrica respecto al eje y.

D.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

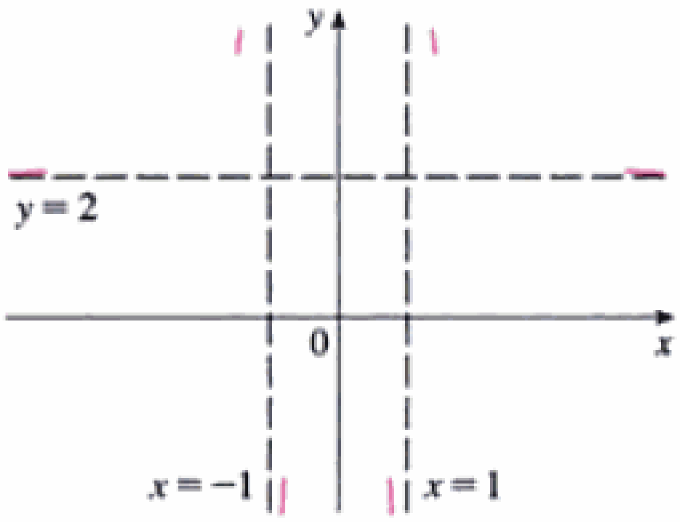


FIGURA 8
Bosquejo preliminar

□ Exhibimos la curva aproximándose a su asíntota horizontal desde arriba en la Fig. 8. Esto se confirma con la determinación de los intervalos donde crece y decrece la función.

Por consiguiente, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal. Dado que el denominador es 0 cuando $x = \pm 1$, vamos a calcular los límites siguientes:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Por consiguiente, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. Esta información sobre límites y asíntotas nos permite dibujar un esbozo preliminar en la figura 8, que muestra las partes de la curva cerca de las asíntotas.

E. $$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Ya que $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$ $(x \neq -1)$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Como f' pasa de positiva a negativa en 0, $f(0) = 0$ es un máximo local, según la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

$12x^2 + 4 > 0$ para toda x, y por consiguiente

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

y $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Por lo tanto, la curva es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$. No tiene punto de inflexión porque 1 y -1 no están en el dominio de f.

H. Con la información reunida en los puntos E a G, se traza la curva que aparece en la figura 9. □

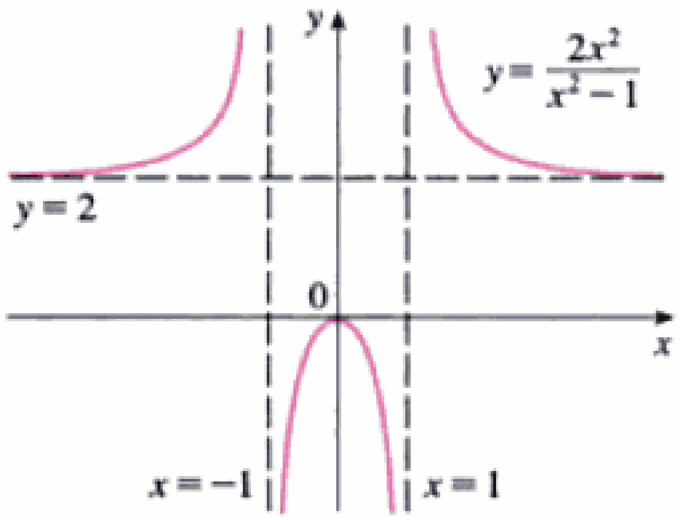


FIGURA 9
Bosquejo terminado

EJEMPLO 2 □ Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. El dominio es $= \{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. Ambas coordenadas al origen son 0.

C. No hay simetría.

D. En vista de que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

no hay asíntota horizontal. En virtud de que $\sqrt{x + 1} \to 0$ cuando $x \to -1^+$ y $f(x)$ siempre es positiva, entonces

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

así, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x + 1} - x^2 \cdot 1/(2\sqrt{x + 1})}{x + 1} = \frac{x(3x + 4)}{2(x + 1)^{3/2}}$$

$f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ (notará que $-\frac{4}{3}$ no está en el dominio de f), y así el único número crítico es 0. En vista de que $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$, f es decreciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

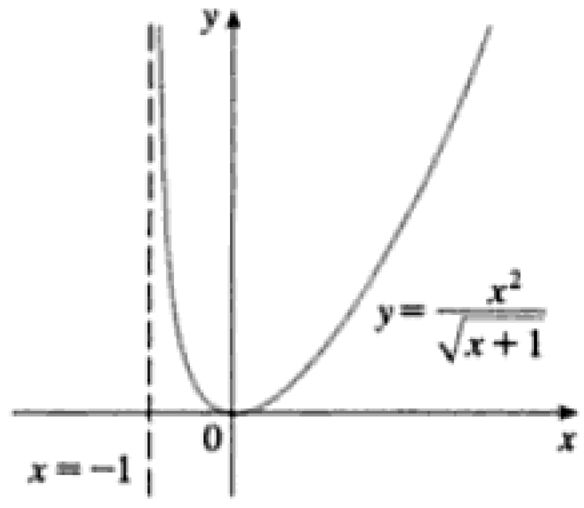


FIGURA 10

F. Como $f'(0) = 0$ y f' pasa de negativa a positiva en 0, $f(0) = 0$ es un mínimo local (y absoluto), según la prueba de la primera derivada.

G. $$f''(x) = \frac{2(x+1)^{3/2}(6x+4) - (3x^2+4x)3(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3} = \frac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}}$$

Observará que el denominador siempre es positivo. El numerador es la expresión cuadrática $3x^2 + 8x + 8$, que siempre es positivo porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32$, que es negativo, y el coeficiente de x^2 es positivo. Así, $f''(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, lo cual significa que f es cóncava hacia arriba en $(-1, \infty)$ y que no hay punto de inflexión.

H. En la figura 10 se ve el trazo de esta curva. □

EJEMPLO 3 □ Trace la gráfica de la función $f(x) = xe^x$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. Abscisa y ordenada al origen son 0.

C. No hay simetría

D. Ya que x y e^x crecen al tender x al infinito tenemos $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Cuando $x \to -\infty$, sin embargo, $e^x \to 0$ y así tenemos un producto indeterminado, que requiere el uso de la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Así pues, el eje horizontal es asíntota.

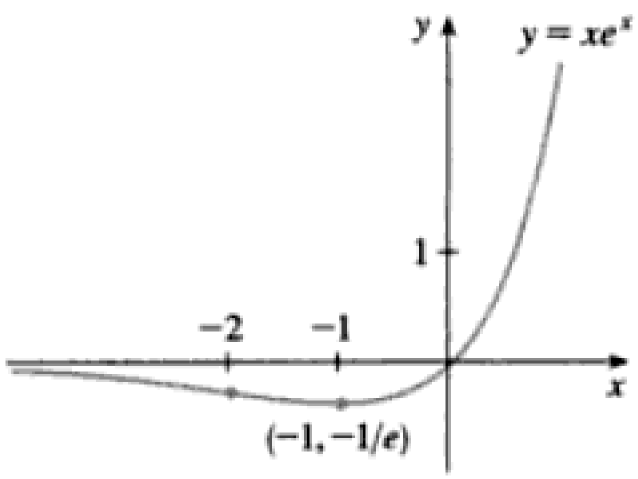


FIGURA 11

E. $$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

Ya que e^x es siempre positivo vemos que $f'(x) > 0$ cuando $x + 1 > 0$, y $f'(x) < 0$ cuando $x + 1 < 0$. De manera que f es creciente en $(-1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1)$.

F. Ya que $f'(-1) = 0$ y f cambia de negativo a positivo en $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ es mínimo local (y absoluto).

G. $$f''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$$

Dado que $f''(x) > 0$ si $x > -2$ y $f''(x) < 0$ si $x < -2$, f es cóncava hacia arriba en $(-2, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$. El punto de inflexión es $(-2, -2e^{-2})$.

H. Con la información precedente se traza la curva de la figura 11. □

EJEMPLO 4 □ Trace la gráfica de $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. La ordenada al origen es $f(0) = 2$. Las abscisas al origen se presentan cuando

$$2\cos x + \operatorname{sen} 2x = 2\cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x = 2\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x) = 0$$

esto es, cuando $\cos x = 0$ o $\operatorname{sen} x = -1$. Así, en el intervalo $[0, 2\pi]$, las abscisas al origen son $\pi/2$ y $3\pi/2$.

C. f no es par ni impar, pero $f(x + 2\pi) = f(x)$ para toda x por lo cual f es periódica y su periodo es 2π. Así, a continuación hay que considerar sólo $0 \leq x \leq 2\pi$ para después ampliar la curva por traslación en H.

D. No hay asíntotas

E. $$f'(x) = -2\operatorname{sen} x + 2\cos 2x = -2\operatorname{sen} x + 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x)$$
$$= -2(2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1) = -2(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1)$$

Por consiguiente, $f'(x) = 0$ cuando $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ o $\operatorname{sen} x = -1$, así que en $[0, 2\pi]$, se tiene $x = \pi/6$, $5\pi/6$, y $3\pi/2$. Para determinar el signo de $f'(x)$ en la siguiente tabla empleamos el hecho de que $\operatorname{sen} x + 1 \geqslant 0$ para toda x.

Intervalo	$f'(x)$	f
$0 < x < \pi/6$	+	creciente en $(0, \pi/6)$
$\pi/6 < x < 5\pi/6$	−	decreciente en $(\pi/6, 5\pi/6)$
$5\pi/6 < x < 3\pi/2$	+	creciente en $(5\pi/6, 3\pi/2)$
$3\pi/2 < x < 2\pi$	+	creciente en $(3\pi/2, 2\pi)$

F. De acuerdo con la tabla anterior, la prueba de la primera derivada da como resultado que $f(\pi/6) = 3\sqrt{3}/2$ es un máximo local y $f(5\pi/6) = -3\sqrt{3}/2$ es un mínimo local, pero f no tiene extremo en $3\pi/2$, sólo una tangente horizontal.

G.
$$f''(x) = -2\cos x - 4\operatorname{sen} 2x = -2\cos x\,(1 + 4\operatorname{sen} x)$$

Por lo tanto, $f''(x) = 0$ cuando $\cos x = 0$ (y así $x = \pi/2$ o $3\pi/2$) y cuando $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{4}$. En la figura 12 vemos que hay dos valores de x entre 0 y 2π para los que $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{4}$. Los llamaremos α_1 y α_2. Entonces $f''(x) > 0$ en $(\pi/2, \alpha_1)$ y $(3\pi/2, \alpha_2)$ y, por consiguiente, f es cóncava hacia arriba allí. Además $f''(x) < 0$ en $(0, \pi/2)$, $(\alpha_1, 3\pi/2)$ y $(\alpha_2, 2\pi)$, por consiguiente, f es cóncava hacia abajo allí. Los puntos de inflexión se presentan cuando $x = \pi/2$, α_1, $3\pi/2$ y α_2.

$\alpha_1 = \pi + \operatorname{arcsen}\frac{1}{4}$
$\alpha_2 = 2\pi - \operatorname{arcsen}\frac{1}{4}$

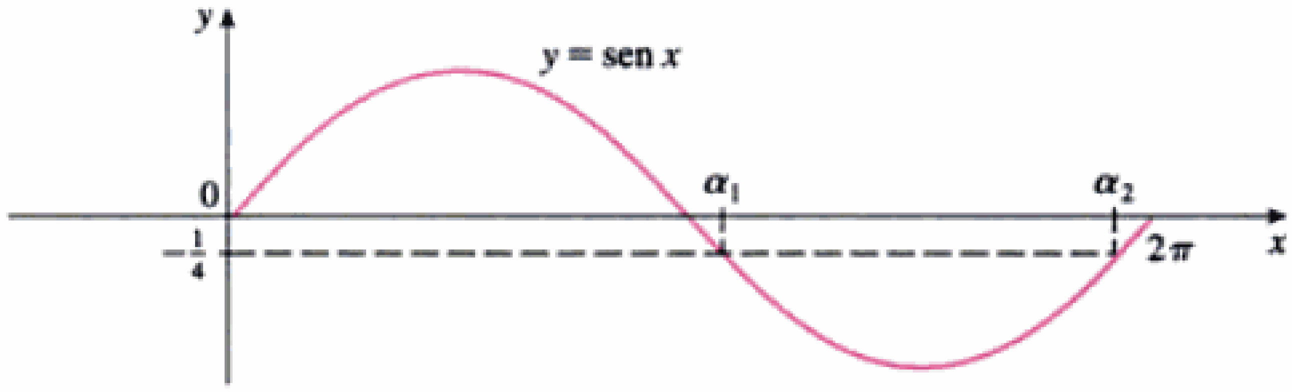


FIGURA 12

H. La gráfica de la función, restringida a $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ es mostrada en la figure 13. A continuación se extiende, aplicando la periodicidad, para obtener la gráfica de la figura 14.

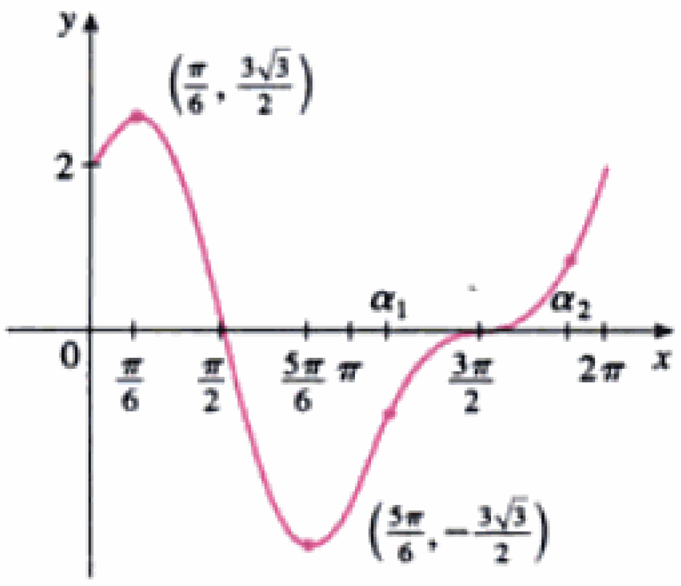


FIGURA 13

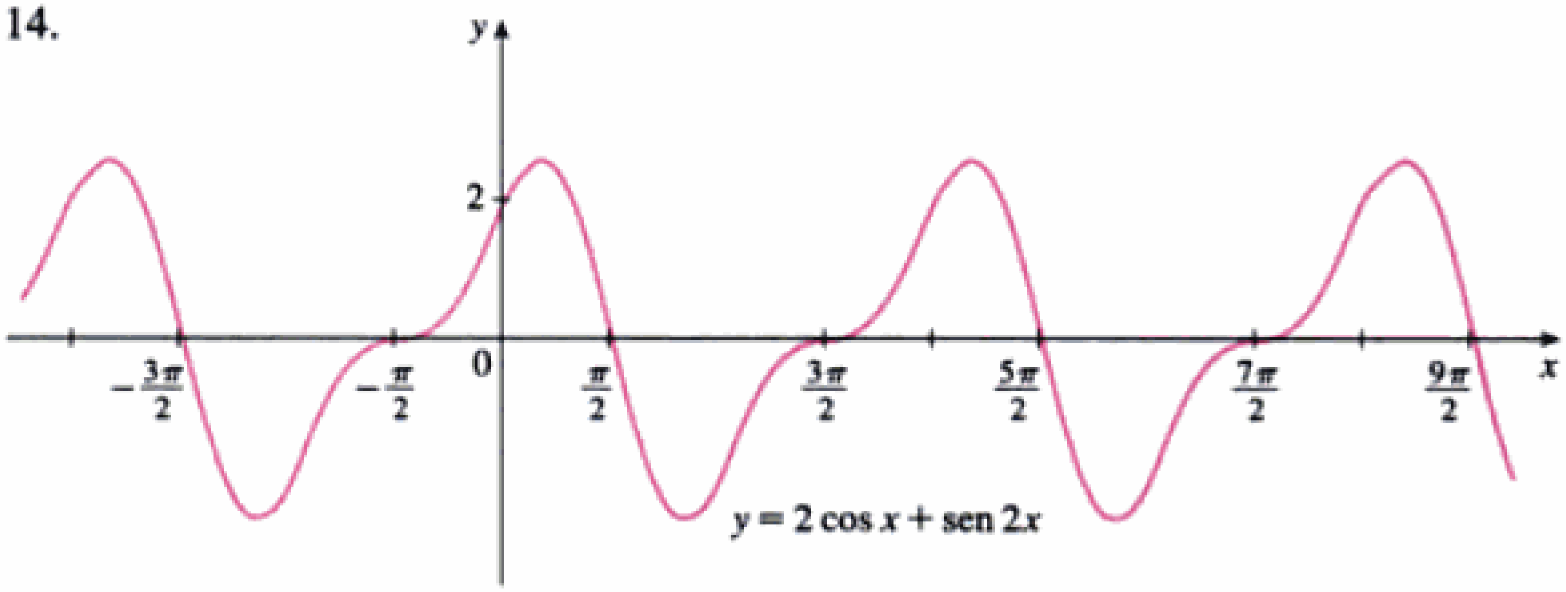


FIGURA 14

□

EJEMPLO 5 □ Trace la gráfica de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. El dominio es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. La ordenada al origen es $f(0) = \ln 4$. Para determinar la abscisa al origen igualamos

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Ya sabemos que $\ln 1 = \log_e 1 = 0$ (porque $e^0 = 1$), así que $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ y, por lo tanto, las abscisas al origen son $\pm\sqrt{3}$.

C. Como $f(-x) = f(x)$, f es par y la curva es simétrica respecto al eje de las y.

D. Buscaremos asíntotas verticales en los extremos del dominio. Dado que $4 - x^2 \to 0^+$ cuando $x \to 2^-$ y cuando $x \to -2^+$, tenemos

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Entonces, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

E.

$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Ya que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 2$, f es creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en $(0, 2)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Vemos que f' pasa de positiva a negativa en 0, así que $f(0) = \ln 4$ es un máximo local, de acuerdo con la prueba de la primera derivada.

G.

$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

En vista de que $f''(x) < 0$ para toda x, la curva es cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$ y no tiene punto de inflexión.

H. Con toda esta información procedemos a trazar la curva (Fig. 15). ◻

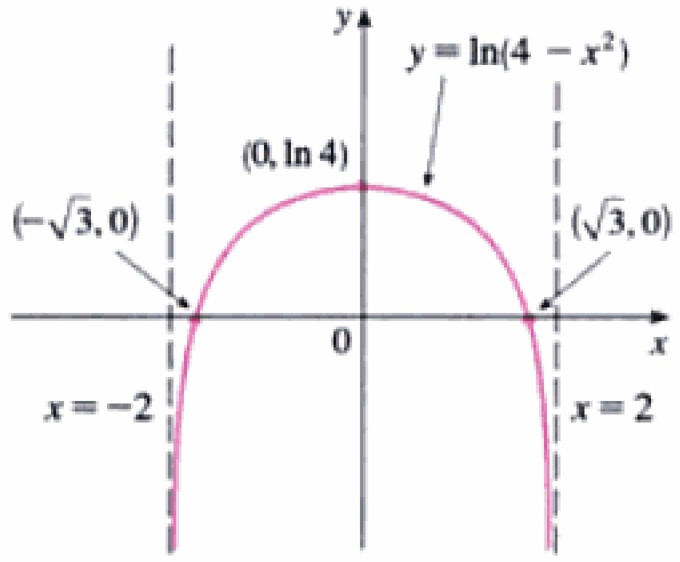


FIGURA 15

Asíntotas oblicuas

Algunas curvas tienen asíntotas *oblicuas*, esto es, ni horizontal ni vertical. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota oblicua**, o asíntota **inclinada**, porque la distancia vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a 0, como en la figura 16. (Se presenta un caso semejante si hacemos que $x \to -\infty$.) En las funciones racionales se tienen asíntotas inclinadas cuando el grado del numerador es el del denominador más uno. En este caso se puede llegar a la ecuación de la asíntota mediante división larga, como en este ejemplo.

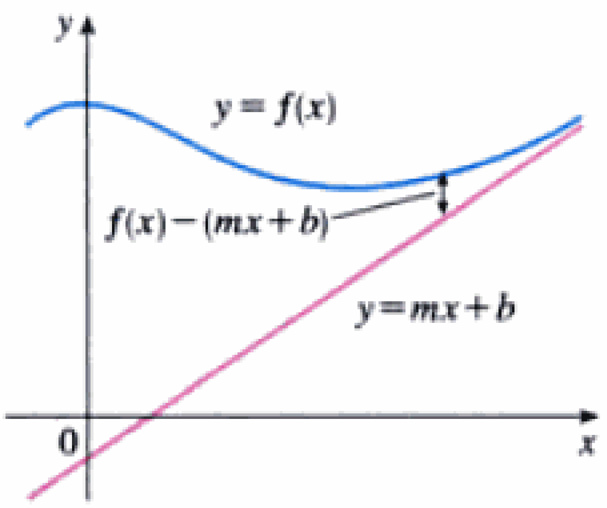


FIGURA 16

EJEMPLO 6 ◻ Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. El dominio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. Ambas coordenadas al origen son 0.

C. Ya que $f(-x) = -f(x)$, f es impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

D. Como $x^2 + 1$ nunca es 0, no hay asíntota vertical. En vista de que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$, no hay asíntota horizontal; pero, mediante división larga se obtiene

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty$$

por eso la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

E. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Para toda x (excepto 0), $f'(x) > 0$, así que f es creciente en $(-\infty, \infty)$.

F. Aunque $f'(0) = 0$, f' no cambia de signo en 0, así que no hay máximo ni mínimo local.

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Dado que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$, formamos la siguiente tabla:

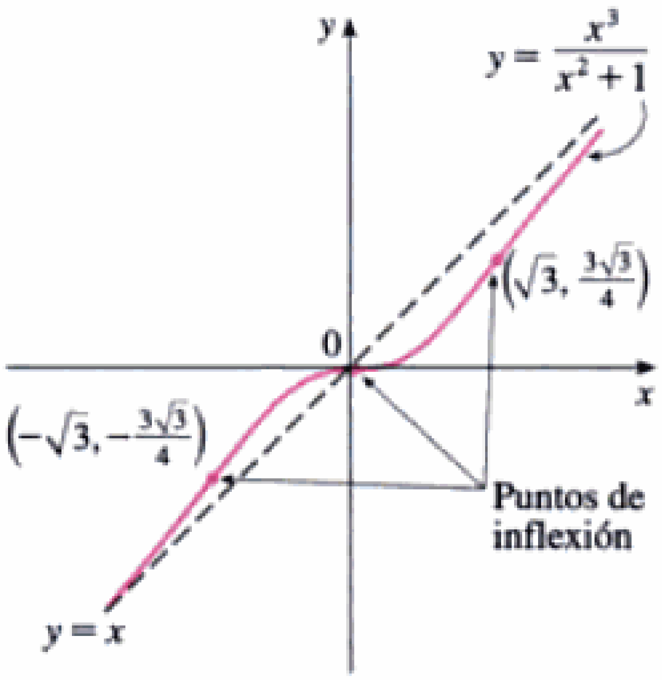


FIGURA 17

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	Cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	Cóncava hacia arriba en $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	Cóncava hacia abajo en $(\sqrt{3}, \infty)$

Los puntos de inflexión están en $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4)$, $(0, 0)$, y $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$.

H. La gráfica de la función aparece en la figura 17. □

4.5 Ejercicios

1–50 □ Emplee los lineamientos de esta sección para trazar las curvas.

1. $y = x^3 + x$
2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$
3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$
4. $y = 8x^2 - x^4$
5. $y = x^4 + 4x^3$
6. $y = 2 - x - x^9$
7. $y = \dfrac{x}{x-1}$
8. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$
9. $y = \dfrac{1}{x^2-9}$
10. $y = \dfrac{x}{x^2-9}$
11. $y = \dfrac{x}{x^2+9}$
12. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$
13. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$
14. $y = \dfrac{1}{x^2(x+3)}$
15. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$
16. $y = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$
17. $y = \dfrac{1}{x^3-x}$
18. $y = \dfrac{1-x^2}{x^3}$
19. $y = x\sqrt{5-x}$
20. $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$
21. $y = \sqrt{x^2+1} - x$
22. $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-5}}$
23. $y = \sqrt[4]{x^2-25}$
24. $y = x\sqrt{x^2-9}$
25. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
26. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
27. $y = x + 3x^{2/3}$
28. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$
29. $y = x + \sqrt{|x|}$
30. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$
31. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$
32. $y = \operatorname{sen} x - \tan x$
33. $y = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
34. $y = 2x + \cot x, \quad 0 < x < \pi$
35. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$
36. $y = \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x$
37. $y = 2\cos x + \operatorname{sen}^2 x$
38. $y = \operatorname{sen} x - x$

39. $y = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$

40. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$

41. $y = 1/(1 + e^{-x})$

42. $y = \ln(\cos x)$

43. $y = x \ln x$

44. $y = e^x/x$

45. $y = xe^{-x}$

46. $y = (\ln x)/x$

47. $y = \ln(x^2 - x)$

48. $y = x(\ln x)^2$

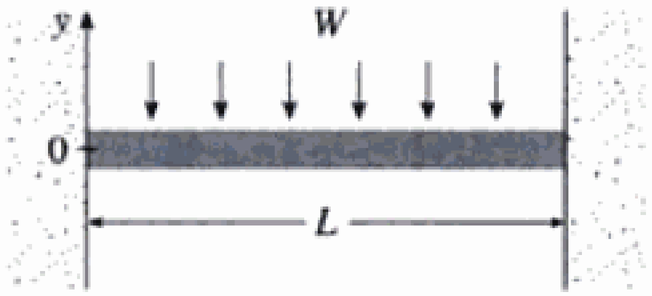
49. $y = xe^{-x^2}$

50. $y = e^x - 3e^{-x} - 4x$

51. La figura nos muestra una viga de longitud L empotrada en muros de concreto. Si se distribuye una carga constante W de manera uniforme a todo lo largo de la viga, entonces la viga toma la forma de la curva de deflexión

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

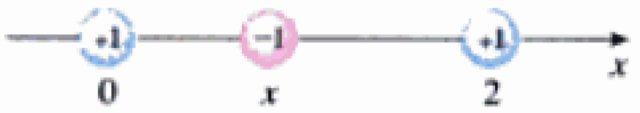
donde E e I son constantes positivas. (E es el módulo de elasticidad de Young e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga.) Bosqueje la gráfica de la curva de deflexión.



52. La ley de Coulomb establece que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1 situadas en las posiciones 0 y 2 de una recta coordenada y una partícula con carga -1 en la posición x entre las dos cargas anteriores. Se sigue de la ley de Coulomb que la fuerza neta que actúa sobre la partícula de posición intermedia es

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} - \frac{k}{(x-2)^2}$$

donde k es una constante positiva. Trace la gráfica de la función fuerza neta; ¿Qué dice la gráfica acerca de la fuerza?



53–58 □ Use los lineamientos de esta sección para trazar la curva. Con el lineamiento D determine la ecuación de la asíntota oblicua.

53. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

54. $y = x - \dfrac{1}{x}$

55. $xy = x^2 + 4$

56. $y = e^x - x$

57. $y = \dfrac{1}{x-1} - x$

58. $y = \dfrac{x^2}{2x + 5}$

59. Demuestre que las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ son asíntotas oblicuas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

60. Sea $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Demuestre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Esto evidencia que la gráfica de f tiende a la de $y = x^2$, y se dice que la curva $y = f(x)$ es *asintótica* a la parábola $y = x^2$. Este resultado ayuda a trazar la gráfica de f.

61. Describa el comportamiento asintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ igual que en el ejercicio 60. A continuación emplee sus resultados como ayuda para trazar la gráfica de f.

62. Aproveche el comportamiento asintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para trazar su gráfica, sin emplear el procedimiento que describimos en esta sección.

4.6 Trazo de gráficas con cálculo y calculadoras

□ Si no ha leído la sección 1.4, debe hacerlo ahora. En particular, en esa sección se explica cómo evitar algunas trampas que se encuentran al usar los aparatos graficadores, si se eligen pantallas apropiadas.

El método que usamos en la sección anterior para trazar gráficas fue una culminación de una gran parte de nuestro estudio del cálculo diferencial. La gráfica fue nuestro producto final. En esta sección el punto de vista es diferente. Aquí *empezamos* con una gráfica producida por computadora y la refinamos. El cálculo nos sirve para asegurar que hemos revelado todos los aspectos importantes de la curva. Y con el uso de los aparatos de graficación podemos estudiar todos los aspectos de curvas que resultarían demasiado complicados sin la tecnología. El presente tema es la *interacción* entre el cálculo y las calculadoras.

EJEMPLO 1 □ Grafique el polinomio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use las gráficas de f' y f'' para estimar todos los puntos máximos y mínimos y los intervalos de concavidad.

SOLUCIÓN Si especificamos un dominio pero no una imagen, muchos aparatos graficadores lo deducirán a partir de los valores calculados. En la figura 1 se muestra la gráfica dada por uno de esos dispositivos si especificamos $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Aun cuando esta pantalla es útil para mostrar que el comportamiento asintótico (o comportamiento en los extremos) es el mismo que para $y = 2x^6$, resulta obvio que esconde algunos detalles más finos. De modo que cambiamos a la pantalla [–3, 2] por [–50, 100], mostrado en la figura 2.

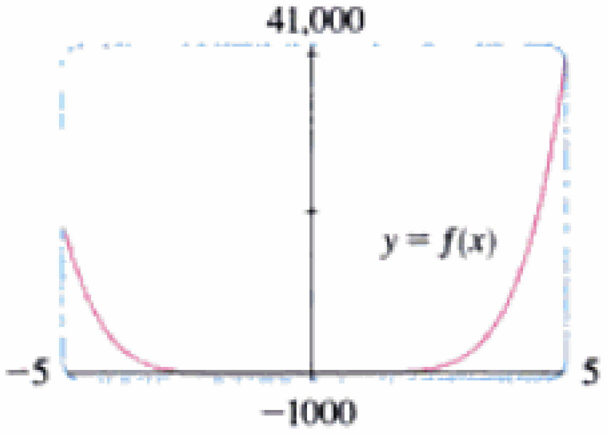


FIGURA 1

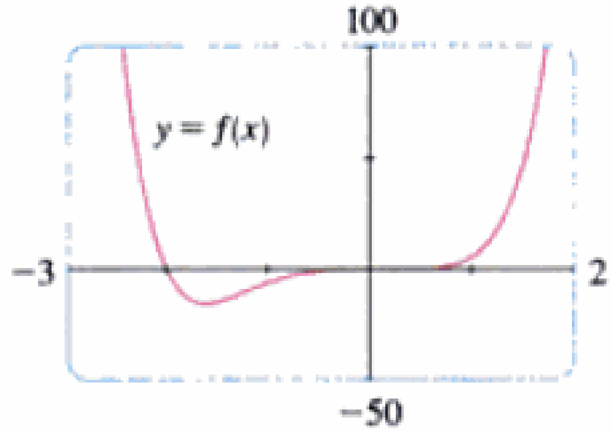


FIGURA 2

A partir de esta gráfica, parece que hay un valor mínimo absoluto de más o menos –15.33, cuando $x \approx -1.62$ (mediante el uso del cursor) y que f es decreciente sobre $(-\infty, -1.62)$ y creciente sobre $(-1.62, \infty)$. Asimismo, parece que hay una tangente horizontal en el origen y puntos de inflexión cuando $x = 0$ y cuando x está en alguna parte entre –2 y –1.

Intentemos confirmar estas impresiones mediante el cálculo. Derivamos y obtenemos

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$
$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

Cuando trazamos la gráfica de f' de la figura 3, vemos que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando $x \approx -1.62$; esto confirma (por la prueba de la primera derivada) el valor mínimo que encontramos al principio. Pero, quizá para nuestra sorpresa, también advertimos que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando $x = 0$, y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.35$. Esto significa que f tiene un máximo local en 0 y un mínimo local cuando $x \approx 0.35$, pero éstos se encontraban escondidos en la figura 2. En efecto, si ahora nos acercamos al origen en la figura 4, vemos lo que habíamos obviado: un valor máximo local de 0 cuando $x = 0$ y un valor mínimo local alrededor de –0.1 cuando $x \approx 0.35$.

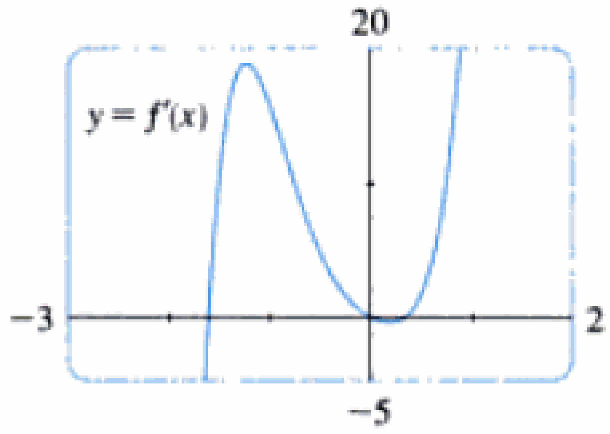


FIGURA 3

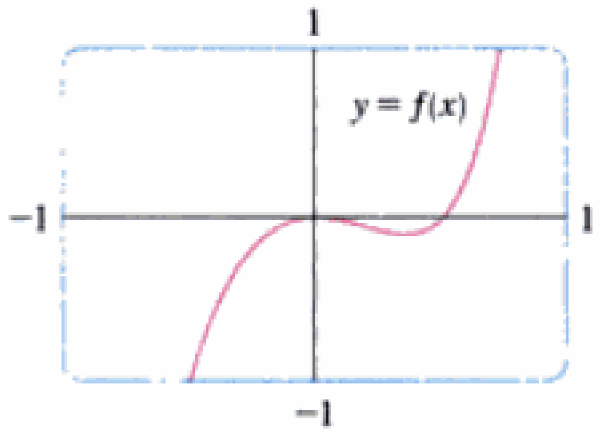


FIGURA 4

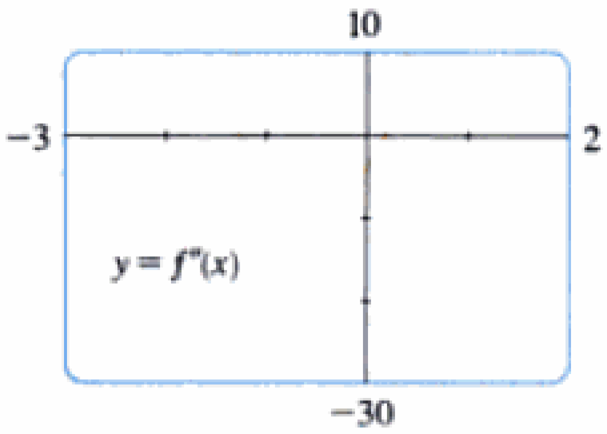


FIGURA 5

¿Qué podemos decir acerca de la concavidad y los puntos de inflexión? Por las figuras 2 y 4 parece haber puntos de inflexión cuando x está un poco a la izquierda de –1 y cuando x está un poco a la derecha de 0. Pero es difícil determinar los puntos de inflexión a partir de la gráfica de f, de modo que graficamos la segunda derivada f'' en la figura 5. Vemos que f'' cambia de positiva a negativa cuando $x \approx -1.23$, y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.19$. Así, correcto hasta dos decimales, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1.23)$ y $(0.19, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1.23, 0.19)$. Los puntos de inflexión son $(-1.23, -10.18)$ y $(0.19, -0.05)$.

Hemos descubierto que ninguna gráfica por sí sola revela todas las características importantes de este polinomio. Pero las figuras 2 y 4, tomadas en conjunto, proporcionan una imagen exacta. □

EJEMPLO 2 □ Grafique la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

en una pantalla que contenga todas las características importantes de la función. Estime los valores máximos y mínimos y los intervalos de concavidad. A continuación, aplique el cálculo para determinar estas cantidades con exactitud.

SOLUCIÓN La figura 6, producida por una computadora con establecimiento automático de escala, es un desastre. Algunas calculadoras graficadoras usan [–10, 10] por [–10, 10] como pantalla predeterminada, de modo que intentémoslo. Obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 7, que es una mejora importante.

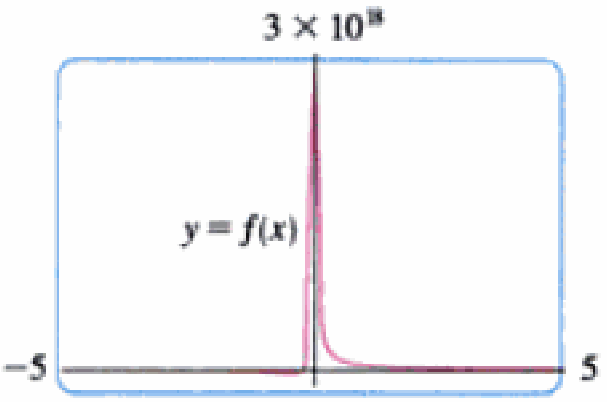


FIGURA 6

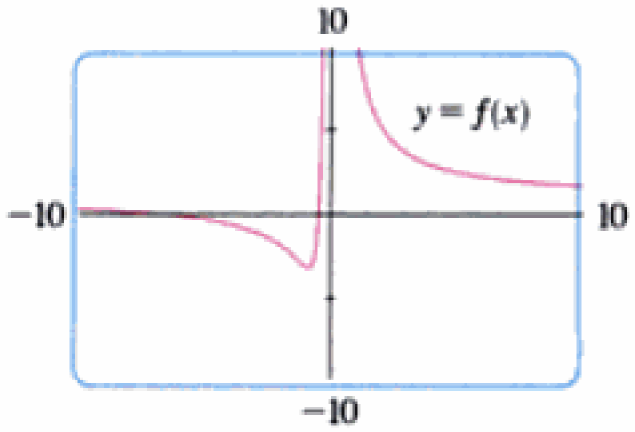


FIGURA 7

El eje y parece ser una asíntota vertical, y lo es porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

La figura 7 también permite estimar las intersecciones con el eje x: alrededor de -0.5 y -6.5. Los valores exactos se obtienen con la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 + 7x + 3 = 0$; obtenemos $x = \left(-7 \pm \sqrt{37}\right)/2$.

Para mirar mejor las asíntotas horizontales, cambiemos a la pantalla [–20, 20] por [–5, 10] de la figura 8. Parece que $y = 1$ es la asíntota horizontal y esto se confirma con facilidad:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

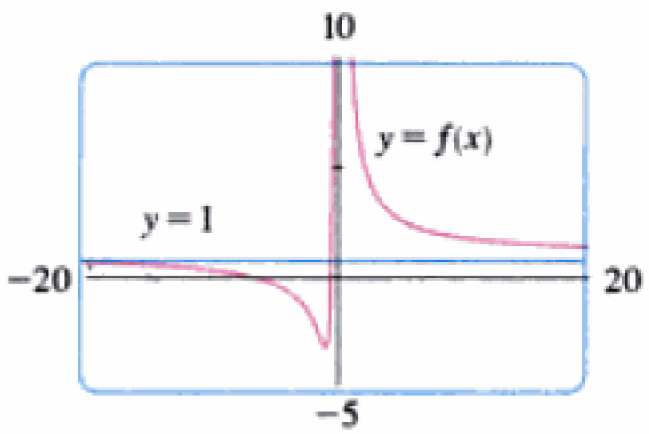


FIGURA 8

Para estimar el valor mínimo, nos acercamos a la pantalla [–3, 0] por [–4, 2] de la figura 9. El cursor indica que el valor mínimo absoluto es alrededor de –3.1, cuando $x \approx -0.9$, y vemos que la función decrece sobre $(-\infty, -0.9)$ y $(0, \infty)$, mientras que crece sobre $(-0.9, 0)$. Los valores exactos se obtienen al derivar:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Esto hace ver que $f'(x) > 0$ cuando $-\frac{6}{7} < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $x < -\frac{6}{7}$ y cuando $x > 0$. El valor mínimo exacto es $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3.08$.

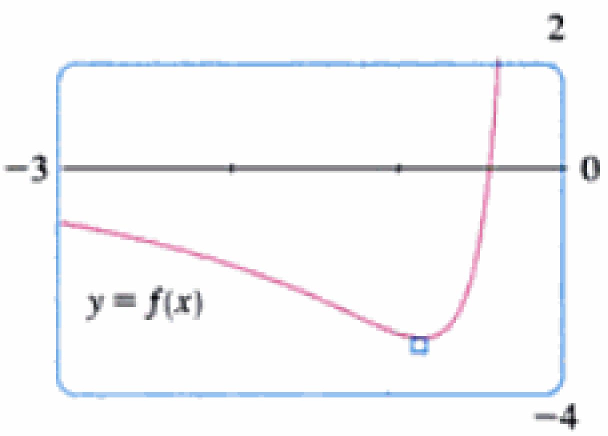


FIGURA 9

La figura 9 también muestra que se presenta un punto de inflexión en alguna parte entre $x = -1$ y $x = -2$. Podríamos estimarlo con mucha más exactitud si aplicamos la gráfica de la segunda derivada, pero en este caso es igual de fácil hallar valores exactos. Puesto que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = 2\,\frac{7x + 9}{x^4}$$

vemos que $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. De modo que f es cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ y $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

El análisis que usa las dos primeras derivadas hace ver que las figuras 7 y 8 exhiben todos los aspectos importantes de la curva. □

EJEMPLO 3 □ Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$.

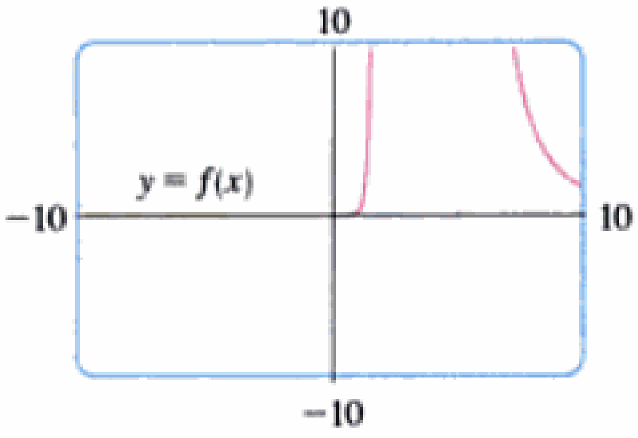


FIGURA 10

SOLUCIÓN Si recurrimos a nuestra experiencia con una función racional del ejemplo 2, empezamos graficando f en la pantalla $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. Con base en la figura 10, tenemos la sensación que necesitamos acercarnos para ver un detalle más fino y alejarnos para ver la imagen más grande. Pero, como guía para realizar acercamientos o alejamientos inteligentes, primero observemos con más cuidado la expresión de $f(x)$. Debido a la existencia de los factores $(x-2)^2$ y $(x-4)^4$ en el denominador, esperamos que $x = 2$ y $x = 4$ sean las asíntotas verticales. En efecto,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$$

Para hallar las asíntotas horizontales, dividimos numerador y denominador entre x^6:

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^4} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty$$

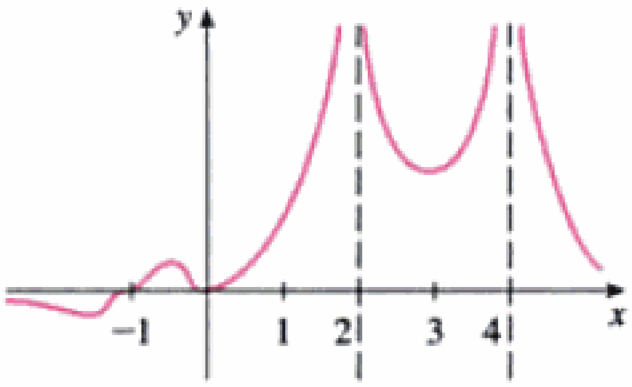


FIGURA 11

Con lo que el eje x es la asíntota horizontal.

También es muy útil considerar el comportamiento de la gráfica cerca de las intersecciones con el eje x usando un análisis como en el ejemplo 11 de la sección 2.6. Como x^2 es positivo, $f(x)$ no cambia de signo en 0 y, de este modo, su gráfica no cruza el eje x en 0. Pero, en virtud del factor $(x+1)^3$, la gráfica cruza el eje x en -1 y tiene una tangente horizontal allí. Si reunimos toda esta información, sin usar las derivadas, vemos que la curva tiene que parecerse a la figura 11.

Ahora que sabemos qué buscar, nos acercamos varias veces para producir las gráficas de las figuras 12 y 13; también nos alejamos varias veces para lograr la figura 14.

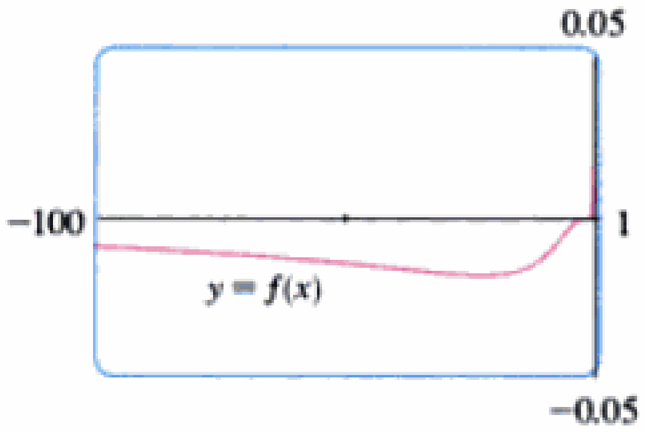


FIGURA 12

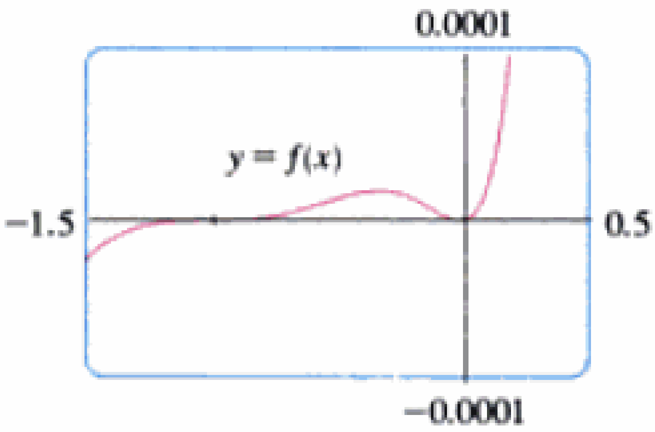


FIGURA 13

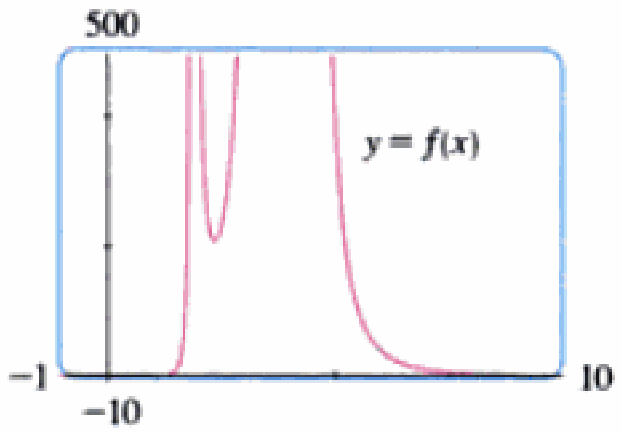


FIGURA 14

A partir de estas gráficas podemos leer que el mínimo absoluto está alrededor de -0.02 y se tiene cuando $x \approx -20$. También hay un máximo local ≈ 0.00002 cuando $x \approx -0.3$ y un mínimo local ≈ 211, cuando $x \approx 2.5$. Asimismo, estas gráficas muestran puntos de inflexión cerca de -5 y -1, y dos entre -1 y 0. Para estimar mejor los puntos de inflexión, necesitaríamos graficar f'', pero calcular esta segunda derivada a mano es una tarea irracional. Si cuenta con un SAC, entonces es fácil (véase ejercicio 19).

Hemos visto que para esta función en particular, se necesitan *tres* gráficas (Figs. 12, 13 y 14) a fin de obtener toda la información útil. La única manera de exhibir todas estas características de la función en una gráfica es dibujarla a mano. A pesar de las exageraciones y las distorsiones, la figura 11 es útil para resumir la naturaleza esencial de la función. □

□ La familia de funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$$

donde c es una constante, se encuentra en aplicaciones a la síntesis de modulación de frecuencia (FM). Una onda senoidal se modula por medio de una onda con frecuencia diferente ($\operatorname{sen} cx$). En el ejemplo 4 se estudia el caso en que $c = 2$. En el ejercicio 25 se examina otro caso especial.

EJEMPLO 4 □ Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$. Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, localice todos los valores máximos y mínimos, los intervalos de incremento y decremento, y los puntos de inflexión correctos con un decimal.

SOLUCIÓN En primer lugar, observemos que f es periódica en 2π. Asimismo, f es impar y $|f(x)| \leqslant 1$ para toda x. De modo que la selección de una pantalla no es un problema para esta función: empecemos con $[0, \pi]$ por $[-1.1, 1.1]$ (Fig. 15). Parece que existen tres valores máximos locales y dos valores mínimos locales en esa ventana. Para confirmar esto y localizarlos con más exactitud, calculamos que

$$f'(x) = \cos(x + \operatorname{sen} 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x)$$

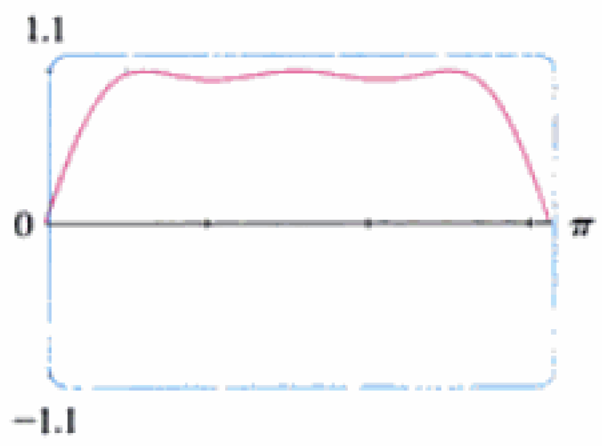


FIGURA 15

y graficamos f y f' en la figura 16. Con el acercamiento y la prueba de la primera derivada, encontramos los valores siguientes hasta una cifra decimal:

Intervalos de incremento:	$(0, 0.6)$, $(1.0, 1.6)$, $(2.1, 2.5)$
Intervalos de decremento:	$(0.6, 1.0)$, $(1.6, 2.1)$, $(2.5, \pi)$
Valores máximos locales:	$f(0.6) \approx 1$, $f(1.6) \approx 1$, $f(2.5) \approx 1$
Valores mínimos locales:	$f(1.0) \approx 0.94$, $f(2.1) \approx 0.94$

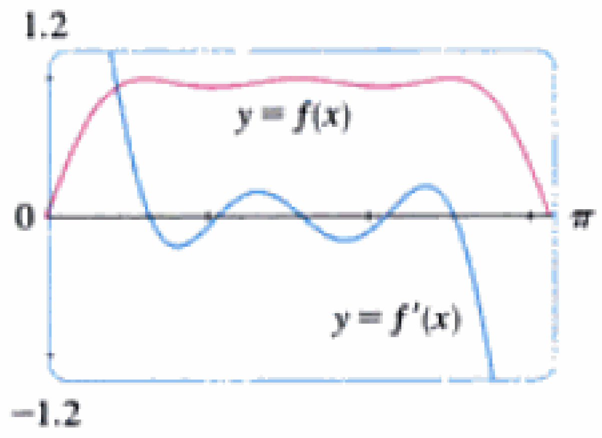


FIGURA 16

La segunda derivada es

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2 \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x) = -4 \operatorname{sen} 2x \cos(x + \operatorname{sen} 2x)$$

Si graficamos f y f'' en la figura 17, obtenemos los valores aproximados siguientes:

Cóncava hacia arriba sobre:	$(0.8, 1.3)$, $(1.8, 2.3)$
Cóncava hacia abajo sobre:	$(0, 0.8)$, $(1.3, 1.8)$, $(2.3, \pi)$
Puntos de inflexión:	$(0, 0)$, $(0.8, 0.97)$, $(1.3, 0.97)$, $(1.8, 0.97)$, $(2.3, 0.97)$

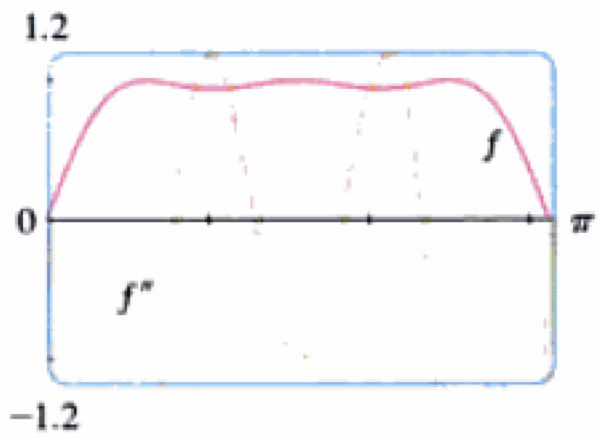


FIGURA 17

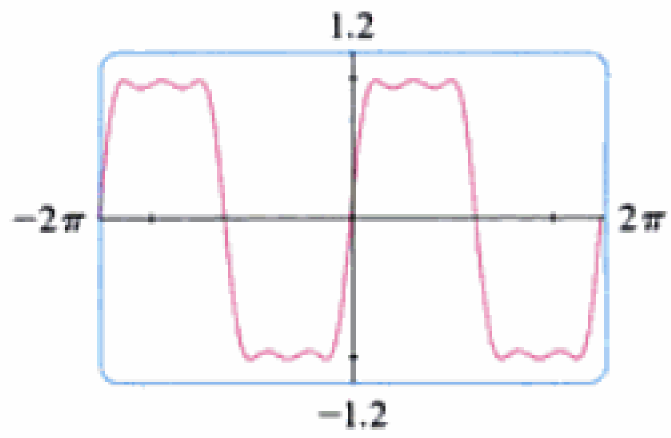


FIGURA 18

Luego de comprobar que la figura 15 representa f con exactitud para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, podemos decir que la gráfica extendida de la figura 18 representa f con exactitud para $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$. □

Nuestro último ejemplo atañe a las *familias* de funciones. Como se discutió en la sección 1.4, esto significa que las funciones de la familia se relacionan por medio de una fórmula que contiene una o más constantes arbitrarias. Cada valor de la constante da origen a un miembro de la familia y la idea es ver cómo cambia la gráfica de la función al cambiar la constante.

EJEMPLO 5 ¿Cómo varía la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$ al cambiar c?

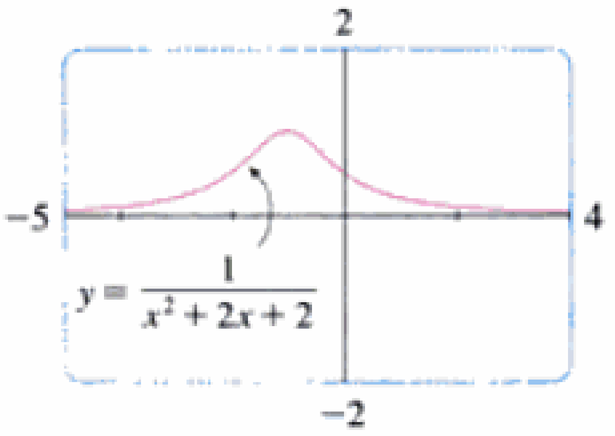


FIGURA 19
$c = 2$

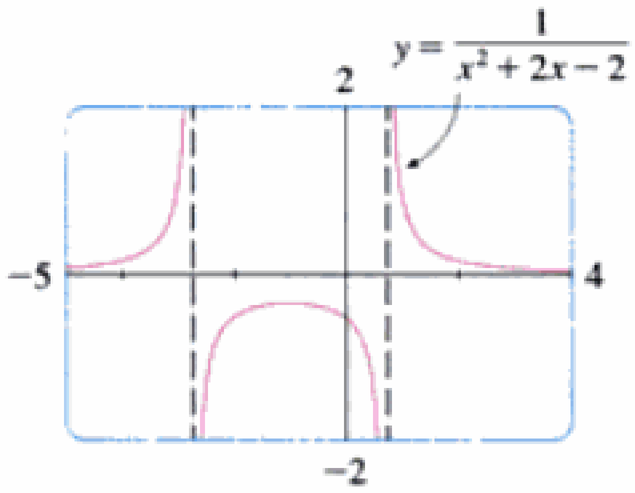


FIGURA 20
$c = -2$

SOLUCIÓN Las gráficas de las figuras 19 y 20 (los casos especiales $c = 2$ y $c = -2$) muestran dos aspectos de las curvas. Antes de dibujar más gráficas, veamos qué tienen en común los miembros de esta familia. Puesto que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para cualquier valor c, todos tienen el eje x como asíntota horizontal. Se tendrá una asíntota vertical cuando $x^2 + 2x + c = 0$. Si se resuelve esta ecuación cuadrática, se obtiene $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$. Cuando $c > 1$, no hay asíntota vertical (como en la figura 19). Cuando $c = 1$, la gráfica tiene una sola asíntota vertical $x = -1$ porque

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

Cuando $c < 1$ se tienen dos asíntotas verticales: $x = -1 + \sqrt{1 - c}$ y $x = -1 - \sqrt{1 - c}$ (como en la figura 20).

Ahora, calculemos la derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Esto hace ver que $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$ (si $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$, esto significa que f crece sobre $(-\infty, -1)$ y decrece sobre $(-1, \infty)$. Para $c > 1$ hay un valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c - 1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c - 1)$ es un valor máximo local y los intervalos de incremento y decremento se interrumpen en las asíntotas verticales.

La figura 21 es una "presentación de transparencias" en que se exhiben cinco miembros de la familia, todos con sus gráficas en la pantalla $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Como se predijo, $c = 1$ es el valor en que ocurre la transición de dos asíntotas verticales a una y, a continuación, a ninguna. A medida que c crece a partir de 1, vemos que el punto máximo se vuelve más bajo; esto se explica por el hecho de que $1/(c - 1) \to 0$ cuando $c \to \infty$.

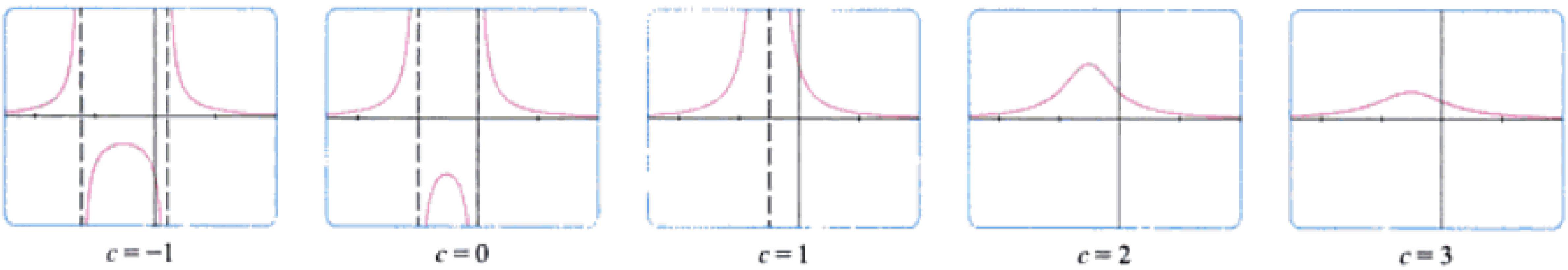


FIGURA 21 Familia de funciones $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Cuando c decrece a partir de 1, las asíntotas verticales se separan cada vez más porque la distancia entre ellas es $2\sqrt{1-c}$, la cual aumenta a medida que $c \to -\infty$. Una vez más, el punto máximo se aproxima al eje x porque $1/(c-1) \to 0$ cuando $c \to -\infty$.

Es evidente que no hay punto de inflexión cuando $c \leq 1$. Para $c > 1$, calculamos que

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

y deducimos que hay punto de inflexión cuando $x = -1 \pm \sqrt{3(c-1)}/3$. De modo que los puntos de inflexión se apartan al crecer c y esto parece plausible por lo que se ve en las dos últimas partes de la figura 21.

4.6 Ejercicios

1–8 ▫ Trace gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. En particular, use gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos de incremento y de decremento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

1. $f(x) = 4x^4 - 7x^2 + 4x + 6$

2. $f(x) = 8x^5 + 45x^4 + 80x^3 + 90x^2 + 200x$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x - 5}$

4. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + x - 2}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \tan x + 5\cos x$

7. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x, \quad -7 \leq x \leq 7$

8. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$

9–12 ▫ Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. Estime los intervalos de incremento y de decremento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión; aplique el cálculo para determinar estas cantidades.

9. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 10$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 11x - 20}{x^2}$

11. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

12. $f(x) = x - 2\operatorname{sen} x, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

13–14 ▫ Trace una gráfica de f que muestre todos los aspectos importantes de la curva. Estime los valores máximos y mínimos locales y, a continuación, aplique el cálculo para determinar estos valores. Use una gráfica de f'' para estimar los puntos de inflexión.

13. $f(x) = e^{x^3 - x}$

14. $f(x) = e^{\cos x}$

15–16 ▫
(a) Grafique la función.
(b) Con la regla de l'Hospital explique el comportamiento cuando $x \to 0$.
(c) Estime el valor mínimo y los intervalos de concavidad. Use el cálculo para hallar los valores exactos.

15. $f(x) = x^2 \ln x$

16. $f(x) = xe^{1/x}$

17–18 ▫ Dibuje a mano la gráfica, utilizando las asíntotas y las intersecciones, pero no las derivadas. Enseguida, use su dibujo como guía para producir gráficas (con un aparato graficador) que exhiba las características importantes de la curva. Utilice estas gráficas para estimar los valores máximos y mínimos.

17. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$

18. $f(x) = \dfrac{10x(x-1)^4}{(x-2)^3(x+1)^2}$

SAC **19.** Si f es la función considerada en el ejemplo 3, utilice un sistema algebraico para computadora para calcular f' y grafíquela para confirmar que todos los valores máximos y mínimos son como en el ejemplo. Calcule f'' y úsela para estimar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

SAC **20.** Si f es la función del ejercicio 18, encuentre f' y f'' y use sus gráficas para estimar los intervalos de incremento y decremento, y la concavidad de f.

SAC **21–22** ▫ Use un sistema algebraico de computación para graficar f, f' y f''. Utilice estas gráficas para estimar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, sus valores extremos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

21. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad 0 \leq x \leq 3\pi$

22. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt[4]{x^4 + x + 1}}$

SAC **23–24** ▫
(a) Grafique la función.
(b) Explique la forma de la gráfica calculando el límite al tender $x \to 0^+$ o $x \to \infty$.
(c) Estime los valores máximos y mínimos y entonces usar el cálculo para hallar los valores exactos.
(d) Use una gráfica de f'' para estimar las abscisas de los puntos de inflexión.

23. $f(x) = x^{1/x}$

24. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

25. En el ejemplo 4 se consideró un miembro de la familia de funciones $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen } cx)$ que se presenta en la síntesis de FM. En este ejercicio, investigue la función para $c = 3$. Empiece graficando f en la pantalla $[0, \pi]$ por $[-1.2, 1.2]$. ¿Cuántos puntos máximos locales ve? La gráfica tiene más que los que son visibles a simple vista. Para descubrir los puntos máximos y mínimos escondidos necesita examinar la gráfica de f' con mucho cuidado. De hecho, ayuda mirar al mismo tiempo la gráfica de f''. Encuentre todos los valores máximos y mínimos y los puntos de inflexión. Enseguida, trace la gráfica de f en la pantalla $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ y comente la simetría.

26–33 □ Describa cómo varía la gráfica de f a medida que c varía. Trace la gráfica de varios miembros de la familia para ilustrar las tendencias que descubra. En particular, investigue cómo se mueven los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión, cuando c cambia. También identifique cualesquiera de los valores de transición de c en los que cambie la forma básica de la curva.

26. $f(x) = x^3 + cx$

27. $f(x) = x^4 + cx^2$

28. $f(x) = x^2\sqrt{c^2 - x^2}$

29. $f(x) = e^{-c/x^2}$

30. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

31. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2 + cx^2}$

33. $f(x) = cx + \text{sen } x$

34. La familia de funciones $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y C son números positivos y $b > a$, se ha usado para modelar la concentración de un medicamento administrado por vía intravenosa $t = 0$. Trace la gráfica de varios miembros de esta familia. ¿Qué tienen en común? Para valores fijos de C y a, descubra gráficamente qué sucede al crecer b. Entonces aplique el cálculo para probar lo que ha descubierto.

35. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece calculando los límites al tender $x \to \pm\infty$. Identifique cualquier valor de transición de c donde cambie la forma básica. ¿Qué pasa con los valores donde se alcanzan máximos y mínimos y con los puntos de inflexión al variar c? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

36. Investigue la familia de curvas dada por la ecuación $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Empiece por determinar el valor de transición de c en el cual cambia el número de puntos de inflexión. Luego, trace la gráfica de varios miembros de la familia para ver cuáles formas son posibles. Existe otro valor de transición c en que cambia el número de números críticos. Intente descubrirlo gráficamente. Enseguida, pruebe lo que ha descubierto.

37. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. ¿Para qué valores de c tiene mínimos la curva?
(b) Muestre que los puntos máximo y mínimo de cada curva están sobre la parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre gráficamente esta parábola y varios miembros de la familia.

38. (a) Investigue la familia de polinomios dados por la ecuación $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. ¿Para cuáles valores de c tiene máximos y mínimos la curva?
(b) Muestre que los puntos máximos y mínimos de cada curva pertenecen a la curva $y = x - x^3$. Ilustre graficando esta curva y varios miembros de la familia.

4.7 Problemas de optimización

Los métodos para hallar valores extremos que hemos aprendido en este capítulo tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Una persona de negocios quiere minimizar los costos y maximizar las utilidades. El principio de Fermat, en óptica, afirma que la luz sigue la trayectoria que recorre en el menor tiempo. En esta sección y en la siguiente resolveremos problemas como los de maximizar áreas, volúmenes y utilidades, y minimizar distancias, tiempos y costos.

En la solución de esos problemas prácticos, el desafío más grande suele ser convertir el problema en palabras en un problema matemático de optimización, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse. Recordemos los principios de solución de problemas analizados en la página 78 y adaptémoslos a esta situación:

Pasos para la solución de problemas de optimización

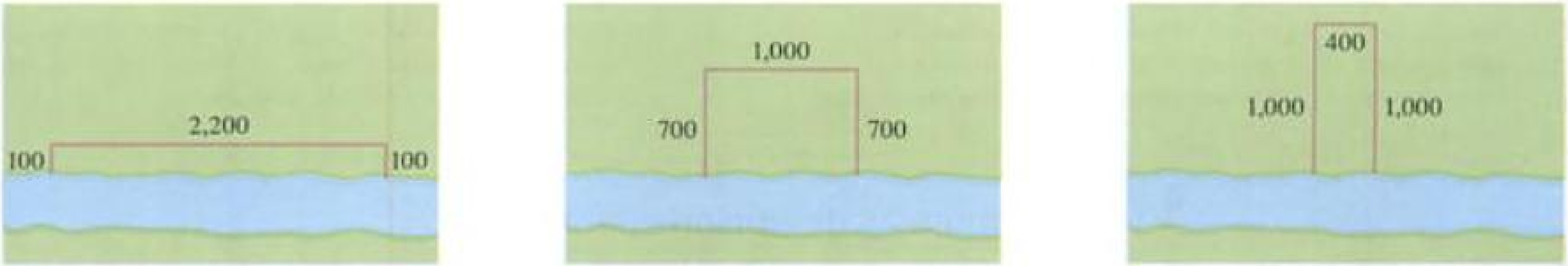
1. **Comprenda el problema** El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.

3. **Introduzca notación** Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamémosla Q por ahora). Asimismo, seleccione símbolos (a, b, c, ... , x, y) para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos. Puede ayudar el uso de iniciales como símbolos sugerentes; por ejemplo, A para el área, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si en el paso 4 Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar relaciones (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. Enseguida, use estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para Q. De esta suerte, Q se expresará como función de *una* variable x, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Aplique los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para hallar el valor máximo o el mínimo *absoluto* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

EJEMPLO 1 Un granjero tiene 2,400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

- Comprenda el problema
- Analogía: intente casos especiales
- Dibuje diagramas

SOLUCIÓN Para tener idea de lo que ocurre en este problema, experimentemos con algunos casos especiales. En la figura 1 se muestran (sin escala) tres maneras posibles de emplear los 2400 pies de cerca. Vemos que cuando intentamos cercar campos poco largos y anchos, o largos y angostos, obtenemos áreas más o menos pequeñas. Parece plausible que exista alguna configuración intermedia que produzca el área más grande.



Área = 100 · 2,200 = 220,000 pies^2 Área = 700 · 1,000 = 700,000 pies^2 Área = 1,000 · 400 = 400,000 pies^2

FIGURA 1

En la figura 2 se ilustra el caso general. Deseamos maximizar el área A del rectángulo. Sean x y y lo largo y lo ancho del campo (en pies). Enseguida, expresemos A en términos de x y y:

- Introduzca notación

$$A = xy$$

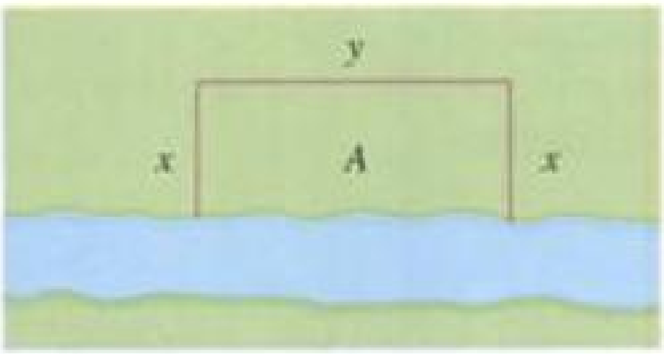


FIGURA 2

Queremos expresar A como función de una sola variable, de modo que eliminamos y al expresarla en términos de x. Para llevar a cabo esto, usamos la información dada de que la longitud total de la cerca es 2,400 pies. Por lo tanto,

$$2x + y = 2{,}400$$

A partir de esta ecuación tenemos $y = 2{,}400 - 2x$, lo cual da

$$A = x(2{,}400 - 2x) = 2{,}400x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1{,}200$ (de lo contrario, $A < 0$). De modo que la función que deseamos maximizar es

$$A(x) = 2{,}400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1{,}200$$

La derivada es $A'(x) = 2{,}400 - 4x$, de manera que para hallar los números críticos resolvemos la ecuación

$$2{,}400 - 4x = 0$$

lo cual da $x = 600$. El valor máximo de A debe ocurrir en este número crítico o en uno de los puntos extremos del intervalo. Como $A(0) = 0$, $A(600) = 720{,}000$ y $A(1{,}200) = 0$, el método del intervalo cerrado da el valor máximo como $A(600) = 720{,}000$.

[De modo alternativo, podríamos ver que $A''(x) = -4 < 0$, para toda x, de modo que A siempre es cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 600$ debe ser un máximo absoluto.]

Por tanto, el campo rectangular debe tener 600 pies de largo y 1,200 pies de ancho. □

FIGURA 3

EJEMPLO 2 Se va a producir una lata para que contenga 1 L de aceite. Encuentre las dimensiones que minimizarán el costo del metal para fabricar la lata.

SOLUCIÓN Dibuje el diagrama como el de la figura 3, donde r es el radio y h, la altura (ambos en cm). Para minimizar el costo del metal, minimizamos el área superficial total del cilindro (tapa, fondo y lados). En la figura 4 vemos que los lados están hechos de una lámina rectangular de dimensiones $2\pi r$ y h. De manera que el área de la superficie es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

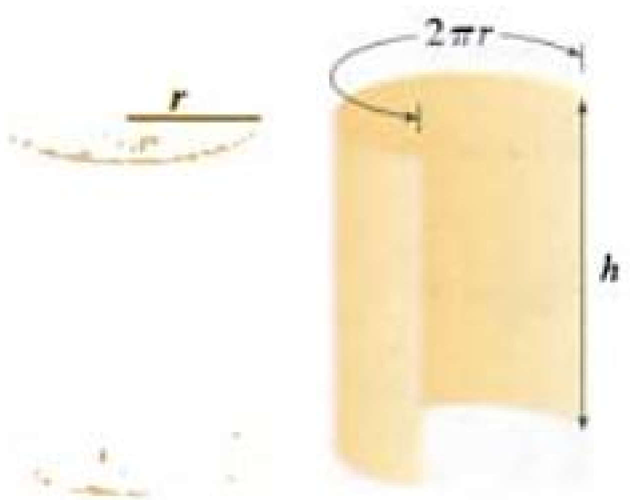


FIGURA 4

Para eliminar h, aplicamos el hecho de que se da el volumen como de 1 L, lo cual tomamos como 1,000 cm^3. Por tanto,

$$\pi r^2 h = 1{,}000$$

lo cual da $h = 1{,}000/(\pi r^2)$. Si se sustituye esto en la expresión para A, se tiene

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1{,}000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2{,}000}{r}$$

Por lo tanto, la función que deseamos minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2{,}000}{r} \qquad r > 0$$

Para hallar los números críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2{,}000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

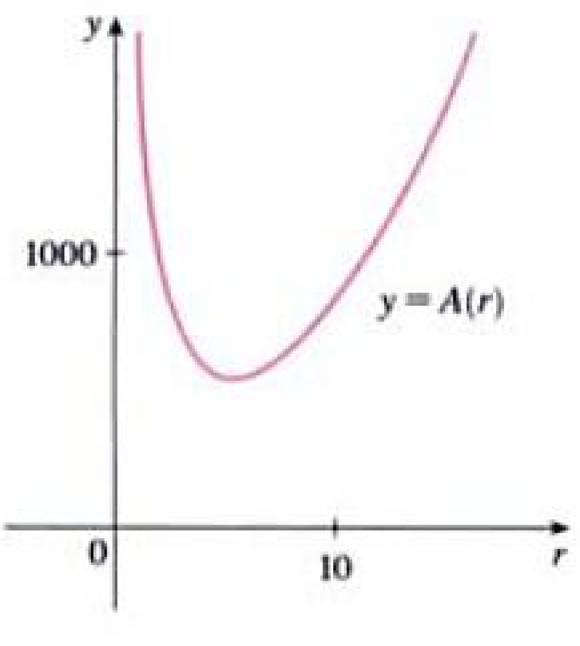


FIGURA 5

Entonces $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = 500$, de modo que el único número crítico es $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Como el dominio de A es $(0, \infty)$, no podemos aplicar el argumento del ejemplo 1 referente a los puntos extremos; pero podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ y $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, por lo que A es decreciente para *toda* r a la izquierda del número crítico y creciente para *toda* r a la derecha. De este modo, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ debe dar lugar a un mínimo *absoluto*.

[Como otra posibilidad podríamos argumentar que $A(r) \to \infty$ cuando $r \to 0^+$ y $A(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, de modo que debe haber un valor mínimo de $A(r)$, el cual tiene que ocurrir en el número crítico. Véase la Fig. 5.]

El valor de h correspondiente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es

$$h = \frac{1{,}000}{\pi r^2} = \frac{1{,}000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

□ En el proyecto de aplicación de la página 339 investigamos la forma más económica para una lata tomando en cuenta otros gastos de fabricación.

Por consiguiente, a fin de minimizar el costo de la lata el radio debe ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm y la altura debe ser igual al doble del radio; a saber, el diámetro. □

NOTA 1 □ El argumento usado en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (la cual sólo se aplica a los valores máximos o mínimos *locales*) y se enuncia a continuación para referencia futura:

> **Prueba de la primera derivada para valores extremos** Supóngase que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.
>
> (a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.
>
> (b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 □ Otro método para resolver problemas de optimización es usar la derivación implícita. Veamos el ejemplo 2 una vez más para ilustrar el método. Trabajemos con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 100$$

pero en lugar de eliminar h, derivemos las dos ecuaciones implícitas con respecto a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se presenta en un número crítico, de modo que hagamos $A' = 0$, simplificamos y llegamos a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y, al restar, da $2r - h = 0$, o bien $h = 2r$.

EJEMPLO 3 □ Encuentre el punto sobre la parábola $y^2 = 2x$ más cercano al punto $(1, 4)$.

SOLUCIÓN La distancia entre el punto $(1, 4)$ y el punto (x, y) es

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

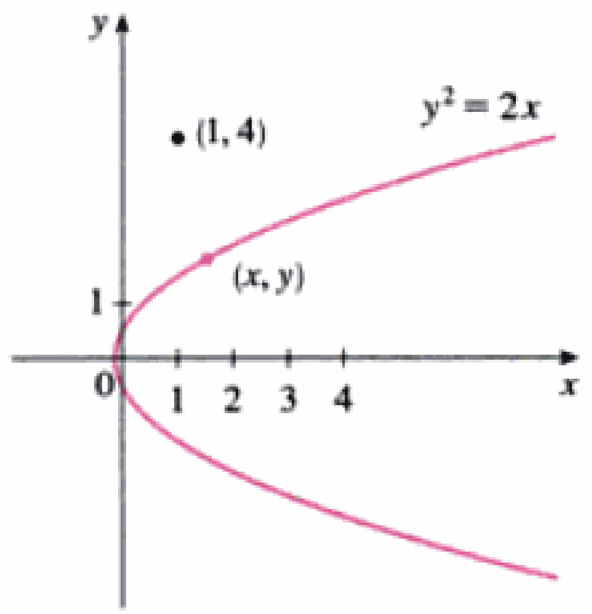


FIGURA 6

(Véase Fig. 6.) Pero si (x, y) está sobre la parábola, entonces $x = y^2/2$, de modo que la expresión para d queda

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

(Con otra opción pudimos sustituir $y = \sqrt{2x}$, para obtener d sólo en términos de x.) En lugar de minimizar d, minimizamos su cuadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

(Convénzase usted mismo que el mínimo de d se tiene en el mismo punto que el mínimo de d^2, pero es más fácil trabajar con este último.) Al derivar, obtenemos

$$f'(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y-4) = y^3 - 8$$

de modo que $f'(y) = 0$ cuando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$, cuando $y < 2$, y $f'(y) > 0$, cuando $y > 2$, de suerte que por la prueba de la primera derivada para los extremos absolutos se presenta el mínimo absoluto cuando $y = 2$. (O podríamos decir que, debido a la naturaleza del problema, es obvio que existe un punto lo más próximo, pero no un punto que esté lo más alejado.) El valor correspondiente de x es $x = y^2/2 = 2$. Por tanto, el punto de $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$ es $(2, 2)$. □

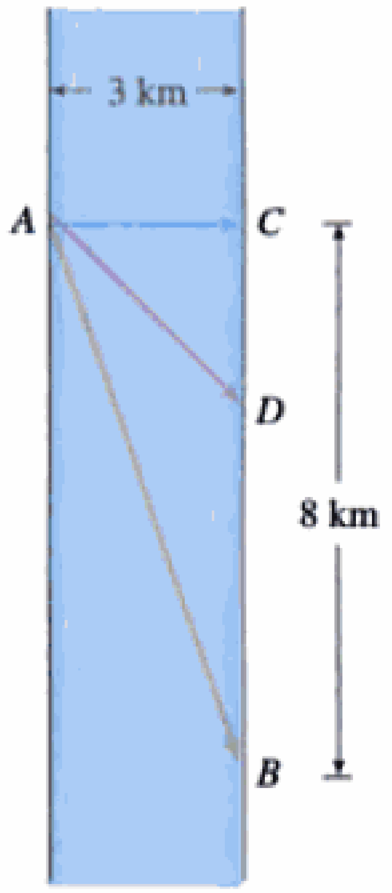


FIGURA 7

EJEMPLO 4 □ Un hombre está en un punto A sobre una de las riberas de un río recto que tiene 3 km de ancho y desea llegar hasta el punto B, 8 km corriente abajo en la ribera opuesta, tan rápido como le sea posible (Fig. 7). Podría remar en su bote, cruzar directamente el río hasta el punto C y correr hasta B, podría remar hasta B o, en última instancia, remar hasta algún punto D, entre C y B, y luego correr hasta B. Si puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible?

SOLUCIÓN Sea x la distancia desde C hasta D. Entonces la distancia por correr es $|DB| = 8 - x$ y el teorema de Pitágoras da la distancia por remar como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Si suponemos que la velocidad del agua es de 0 km/h y aplicamos la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Entonces el tiempo que tiene que remar es $\sqrt{x^2 + 9}/6$ y el que debe correr es $(8 - x)/8$, de modo que el tiempo total T, como función de x, es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

El dominio de esta función es $[0, 8]$. Advierta que, si $x = 0$, rema hacia C y, si $x = 8$, rema directamente hasta B. La derivada de T es

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

De este modo, si se aplica el hecho de que $x \geqslant 0$, tenemos

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \\ &\Longleftrightarrow \quad 16x^2 = 9(x^2 + 9) \quad \Longleftrightarrow \quad 7x^2 = 81 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

El único número crítico es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si el mínimo se presenta en este número crítico o en uno de los puntos extremos del dominio $[0, 8]$, evaluemos T en los tres puntos:

$$T(0) = 1.5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

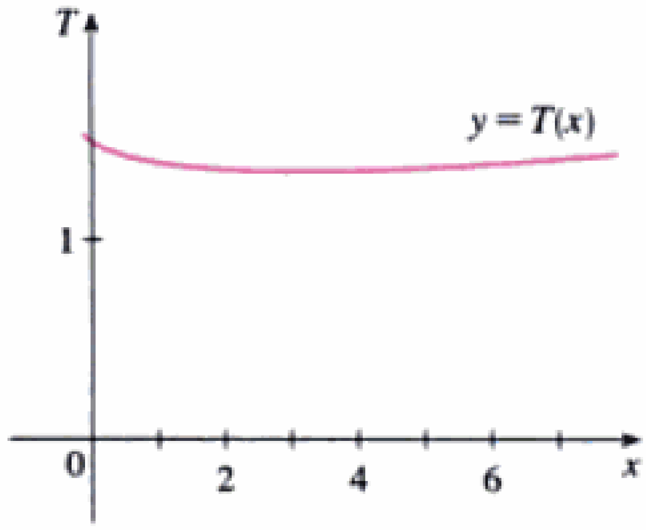


FIGURA 8

Dado que el valor menor de estos valores de T se tiene cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo de T debe tenerse allí. En la figura 8 se ilustra este cálculo con la gráfica de T.

Por consiguiente, el hombre debe atracar en un punto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$ 3.4 km) corriente abajo del punto de partida. □

EJEMPLO 5 □ Encuentre el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un semicírculo de radio r.

SOLUCIÓN 1 Tomemos el semicírculo como la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = r^2$, con centro en el origen. Entonces la palabra *inscrito* significa que el rectángulo tiene dos de sus vértices sobre el semicírculo y los otros dos sobre el eje x (Fig. 9).

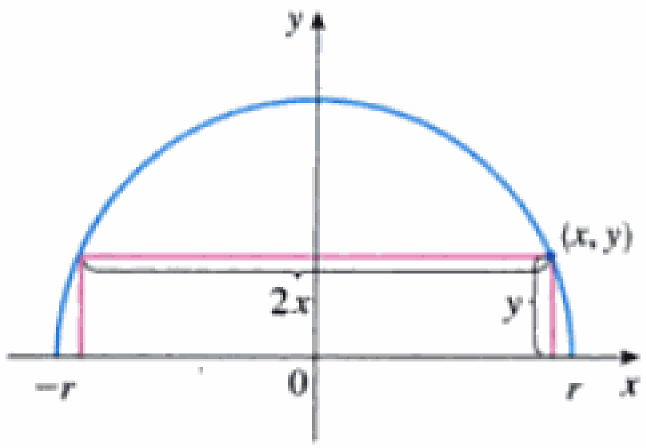


FIGURA 9

Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. Entonces, el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y y, de modo que su área es

$$A = 2xy$$

Para eliminar y, aprovechamos que (x, y) está sobre el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ y, por consiguiente, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De esta forma,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

El dominio de esta función es $0 \leqslant x \leqslant r$. Su derivada es

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

la cual es 0 cuando $2x^2 = r^2$, es decir, $x = r/\sqrt{2}$ (ya que $x \geqslant 0$). Este valor de x da un valor máximo de A puesto que $A(0) = 0$ y $A(r) = 0$. Por lo tanto, el área del rectángulo inscrito más grande es

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

SOLUCIÓN 2 Es posible una solución más sencilla si pensamos en usar un ángulo como variable. Sea θ el ángulo que se ilustra en la figura 10. Entonces, el área del rectángulo es

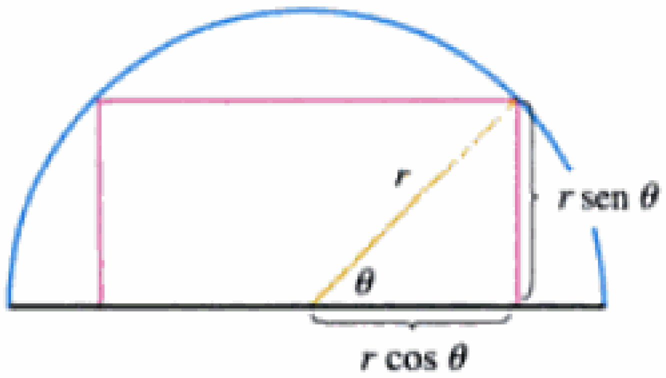


FIGURA 10

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta) = r^2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = r^2\operatorname{sen}2\theta$$

Sabemos que sen 2θ tiene un valor máximo de 1 y se alcanza cuando $2\theta = \pi/2$. De modo que $A(\theta)$ tiene un valor máximo de r^2 y se presenta cuando $\theta = \pi/4$.

Advierta que esta solución trigonométrica no comprende la derivación. De hecho, no se ha necesitado aplicar el cálculo en absoluto. □

4.7 Ejercicios

1. Considere el siguiente problema: Hallar dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es máximo.
   (a) Haga una tabla de valores, como la siguiente, de modo que la suma de los números en las dos primeras columnas sea siempre 23. Con base en la evidencia mostrada por la tabla, estime la respuesta al problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.
.	.	.

   (b) Utilice el cálculo para resolver el problema y comparar con la respuesta de (a).
2. Halle dos números de producto mínimo y diferencia 100.
3. Halle dos números positivos de producto 100 y suma mínima.
4. Halle un número positivo tal que la suma del número y su recíproco sea tan pequeña como sea posible.
5. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de 100 m de perímetro y área máxima posible?
6. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo con área de 1,000 m^2, y perímetro lo menor posible?

7. Considere el problema siguiente. Un granjero que tiene 750 pies de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en cuatro corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los cuatro corrales?
(a) Dibuje varios diagramas en que ilustre la situación, algunos con corrales cortos y anchos, y otros con corrales largos y angostos. Encuentre las áreas totales de estas configuraciones. ¿Parece que existe un área máxima? Si es así, estímela.
(b) Dibuje un diagrama en que ilustre la situación general. Introduzca la notación y marque el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el área total.
(d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Utilice el inciso (d) para escribir el área total como función de una variable.
(f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con la estimación que hizo en el inciso (a).

8. Considere el problema siguiente: se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene 3 pies por lado, al recortar un cuadrado de cada una de las cuatro esquinas y doblar los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener la caja.
(a) Dibuje varios diagramas para ilustrar la situación; algunas cajas cortas con bases grandes y otras altas con bases pequeñas. Encuentre el volumen de varias de esas cajas. ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo.
(b) Dibuje un diagrama en que ilustre la situación general. Introduzca la notación y marque el diagrama con sus símbolos.
(c) Escriba una expresión para el volumen.
(d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
(e) Utilice el inciso (d) para escribir el volumen como función de una variable.
(f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con la estimación que hizo en el inciso (a).

9. Un granjero quiere bordear un área de 1.5 millones de pies cuadrados en un campo rectangular y entonces dividirlo a la mitad con una barda paralela a un lado del rectángulo. ¿Cómo puede hacerlo para minimizar el costo de la barda?

10. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32,000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

11. Si se cuenta con 1,200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

12. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado. El material para los costados, 6 dólares por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales para tener el más barato de esos recipientes.

13. Haga el ejercicio 12 suponiendo que el contenedor tiene una tapa del mismo material que los lados.

14. (a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el perímetro menor es un cuadrado.
(b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene el área máxima es un cuadrado.

15. Halle el punto de la recta $y = 4x + 7$ más cercano al origen.

16. Halle el punto más cercano al punto $(-3, 1)$, sobre la recta $6x + y = 9$.

17. Encuentre los puntos sobre la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ que están más próximos al punto $(2, 0)$.

18. Halle el punto más cercano al punto $(0, -3)$, sobre la parábola $x + y^2 = 0$.

19. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se pueda inscribir en un círculo de radio r.

20. Halle el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

21. Halle el rectángulo de área más grande que puede ser inscrito en un triángulo equilátero de lado L si un lado del rectángulo se encuentra sobre la base del triángulo.

22. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área más grande que tenga su base sobre el eje de las abscisas y sus otros dos vértices por encima del eje x en la parábola $y = 8 - x^2$?

23. Encuentre las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima que pueda inscribirse en un círculo de radio r.

24. Halle el área del rectángulo más grande que se pueda inscribir en un triángulo rectángulo con catetos cuyas longitudes son de 3 cm y 4 cm, respectivamente, si dos de los lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos.

25. Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.

26. Se inscribe un cilindro circular recto en un cono de altura h y radio de la base r. ¿Cuál es el máximo volumen posible de ese cilindro?

27. Un cilindro circular recto. Se inscribe en una esfera de radio r. Halle el área superficial máxima posible de ese cilindro.

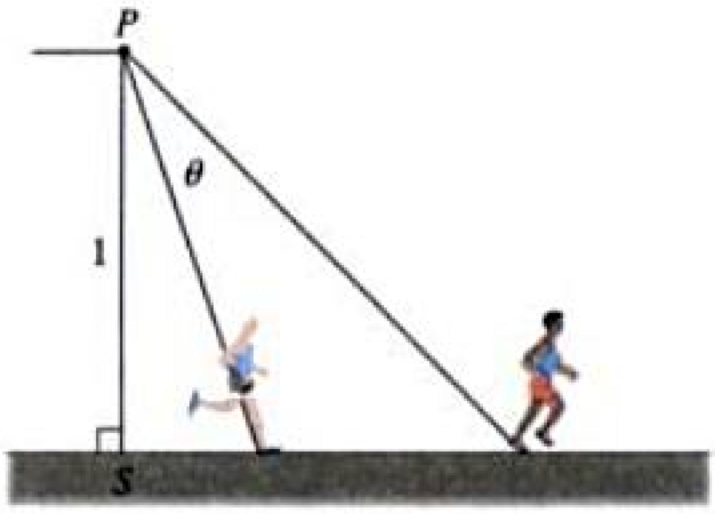
28. Una ventana normanda tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo. (Por consiguiente, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Vea el ejercicio 52 de la página 24.) Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

29. En un cartel rectangular los márgenes superior e inferior miden 6 cm. cada uno y los laterales, 4 cm. Si el área del material impreso se fija en 384 cm^2, ¿cuáles son las dimensiones del cartel de área máxima?

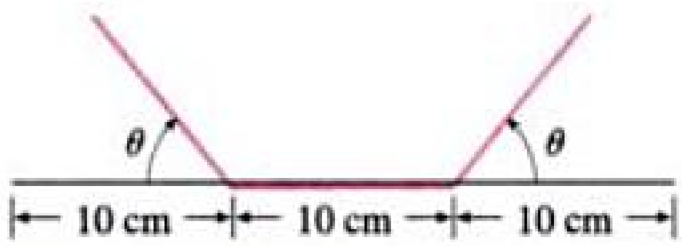
30. Un cartel rectangular debe medir 180 pulgs cuadradas con márgenes de 1 pulgada abajo y a los lados y 2 pulgs arriba. ¿Qué dimensiones resultarán en el área impresa máxima?

31. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre, de modo que el área total encerrada sea (a) máxima y (b) mínima?

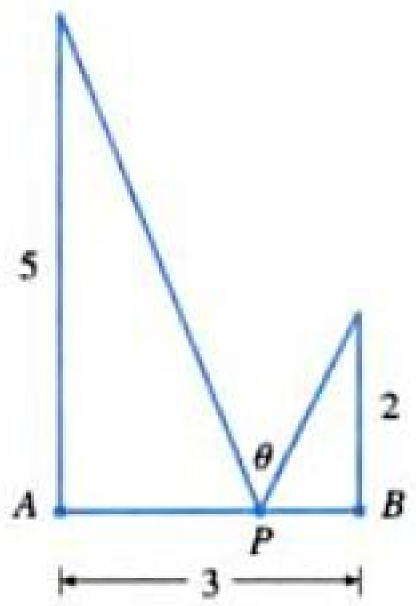
51. Dos corredores arrancan del punto S de la figura y un observador se encuentra en P a 1 unidad de distancia desde la pista de carreras; uno de los corredores va tres veces más rápido que el otro. Halle el valor máximo del ángulo de visión θ del observador de un corredor al otro.



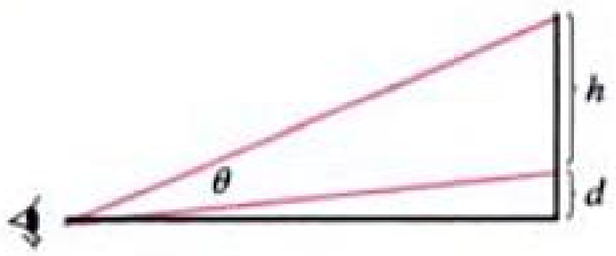
52. Se debe construir un canalón para lluvia a partir de una lámina metálica que tiene 30 cm de ancho, doblando la tercera parte de la lámina de cada lado hasta que forme un ángulo θ. ¿Cómo debe elegirse θ para que el canalón lleve la cantidad máxima de agua?



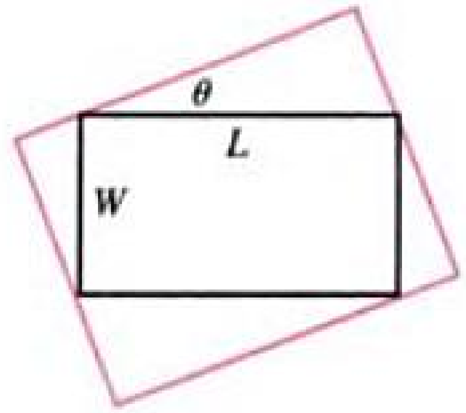
53. ¿Dónde debe elegirse el punto P sobre el segmento rectilíneo AB, de modo que se maximice el ángulo θ?



54. En una galería de arte, una pintura tiene la altura h y está colgada de modo que su borde inferior queda a una distancia d arriba del ojo del observador (como se muestra en la figura). ¿Cuán lejos de la pared debe pararse un observador para tener la mejor vista? (En otras palabras, ¿dónde debe situarse el observador a fin de que se maximice el ángulo θ subtendido en su ojo por la pintura?)



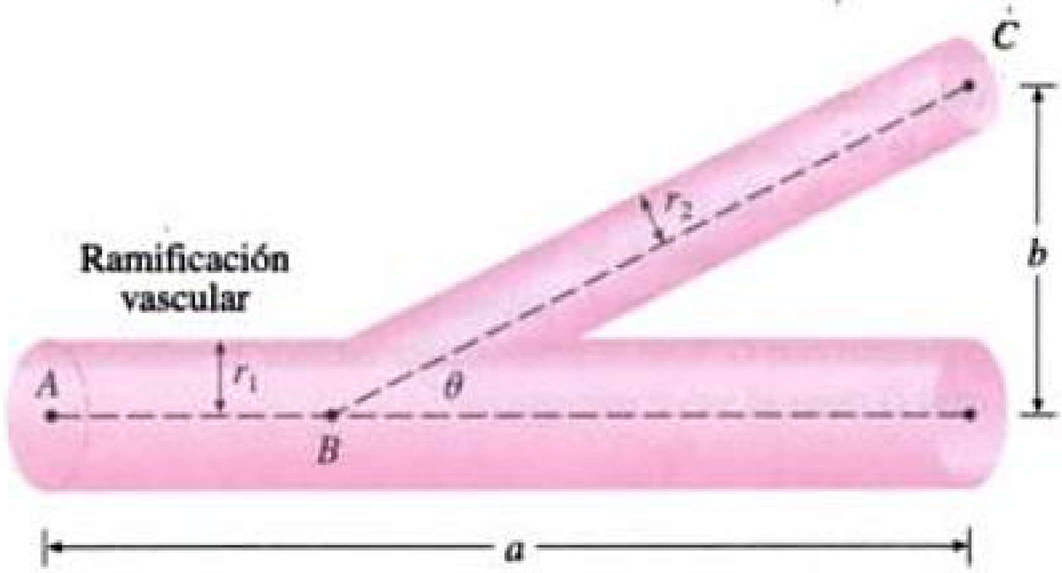
55. ¿Cuál es el área máxima de un rectángulo que se puede circunscribir a otro rectángulo de base L y altura W?



56. El sistema vascular consta de vasos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que llevan la sangre desde el corazón hasta los órganos y de regreso a aquél. Este sistema tiene que trabajar de manera que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre. En particular, esta energía se reduce cuando se baja la resistencia de la sangre. Una de las leyes de Poiseuille da la resistencia R de la sangre como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es el radio y C es una constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre. (Poiseuille estableció esta ley a nivel experimental, pero también se deduce a partir de la Ec. 2, Sec. 8.4.) En la figura se muestra un vaso sanguíneo principal, con radio r_1, el cual se ramifica formando un ángulo θ hacia un vaso más pequeño, con radio r_2.



(a) Aplique la ley de Poiseuille para demostrar que la resistencia total de la sangre a lo largo de la trayectoria ABC es

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

donde a y b son las distancias que se ven en la figura.

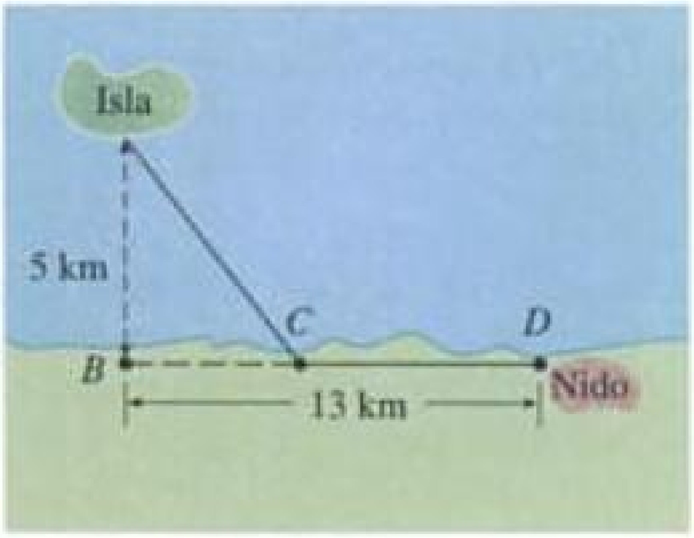
(b) Pruebe que esta resistencia se minimiza cuando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encuentre el ángulo óptimo de ramificación (correcto hasta el grado más cercano) cuando el radio del vaso sanguíneo menor es dos tercios el radio del mayor.

57. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de pájaros tienden a evitar vuelos sobre grandes masas de agua durante las horas diurnas. Se cree que se requiere más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra porque, en general, el aire se eleva sobre la tierra y cae sobre el agua durante el día. Se libera un pájaro con estas tendencias desde una isla que está a 5 km del punto más cercano B de una costa recta, vuela hasta un punto C de la costa y luego a lo largo de ésta hasta la zona D en que se encuentra su nido. Suponga que el pájaro busca de manera instintiva una trayectoria que minimice su consumo de energía. Los puntos B y D están separados 13 km.

(a) En general, si consume 1.4 veces más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra, ¿hasta cuál punto C debe volar el pájaro para minimizar el consumo total de energía de regreso a la zona donde está su nido?



(b) Denotemos con W y L la energía (en joules) por kilómetro volado sobre el agua y sobre la tierra, respectivamente. ¿Qué significaría un valor grande de la razón W/L en términos del vuelo del pájaro? ¿Qué significado tendría un valor pequeño? Determine la razón W/L correspondiente al consumo mínimo de energía.

(c) ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele directamente hasta la zona D donde está su nido? ¿Cuál tiene que ser el valor de W/L para que vuele hasta B y, a continuación, a lo largo de la costa hasta D?

(d) Si los ornitólogos observan que los pájaros de ciertas especies alcanzan la costa en un punto a 4 km de B, ¿cuántas veces más energía consume un ave para volar sobre el agua que sobre la tierra?

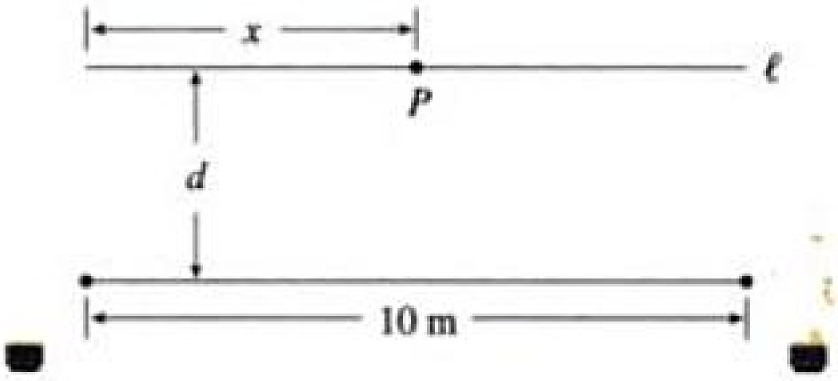
58. Se colocan dos fuentes luminosas de intensidad idéntica separadas 10 m. Un objeto está en un punto P, sobre una recta ℓ paralela a la recta que une las fuentes luminosas y a una distancia de d metros de esta última (véase la figura). Deseamos localizar P sobre ℓ de modo que se minimice la intensidad de la iluminación. Necesitamos aplicar el hecho de que la intensidad de la iluminación de una sola fuente es directamente proporcional a la intensidad de ésta e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a ella.

(a) Halle una expresión para la intensidad $I(x)$ en el punto P.

(b) Si $d = 5$ m, use las gráficas de $I(x)$ e $I'(x)$ para demostrar que la intensidad se minimiza cuando $x = 5$ m; es decir, cuando P está en el punto medio de ℓ.

(c) Si $d = 10$ m, demuestre que la intensidad (quizá de modo sorprendente) no se minimiza en el punto medio.

(d) En algún lugar entre $d = 5$ m y $d = 10$ m se tiene un valor de transición de d en el cual el punto de iluminación mínima cambia de manera abrupta. Estime este valor de d.



Proyecto de aplicación — Forma de una lata

En este proyecto investigaremos cuál es la forma de una lata que resulta más económica. En primer lugar, interpretemos que esto significa que se da el volumen V de una lata cilíndrica y necesitamos hallar la altura h y el radio r que minimice el costo del metal para fabricarla (véase la figura). Si hacemos caso omiso de cualquier desecho de metal en el proceso de fabricación, entonces el problema es minimizar el área superficial del cilindro. En el ejemplo 2 de la sección 4.7 resolvimos este problema y hallamos que $h = 2r$; es decir, la altura debe ser igual al diámetro. Pero si usted va a su alacena o al supermercado con una regla, descubrirá que la altura suele ser mayor que el diámetro y que la relación h/r varía desde 2 hasta alrededor de 3.8. Veamos si podemos explicar este fenómeno.

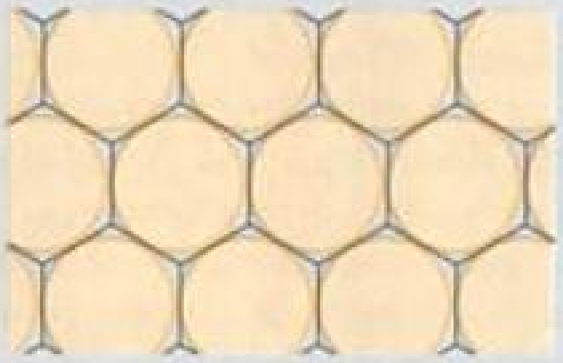
Discos cortados a partir de cuadrados

1. El material para las latas se corta de láminas metálicas. Los costados cilíndricos se forman al doblar rectángulos; estos rectángulos se cortan de la hoja con poco o ningún desperdicio. Pero si los discos superior y del fondo se cortan a partir de cuadrados de lado $2r$ (como en la figura), esto deja un metal considerable de desecho, el cual puede reciclarse pero que tiene poco o ningún valor para quienes fabrican latas. Si éste es el caso, demuestre que se minimiza la cantidad de metal usado cuando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

2. Se obtiene un apiñamiento más eficiente de los discos al dividir la hoja metálica en hexágonos y luego cortar las tapas y bases circulares a partir de ellos (véase la figura). Demuestre que, si se adopta esta estrategia, entonces

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$



Discos cortados a partir de hexágonos

3. Los valores de h/r que se encontraron en los problemas 1 y 2 están un poco más cercanos a los que se encuentran en los anaqueles del supermercado, pero todavía no toman en cuenta todo. Si miramos con más atención algunas latas reales, vemos que la tapa y la base se forman a partir de discos con radios más grandes que r, los cuales se doblan sobre los extremos de la lata. Si tomamos en cuenta esto, incrementaremos h/r. Lo que es más significativo, además del costo del metal, necesitamos incorporar la fabricación de la lata al costo. Supongamos que se incurre en la mayor parte del desembolso al unir los costados a los bordes de las latas. Si cortamos los discos a partir de hexágonos, como en el problema 2, entonces el costo total es proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

donde k es el recíproco de la longitud que se puede unir para el costo de una unidad de área de metal. Demuestre que esta expresión se minimiza cuando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Trace la gráfica de $\sqrt[3]{V}/k$ como función de $x = h/r$ y úsela para argumentar que cuando una lata es grande o realizar la unión es barato, debemos hacer que h/r sea aproximadamente igual a 2.21 (como en el problema 2). Pero cuando la lata es pequeña o unir es costoso, h/r tiene que ser apreciablemente mayor.

5. Nuestro análisis hace ver que las latas grandes deben de ser casi cuadradas y las pequeñas, altas y delgadas. Eche una mirada a las formas relativas de las latas en un supermercado. ¿Nuestra conclusión suele ser cierta en la práctica? ¿Hay excepciones? ¿Puede sugerir las razones por las que las latas pequeñas no siempre son altas y delgadas?

4.8 Aplicaciones a la economía

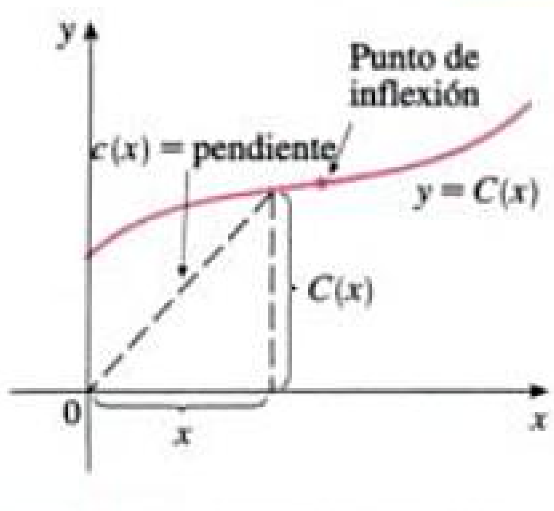


FIGURA 1 Función de costo

En la sección 3.3 introdujimos la idea de costo marginal. Recuerde que si $C(x)$ —la **función de costo**— es el costo de producir x unidades de cierto producto, entonces el **costo marginal** es la razón de cambio de C respecto de x. En otras palabras, la función de costo marginal es la derivada, $C'(x)$, de la función de costo.

En la figura 1 se muestra la gráfica de una función típica de costo. El costo marginal $C'(x)$ es la pendiente de la tangente a la curva de costo en $(x, C(x))$. Advierta que la curva del costo primero es cóncava hacia abajo (el costo marginal es decreciente), en virtud de los aspectos económicos de la escala (el uso más eficiente de los costos fijos de la producción). Pero llega un momento en que se tiene un punto de inflexión y la curva del costo se vuelve cóncava hacia arriba (el costo marginal crece), quizá debido a los costos de tiempo extra o ineficiencias de una operación a gran escala.

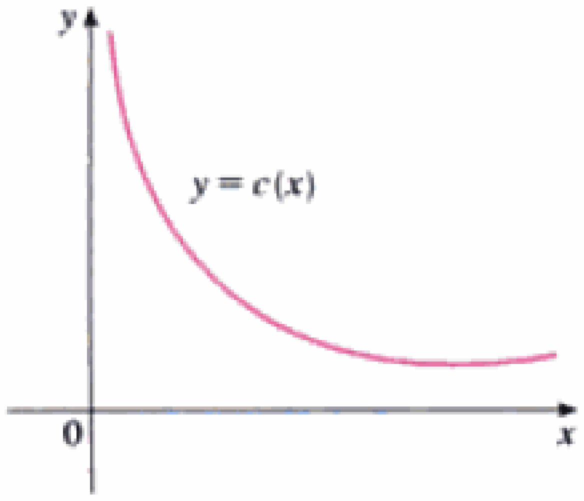


FIGURA 2
Función de costo promedio

La **función de costo promedio**

$$\boxed{1} \qquad c(x) = \frac{C(x)}{x}$$

representa el costo por unidad, cuando se producen x unidades. En la figura 2 esquematizamos una función típica de costo promedio, al observar que $C(x)/x$ es la pendiente de la recta que une el origen con el punto $(x, C(x))$ en la figura 1. Parece que habrá un mínimo absoluto. Para hallarlo, localizamos el punto crítico de c aplicando la regla del cociente para derivar la ecuación 1:

$$c'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

Ahora $c'(x) = 0$ cuando $xC'(x) - C(x) = 0$ y esto da

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x)$$

Por lo tanto:

> Si el costo promedio es un mínimo, entonces
> costo marginal = costo promedio

Este principio es plausible porque si el costo marginal es menor que el costo promedio, entonces debemos producir más y así disminuye el costo promedio. De manera análoga, si el costo marginal es mayor que el costo promedio, tenemos que producir menos para bajar el costo promedio

□ Véase el ejemplo 8 de la sección 3.3 en relación con una explicación de por qué resulta razonable modelar una función de costo por un polinomio.

EJEMPLO 1 □ Una compañía estima que el costo (en dólares) para producir x artículos es $C(x) = 2{,}600 + 2x + 0.001x^2$.
(a) Encuentre el costo, el costo promedio y el costo marginal para producir 1,000, 2,000 y 3,000 artículos.
(b) ¿A cuál nivel de producción el costo promedio será el más bajo y cuál es este costo promedio mínimo?

SOLUCIÓN
(a) La función de costo promedio es

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2{,}600}{x} + 2 + 0.001x$$

La función de costo marginal es

$$C'(x) = 2 + 0.002x$$

Usamos estas expresiones para llenar la siguiente tabla, dando el costo, el costo promedio y el costo marginal (en dólares, o en dólares por artículo, redondeados hasta el centavo más cercano).

x	$C(x)$	$c(x)$	$C'(x)$
1,000	5,600.00	5.60	4.00
2,000	10,600.00	5.30	6.00
3,000	17,600.00	5.87	8.00

(b) Para minimizar el costo promedio, debemos tener

$$\text{costo marginal} = \text{costo promedio}$$

$$C'(x) = c(x)$$

$$2 + 0.002x = \frac{2,600}{x} + 2 + 0.001x$$

▢ En la figura 3 se muestran las gráficas de la función de costo marginal, C' y de la función de costo promedio, c, del ejemplo 1. Advierta que c tiene su valor mínimo cuando las dos gráficas se cruzan.

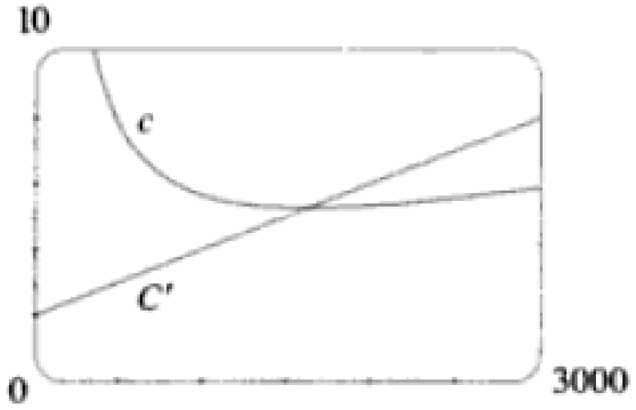


FIGURA 3

Esta ecuación se simplifica a

$$0.001x = \frac{2,600}{x}$$

así $$x^2 = \frac{2,600}{0.001} = 2,600,000$$

y $$x = \sqrt{2,600,000} \approx 1,612$$

Para ver que este nivel de producción da un mínimo, observamos que $c''(x) = 5,200/x^3 > 0$, de modo que c es cóncava hacia arriba sobre todo su dominio. El costo promedio mínimo es

$$c(1,612) = \frac{2,600}{1,612} + 2 + 0.001(1,612) = \$5.22/\text{artículos}$$ ▢

Consideremos ahora el mercadeo. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la compañía carga si vende x unidades. Entonces p se llama **función de demanda** (o **función de precio**) y cabe esperar que sea una función decreciente de x. Si se venden x unidades y el precio por unidad es $p(x)$, entonces el ingreso total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se llama **función de ingreso** (o **función de ventas**). La derivada R' de la función de ingreso se denomina **función de ingreso marginal** y es la razón de cambio del ingreso con respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P es la **función de utilidad**. La **función de utilidad marginal** es P', la derivada de la función de utilidad. Para maximizar la utilidad, buscamos los números críticos de P; es decir, los números donde la utilidad marginal es 0. Pero si

$$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$$

entonces $$R'(x) = C'(x)$$

Por lo tanto:

Si la utilidad es un máximo, entonces ingreso marginal = costo marginal

Para garantizar que esta condición dé un máximo, podríamos aplicar la prueba de la segunda derivada. Observe que

$$P''(x) = R''(x) - C''(x) < 0$$

cuando $$R''(x) < C''(x)$$

y esta condición expresa que la razón de incremento del ingreso marginal es menor que la razón de incremento del costo marginal. Por tanto, la utilidad será un máximo cuando

$$R'(x) = C'(x) \qquad \text{y} \qquad R''(x) < C''(x)$$

EJEMPLO 2 Determine el nivel de producción que maximizará la utilidad para una compañía con funciones de costo y de demanda

$$C(x) = 84 + 1.26x - 0.01x^2 + 0.00007x^3 \qquad \text{y} \qquad p(x) = 3.5 - 0.01x$$

SOLUCIÓN La función de ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 3.5x - 0.01x^2$$

de modo que la función de ingreso marginal es

$$R'(x) = 3.5 - 0.02x$$

y la función de costo marginal es

$$C'(x) = 1.26 - 0.02x + 0.00021x^2$$

De este modo, el ingreso marginal es igual al costo marginal cuando

$$3.5 - 0.02x = 1.26 - 0.02x + 0.00021x^2$$

Al resolver, se obtiene

$$x = \sqrt{\frac{2.24}{0.00021}} \approx 103$$

Para comprobar que esto da un máximo, calculamos las segundas derivadas:

$$R''(x) = -0.02 \qquad C''(x) = -0.02 + 0.00042x$$

Por consiguiente, $R''(x) < C''(x)$ para toda $x > 0$. De esta forma, un nivel de producción de 103 unidades maximiza la utilidad. □

□ En la figura 4 se muestran las gráficas de las funciones de ingreso y de costo del ejemplo 2. La compañía obtiene una utilidad cuando $R > C$ y esa utilidad es un máximo cuando $x \approx 103$. Advierta que las curvas tienen tangentes paralelas en este nivel de producción porque el ingreso marginal es igual al costo marginal.

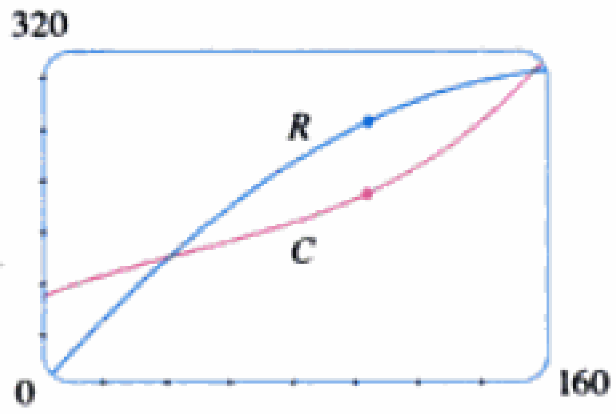


FIGURA 4

EJEMPLO 3 □ Una tienda ha estado vendiendo 200 reproductoras de discos compactos a la semana, a 350 dólares cada una. Una investigación de mercado indica que por cada 10 dólares de descuento que se ofrezca a los compradores, el número de aparatos vendidos se incrementará en 20 a la semana. Encuentre las funciones de demanda y de ingreso. ¿Cuán grande debe ser la rebaja para maximizar el ingreso?

SOLUCIÓN Si x denota las reproductoras vendidas a la semana, entonces el incremento semanal en las ventas es $x - 200$. Por cada incremento de 20 reproductoras vendidas, el precio disminuye 10 dólares. De modo que por cada reproductora adicional vendida, la disminución en el precio es $\frac{1}{20} \times 10$ y la función de demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función de ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

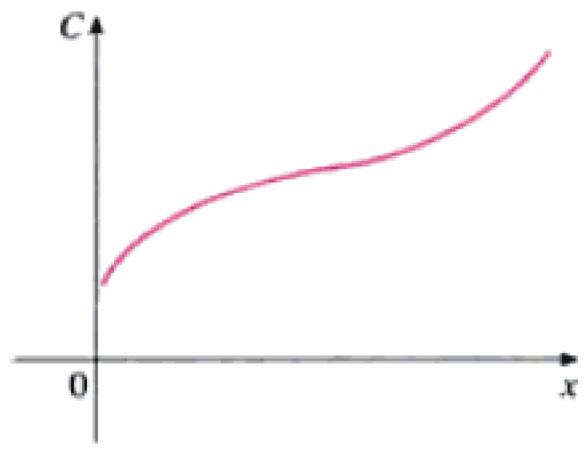
Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Por la prueba de la primera derivada (o sencillamente al observar que la gráfica de R es una parábola que se abre hacia abajo), este valor de x da un máximo absoluto. El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

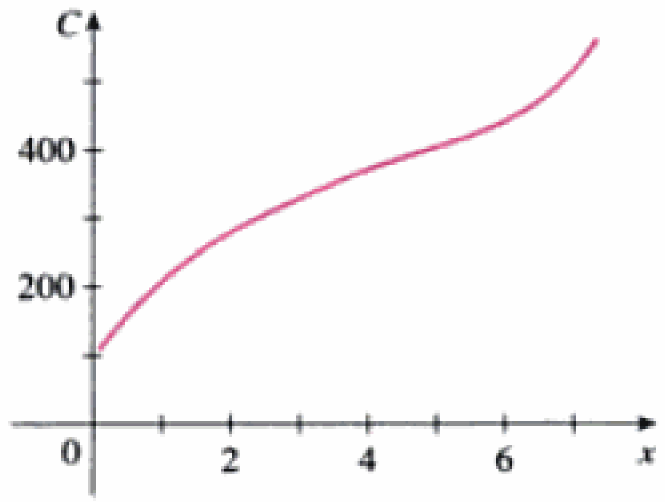
y el descuento es de $350 - 225 = 125$. Por lo tanto, para maximizar el ingreso la tienda debe ofrecer un descuento de 125 dólares. □

4.8 Ejercicios

1. Un fabricante mantiene registros precisos del costo $C(x)$ de producción de x artículos y genera la gráfica de la función de costo que se muestra en la figura.
   (a) Explique por qué $C(0) > 0$.
   (b) ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?
   (c) Use la gráfica de C para graficar la función de costo marginal.



2. Se da la gráfica de una función de costo C.
   (a) Dibuje con cuidado la función de costo marginal.
   (b) Aplique la interpretación geométrica del costo promedio $c(x)$ como pendiente (Fig. 1) para dibujar con cuidado la función de costo promedio.
   (c) Estime el valor de x para el cual $c(x)$ es un mínimo. ¿Cómo se relacionan el costo promedio y el costo marginal en ese valor x?

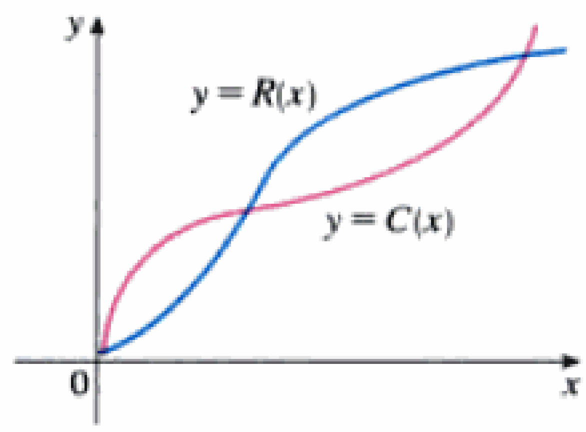


3. El costo promedio de producir x unidades de un artículo es

$$c(x) = 21.4 - 0.002x$$

Encuentre el costo marginal a un nivel de producción de 1,000 unidades. En términos prácticos, ¿cuál es el significado de su respuesta?

4. En la figura se muestran las gráficas de las funciones de costo y de ingreso manifestadas por un fabricante.
   (a) En la gráfica identifique el valor de x para el que se maximiza la utilidad.
   (b) Grafique la función de utilidad.
   (c) Grafique la función de utilidad marginal.



5–10 □ Para cada una de las funciones de costo que se dan (en dólares) encuentre: (a) el costo, el costo promedio y el costo marginal a un nivel de producción de 1,000 unidades; (b) el nivel de producción que minimizará el costo promedio, y (c) el costo promedio mínimo.

5. $C(x) = 40{,}000 + 300x + x^2$

6. $C(x) = 25{,}000 + 120x + 0.1x^2$

7. $C(x) = 45 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{560}$

8. $C(x) = 2{,}000 + 10x + 0.001x^3$

9. $C(x) = 2\sqrt{x} + x^2/8{,}000$

10. $C(x) = 1{,}000 + 96x + 2x^{3/2}$

11–12 □ Se da una función de costo.

(a) Encuentre las funciones de costo promedio y de costo marginal.
(b) Use las gráficas de las funciones del inciso (a) para estimar el nivel de producción que minimizará el costo promedio.
(c) Aplique el cálculo para hallar el costo promedio mínimo.
(d) Encuentre el valor mínimo del costo marginal.

11. $C(x) = 3{,}700 + 5x - 0.04x^2 + 0.0003x^3$

12. $C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$

13–16 □ Para las funciones de costo y demanda dadas, encuentre el nivel de producción que maximizará la utilidad.

13. $C(x) = 680 + 4x + 0.01x^2, \quad p(x) = 12$

14. $C(x) = 680 + 4x + 0.01x^2, \quad p(x) = 12 - x/500$

15. $C(x) = 1{,}450 + 36x - x^2 + 0.001x^3, \quad p(x) = 60 - 0.01x$

16. $C(x) = 10{,}000 + 28x - 0.01x^2 + 0.002x^3,$
$p(x) = 90 - 0.02x$

17–18 □ Halle el nivel de producción en el cual la función de costo marginal empieza a crecer.

17. $C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 6x + 900$

18. $C(x) = 0.0002x^3 - 0.25x^2 + 4x + 1{,}500$

19. El costo, en dólares, para producir x yardas de cierta tela es

$$C(x) = 1{,}200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

y la compañía encuentra que si vende x yardas puede cargar

$$p(x) = 29 - 0.00021x$$

dólares por yarda para la tela.

(a) Grafique las funciones costo y de ingreso y úselas para estimar el nivel de producción correspondiente a la utilidad máxima.
(b) Aplique el cálculo para hallar el nivel de producción correspondiente a la utilidad máxima.

20. Un fabricante de aviones desea determinar el mejor precio de venta de un nuevo avión. La compañía estima que el costo inicial para diseñar el avión y montar las fábricas en que se va a construir será de 500 millones de dólares y que el costo adicional para producir cada unidad se puede modelar con la función $m(x) = 20x - 5x^{3/4} + 0.01x^2$, donde x es la cantidad de aviones producidos y m es el costo de fabricación, en millones de dólares. La compañía estima que si carga un precio p (en millones de dólares) por unidad, podrá vender $x(p) = 320 - 7.7p$ aviones.

(a) Encuentre las funciones de costo, de demanda y de ingreso.
(b) Halle el nivel de producción y el precio de venta asociado del avión que maximice la utilidad.

21. Un equipo de beisbol juega en un estadio con una capacidad de 55,000 espectadores. Con precios de los boletos de 10 dólares, la asistencia promedio fue de 27,000. Cuando el precio bajó hasta 8 dólares, la asistencia promedio subió hasta 33,000.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.
(b) ¿A qué precio deben fijarse los boletos para maximizar el ingreso?

22. Durante los meses de verano, Miguel hace y vende collares en la playa. El verano anterior los vendió a 10 dólares cada uno y sus ventas promediaron 20 unidades por día. Cuando aumentó el precio 1 dólar, encontró que perdió dos ventas diarias.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.
(b) Si el material para cada collar le cuesta 6 dólares a Miguel, ¿cuál debe ser el precio de venta para que maximice su utilidad?

23. Un fabricante ha vendido 1,000 aparatos de televisión por semana a 450 dólares cada uno. Una investigación de mercado indica que por cada diez dólares de descuento que ofrezca, el número de aparatos se incrementará en 100 por semana.

(a) Encuentre la función de demanda.
(b) ¿Cuán grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía para maximizar su ingreso?
(c) Si la función de costo semanal es $C(x) = 68{,}000 + 150x$, ¿cuál tiene que ser la magnitud del descuento para maximizar la utilidad?

24. Por experiencia, el gerente de un complejo de apartamentos de 100 unidades sabe que se ocuparán todas si la renta es de 400 dólares al mes. Una investigación del mercado sugiere que, en promedio, quedará una unidad adicional vacía por cada incremento de 5 dólares en la renta. ¿Cuánto debe cargar el gerente por renta para maximizar el ingreso?

4.9 Método de Newton

Suponga que un distribuidor de automóviles le ofrece uno en 18,000 dólares al contado o en pagos de 375 dólares al mes durante cinco años. A usted le gustaría saber qué tasa de interés le está cargando el distribuidor. Para hallar la respuesta, tiene que resolver la ecuación

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0 \qquad \boxed{1}$$

(Los detalles se explican en el Ejer. 39.) ¿Cómo podría resolver una ecuación de este tipo?

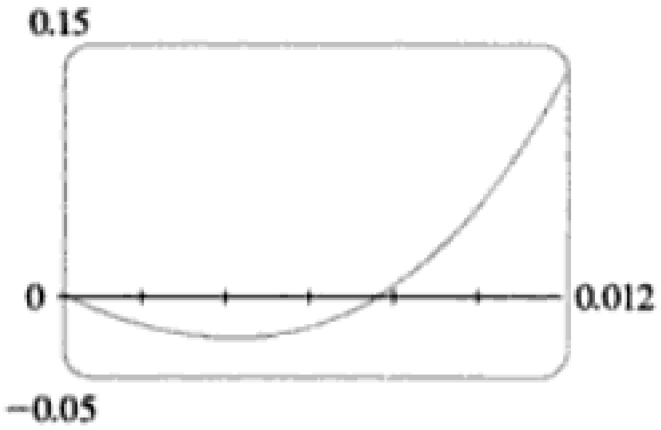


FIGURA 1

□ Intente resolver la ecuación 1 con el buscador numérico de raíces de su calculadora o computadora. Algunas máquinas no pueden resolverla. Otras tienen éxito, pero requieren que se les especifique un punto de partida para la búsqueda.

En el caso de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, existe una fórmula bien conocida para las raíces. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grados también existen fórmulas para las raíces, pero son en extremo complicadas. Si f es un polinomio de grado 5 o superior, no existe una fórmula de ese tipo (véase la nota de la pág. 228). Del mismo modo, no hay una fórmula que permita hallar las raíces exactas de una ecuación trascendente como $\cos x = x$.

Podemos hallar una solución *aproximada* para la ecuación 1 graficando el primer miembro de la misma. Producimos la gráfica de la figura 1 con un dispositivo graficador después de experimentar con las pantallas.

Vemos que además de la solución $x = 0$ que no nos interesa, hay una solución entre 0.007 y 0.008. Una amplificación muestra que la raíz es poco más o menos 0.0076. Si necesitamos más exactitud, hacemos varias amplificaciones, pero esto se vuelve tedioso. Una opción más rápida es usar un buscador numérico de raíces en una calculadora o en un sistema algebraico para computadoras. Si así lo hacemos, encontramos que la raíz, correcta hasta nueve decimales, es 0.007628603.

¿Cómo trabajan estos buscadores numéricos de raíces? Se aplican diversos métodos, pero en la mayor parte se usa el **método de Newton** o **método de Newton-Raphson**. Explicaremos cómo funciona este método, en parte para mostrar qué sucede en el interior de la calculadora o computadora y, en parte, como una aplicación de la idea de aproximación lineal.

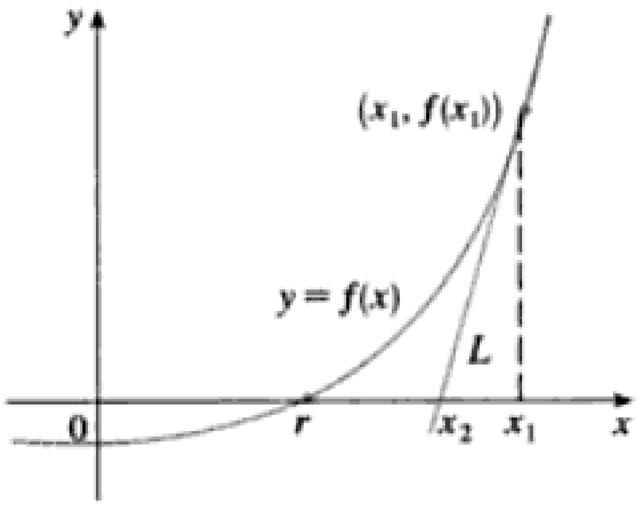


FIGURA 2

En la figura 2 se muestra la geometría que se encuentra detrás del método de Newton, donde se ha rotulado con r a la raíz que intentamos hallar. Empezamos con una primera aproximación x_1, la cual se obtiene por tanteos, o a partir de un bosquejo aproximado de la gráfica de f o a partir de la gráfica de f generada por una computadora. Considere la recta tangente L a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y vea la intersección de L con el eje x, marcada como x_2. La idea tras el método de Newton es que la recta tangente está cercana a la curva y, por consiguiente, su intersección con el eje x, x_2, está cerca de la intersección de la curva con el eje x (a saber, la raíz r que buscamos). Debido a que la tangente es una recta, podemos hallar con facilidad su intersección con el eje x.

Para encontrar una fórmula para x_2 en términos de x_1, usamos el hecho de que la pendiente de L es $f'(x_1)$, de modo que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Puesto que la intersección de L con el eje x es x_2, hacemos $y = 0$ y obtenemos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, podemos resolver esta ecuación para x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Usamos x_2 como una segunda aproximación a r.

Enseguida, repetimos este procedimiento con x_1 reemplazada por x_2, usando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Ésta da una tercera aproximación:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

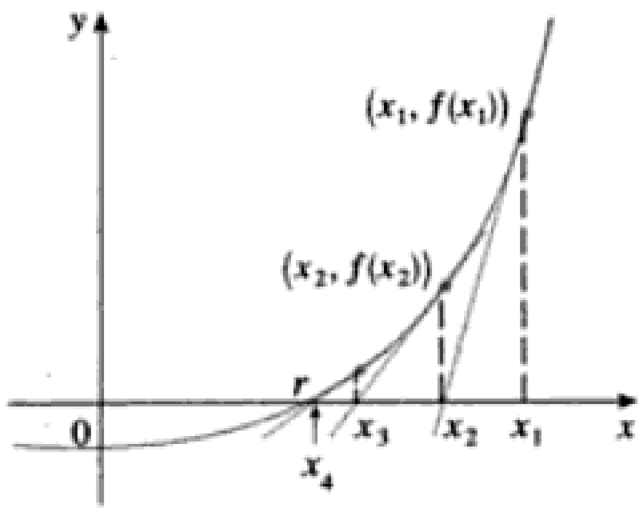


FIGURA 3

Si seguimos repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, como se ve en la figura 3. En general, si la n-ésima aproximación es x_n y $f'(x_n) \neq 0$, entonces la siguiente aproximación se expresa con

2 $$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

□ Las sucesiones se presentaron con brevedad en *Presentación preliminar del cálculo*, en la página 6. En la sección 11.1 se da un análisis más a fondo.

Si los números x_n se aproximan cada vez más a r cuando n se hace grande, entonces decimos que la sucesión converge a r y escribimos

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

Aun cuando la sucesión de aproximaciones sucesivas converge a la raíz deseada, para funciones del tipo ilustrado en la figura 3 en ciertas circunstancias la sucesión puede no converger. Por ejemplo, considere la situación que se ilustra en la figura 4. Puede ver que x_2 es una aproximación más deficiente que x_1. Quizás éste sea el caso cuando $f'(x_1)$ esté cercana a 0. Incluso podría suceder que una aproximación (como x_3 de la Fig. 4) caiga fuera del dominio de f. Entonces el método de Newton falla y debe elegirse una mejor aproximación inicial x_1. Véase los ejercicios 29–32 en relación con ejemplos específicos en que el método de Newton funciona con mucha lentitud o no funciona en absoluto.

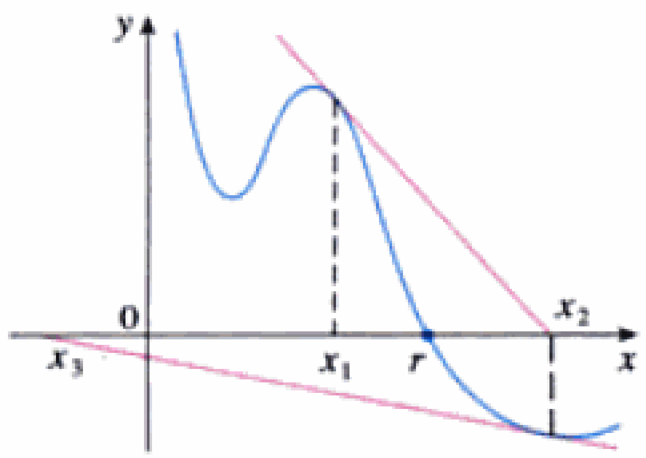


FIGURA 4

EJEMPLO 1 Empiece con $x_1 = 2$ y encuentre la tercera aproximación x_3 para la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN Apliquemos el método de Newton con

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

Newton utilizó esta ecuación para ilustrar su método y eligió $x_1 = 2$ después de experimentar un tanto porque $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 16$. La ecuación 2 queda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Con $n = 1$, tenemos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

Enseguida, con $n = 2$ obtenemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2}$$

$$= 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Resulta que esta tercera aproximación, $x_3 \approx 2.0946$, es exacta hasta cuatro decimales. □

Suponga que queremos lograr una exactitud dada, digamos hasta ocho decimales, aplicando el método de Newton. ¿Cómo sabremos cuándo detenernos? La regla empírica que se usa en general es que podemos parar cuando las aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} concuerdan hasta los ocho decimales.

Advierta que el procedimiento al pasar de n hacia $n + 1$ es el mismo para todos los valores de n (se llama proceso *iterativo*). Esto significa que el método de Newton es muy conveniente para una calculadora programable o una computadora.

EJEMPLO 2 □ Aplique el método de Newton para hallar $\sqrt[6]{2}$ hasta ocho decimales.

SOLUCIÓN En primer lugar, observemos que encontrar $\sqrt[6]{2}$ equivale a hallar la raíz positiva de la ecuación

$$x^6 - 2 = 0$$

por consiguiente, tomemos $f(x) = x^6 - 2$. Entonces $f'(x) = 6x^5$ y la fórmula 2 (método de Newton) queda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Si elegimos $x_1 = 1$ como la aproximación inicial, obtenemos

$$x_2 \approx 1.16666667$$
$$x_3 \approx 1.12644368$$
$$x_4 \approx 1.12249707$$
$$x_5 \approx 1.12246205$$
$$x_6 \approx 1.12246205$$

Dado que x_5 y x_6 concuerdan hasta los ocho decimales, concluimos que

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

hasta ocho decimales. □

EJEMPLO 3 □ Encuentre la raíz de la ecuación $\cos x = x$ correcta hasta seis decimales.

SOLUCIÓN Volvemos a escribir la ecuación en la forma estándar:

$$\cos x - x = 0$$

Por lo tanto, hacemos $f(x) = \cos x - x$. Entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$, de modo que la fórmula 2 queda

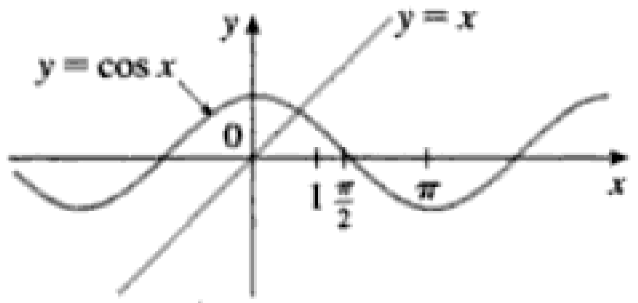


FIGURA 5

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\operatorname{sen} x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\operatorname{sen} x_n + 1}$$

Con el fin de empezar con un valor adecuado de x_1, grafiquemos $y = \cos x$ y $y = x$ en la figura 5. Parece que se cruzan en un punto cuya coordenada x es un poco inferior a 1, de modo que tomemos $x_1 = 1$ como una aproximación inicial conveniente. Entonces

$$x_2 \approx 0.75036387$$
$$x_3 \approx 0.73911289$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$
$$x_5 \approx 0.73908513$$

Dado que x_4 y x_5 concuerdan hasta seis decimales (ocho, de hecho), concluimos que la raíz de la ecuación, correcta hasta seis decimales, es 0.739085. □

En lugar de usar el bosquejo de la figura 5 para obtener una aproximación de partida para el método de Newton del ejemplo 3, pudimos usar la gráfica más exacta que pro-

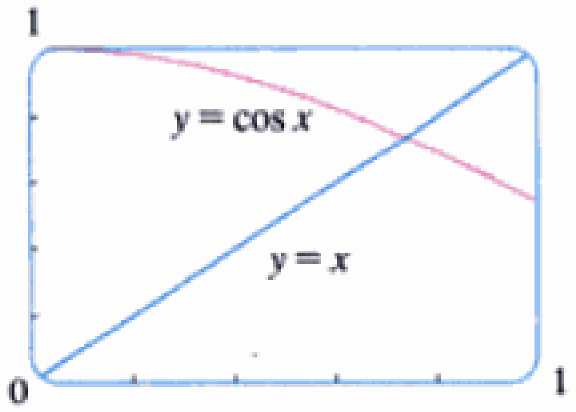


FIGURA 6

porciona una calculadora o una computadora. La figura 6 sugiere que utilicemos $x_1 = 0.75$ como la aproximación inicial. Entonces el método de Newton da

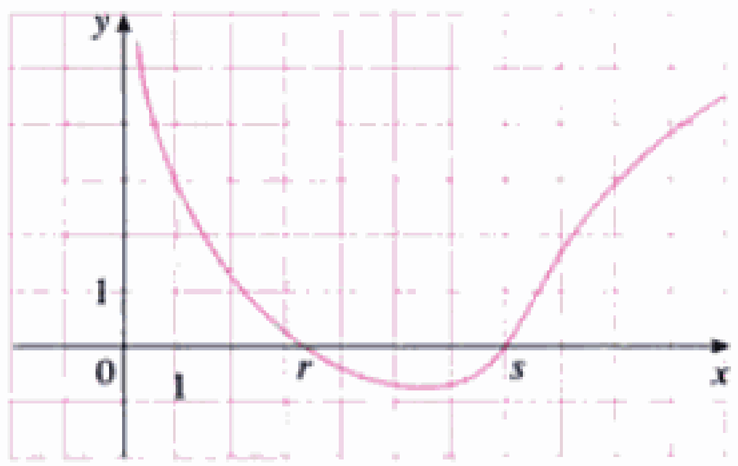
$$x_2 \approx 0.73911114$$
$$x_3 \approx 0.73908513$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$

y así obtenemos la misma respuesta que antes, pero con un paso menos.

Se preguntará porque nos ocupamos del método de Newton si existen los aparatos graficadores. ¿Qué no es más fácil hacer amplificaciones sucesivas y encontrar las raíces como se hizo en la sección 1.4? Si sólo se requieren uno o dos decimales de exactitud entonces sí que es inapropiado el método de Newton y basta con un aparato graficador. Pero si se necesitan seis y ocho decimales, entonces la repetición de las amplificaciones resulta cansada. Es de constumbre más rápido y eficiente usar una computadora y el método de Newton en "tándem", con el aparato graficador para el inicio y el método de Newton para terminar.

4.9 Ejercicios

1. En la figura se muestra la gráfica de una función f. Suponga que se usa el método de Newton para obtener una aproximación de la raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, con aproximación inicial $x_1 = 1$, Dibuje las rectas tangentes que se usan para hallar x_2 y x_3, y estime los valores numéricos de x_2 y x_3.

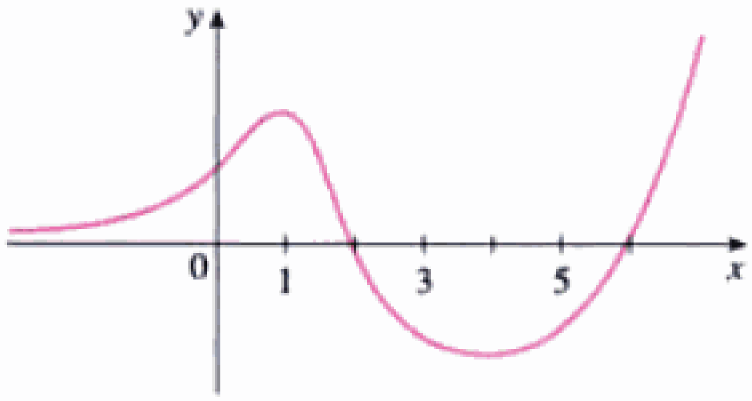


2. Siga las instrucciones dadas para el ejercicio 1, pero use $x_1 = 9$ como la aproximación inicial para hallar la raíz s.

3. Suponga que la recta $y = 5x - 4$ es tangente a la curva $y = f(x)$, cuando $x = 3$. Con el método de Newton para localizar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y una aproximación inicial de $x_1 = 3$, encuentre la segunda aproximación x_2.

4. Para cada aproximación inicial, determine gráficamente qué sucede si se aplica el método de Newton para la función cuya gráfica se muestra.

(a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$
(d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$



5–8 □ Use el método de Newton con la aproximación inicial dada, x_1, para hallar x_3, la tercera aproximación para la raíz de la ecuación dada. (Dé sus respuestas hasta cuatro decimales.)

5. $x^3 + x + 1 = 0, \quad x_1 = -1$

6. $x^3 - x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = 1$

7. $x^4 - 20 = 0, \quad x_1 = 2$

8. $x^7 - 100 = 0, \quad x_1 = 2$

9–10 □ Utilice el método de Newton a fin de hallar una aproximación para el número dado, correcta hasta ocho decimales.

9. $\sqrt[3]{30}$

10. $\sqrt[7]{1000}$

11–14 □ Use el método de Newton para encontrar todas las raíces de la ecuación, correctamente hasta el sexto decimal.

11. La raíz de $2x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ en el intervalo $[2, 3]$

12. La raíz de $x^4 + x - 4 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$

13. La raíz positiva de $2 \operatorname{sen} x = x$

14. La raíz de $\tan x = x$ en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$

15–20 □ Use el método de Newton para aproximar: la raíz indicada de la ecuación correctamente hasta el sexto decimal.

15. $x^3 = 4x - 1$

16. $e^x = 3 - 2x$

17. $\tan^{-1}x = 1 - x$

18. $\sqrt{x + 3} = x^2$

19. $2 \cos x = 2 - x$

20. $\operatorname{sen} \pi x = x$

21–26 □ Con el método de Newton halle todas las raíces de la ecuación, correctas hasta ocho decimales. Empiece por dibujar una gráfica con el fin de hallar las aproximaciones iniciales.

21. $x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x + 3 = 0$

22. $x^2(4 - x^2) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

23. $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2 \operatorname{sen} \pi x$

24. $\cos(x^2 + 1) = x^3$

25. $e^{-x^2} = x^2 - x$ **26.** $\ln(4 - x^2) = x$

27. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $x^2 - a = 0$ a fin de deducir el siguiente algoritmo para la raíz cuadrada (utilizado por los antiguos babilonios para calcular $\sqrt{a}$):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Utilice el resultado del inciso (a) para calcular $\sqrt{1{,}000}$ correcta hasta seis decimales.

28. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $1/x - a = 0$ para obtener el algoritmo siguiente del recíproco:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Este algoritmo permite que una computadora encuentre recíprocos sin dividir en realidad.)

(b) Use el resultado del inciso (a) para calcular 1/1.6984, correcto hasta seis decimales.

29. Explique por qué el método de Newton no funciona para hallar la raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 6 = 0$ si se elige que la aproximación inicial sea $x_1 = 1$.

30. (a) Use el método de Newton, con $x_1 = 1$, para hallar la raíz de la ecuación $x^3 - x = 1$, correcta hasta seis decimales.

(b) Resuelva la ecuación del inciso (a) con $x_1 = 0.6$ como la aproximación inicial.

(c) Resuelva la ecuación del inciso (a), con $x_1 = 0.57$. (Necesita una calculadora programable para esta parte.)

(d) Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - x - 1$ y de sus rectas tangentes en $x_1 = 1$, 0.6 y 0.57 para explicar por qué el método de Newton es muy sensible al valor de la aproximación inicial.

31. Explique por qué falla el método de Newton cuando se aplica a la ecuación $\sqrt[3]{x} = 0$ con cualquier aproximación inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre su explicación con un esquema.

32. Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

entonces la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = 0$. Explique por qué falla el método de Newton independientemente del valor inicial x, que se utilice. Ilustre su explicación con un dibujo.

33. (a) Use el método de Newton para hallar los puntos críticos de la función $f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 6x^2 + 24x$, con tres decimales correctos.

(b) Halle el valor mínimo absoluto de la función

$$f(x) = 3x^4 - 28x^3 + 6x^2 + 24x \qquad -1 \leq x \leq 7$$

con dos decimales correctos.

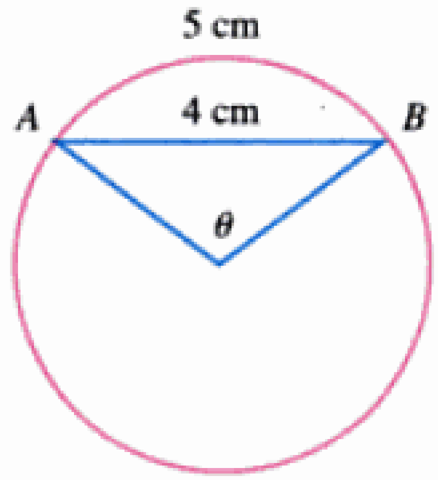
34. Aplique el método de Newton para hallar el valor mínimo absoluto de la función $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$, correcto hasta cuatro decimales.

35. Con el método de Newton halle las coordenadas del punto de inflexión de la curva $y = e^{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi$, correctas hasta cuatro decimales.

36. De la infinidad de rectas que son tangentes a la curva $y = -\operatorname{sen} x$ y pasan por el origen, una tiene la pendiente más grande. Use el método de Newton para hallar la pendiente de esa recta, correcta hasta seis decimales.

37. Un silo consiste en una sección principal cilíndrica, con altura de 30 pies y un techo hemisférico. Con el fin de lograr un volumen total de 15,000 pies^3 (incluyendo la parte interior de la sección del techo), ¿cuál tendría que ser el radio del silo?

38. En la figura, la longitud de la cuerda AB es de 4 cm y la del arco AB es de 5 cm. Encuentre el ángulo central θ, en radianes, correcto hasta cuatro decimales. A continuación, dé la respuesta hasta el grado más cercano.



39. Un distribuidor de automóviles vende uno nuevo en 18,000 dólares al contado. También ofrece venderlo en pagos de 375 dólares al mes, durante cinco años. ¿Qué tasa de interés mensual está cargando?

Para resolver este problema, use la fórmula para el valor actual A de una anualidad que consta de n pagos iguales de tamaño R, con la tasa de interés i por el periodo:

$$A = \frac{R}{i}[1 - (1 + i)^{-n}]$$

Si reemplaza i con x, demuestre que

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

Utilice el método de Newton para resolver esta ecuación.

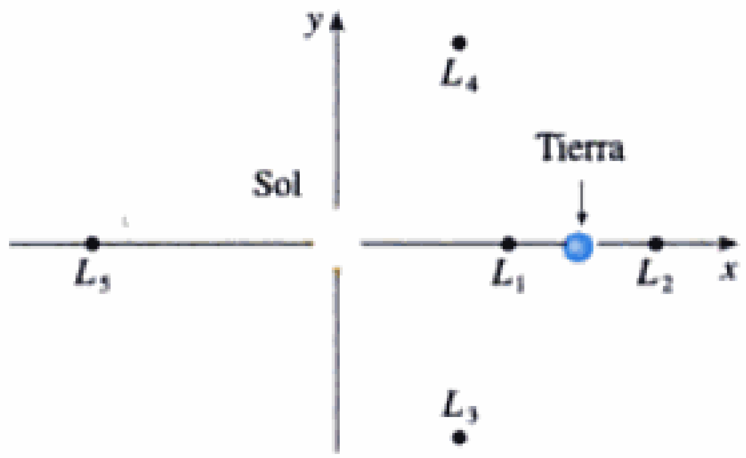
40. En la figura se muestra el Sol ubicado en el origen y la Tierra en el punto (1, 0). (En este caso, la unidad es la distancia entre los centros de la Tierra y el Sol, llamada *unidad astronómica*: 1 UA $\approx$ 1.496×10^8 km). Existen cinco lugares, L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 en este plano de rotación de la Tierra alrededor del Sol donde un satélite permanece inmóvil con respecto a aquélla, debido a que las atracciones gravitacionales de la Tierra y del Sol que actúan sobre el satélite se equilibran. Estos lugares se conocen como *puntos de libración*. (Se ha colocado un satélite para investigación solar en uno de estos puntos de libración.) Si m_1 es la masa del Sol, m_2 la de la Tierra y $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que la abscisa x de L_1 es la raíz única de la ecuación de quinto grado

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2 + 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

y la coordenada x de L_2 es la raíz de la ecuación

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Con el valor $r \approx 3.04042 \times 10^{-6}$, encuentre las posiciones de los puntos de liberación (a) L_1 y (b) L_2.



4.10 Antiderivadas

Un físico que conoce la velocidad de una partícula podría desear conocer su posición en un instante dado. Un ingeniero que puede medir la razón variable a la cual se fuga el agua de un tanque quiere conocer la cantidad que se ha fugado durante cierto periodo. Un biólogo que conoce la razón a la que crece una población de bacterias puede interesarse en deducir el tamaño de la población en algún momento futuro. En cada caso, el problema es hallar una función cuya derivada sea una función conocida. Si existe tal función F, se le denomina una *antiderivada* de f.

Definición Una función F recibe el nombre de **antiderivada** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Sea $f(x) = x^2$, por ejemplo. No es difícil descubrir una antiderivada si se recuerda la regla de la potencia. De hecho, si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, entonces $F'(x) = x^2 = f(x)$. Pero la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ también satisface $G'(x) = x^2$. Así, tanto, F como G son antiderivadas de f. De hecho, cualquier función de la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ donde C es una constante, es una antiderivada f. Se plantea la cuestión: ¿Hay otras?

Para contestar a esta pregunta; recuerde que en la sección 4.2 usamos el teorema del valor medio para probar que si dos funciones tienen idénticas derivadas en todo un intervalo entonces su diferencia debe ser una constante. (Definición 4.2.7) Por tanto, si F y G son dos antiderivadas de f, entonces

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

de modo que $G(x) - F(x) = C$ con C una constante. Esto puede escribirse $G(x) = F(x) + C$ y de aquí el resultado siguiente.

1 Teorema Si F es una antiderivada f en un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f en I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

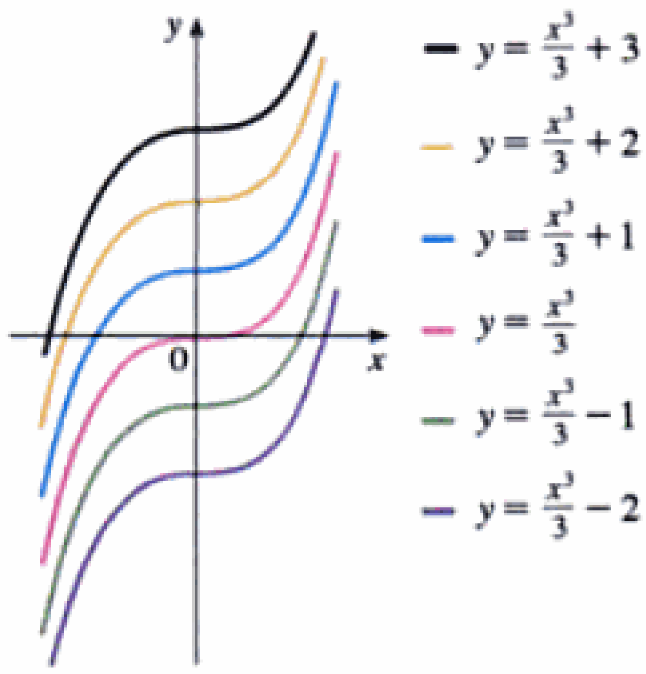


FIGURA 1
Miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = x^2$

De nuevo con la función $f(x) = x^2$, vemos que la antiderivada general de f es $x^3/3 + C$. Al asignar valores específicos a la constante C, obtenemos una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales de una a otra (Fig. 1).

EJEMPLO 1 ▢ Encuentre la antiderivada más general de cada una de las funciones siguientes:
(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$

SOLUCIÓN

(a) Si $F(x) = -\cos x$, entonces $F'(x) = \operatorname{sen} x$, de modo que una antiderivada sen $x - \cos x$. Por el teorema 1, la antiderivada más general es $G(x) = -\cos x + C$.

(b) Con base en lo visto en la sección 3.8, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Por consiguiente, en el intervalo $(0, \infty)$ la antiderivada general de $1/x$ es $\ln x + C$. Asimismo, aprendimos que

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

para toda $x \neq 0$. El teorema 1 entonces afirma que la antiderivada general de $f(x) = 1/x$ es $\ln |x| + C$, en cualquier intervalo que no contenga a 0. En particular, esto es verdadero en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. De manera que la antiderivada general de f es

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(c) Usemos la regla de la potencia para descubrir una antiderivada de x^n. De hecho, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Por tanto, la antiderivada general de $f(x) = x^n$ es

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Esto es válido para $n \geqslant 0$, ya que entonces $f(x) = x^n$ está definida en un intervalo. Si n es negativo (pero $n \neq -1$), sólo es válida en cualquier intervalo que no contenga a 0. ▢

Como en el ejemplo 1, toda fórmula de derivación leída de derecha a izquierda da lugar a una fórmula de antiderivación. En la tabla 2 se listan algunas antiderivadas. Cada fórmula de la tabla es verdadera, puesto que la derivada de la función de la columna de la derecha aparece en la columna izquierda. En particular, en la primera fórmula se afirma que la antiderivada de una constante multiplicada por una función es esa constante multiplicada por la antiderivada de la función. En la segunda se expresa que la antiderivada de una suma es la suma de las antiderivadas. (Usamos la notación $F' = f$, $G' = g$.)

▢ Para obtener la antiderivada más general (en un intervalo) a partir de las particulares de la tabla 2, tenemos que sumar una constante, como en el ejemplo 1.

2 Tabla de fórmulas de antiderivación

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sin x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
$\cos x$	$\sin x$		

EJEMPLO 2 □ Encuentre todas las funciones g tales que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3x^5 + 6\sqrt[4]{x^3}$$

SOLUCIÓN Deseamos encontrar una antiderivada de

$$f(x) = g'(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3x^5 + 6x^{3/4}$$

Al usar las fórmulas de la tabla 2 con el teorema 1, obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= 4(-\cos x) - 3\frac{x^6}{6} + 6\frac{x^{7/4}}{\frac{7}{4}} + C \\ &= -4\cos x - \frac{x^6}{2} + \frac{24}{7}x^{7/4} + C \end{aligned}$$

□

En las aplicaciones del cálculo, es muy común tener una situación como la del ejemplo 2, donde se requiere hallar una función, dado el conocimiento acerca de sus derivadas. Una ecuación que comprende las derivadas de una función se llama **ecuación diferencial**. Éstas se estudian con cierto detalle en el capítulo 9 pero, por el momento, podemos resolver algunas ecuaciones diferenciales elementales. La solución general de una ecuación diferencial contiene una constante arbitraria (o varias constantes arbitrarias), como en el ejemplo 2. Sin embargo, puede haber algunas condiciones adicionales que determinan las constantes y, por lo tanto, especifican de manera única la solución.

□ En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f' del ejemplo 3 y de su antiderivada f. Note que $f'(x) > 0$, de modo que f siempre es creciente. Advierta también que, cuando f' tiene un máximo o un mínimo, f parece que tiene un punto de inflexión. De modo que la gráfica sirve como una comprobación de nuestro cálculo.

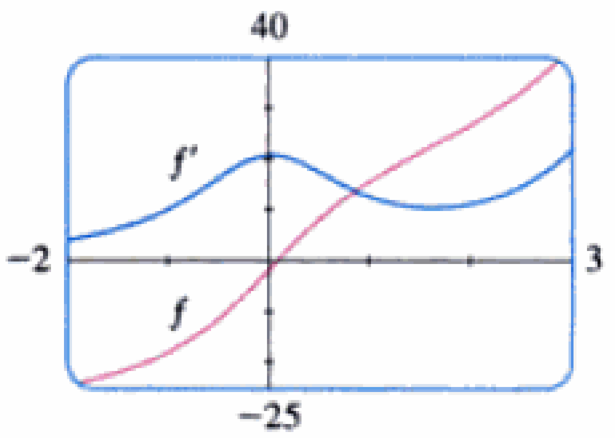


FIGURA 2

EJEMPLO 3 □ Encuentre f si $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ y $f(0) = -2$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

es

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1}x + C$$

Para determinar, C usamos el hecho de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \tan^{-1}0 + C = -2$$

Por consiguiente, $C = -2 - 1 = -3$, de modo que la solución particular es

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1}x - 3$$

□

EJEMPLO 4 □ Encuentre f si $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$, y $f(1) = 1$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ es

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Si usamos una vez más las reglas de antiderivación, encontramos que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C y D utilizamos las condiciones dadas de que $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$. Puesto que $f(0) = 0 + D = 4$, tenemos $D = 4$. Como

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

resulta $C = -3$. Por lo tanto, la función requerida es

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$

Geometría de las antiderivadas

Si se nos proporciona la gráfica de una función f, parece razonable que podamos trazar la gráfica de la antiderivada F. Supongamos que el dato es $F(0) = 1$. Entonces tenemos un lugar en dónde comenzar, el punto $(0, 1)$, y la dirección en que debemos mover el lápiz, en cada punto, está dada por la derivada $F'(x) = f(x)$. En el ejemplo siguiente aplicaremos los principios que vimos en este capítulo para demostrar cómo graficar F aun sin tener una fórmula de f. Éste es el caso, por ejemplo, cuando se determina $f(x)$ con datos experimentales.

EJEMPLO 5 En la figura 3 se ilustra la gráfica de una función f. Trace una gráfica aproximada de una antiderivada F, si $F(0) = 2$.

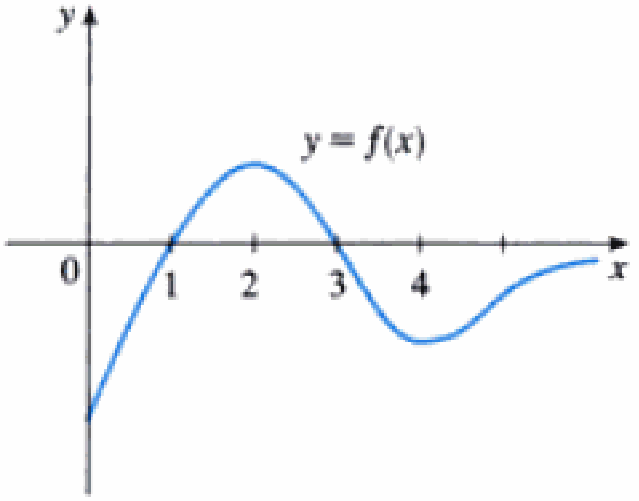


FIGURA 3

SOLUCIÓN Nos guía el hecho de que la pendiente de $y = F(x)$ es $f(x)$. Comenzamos en el punto $(0, 2)$ y trazamos F como función inicialmente decreciente porque $f(x)$ es negativa cuando $0 < x < 1$. Notará que $f(1) = f(3) = 0$, de modo que F tiene tangentes horizontales cuando $x = 1$ y $x = 3$. Cuando $1 < x < 3$, $f(x)$ es positiva, y F es creciente. F tiene un mínimo local cuando $x = 1$ y un máximo local cuando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ es negativa, de modo que F es decreciente en $(3, \infty)$. Ya que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, la gráfica de F será cada vez más "plana" cuando $x \to \infty$. También observará que $F''(x) = f'(x)$ cambia de positivo a negativo cuando $x = 2$ y de negativo a positivo en $x = 4$, así que F tiene puntos de inflexión cuando $x = 2$ y $x = 4$. Con esta información bosquejamos la gráfica de la antiderivada (Fig. 4).

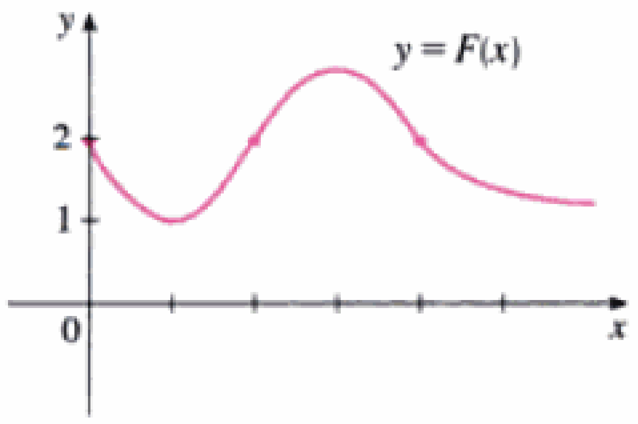


FIGURA 4

EJEMPLO 6 Si $f(x) = \sqrt{1 + x^3} - x$, trace la gráfica de la antiderivada F que satisface la condición inicial $F(-1) = 0$.

SOLUCIÓN Podríamos pasar todo el día intentando deducir una fórmula de la antiderivada de f sin éxito. Una segunda posibilidad sería trazar primero la gráfica de f y después usarla en la graficación de F como en el Ej. 5. Esto sí daría resultado pero, en su lugar, crearemos una gráfica más exacta mediante un **campo de direcciones**.

Como $f(0) = 1$, la gráfica de F tiene pendiente 1 cuando $x = 0$; por consiguiente, trazamos varios segmentos de tangente, con pendiente 1, todos centrados en $x = 0$. Hacemos lo mismo para otros valores de x y resulta lo que vemos en la figura 5. Se llama campo de direcciones, porque cada segmento indica la dirección por donde pasa la curva $y = F(x)$ en ese punto.

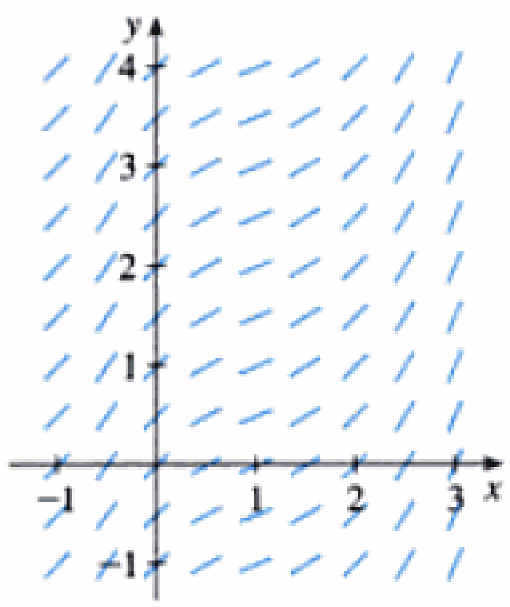


FIGURA 5
Campo de direcciones $f(x) = \sqrt{1 + x^3} - x$. La pendiente de los segmentos de recta arriba de $x = a$ es $f(a)$.

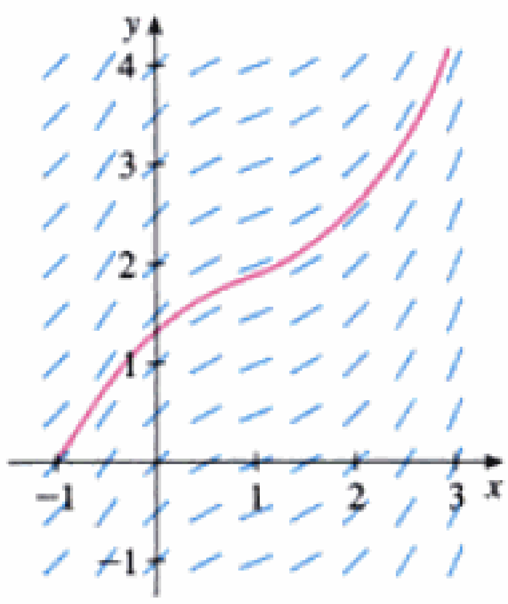


FIGURA 6
La gráfica de una antiderivada sigue al campo de direcciones.

A continuación usamos el campo de direcciones para trazar la gráfica de F. En vista de que la condición inicial es $F(-1) = 0$, comenzamos en el punto $(-1, 0)$ y trazamos la gráfica, de modo que siga las direcciones de los segmentos de tangente. El resultado aparece en la figura 6. Cualquier otra antiderivada se podría obtener desplazando la gráfica de F hacia arriba o hacia abajo. □

Movimiento rectilíneo

La antiderivación se emplea muy particularmente para analizar el movimiento de un objeto en línea recta. Recuerde que si la función de posición del objeto es $s = f(t)$, la función de velocidad es $v(t) = s'(t)$. Esto significa que la función de posición es una antiderivada de la función de velocidad. De igual forma, la función de aceleración es $a(t) = v'(t)$, de manera que la función de velocidad es una antiderivada de la aceleración. Si se conocen la aceleración y los valores iniciales $s(0)$ y $v(0)$ se puede determinar la función de posición antiderivando dos veces.

EJEMPLO 7 □ Una partícula, o *punto material*, se mueve en línea recta y su aceleración está expresada por $a(t) = 6t + 4$. Su velocidad inicial es $v(0) = -6$ cm/s y su desplazamiento inicial $s(0) = 9$ cm. Determine su función de posición, $s(t)$.

SOLUCIÓN Ya que $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, al antiderivar obtenemos

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Pero el dato es $v(0) = -6$, así que $C = -6$ y

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Dado que $v(t) = s'(t)$, entonces s es la antiderivada de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Esto hace que $s(0) = D$. Uno de los datos es $s(0) = 9$, así que $D = 9$ y la función de posición que se pide es

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$ □

Un objeto cerca de la superficie de la Tierra está sujeto a una fuerza de gravitación que produce una aceleración hacia abajo, representada por g. Cuando el movimiento se presenta cerca de la superficie, cabe suponer que g es constante, con un valor aproximado de 9.8 m/s^2 (o 32 pies/s^2).

EJEMPLO 8 □ Se arroja hacia arriba una pelota, con velocidad de 48 pies/s desde el borde de un acantilado a 432 pies sobre el fondo. Calcule su altura sobre el fondo a los t segundos después. ¿Cuándo alcanza su altura máxima? ¿Cuándo llega al fondo?

SOLUCIÓN El movimiento es vertical y elegimos que la dirección positiva sea hacia arriba. En el momento t la distancia sobre el fondo es $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ es decreciente; por lo tanto, la aceleración ha de ser negativa y se debe cumplir

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$$

Se sacan antiderivadas y resulta

$$v(t) = -32t + C$$

□ La figura 7 muestra la función de posición de la pelota del ejercicio 8. La gráfica corrobora nuestras conclusiones: la pelota alcanza su altura máxima después de 1.5 s y toca tierra después de 6.9 s.

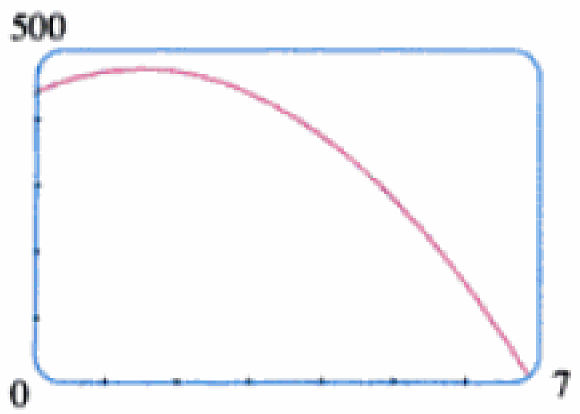


FIGURA 7

Para determinar C aplicamos la información que $v(0) = 48$. Esto da lugar a $48 = 0 + C$, y así

$$v(t) = -32t + 48$$

La altura máxima se alcanza cuando $v(t) = 0$, esto es, pasado 1.5 s. En vista de que $s'(t) = v(t)$, antiderivamos de nuevo y llegamos a

$$s(t) = -16t^2 + 48t + D$$

Al aprovechar que $s(0) = 432$, resulta que $432 = 0 + D$ y así

$$s(t) = -16t^2 + 48t + 432$$

La expresión de $s(t)$ es válida hasta que la pelota llega al suelo. Esto sucede cuando $s(t) = 0$, o sea, cuando

$$-16t^2 + 48t + 432 = 0$$

o bien, lo que es lo mismo, $$t^2 - 3t - 27 = 0$$

Al aplicar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación obtenemos

$$t = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

Desechamos la solución cuyo signo es menos porque origina un valor negativo de t; por consiguiente, la pelota llega al suelo a los $3(1 + \sqrt{13})/2 \approx 6.9$ s. □

4.10 Ejercicios

1–16 □ Determine la antiderivada más general de la función. (Compruebe su respuesta mediante diferenciación.)

1. $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$
2. $f(x) = 4 + x^2 - 5x^3$
3. $f(x) = 1 - x^3 + 5x^5 - 3x^7$
4. $f(x) = x^{20} + 4x^{10} + 8$
5. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$
6. $f(x) = 2x + 3x^{1.7}$
7. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$
9. $f(x) = \dfrac{10}{x^9}$
10. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x^4}$
11. $g(t) = \dfrac{t^3 + 2t^2}{\sqrt{t}}$
12. $f(x) = 3e^x + 7\sec^2 x$
13. $f(t) = 3\cos t - 4\,\text{sen}\, t$
14. $f(\theta) = e^\theta + \sec\theta\tan\theta$
15. $f(x) = 2x + 5(1 - x^2)^{-1/2}$
16. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

17–18 □ Encuentre la antiderivada F de f que satisfaga la condición dada. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de f y F.

17. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$
18. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

19–42 □ Halle f.

19. $f''(x) = 6x + 12x^2$
20. $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$
21. $f''(x) = 1 + x^{4/5}$
22. $f''(x) = \cos x$
23. $f'''(t) = e^t$
24. $f'''(t) = t - \sqrt{t}$
25. $f'(x) = 1 - 6x, \quad f(0) = 8$
26. $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3, \quad f(1) = 6$
27. $f'(x) = 3\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}, \quad f(1) = 2$
28. $f'(x) = 1 + 1/x^2, \quad x > 0, \quad f(1) = 1$
29. $f'(x) = 3\cos x + 5\,\text{sen}\, x, \quad f(0) = 4$
30. $f'(x) = 3x^{-2}, \quad f(1) = f(-1) = 0$
31. $f'(x) = 2/x, \quad x < 0, \quad f(-1) = 7$
32. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}, \quad f(\frac{1}{2}) = 1$
33. $f''(x) = x, \quad f(0) = -3, \quad f'(0) = 2$
34. $f''(x) = 20x^3 - 10, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = -5$
35. $f''(x) = x^2 + 3\cos x, \quad f(0) = 2, \quad f'(0) = 3$
36. $f''(x) = x + \sqrt{x}, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 2$

37. $f''(x) = 6x + 6, \quad f(0) = 4, \quad f(1) = 3$

38. $f''(x) = 12x^2 - 6x + 2, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 11$

39. $f''(x) = 1/x^3, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

40. $f''(x) = 3e^x + 5\,\mathrm{sen}\,x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

41. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

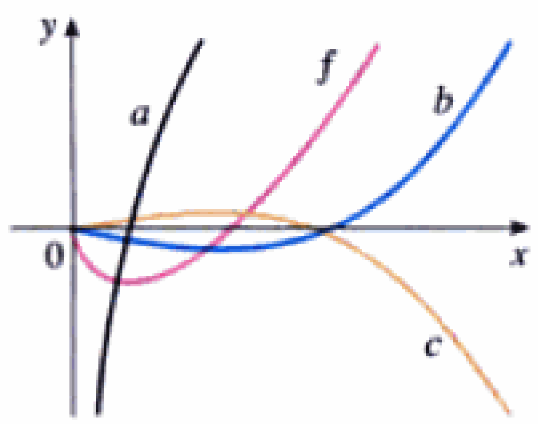
42. $f'''(x) = \mathrm{sen}\,x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1$

43. La gráfica de f pasa por el punto $(1, 6)$ y la pendiente de su tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$, encuentre $f(2)$.

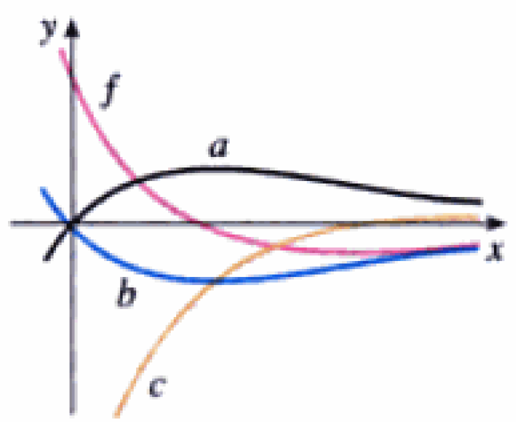
44. Halle una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la gráfica de f.

45–46 □ Se muestra la gráfica de una función f. ¿Cuál de las gráficas es la de la antiderivada de f y por qué?

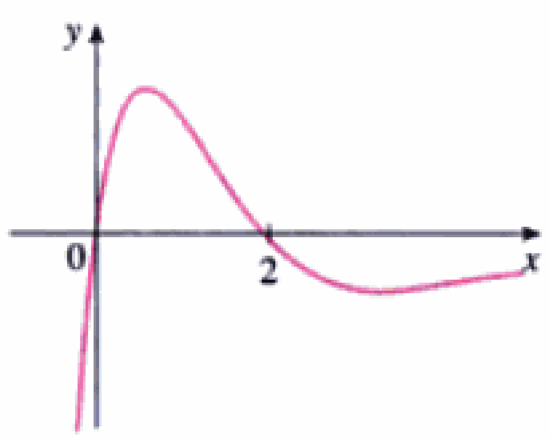
45.



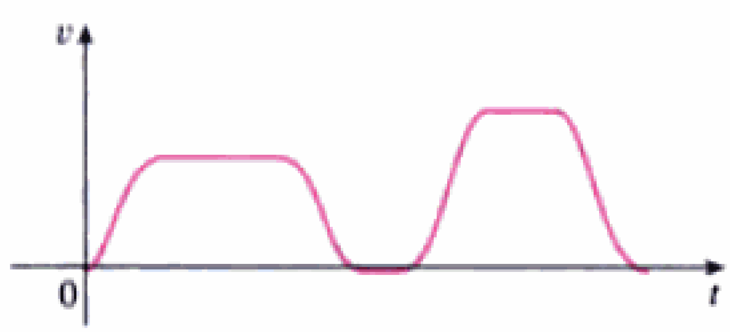
46.



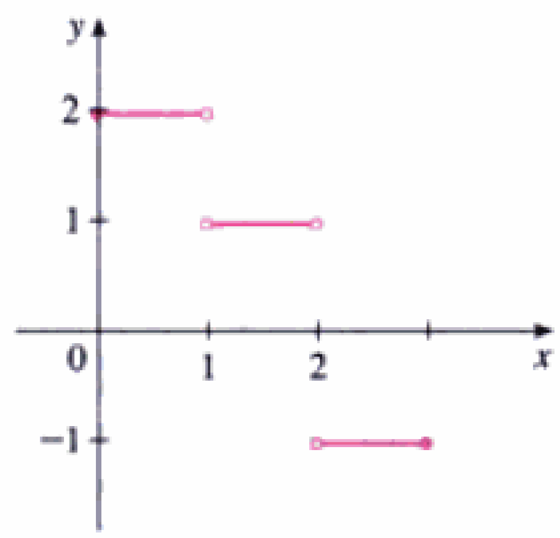
47. A continuación se presenta la gráfica de una función. Bosqueje la gráfica de la antiderivada F, si $F(0) = 0$.



48. En la figura siguiente aparece la gráfica de la función velocidad de un automóvil. Trace la gráfica de la función posición.



49. En la figura se ve la gráfica de f'. Bosqueje la gráfica de f si f es continua y $f(0) = -1$.



50. (a) Utilice una gráficadora para graficar $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
(b) A partir de la gráfica del inciso (a) bosqueje la gráfica de la antiderivada F que satisface $F(0) = 1$.
(c) Use las reglas de esta sección para encontrar una expresión para $F(x)$.
(d) Grafique F con la expresión del inciso (c). Compare con (b).

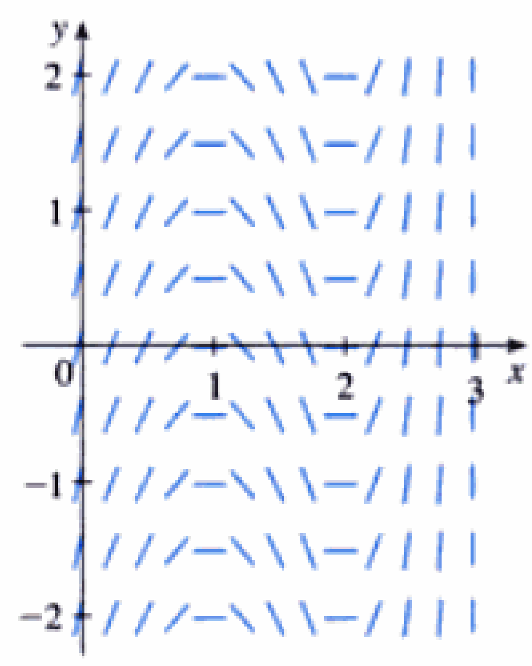
51–52 □ Trace una gráfica de f y emplee para bosquejar la antiderivada que pasa por el origen.

51. $f(x) = \mathrm{sen}(x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 4$

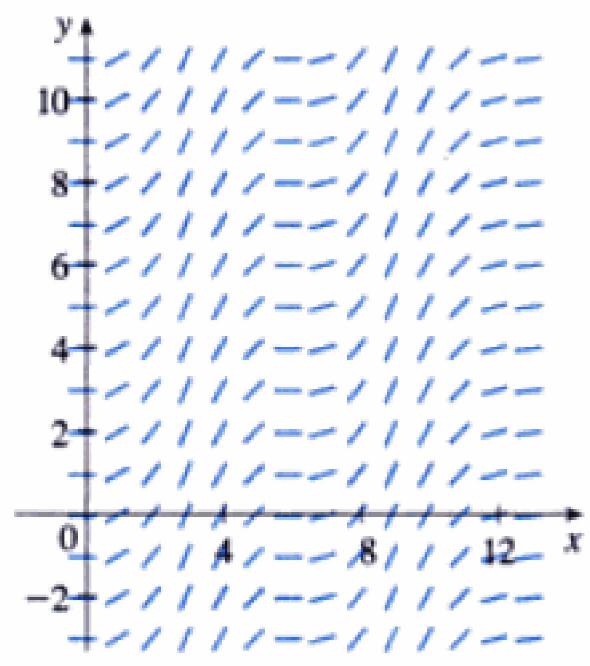
52. $f(x) = 1/(x^4 + 1)$

53–54 □ Las figuras de abajo son los campos de dirección de las funciones. Úselas para trazar la antiderivada, F que cumple con $F(0) = -2$.

53.



54.



55–56 □ Con un campo de direcciones grafique la antiderivada que satisface $F(0) = 0$.

55. $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}, \quad 0 < x < 2\pi$

56. $f(x) = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

que cambia la cantidad de números críticos y el valor de transición en que varía el número de puntos de inflexión. Ilustre las formas posibles con gráficas.

75. Un recipiente es soltado desde un helicóptero a 500 m de altura. El paracaídas no abre, pero el objeto ha sido diseñado para soportar una velocidad al impacto, de 100 m/s. ¿Se rompe o no?

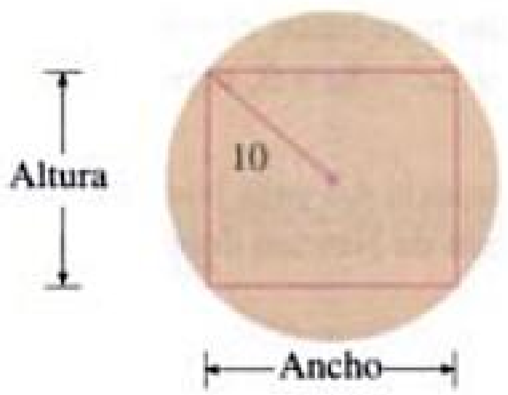
76. En una carrera automovilística en línea recta el coche A pasa al B dos veces. Demuestre que en algún momento de la carrera tuvieron la misma aceleración. Enuncie sus hipótesis.

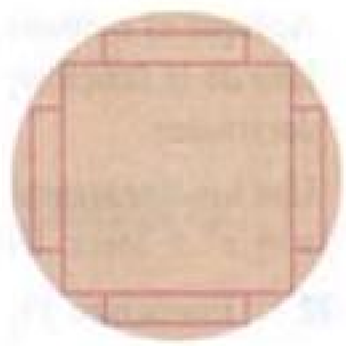
77. Se va a cortar una viga rectangular a partir de un tronco cilíndrico que tiene un radio de 10 pulgadas.

(a) Demuestre que la viga de área máxima en su sección transversal es cuadrada.

(b) Se van a cortar cuatro tablones rectangulares de las cuatro secciones del tronco que quedan después de cortar la viga cuadrada. Determine las dimensiones de la sección transversal de los tablones que tendrán el área máxima.

(c) Suponga que la resistencia de la viga rectangular es proporcional al producto de su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más fuerte que se puede cortar a partir del tronco cilíndrico.





78. Si se dispara un proyectil a una velocidad inicial v, a un ángulo de inclinación θ a partir de la horizontal, entonces su trayectoria, despreciando la resistencia del aire, es la parábola

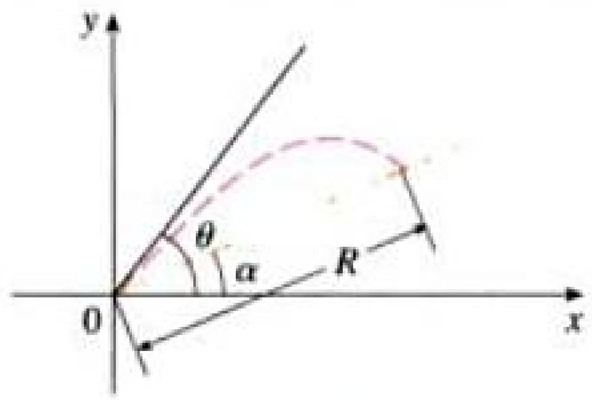
$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(a) Suponga que el proyectil se dispara desde la base de un plano inclinado que forman un ángulo α, $\alpha > 0$ respecto de la horizontal, como se muestra en la figura. Demuestre que el alcance del proyectil, medido hacia arriba de la pendiente, se expresa por

$$R(\theta) = \frac{2v^2\cos\theta\,\text{sen}(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

(b) Demuestre θ de modo que R sea un máximo.

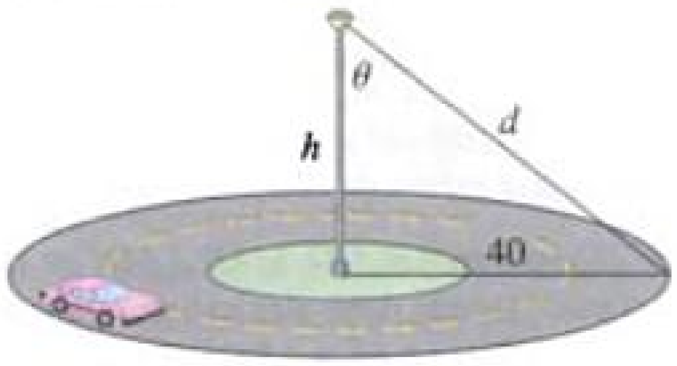
(c) Suponga que el plano forma un ángulo α *hacia abajo* de la horizontal. Determine el alcance R en este caso y el ángulo al cual debe dispararse el proyectil para maximizar R.



79. Se va a colocar un farol en el extremo superior de un poste de h pies de altura con el fin de iluminar un círculo de tráfico muy intenso, el cual tiene un radio de 40 pies. La intensidad de la iluminación I en cualquier punto P del círculo es directamente proporcional al coseno del ángulo θ (véase la figura) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente.

(a) ¿Cuál debe ser la altura del poste de alumbrado para maximizar I?

(b) Suponga que el poste tiene h pies de alto y que una mujer se aleja de la base del poste a razón de 4 pies/s. ¿Con qué razón disminuye la intensidad de la luz en el punto de su espalda que está 4 pies arriba del piso cuando llega al borde exterior del círculo de tráfico?



Problemas especiales

Uno de los principios más importantes en la solución de los problemas es la *analogía* (véase la pág. 78). Si tiene dificultad al empezar con un problema, conviene resolver un problema semejante más sencillo. En el ejemplo siguiente se ilustra el principio.

Ejemplo Si x, y y z son números positivos pruebe que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geqslant 8$$

Solución Puede ser difícil empezar con este problema. (Algunos estudiantes lo han atacado haciendo las multiplicaciones del numerador, pero eso sólo crea un lío.) Intentemos pensar en un problema similar, más sencillo. Cuando intervienen varias variables, resulta útil pensar en un problema análogo con menos variables. En el presente caso, podemos reducir el número de variables de tres a una y probar la desigualdad análoga

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para } x > 0$$

De hecho, si podemos probar (1), entonces se deduce la desigualdad deseada porque

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

La clave para probar (1) es reconocer que es una versión disfrazada de un problema de mínimos. Si hacemos

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

entonces $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de modo que $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$. Asimismo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Por lo tanto, el valor mínimo absoluto de f es $f(1) = 2$. Esto significa que

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos los valores positivos de } x$$

y, como se mencionó con anterioridad, por multiplicación se infiere la desigualdad dada.

La desigualdad (1) pudo probarse sin cálculo. En efecto, si $x > 0$, tenemos

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \iff x^2+1 \geqslant 2x \iff x^2-2x+1 \geqslant 0$$

$$\iff (x-1)^2 \geqslant 0$$

Debido a que la última desigualdad obviamente es verdadera, la primera también lo es.

Mire retrospectivamente

¿Qué ha aprendido a partir de la solución de este ejemplo?

- Para resolver un problema que comprende varias variables, podría ayudar resolver un problema semejante con una variable.
- Cuando intente probar una desigualdad, podría ayudar si piensa en ella como en un problema de máximo y mínimo.

Problemas

1. Si un rectángulo tiene su base en el eje x y dos vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$, demuestre que el rectángulo tiene el área más grande posible cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la curva.

2. Demuestre que $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para toda x.

3. Demuestre que, para todos los valores positivos de x y y,

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2$$

4. Demuestre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos los números x e y tales que $|x| \leqslant 2$ y $|y| \leqslant 2$.

5. Sean a y b números positivos. Demuestre que los dos números $a(1 - b)$ y $b(1 - a)$ no pueden ser mayores que $\frac{1}{4}$ simultáneamente.

6. Halle el punto de la parábola $y = 1 - x^2$ para el cual su recta tangente corta del primer cuadrante el triángulo de área mínima.

7. Encuentre los puntos más alto y más bajo sobre la curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

8. El agua fluye a velocidad constante hacia un tanque esférico. Sea $V(t)$ el volumen del agua en el tanque y $H(t)$ la altura del agua en el instante t del tiempo.
   (a) ¿Qué significan $V'(t)$ y $H'(t)$? ¿Estas derivadas son positivas, negativas o cero?
   (b) ¿Es $V''(t)$ positiva, negativa o cero? Explique.
   (c) Sea t_1, t_2, y t_3 los instantes en que el tanque está a un cuarto, a la mitad y a tres cuartos de capacidad, respectivamente ¿Son los valores $H''(t_1)$, $H''(t_2)$, y $H''(t_3)$ positivo, negativo, nulos? ¿Por qué?

9. Halle el valor máximo absoluto de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - 2|}$$

10. Bosqueje el conjunto de puntos (x, y) tales que $|x + y| \leqslant e^x$.

11. Demuestre que, para $x > 0$,

$$\frac{x}{1 + x^2} < \tan^{-1}x < x$$

12. Halle una función f tal que $f'(-1) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = 0$, y $f''(x) > 0$ para toda x, o bien demuestre que tal función no puede existir.

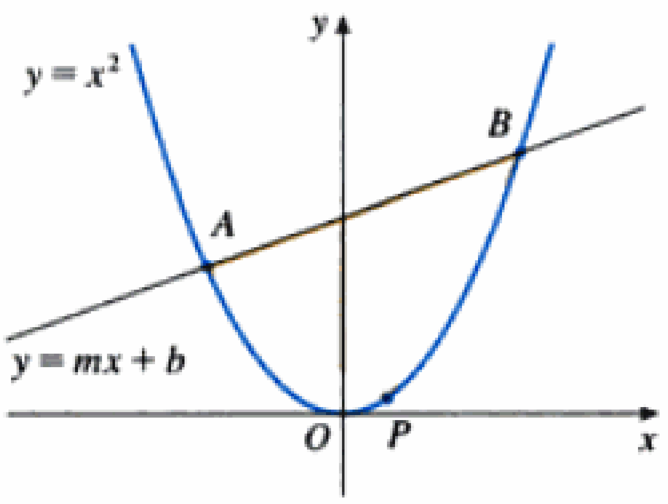


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

13. La recta $y = mx + b$ cruza la parábola $y = x^2$ en los puntos A y B (véase la figura). Encuentre el punto P sobre el arco AOB de la parábola que maximice el área del triángulo PAB.

14. Bosqueje la gráfica de una función f tal que $f'(x) < 0$ para toda x, $f''(x) > 0$ o para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$, y $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) + x] = 0$.

15. Determine los valores del número a para los que la función f no tiene número crítico:

$$f(x) = (a^2 + a - 6)\cos 2x + (a - 2)x + \cos 1$$

16. Bosqueje la región del plano que consiste en los puntos (x, y) tales que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

17. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 120°$ y $|AB| \cdot |AC| = 1$.
   (a) Exprese la longitud de la bisectriz AD del ángulo en términos de $x = |AB|$.
   (b) Encuentre el valor más grande posible de $|AD|$.

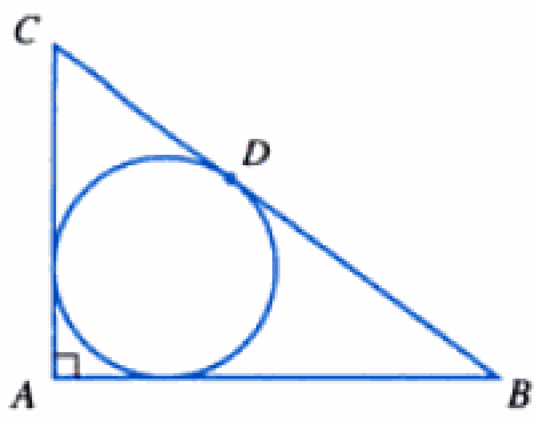


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18

18. (a) Sea ABC un triángulo con ángulo recto A e hipotenusa $a = |BC|$. (véase la figura). Si el círculo inscrito toca la hipotenusa en D, demuestre que

$$|CD| = \tfrac{1}{2}(|BC| + |AC| - |AB|)$$

(b) Si $\theta = \frac{1}{2}\angle C$, exprese el radio r del círculo inscrito en términos de a y θ.

(c) Si a es fija y θ varía, encuentre el valor máximo de r.

19. Un triángulo con lados a, b, y c varía con el tiempo t, pero su área nunca cambia. Sea θ el ángulo opuesto al lado de longitud a y suponga que θ siempre permanece agudo.

(a) Exprese $d\theta/dt$ en términos de b, c, θ, db/dt, y dc/dt.

(b) Exprese da/dt en términos de las cantidades del inciso (a).

20. $ABCD$ es un trozo cuadrado de papel con lados de longitud 1 m. Se dibuja un cuarto de círculo desde B hasta D con centro en A. El trozo EF, con E en AB y F en AD, de modo que A cae en el cuarto de círculo. Determine las áreas máxima y mínima que podría tener el triángulo AEF.

21. ¿Para qué valores positivos de a la curva $y = a^x$ corta a la recta $y = x$?

22. ¿Para cuál valor de a la ecuación siguiente es verdadera?

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^x = e$$

23. Sea $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y n es un entero positivo. Si se tiene que $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$ para toda x, muestre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$$

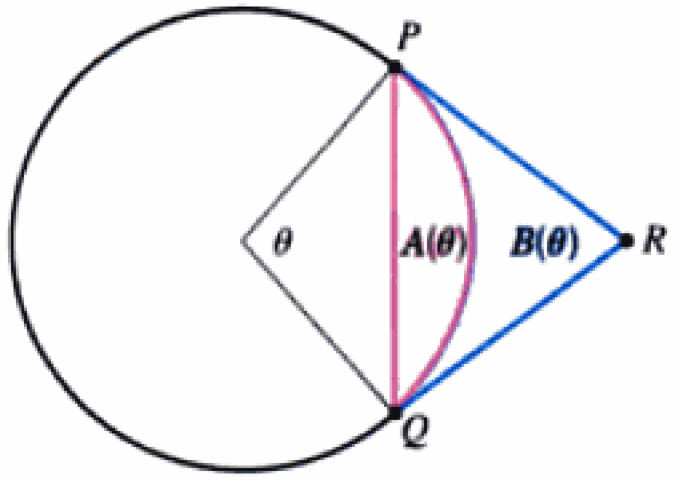


FIGURA PARA EL PROBLEMA 24

24. Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ, como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ. Sea $B(\theta)$ el área entre las rectas tangentes PR, QR y el arco. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

5 Integrales

En cada una de las situaciones que se presentan aquí intervienen las integrales: usar la razón a la cual se fuga el aceite de un tanque para hallar la cantidad que se haya fugado durante un cierto periodo, utilizar las lecturas de velocidad del transbordador espacial Endeavour para calcular la altura que ha alcanzado en un tiempo dado, emplear el conocimiento del consumo de potencia para hallar la energía usada en un día dado en San Francisco. Estos problemas se resuelven en la sección 5.4.

Ahora es un buen momento para leer (o volver a leer) *Presentación preliminar del cálculo* (véase la página 2), que analiza las ideas unificadoras del cálculo y ayuda a situarnos en la perspectiva de dónde estamos y hacia dónde vamos.

En el capítulo 2 utilizamos los problemas de la tangente y de la velocidad para introducir la derivada, la cual constituye la idea central del cálculo diferencial. De manera muy semejante, en este capítulo se empieza con los problemas del área y de la distancia y se utilizan para formular la idea de integral definida, la cual representa el concepto básico del cálculo integral. En los capítulos 6 y 8 veremos cómo usar la integral para resolver problemas de volúmenes, longitudes de curvas, predicciones sobre problemas, gasto cardiaco, fuerzas sobre la cortina de una presa, trabajo, superávit del consumidor y béisbol, entre muchos otros.

Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada y en este capítulo veremos que simplifica en gran parte la solución de muchos problemas.

5.1 Áreas y distancias

En esta sección descubrimos que al intentar hallar el área debajo de una curva, o la distancia recorrida por un automóvil, finalizamos con el mismo tipo especial de límite.

Problema del área

Empecemos por intentar resolver el *problema del área:* halle el área de la región S que está debajo de la curva $y = f(x)$ desde a hasta b. Esto significa que S (Fig. 1) está limitada por la gráfica de una función continua f [donde $f(x) \geqslant 0$], las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y el eje x.

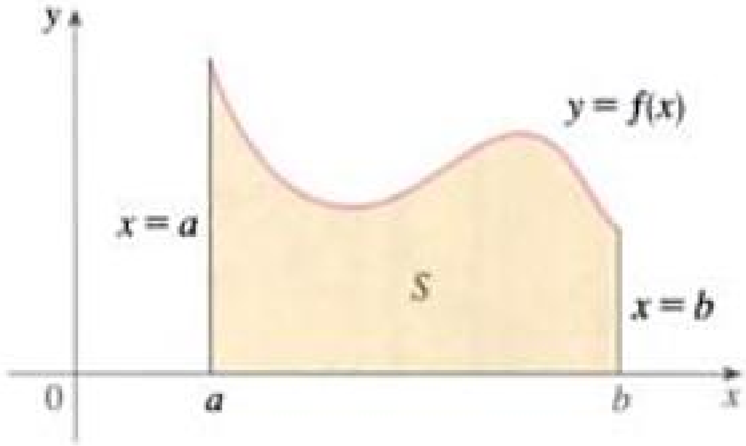


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Al intentar resolver el problema del área, tenemos que preguntarnos: ¿cuál es el significado de la palabra *área*? Esta cuestión es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, se define como el producto del largo y el ancho. El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos (Fig. 2) y sumar las áreas de esos triángulos.

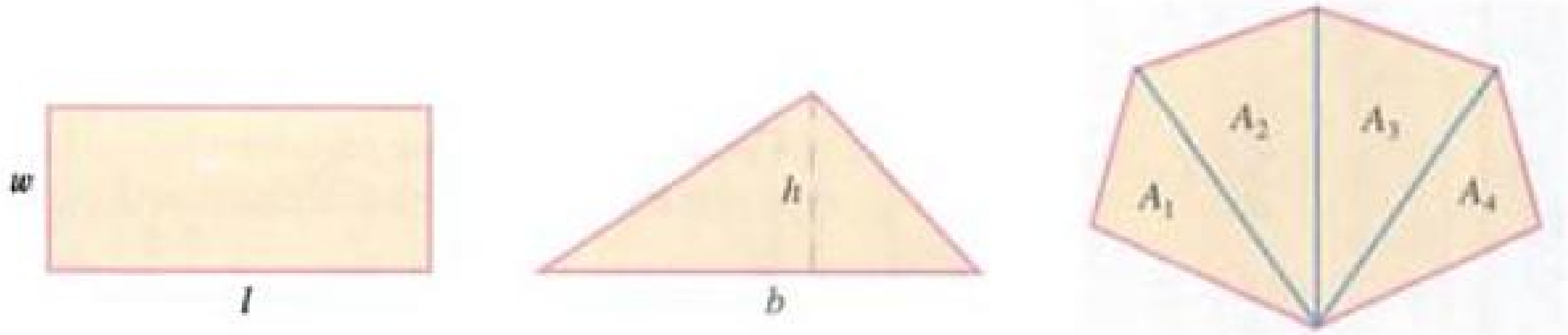


FIGURA 2 $A = lw$ $A = \frac{1}{2}bh$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región. Pero parte del problema del área es precisar esta idea intuitiva dando una definición exacta de área.

Recuerde que al definir una tangente, primero obtuvimos una aproximación de la pendiente de la recta tangente por las pendientes de rectas secantes y, a continuación, tomamos el límite de estas aproximaciones. Seguiremos una idea similar para las áreas. En primer lugar obtendremos una aproximación de la región S por medio de rectángulos y después tomaremos el límite de las áreas de estos rectángulos. En el ejemplo siguiente ilustramos el procedimiento.

EJEMPLO 1 □ Use rectángulos para estimar el área debajo de la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1 (la región parabólica S ilustrada en la Fig. 3).

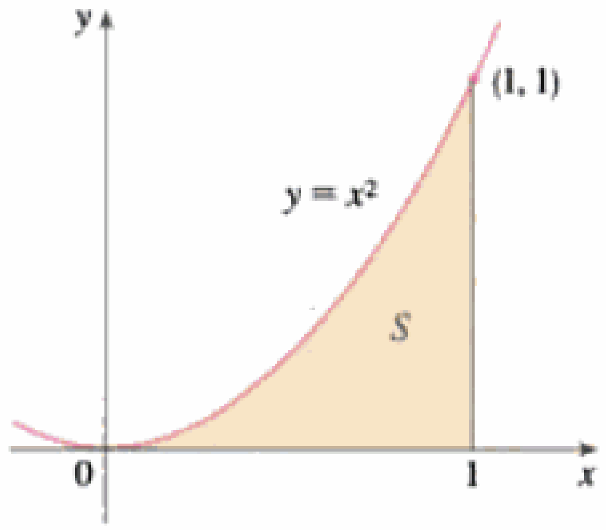


FIGURA 3

SOLUCIÓN En primer lugar, advertimos que el área de S debe encontrarse entre 0 y 1, porque S está contenida en un cuadrado cuya longitud del lado es 1 pero, en verdad, podemos lograr algo mejor que eso. Suponga que dividimos S en cuatro franjas S_1, S_2, S_3, y S_4 al trazar las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 4(a). Podemos obtener una aproximación de cada franja por medio de un rectángulo cuya base sea la misma que la de la franja y cuya altura sea la misma que la del lado derecho de la propia franja [véase la Fig. 4(b)]. En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos de la derecha de los subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, y $[\frac{3}{4}, 1]$.

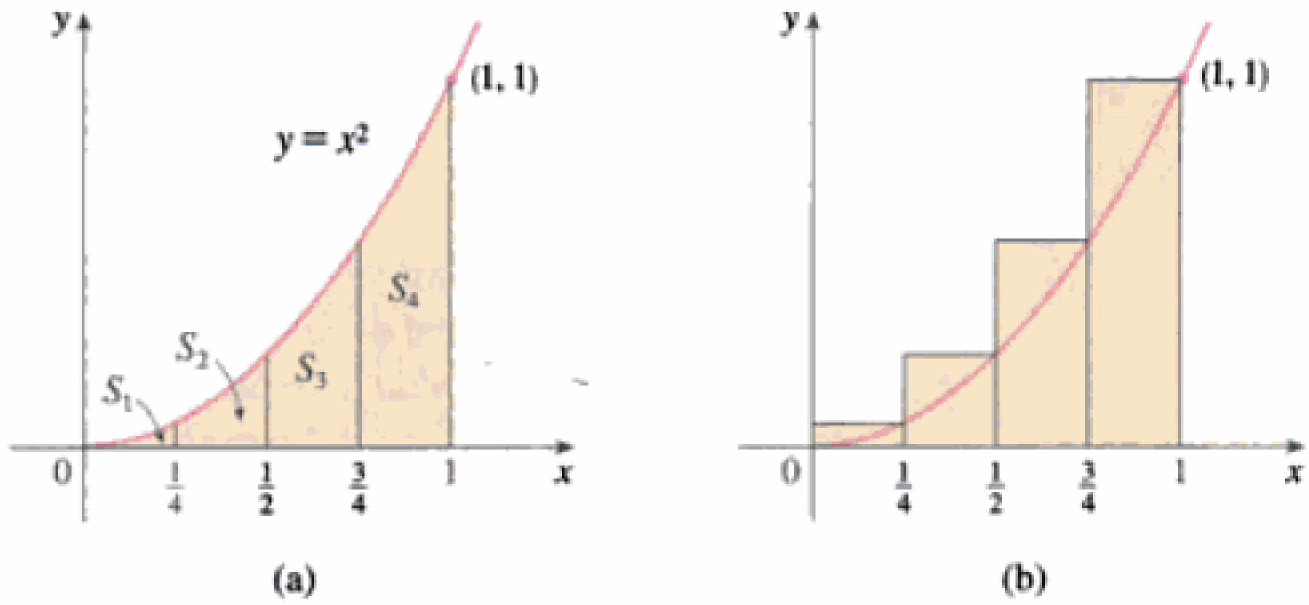


FIGURA 4

Cada rectángulo tiene un ancho de $\frac{1}{4}$ y las alturas son $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$, y 1^2. Si denotamos con R_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtenemos

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0.46875$$

A partir de la figura 4(b) vemos que el área A de S es menor que R_4, de modo que

$$A < 0.46875$$

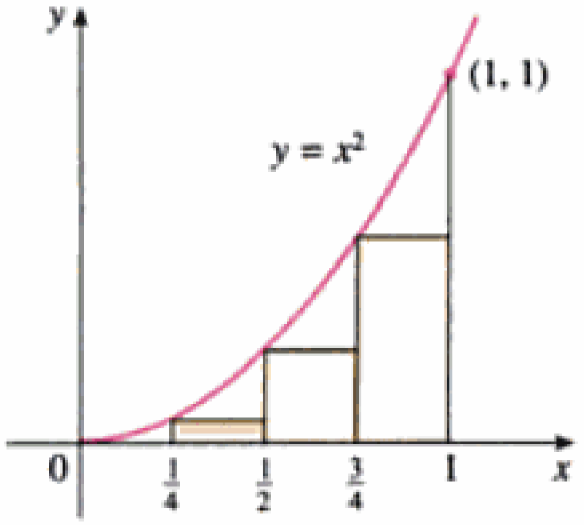


FIGURA 5

En lugar de usar los rectángulos de la figura 4(b), pudimos optar por los más pequeños de la figura 5, cuyas alturas son los valores de f en los puntos extremos izquierdos de los subintervalos. (El rectángulo más a la izquierda se ha aplastado, debido a que su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{32} = 0.21875$$

Vemos que el área de S es mayor que L_4, de modo que tenemos estimaciones superior e inferior para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Podemos repetir este procedimiento con un número mayor de franjas. En la figura 6 se muestra lo que sucede cuando dividimos la región S en ocho franjas de anchos iguales.

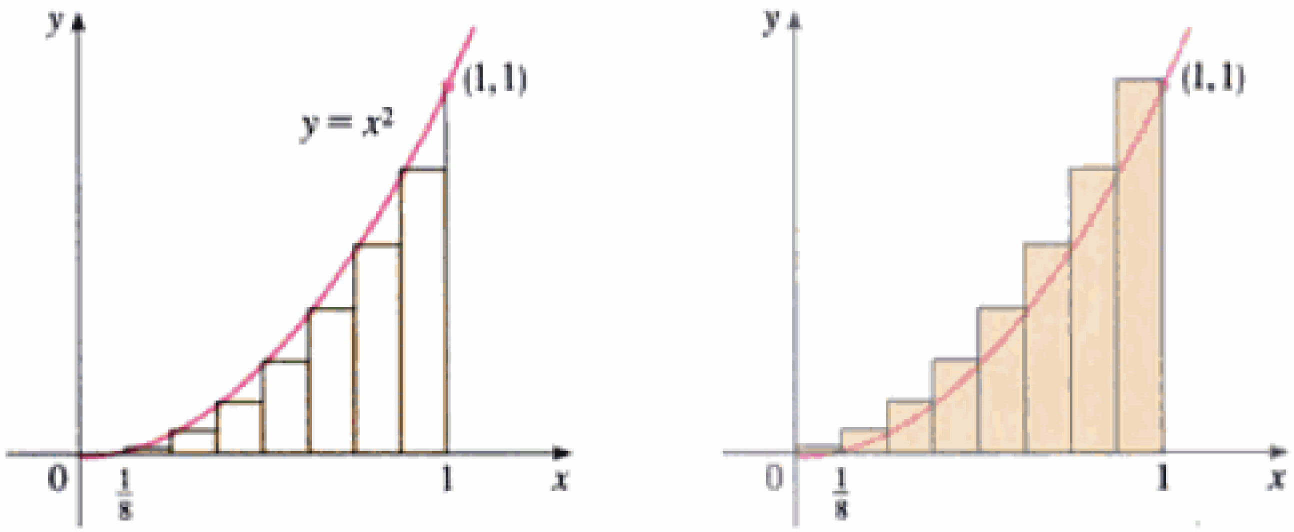


FIGURA 6
Aproximación de S con ocho rectángulos

(a) Con los puntos extremos izquierdos (b) Con los puntos extremos derechos

Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), obtenemos mejores estimaciones inferior y superior para A:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

De modo que una respuesta posible a la pregunta es decir que el área verdadera de S se encuentra entre 0.2734375 y 0.3984375.

Podríamos obtener estimaciones mejores al incrementar el número de franjas. En la tabla se muestran los resultados de cálculos semejantes (con una computadora), usando n rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos extremos izquierdos (L_n) o con los puntos extremos derechos (R_n). En particular, al usar 50 franjas, vemos que el área se encuentra entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas, lo estrechamos aun más: A se halla entre 0.3328335 y 0.3338335. Se obtiene una buena aproximación, promediando estos números: $A \approx 0.3333335$. □

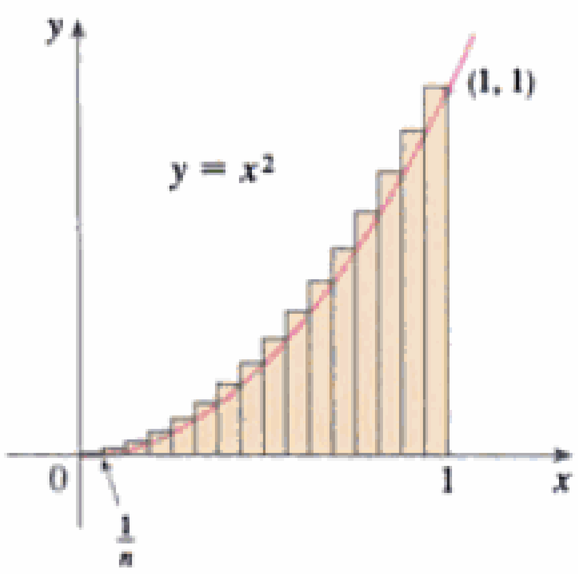


FIGURA 7

Con base en los valores de la tabla, parece que R_n tiende a $\frac{1}{3}$ conforme n crece. Confirmamos esto en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 □ Para la región S del ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos superiores de aproximación tiende a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

SOLUCIÓN R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos de la figura 7. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/n$ y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; es decir, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$.

De este modo

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

En este punto necesitamos la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es posible que ya haya visto esta fórmula. Se prueba en el ejemplo 5 del apéndice E.

Si ponemos la fórmula (1) en la expresión para R_n, obtenemos

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Por tanto,

□ Estamos calculando el límite de la sucesión $\{R_n\}$. En *Presentación preliminar del cálculo* se analizaron las sucesiones y en el capítulo 11 se estudiarán con detalle. Sus límites se calculan de la misma manera que los límites en el infinito (Sec. 2.6). En particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \tfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \tfrac{1}{3}$$

□

Se puede demostrar que las sumas inferiores de aproximación también tienden a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

Con base en las figuras 8 y 9 parece que conforme n crece, tanto L_n como R_n se vuelven cada vez mejores aproximaciones para el área de S. Por lo tanto, *definimos* el área A como

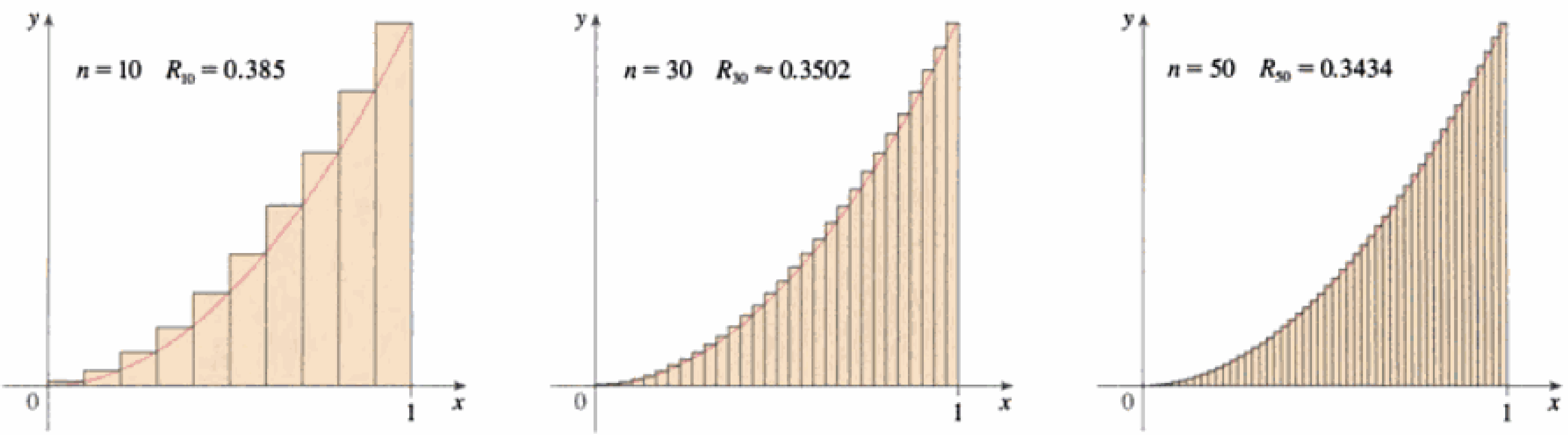
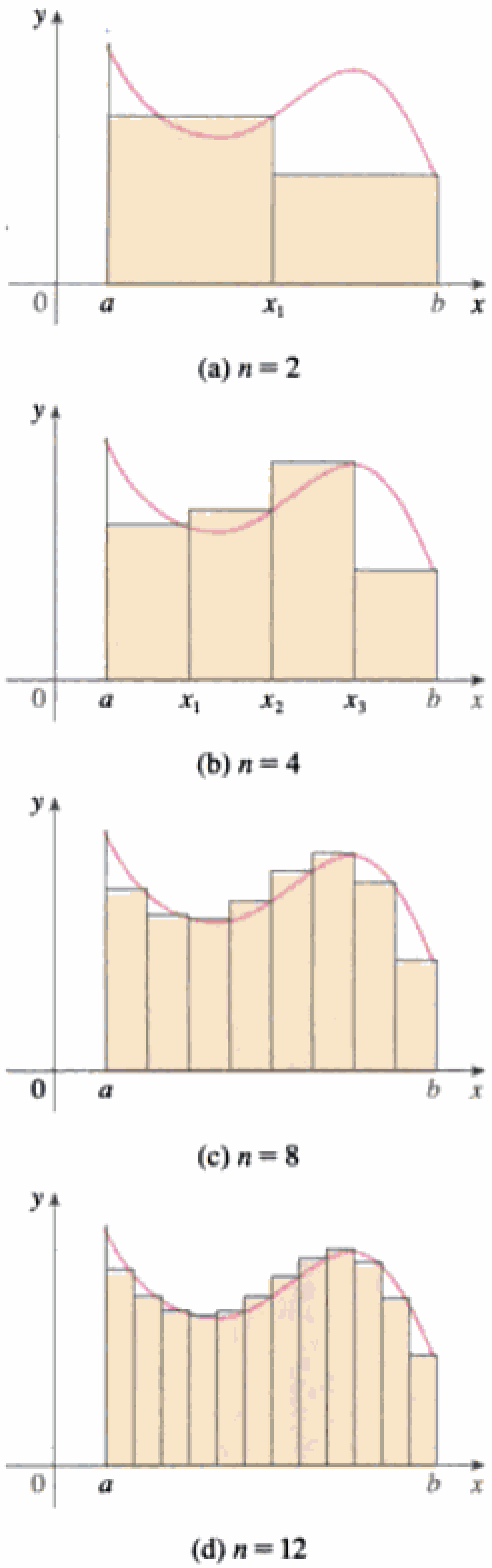


FIGURA 8

el área del i-ésimo rectángulo es $f(x_i)\,\Delta x$. Lo que concebimos intuitivamente como el área de S se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

En la figura 12 se muestra esta aproximación para $n = 2$, 4, 8 y 12. Advierta que esta aproximación va mejorando a medida que se incrementa la cantidad de franjas; es decir, cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, definimos el área A de la región S de la manera siguiente.



(a) $n = 2$

(b) $n = 4$

(c) $n = 8$

(d) $n = 12$

FIGURA 12

2 Definición El **área** A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Se puede probar que el límite de la definición 2 siempre existe, puesto que se supone que f es continua. También es posible demostrar que obtenemos el mismo valor con los puntos extremos de la izquierda:

$$\boxed{3} \qquad A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De hecho, en lugar de usar los puntos extremos izquierdos o los derechos, podríamos tomar la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en *cualquier* número x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A estos números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ los llamamos **puntos muestra**. En la figura 13 se presentan los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestra diferentes de los puntos extremos. De suerte que una expresión más general para el área de S es

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

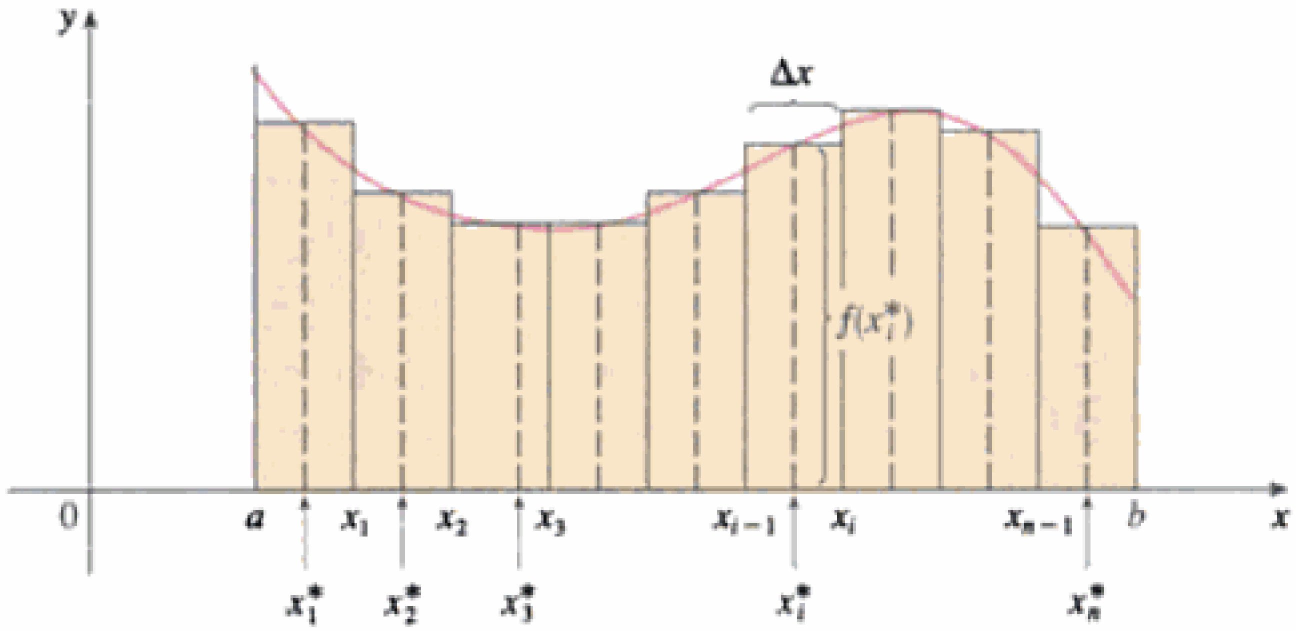


FIGURA 13

Esto nos indica terminar con $i = n$.

Esto nos indica sumar. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

Esto nos indica comenzar con $i = m$.

A menudo usamos la **notación sigma** para escribir de manera más compacta las sumas con muchos términos. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Con lo cual las expresiones para el área, dadas en las ecuaciones 2, 3 y 4, se pueden escribir:

□ Para ejercitarse con la notación sigma véase los ejemplos y haga algunos ejercicios del apéndice E.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

También podríamos volver a escribir la fórmula 1 de esta manera:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EJEMPLO 3 □ Sea A el área de la región que está debajo de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ entre $x = 0$ y $x = 2$.
(a) Con los puntos extremos derechos, encuentre una expresión para A como un límite. No evalúe ese límite.
(b) Estime el área al tomar los puntos muestra como los puntos medios y con cuatro subintervalos; luego con diez subintervalos.

SOLUCIÓN

(a) Como $a = 0$ y $b= 2$, el ancho de un subintervalo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Por tanto, $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$, y $x_n = 2n/n$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación es

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición 2, el área es

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Si se usa la notación sigma, se podría escribir

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

Es difícil evaluar este límite directamente a mano, no así con la ayuda de un sistema algebraico para computadora (véase el Ejerc. 22). En la sección 5.3 podremos hallar A con más facilidad, aplicando un método diferente.

(b) Con $n = 4$, los subintervalos de ancho igual, $\Delta x = 0.5$ son $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, $[1, 1.5]$, y $[1.5, 2]$. Los puntos medios de estos subintervalos son $x_1^* = 0.25$, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$,

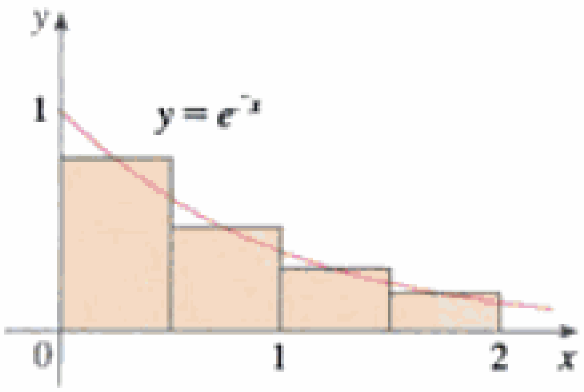


FIGURA 14

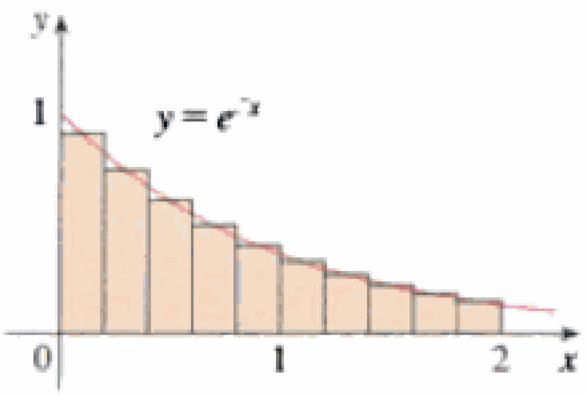


FIGURA 15

y $x_4^* = 1.75$, y la suma de las áreas de los cuatro rectángulos de aproximación, figura 14, es

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0.25)\,\Delta x + f(0.75)\,\Delta x + f(1.25)\,\Delta x + f(1.75)\,\Delta x \\ &= e^{-0.25}(0.5) + e^{-0.75}(0.5) + e^{-1.25}(0.5) + e^{-1.75}(0.5) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}) \approx 0.8557 \end{aligned}$$

De este modo, una estimación para el área es

$$A \approx 0.8557$$

Con $n = 10$ los subintervalos son $[0, 0.2], [0.2, 0.4], \ldots, [1.8, 2]$ y los puntos medios son $x_1^* = 0.1, x_2^* = 0.3, x_3^* = 0.5, \ldots, x_{10}^* = 1.9$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} A \approx M_{10} &= f(0.1)\,\Delta x + f(0.3)\,\Delta x + f(0.5)\,\Delta x + \cdots + f(1.9)\,\Delta x \\ &= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \cdots + e^{-1.9}) \approx 0.8632 \end{aligned}$$

En la figura 15, se aprecia que esta estimación es mejor que la hecha con $n = 4$. □

Problema de la distancia

Consideremos ahora el *problema de la distancia:* hallar la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo, si se conoce la velocidad del objeto en todo momento. (En cierto sentido, éste es el problema inverso del que se analizó en la Sec. 2.1.) Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia es fácil de resolver por medio de la fórmula

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

Pero si la velocidad varía, no es fácil hallar la distancia recorrida. Investigaremos el problema en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 □ Suponga que el odómetro de nuestro automóvil está roto y que deseamos estimar la distancia que hemos recorrido en 30 segundos. Tomamos las lecturas del velocímetro cada cinco segundos y registramos lo que indica en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades coherentes, convirtamos las lecturas de velocidad a pies por segundo (1 mi/h = 5280/3600 pies/s):

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (pies/s)	25	31	35	43	47	46	41

Durante los primeros cinco segundos, la velocidad no cambia mucho, de modo que podemos estimar la distancia recorrida durante ese tiempo suponiendo que la velocidad es constante. Si la consideramos igual a la velocidad inicial (25 pies/s), entonces

(c) Mejore sus estimaciones del inciso (b) con ocho rectángulos.

7–8 □ Con una calculadora programable (o una computadora) es posible evaluar las expresiones para las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, incluso para valores grandes de n, con el uso de lazos. (En una TI, use el comando Is>; en una Casio, use Isz, en una HP o en BASIC, use un lazo FOR-NEXT.) Calcule la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación usando los subintervalos iguales y los puntos extremos de la derecha, para $n = 10$, 30 y 50. Luego, infiera el valor del área exacta.

7. La región debajo de $y = \operatorname{sen} x$ desde 0 hasta π

8. La región debajo de $y = 1/x^2$ desde 1 hasta 2

SAC **9.** Algunos sistemas algebraicos para computadora (SAC) tienen comandos que dibujan los rectángulos de aproximación y evalúan las sumas de sus áreas, por lo menos si x_i^* es extremo izquierdo o derecho. (Por ejemplo, en Maple, use leftbox, rightbox, leftsum y rightsum.)

(a) Si $f(x) = \sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, encuentre las sumas izquierda y derecha para $n = 10$, 30 y 50.

(b) Ilustre el trazado de las gráficas de los rectángulos del inciso (a).

(c) Demuestre que el área exacta debajo de f se encuentra entre 4.6 y 4.7.

SAC **10.** (a) Si $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, use los comandos analizados en el ejercicio 7 con el fin de hallar las sumas izquierda y derecha, para $n = 10$, 30 y 50.

(b) Ilustre por el trazado de las gráficas de los rectángulos del inciso (a).

(c) Demuestre que el área exacta debajo de f se encuentra entre 0.87 y 0.91.

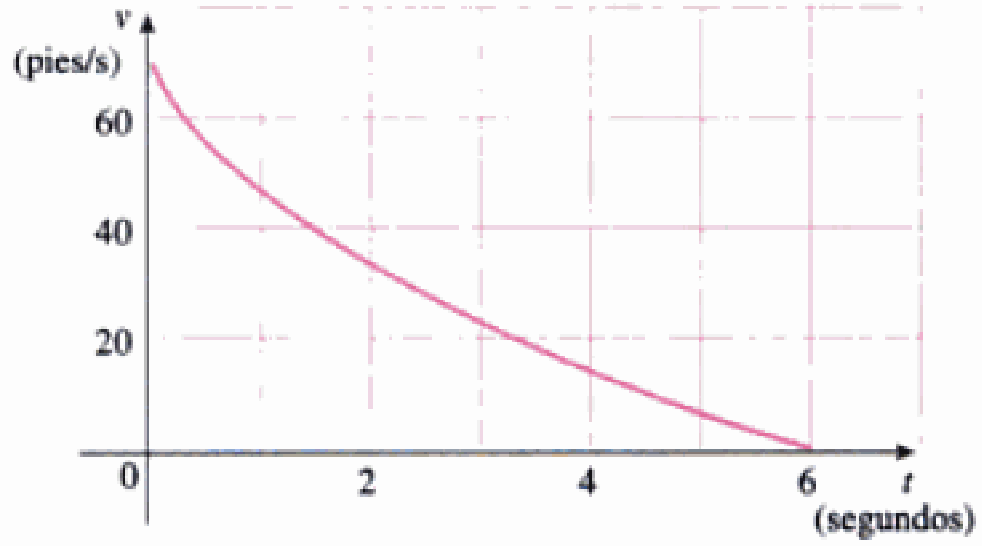
11. La velocidad de una corredora aumentó de manera paulatina durante los tres primeros segundos de una carrera. En la tabla se da su velocidad a intervalos de medio segundo. Encuentre las estimaciones inferior y superior para la distancia que recorrió durante estos tres segundos

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (pies/s)	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

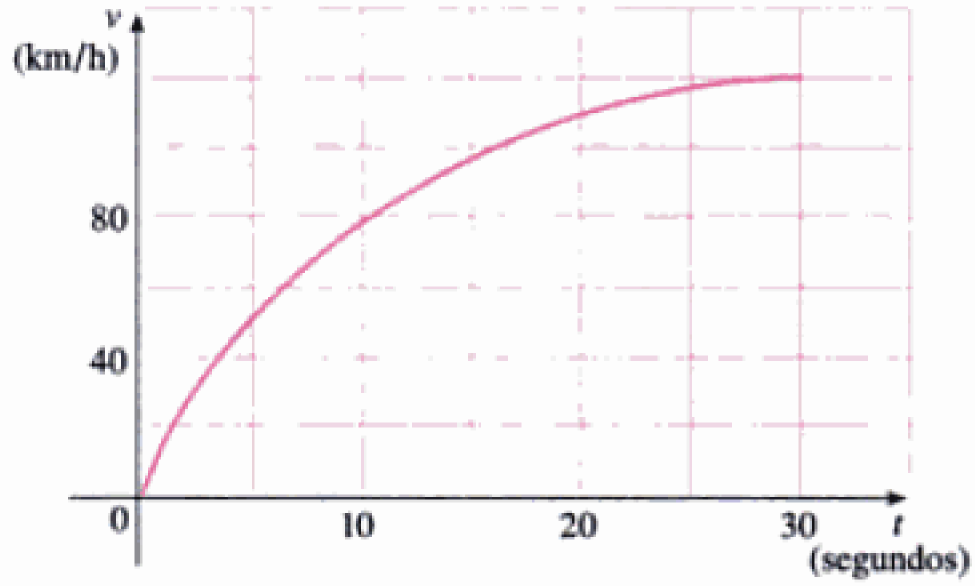
12. Cuando estimamos distancias a partir de datos de la velocidad, a veces es necesario usar instantes $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ que no están igualmente espaciados. Aún así, podemos estimar las distancias usando los periodos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por ejemplo, el 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad era instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla, proporcionada por la NASA, se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido. Use estos datos para estimar la altura sobre la Tierra a la que se encontró el transbordador 62 segundos después del despegue.

Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Válvula de estrangulación 89%	20	447
Válvula de estrangulación 67%	32	742
Válvula de estrangulación 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4151

13. Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil al frenar. Úsela para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.



14. Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil que acelera pasando de la inmovilidad a una velocidad de 120 km/h en un periodo de 30 segundos. Estime la distancia recorrida en ese periodo.



15–17 □ Use la definición 2 con el fin de encontrar una expresión para el área bajo la gráfica de f, como un límite. No evalúe el límite.

15. $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 8$

16. $f(x) = 5 + \sqrt[3]{x}$, $\quad 1 \leqslant x \leqslant 8$

17. $f(x) = x + \ln x$, $\quad 2 \leqslant x \leqslant 6$

18–19 □ Determine una región cuya área sea igual al límite dado. No lo evalúe.

18. $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \sqrt{1 + \frac{3i}{n}}$

19. $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n}$

20. (a) Use la definición 2 y encuentre una expresión para el área bajo la curva $y = x^3$ desde 0 hasta 1, como un límite.

(b) La fórmula siguiente que da la suma de los cubos de los n primeros enteros se demuestran en el apéndice E. Úsela para evaluar el límite del inciso (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

SAC **21.** (a) Exprese el área debajo de la curva $y = x^5$ desde 0 hasta 2, como un límite.
(b) Utilice un SAC con el fin de hallar la suma en su expresión del inciso (a).
(c) Evalúe el límite del inciso (a).

SAC **22.** Encuentre el área exacta de la región debajo de la gráfica de $y = e^{-x}$ desde 0 hasta 2 con un SAC para evaluar la suma y, a continuación, el límite del ejemplo 3(a). Compare su respuesta con la estimación obtenida en el ejemplo 3(b).

SAC **23.** Encuentre el área exacta debajo de la curva cosenoidal $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = b$, en donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use un SAC para evaluar la suma y calcular el límite.) En particular, ¿cuál es el área si $b = \pi/2$?

24. (a) Sea A_n el área de un polígono con n lados iguales, inscrito en un círculo con radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $2\pi/n$, demuestre que
$$A_n = \tfrac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$
(b) Demuestre que $\lim_{n \to \infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugerencia:* use la ecuación 2 de la sección 3.4.]

5.2 Integral definida

En la sección 5.1 vimos que surge un límite de la forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\, \Delta x + f(x_2^*)\, \Delta x + \cdots + f(x_n^*)\, \Delta x]$$

cuando se calcula un área. También vimos que aparece cuando intentamos hallar la distancia recorrida por un objeto. Resulta que este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. En los capítulos 6 y 8 veremos que también surgen límites de la forma (1) al hallar longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y el trabajo, así como de otras cantidades. Por lo tanto, a este tipo de límite le damos un nombre y una notación especiales.

$\boxed{2}$ **Definición de integral definida** Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Denotamos con $x_0\ (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\ (= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y elegimos los **puntos muestra** $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b**, es

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

NOTA 1 □ Leibniz introdujo el símbolo $\int$ que se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\, dx$, $f(x)$ se llama **integrando**, y a y b se conocen como los **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. El símbolo dx no tiene significado; todo $\int_a^b f(x)\, dx$ es un símbolo. El procedimiento para calcular una integral se llama por sí mismo **integración**.

NOTA 2 □ La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número; no depende de x. De hecho, podríamos usar cualquier letra en lugar de x, sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

NOTA 3 □ Debido a que hemos supuesto que f es continua, se puede probar que el límite de la definición 2 siempre existe y da el mismo valor, sin importar cómo elijamos los puntos muestra x_i^*. Si tomamos como puntos muestra los puntos extremos derechos, entonces $x_i^* = x_i$ y la definición de integral queda

$$\boxed{3} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Si elegimos como puntos muestra los puntos extremos izquierdos, entonces $x_i^* = x_{i-1}$ y la definición queda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

De modo alternativo, podríamos elegir x_i^* como el punto medio del subintervalo o cualquier otro número entre x_{i-1} y x_i.

Aun cuando la mayor parte de las funciones que encontramos son continuas, el límite de la definición 2 también existe si f tiene un número finito de discontinuidades suprimibles o por salto (pero no discontinuidades infinitas). (Véase la Sec. 2.5.) De modo que también podemos definir la integral definida para esas funciones.

NOTA 4 □ La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que se presenta en la definición 2 se llama **suma de Riemann**, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826–1866). Sabemos que si f es positiva, la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación (Fig. 1). Al comparar la definición 2 con la definición de área de la sección 5.1, tenemos que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como el área debajo de la curva $y = f(x)$ desde a hasta b (Fig. 2).

□ Bernhard Riemann recibió su doctorado en Filosofía bajo la dirección del legendario Gauss, en la Universidad de Göttingen, y permaneció allí para enseñar. Gauss no tenía el hábito de "la mente creativa, activa, en verdad matemática y la gloriosamente fértil originalidad" de Riemann. La definición (2) de integral que usamos se debe a Riemann. También hizo colaboraciones importantes a la teoría de funciones de una variable compleja, a la fisicomatemática, a la teoría de números y a los fundamentos de la geometría. El amplio concepto de Riemann del espacio y de la geometría resultó ser, 50 años más tarde, el apoyo correcto para la teoría general de la relatividad de Einstein. La salud de Riemann fue mala durante toda su vida y murió de tuberculosis a los 39 años.

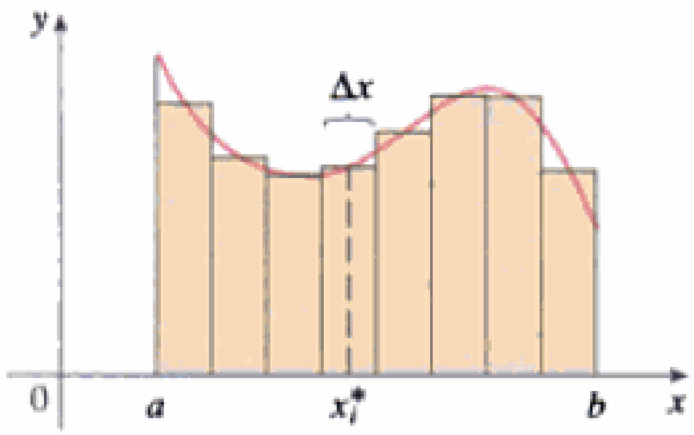


FIGURA 1
Si $f(x) \geq 0$, la suma de Riemann $\sum f(x_i^*)\Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos.

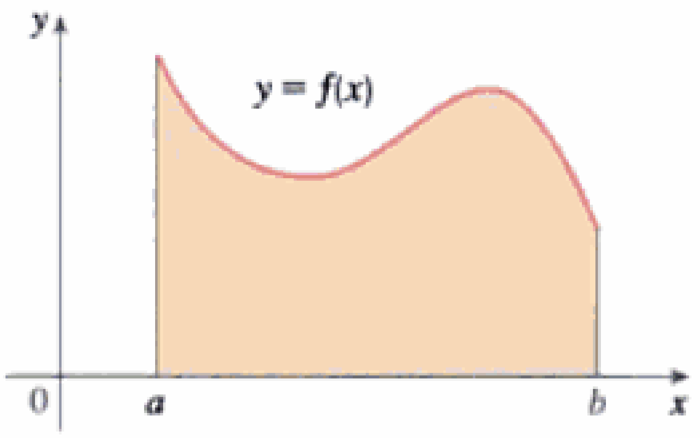


FIGURA 2
Si $f(x) \geq 0$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área bajo la curva $y = f(x)$, desde a hasta b.

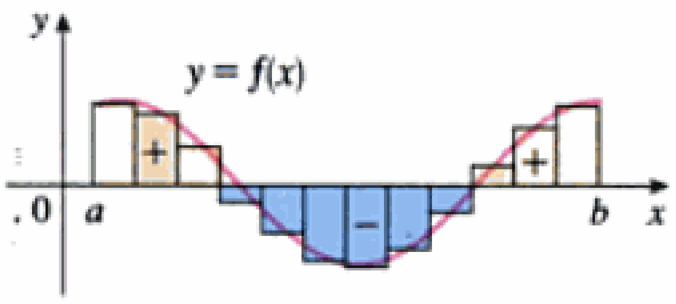


FIGURA 3
$\Sigma f(x_i^*)\Delta x$ es una aproximación al área final

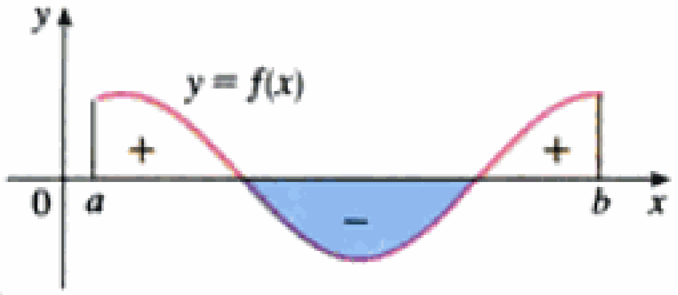


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área final

Si f toma valores tanto positivos como negativos (Fig. 3), entonces la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y los *negativos* de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x (las áreas de los rectángulos por arriba *menos* las áreas de los rectángulos por abajo). Cuando tomamos el límite de esas sumas de Riemann, obtenemos la situación ilustrada en la figura 4. Una integral definida puede interpretarse como una *diferencia de áreas*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f y A_2 corresponde a la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

NOTA 5 □ Aun cuando hemos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividiendo $[a, b]$ en subintervalos de misma longitud, hay situaciones en las que conviene trabajar con intervalos de distintas longitudes. Por ejemplo, en el ejercicio 12 de la sección 5.1, la NASA proporcionó los datos de la velocidad en tiempos desigualmente espaciados, no obstante fue posible estiman la distancia recorrida. Además, existen métodos para integración numérica que aprovechan la desigualdad de la longitud de los intervalos entre sí.

Si las longitudes de intervalos son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, tenemos que asegurar que estas longitudes se aproximan a 0 en el proceso límite. Esto ocurre si el más largo de los intervalos, máx Δx_i, tiende a cero. Así pues, en este caso la definición de una integral definida la tenemos como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

EJEMPLO 1 □ Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i]\,\Delta x$$

como una integral en el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN Al comparar el límite dado con el límite de la definición 2, vemos que será idéntico si elegimos

$$f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad x_i^* = x_i$$

(De modo que los puntos muestra son los puntos extremos de la derecha y el límite dado es de la forma de la ecuación 3.) Se nos da que $a = 0$ y $b = \pi$. Por lo tanto, por la definición 2 o la ecuación 3, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i]\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$ □

Más tarde, cuando apliquemos la integral definida a situaciones físicas, será importante reconocer (interpretar) los límites de sumas como integrales, como en el ejemplo 1. Cuando Leibniz eligió la notación para una integral, escogió los ingredientes que recordaran el proceso de tomar el límite. En general, cuando escribimos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

reemplazamos lím Σ con $\int$, x_i^* con x, y Δx con dx.

Evaluación de integrales

Cuando aplicamos la definición para evaluar una integral definida, necesitamos saber cómo trabajar con sumas. Las tres ecuaciones siguientes dan las fórmulas para las sumas de potencias de enteros positivos. Es posible que conozca la ecuación 4 por algún curso de álgebra. Las ecuaciones 5 y 6 se analizaron en la sección 5.1 y se prueban en el apéndice E.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{6}$$

Las fórmulas restantes son reglas sencillas para trabajar con la notación sigma:

□ Las fórmulas 7-10 se prueban escribiendo cada uno de los miembros en forma desarrollada. El primer miembro de la ecuación es

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

El segundo miembro es

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por la propiedad distributiva, son iguales. Las fórmulas restantes se discuten en el apéndice E.

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{10}$$

EJEMPLO 2 □

(a) Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ tomando los puntos extremos derechos como los puntos muestra y $a = 0$, $b = 3$, y $n = 6$.

(b) Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 6$ el ancho del intervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

y los extremos derechos son $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$, y $x_6 = 3.0$. De modo que la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x + f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$

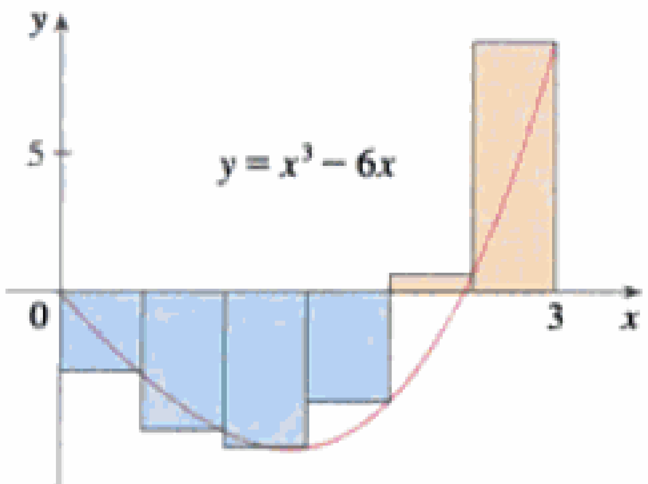


FIGURA 5

Advierta que f no es una función positiva, por lo que la suma de Riemann no representa una suma de áreas de rectángulos. Pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos que están arriba del eje x menos la suma de las áreas de los rectángulos que están abajo del eje x de la figura 5.

(b) Con n subintervalos, tenemos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Por consiguiente $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$, y, en general, $x_i = 3i/n$. Dado que usamos los puntos extremos derechos, podemos utilizar la ecuación 3:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] && \text{(ecuación 8 con } c = 3/n\text{)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] && \text{(ecuaciones 10 y 8)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75
\end{aligned}$$

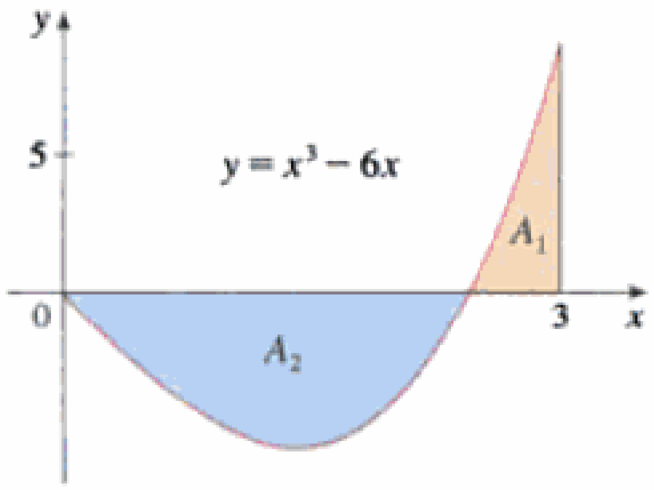


FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Esta integral no se puede interpretar como un área porque f toma valores positivos y negativos; pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.

En la figura 7 se ilustra el cálculo al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha, para $n = 40$. Los valores de la tabla hacen ver que las sumas de Riemann tienden al valor exacto de la integral, -6.75, cuando $n \to \infty$.

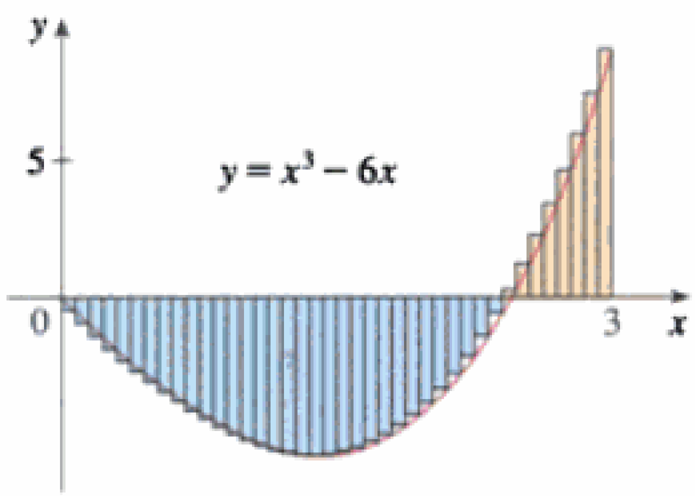


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	−6.3998
100	−6.6130
500	−6.7229
1000	−6.7365
5000	−6.7473

□

En la sección 5.3 se dará un método mucho más simple para evaluar la integral del ejemplo 2.

□ Debido a que $f(x) = e^x$ es positiva, la integral del ejemplo 3 representa el área que se muestra en la figura 8.

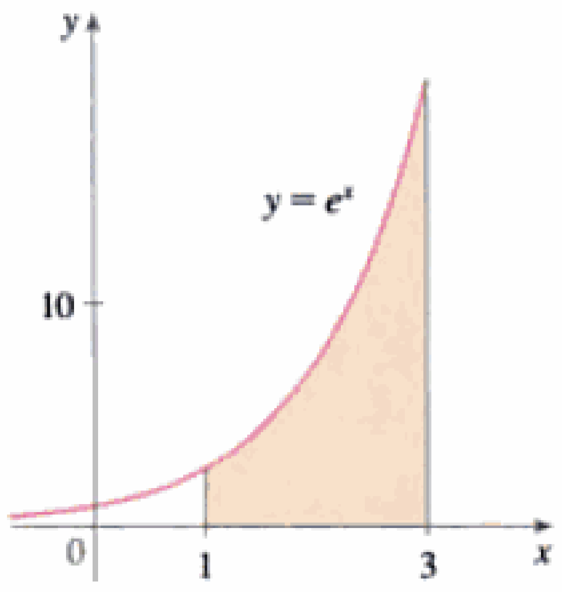


FIGURA 8

EJEMPLO 3
(a) Plantee una expresión para $\int_1^3 e^x\,dx$ como un límite de sumas.
(b) Use un SAC para evaluar la expresión.

SOLUCIÓN
(a) En este caso, tenemos $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$, y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

De modo que $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$, y

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

A partir de la ecuación 3, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}\end{aligned}$$

□ Un sistema algebraico para computadora, SAC, puede hallar una expresión explícita para esta suma, debido a que es una serie geométrica. El límite pudo hallarse mediante la aplicación de la regla de l'Hospital.

(b) Si pedimos a un SAC que evalúe la suma y simplifique, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Ahora le pedimos al SAC que evalúe el límite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n}-1} = e^3 - e$$ □

EJEMPLO 4 Evalúe las integrales siguientes interpretando cada una en términos de áreas.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

(b) $\int_0^3 (x-1)\,dx$

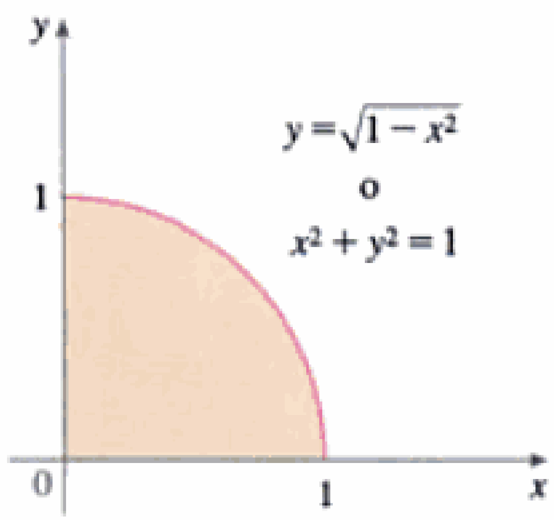


FIGURA 9

SOLUCIÓN
(a) Dado que $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, podemos interpretar esta integral como el área debajo de la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ desde 0 hasta 1. Pero, como $y^2 = 1 - x^2$, obtenemos $x^2 + y^2 = 1$, lo cual muestra que la gráfica de f es el cuarto de círculo, con radio de 1, de la figura 9. Por lo tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(En la Sec. 7.3, podremos *probar* que el área de un círculo de radio r es πr^2.)

(b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se presenta en la figura 10. Calculamos la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x - 1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1.5$$

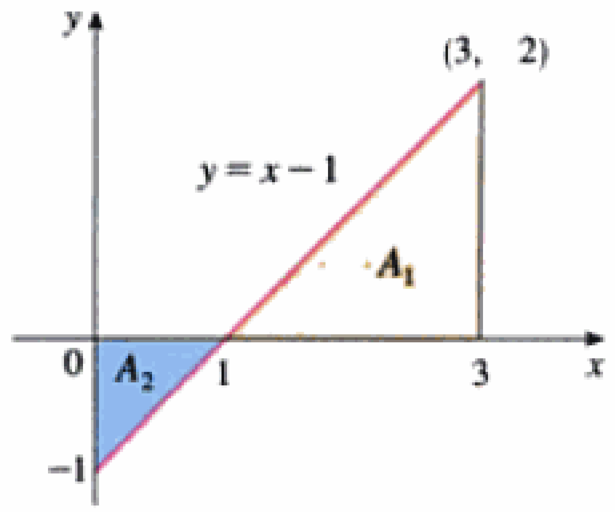


FIGURA 10

□

Regla del punto medio

A menudo elegimos el punto extremo de la derecha del i-ésimo intervalo como el punto muestra x_i^* porque resulta conveniente para calcular el límite. Pero si la finalidad es hallar una *aproximación* para una integral, conviene escoger el punto medio del intervalo como x_i^* el cual denotamos con $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usamos los puntos medio, obtenemos la aproximación siguiente.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

y $\qquad \bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

EJEMPLO 5 □ Use la regla del punto medio con $n = 5$ para hallar una aproximación de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Los puntos extremos de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, y 2.0, de modo que los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, y 1.9. El ancho de los subintervalos es $\Delta x = (2 - 1)/5 = \frac{1}{5}$, de suerte que la regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$
$$\approx 0.691908$$

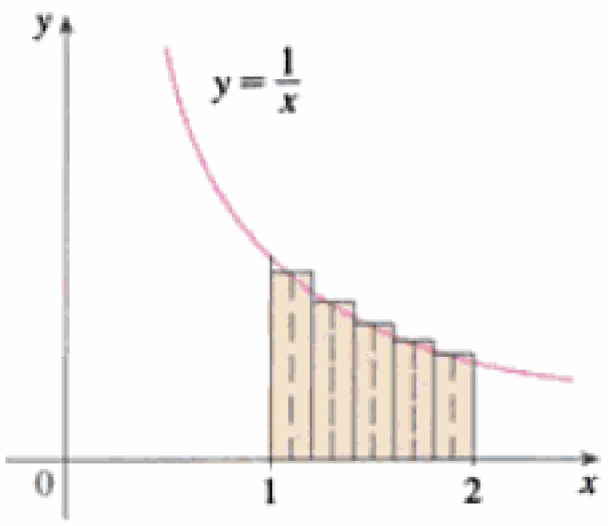


FIGURA 11

Puesto que $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leq x \leq 2$, la integral representa un área y la aproximación dada por la regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos mostrados en la figura 11. □

Por el momento no conocemos la exactitud de la aproximación del ejemplo 5, pero en la sección 7.7 aprenderemos un método para estimar el error implicado al emplear la regla del punto medio. Entonces describiremos otros métodos de cálculo de integrales definidas.

Si aplicamos la regla del punto medio a la integral del ejemplo 2 obtendremos la panorámica presentada en la figura 12. La aproximación $M_{40} \approx -6.7563$ está mucho más cercana al valor verdadero, -6.75 que la aproximación por la derecha, $R_{40} \approx -6.3998$, de la figura 7.

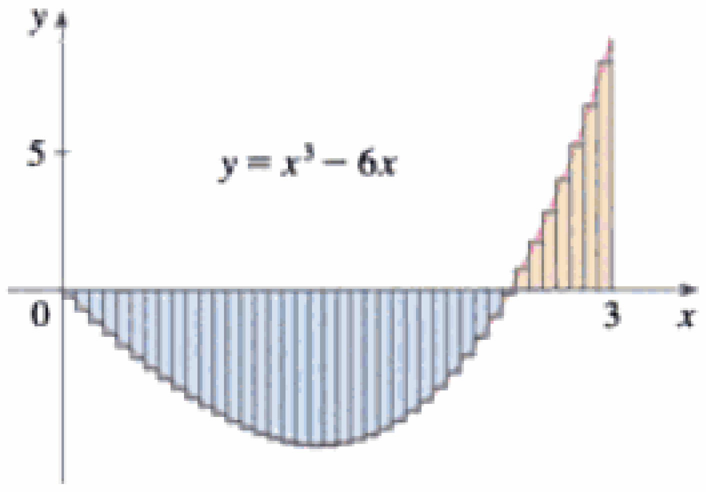


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6.7563$

Propiedades de la integral definida

Cuando definimos la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, implícitamente se supuso que $a < b$. Pero la definición como límite de sumas de Riemann tiene sentido aun si $a > b$. Observemos que si invertimos el orden de a y b, entonces Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. Por tanto,

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Si $a = b$, entonces $\Delta x = 0$ luego

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Ahora desarrollamos algunas propiedades básicas de las integrales que nos ayudarán a evaluarlas con más facilidad. Suponemos que f y g son funciones continuas.

Propiedades de la integral

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, en donde c es cualquier constante
2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, en donde c es cualquier constante
4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

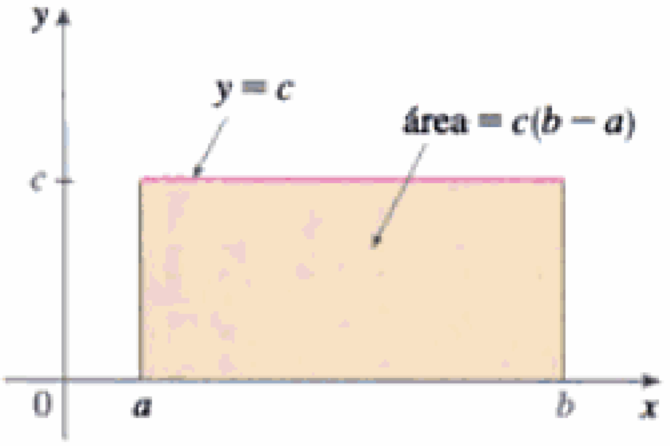


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$

La propiedad 1 nos dice que la integral de una función constante $f(x) = c$ es igual a la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, era de esperarse, porque $c(b - a)$ es el área del rectángulo sombreado en la figura 13.

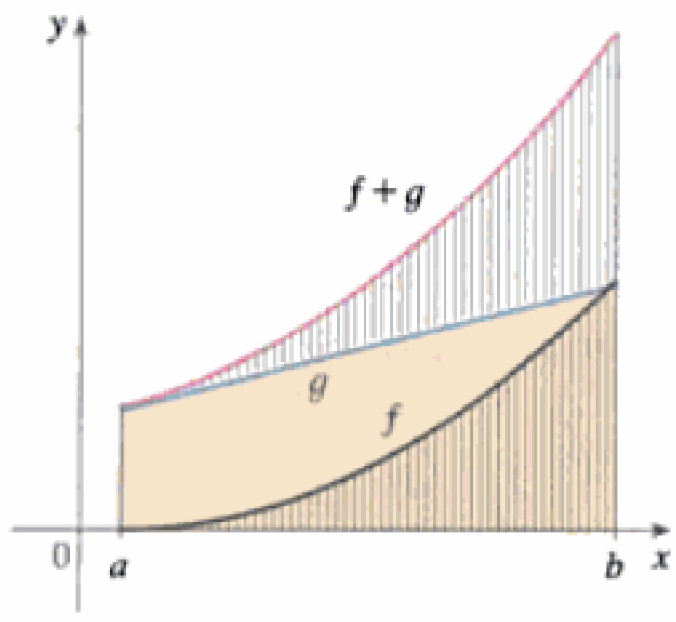


FIGURA 14
$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

□ La propiedad 3 parece razonable intuitivamente porque sabemos que multiplicar una función por un número positivo c estira o encoge la gráfica en sentido vertical por el factor c. De modo que estira y comprime cada rectángulo de aproximación por el factor c y su efecto es mutiplicar el área por c.

La propiedad 2 indica que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para las funciones positivas afirma que el área bajo $f + g$ es el área bajo f más el área por debajo de g. La figura 14 nos ayuda a entenderlo. En virtud de cómo funciona la adición gráfica los segmentos verticales correspondientes tienen la misma altura.

En general la propiedad 2 se sigue de la ecuación 3 y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites.

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

La propiedad 3 puede demostrarse de forma semejante y medir que la integral de una función multiplicada por una constante es la constante por la integral de la función. En otras palabras, una constante puede "sacarse" de la integral (pero *sólo* una constante). La propiedad 4 se demuestra escribiendo $f - g = f + (-g)$ y usando las propiedades 2 y 3 con $c = -1$.

EJEMPLO 6 □ Use las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx$.

SOLUCIÓN Con las propiedades 2 y 3, tenemos

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

Por la propiedad 1,

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

y en el ejemplo 2 de la sección 5.1 encontramos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Así

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx &= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx \\ &= 4 + 3\cdot\tfrac{1}{3} = 5\end{aligned}$$

□

La propiedad siguiente nos dice cómo se cambian las integrales de una misma función sobre intervalos adyacentes:

$$\boxed{\textbf{5.}\quad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

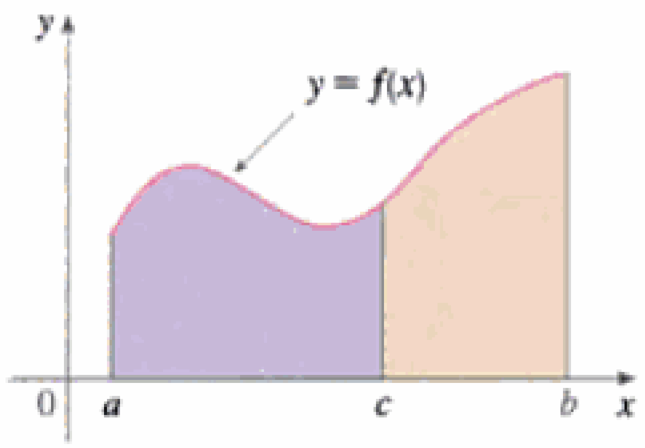


FIGURA 15

Esto no es fácil de probar en general, pero en el caso de que $f(x) \geq 0$ y $a < c < b$ la propiedad 5 puede verse en la interpretación geométrica de la figura 15: el área bajo $y = f(x)$ desde a hasta c más el área de c a b es el área total de a hasta b.

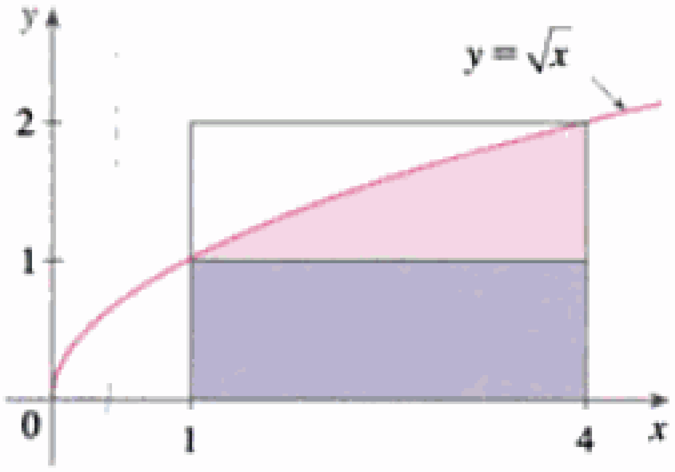


FIGURA 17

$m = f(1) = 1$ y su máximo absoluto es sobre $[1, 4]$ es $M = f(4) = \sqrt{4} = 2$. Así, la propiedad 8 implica

$$1(4-1) \leq \int_1^4 \sqrt{x}\, dx \leq 2(4-1)$$

o bien

$$3 \leq \int_1^4 \sqrt{x}\, dx \leq 6$$

□

El resultado del ejemplo 8 se ilustra en la figura 17. El área bajo $y = \sqrt{x}$ desde 1 hasta 4 es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del rectángulo grande.

5.2 Ejercicios

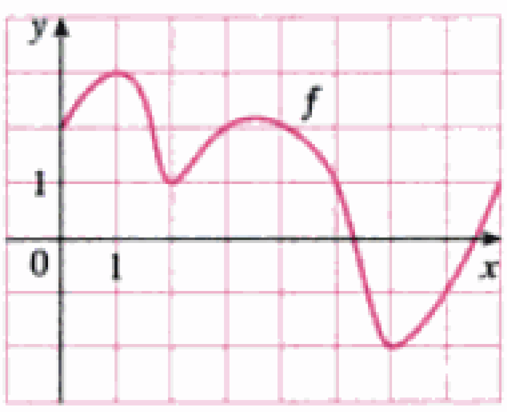
1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 2 - x^2$, $0 \leq x \leq 2$, con cuatro subintervalos; tome los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Con la ayuda de un diagrama explique, qué representa la suma de Riemann.

2. Si $f(x) = \ln x - 1$, $1 \leq x \leq 4$, evalúe la suma de Riemann con $n = 6$; tome los puntos extremos de la izquierda como los puntos muestra. (Dé su respuesta correcta hasta seis decimales.) ¿Qué representa la suma de Riemman? Ilustre la respuesta con un diagrama.

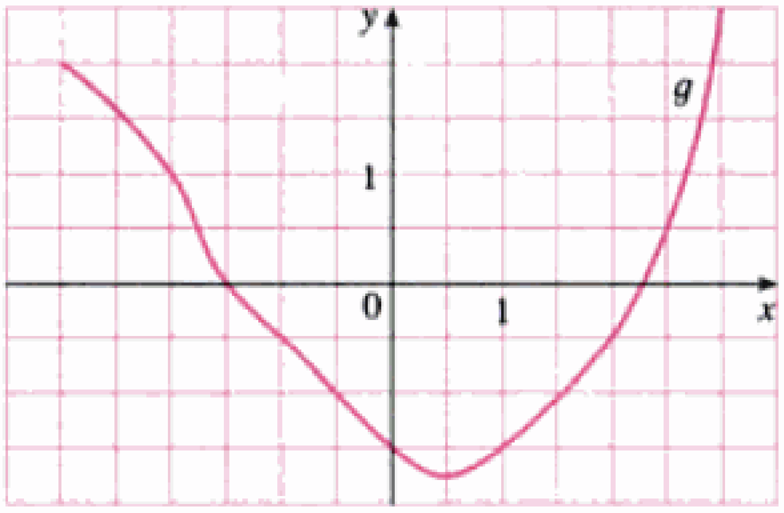
3. Si $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, escriba la suma de Riemann con $n = 5$ y evalúela con seis decimales correctos con puntos muestra en los puntos medios. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

4. (a) Halle la suma de Riemann para $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} 2x$, $0 \leq x \leq 3$, con seis términos si los puntos de muestra son los puntos extremos derechos. (La respuesta tendrá seis decimales correctos.) Explique lo que representa la suma de Riemann con un dibujo.
   (b) Repita (a) con puntos medios muestra.

5. Se da la gráfica de una función f. Estime $\int_0^8 f(x)\, dx$ usando cuatro subintervalos con (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios.



6. Se exhibe la gráfica de g. Estimar $\int_{-3}^{3} g(x)\, dx$ con seis subintervalos y usando (a) extremos derechos, (b) izquierdos y (c) puntos medios.



7. Se muestra una tabla de valores de una función creciente, f. Use la tabla para encontrar las estimaciones inferior y superior para $\int_0^{25} f(x)\, dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	−42	−37	−25	−6	15	36

8. En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_0^6 f(x)\, dx$ usando tres subintervalos iguales (a) con los puntos extremos de la derecha (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores que el valor de la integral o mayores que éste?

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	9.3	9.0	8.3	6.5	2.3	−7.6	−10.5

9–12 □ Use la regla del punto medio, con el valor dado de n, para hallar una aproximación de cada integral. Redondee cada respuesta hasta cuatro cifras decimales.

9. $\int_0^{10} \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx$, $n = 5$

10. $\int_0^{\pi} \sec(x/3)\, dx$, $n = 6$

11. $\int_1^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx$, $n = 10$

12. $\int_2^4 x \ln x\, dx$, $n = 4$

SAC **13.** Si tiene un SAC que evalúe las aproximaciones con los puntos medios y grafique los rectángulos correspondientes (en Maple, use los comandos de middlesum y middlebox), compruebe la respuesta para el ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. Enseguida, repita con $n = 20$ y $n = 30$.

14. Con una calculadora programable o una computadora (vea las instrucciones para el ejerc. 7, Sec. 5.1), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ sobre el intervalo $[1, 2]$ con $n = 100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$1.805 < \int_1^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx < 1.815$$

Deduzca que la aproximación con el uso de la regla del punto medio, con $n = 10$ en el ejercicio 11 es exacto con dos decimales.

15–18 □ Exprese el límite como una integral definida sobre el intervalo dado.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \operatorname{sen} x_i\, \Delta x, \quad [0, \pi]$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{e^{x_i}}{1 + x_i}\, \Delta x, \quad [1, 5]$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} [2(x_i^*)^2 - 5x_i^*]\, \Delta x, \quad [0, 1]$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^*}\, \Delta x, \quad [1, 4]$

19–23 □ Use la forma de la definición de la integral dada en la ecuación 3 para evaluar la integral.

19. $\int_{-1}^{5} (1 + 3x)\, dx$

20. $\int_{1}^{5} (2 + 3x - x^2)\, dx$

21. $\int_0^2 (2 - x^2)\, dx$

22. $\int_0^5 (1 + 2x^3)\, dx$

23. $\int_1^2 x^3\, dx$

24. (a) Encuentre una aproximación para la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$ usando una suma de Riemann de extremos derechos y $n = 8$.
(b) Dibuje un diagrama como el de la figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso (a).
(c) Use la ecuación 3 para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.
(d) Interprete la integral del inciso (c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la figura 4.

25. Pruebe que $\displaystyle\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

26. Pruebe que $\displaystyle\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

SAC **27–28** □ Exprese la integral como un límite de sumas. Enseguida, evalúe con un SAC, para hallar la suma y el límite.

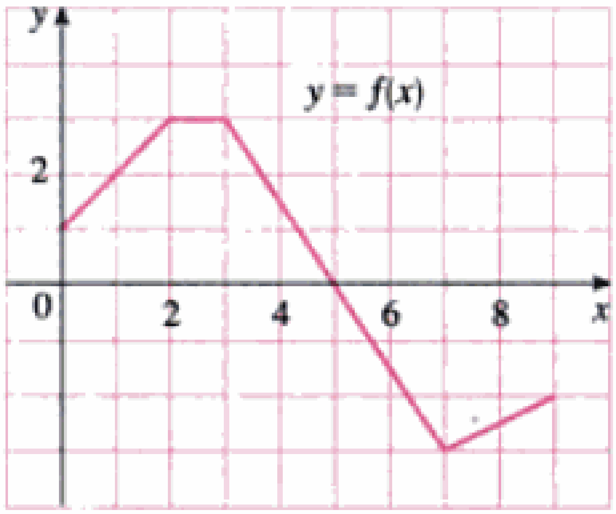
27. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 5x\, dx$

28. $\int_2^{10} x^6\, dx$

29. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

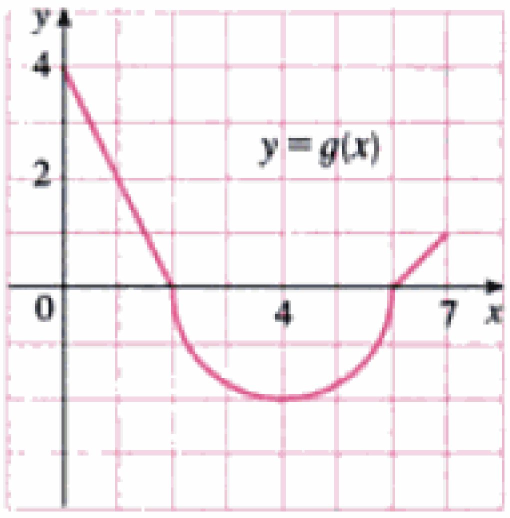
(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\, dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\, dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\, dx$



30. La gráfica g consta de dos rectas y un semicírculo. Úsela para evaluar cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\, dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\, dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\, dx$



31–36 □ Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

31. $\int_1^3 (1 + 2x)\, dx$

32. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$

33. $\int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

34. $\int_{-1}^{3} (2 - x)\, dx$

35. $\int_{-2}^{2} (1 - |x|)\, dx$

36. $\int_0^3 |3x - 5|\, dx$

37. Sabiendo que $\int_4^9 \sqrt{x}\, dx = \frac{38}{3}$, ¿qué es $\int_9^4 \sqrt{t}\, dt$?

38. Evalúe $\int_1^1 x^2 \cos x\, dx$.

2. (a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Bosquéjela.

(b) Use el resultado del Ejercicio 26, sección 5.2 para hallar una expresión para $A(x)$.

(c) Halle $A'(x)$. ¿Qué observa?

(d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño entonces $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y bosqueje la región.

(e) Trace un rectángulo que aproxime la región de la parte (d). Comparando las áreas de estas dos regiones, mostrar que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Usar la parte (e) para dar una explicación intuitiva al resultado de la parte (c).

3. (a) Haga la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ en la pantalla $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.

(b) Si definimos una nueva función g mediante

$$g(x) = \int_{0}^{x} \cos(t^2)\, dt$$

entonces $g(x)$ es el área bajo la gráfica de f desde 0 hasta x [hasta el punto donde $f(x)$ se hace negativa, pues en ese punto $g(x)$ se convierte en diferencia de áreas]. Use el incio (a) para determinar el valor de x en el que $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia del problema 2 es imposible evaluar la integral que define a g para obtener una expresión explícita de $g(x)$.]

(c) Use el comando de integración en su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6)$, . . . , $g(1.8)$, $g(2)$. Entonces use estos valores para bosquejar una gráfica de g.

(d) Utilice su gráfica de g del inicio (c) para bosquejar la gráfica de g' usando la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Cómo se compara la gráfica de g' con la gráfica de f?

4. Suponga que f es continua en el intervalo $[a, b]$ y que definimos una nueva función g con la ecuación

$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

Con base en sus resultados en los problemas 1-3, haga una conjetura sobre una expresión para $g'(x)$.

5.3 Teorema fundamental del cálculo

El nombre **teorema fundamental del cálculo** es apropiado, porque dicho teorema establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El cálculo diferencial surgió del problema de la tangente, mientras que el cálculo integral se debe a un hecho aparentemente ajeno, el problema del área. Isaac Barrow (1630-1677), el profesor de Newton en Cambridge, descubrió que esos dos problemas se relacionan. Se dio cuenta de que la diferenciación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo proporciona la relación inversa precisa entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz aprovecharon esa relación y la emplearon para convertir el cálculo en un método matemático sistemático. En particular vieron que el teorema fundamental les permitía calcular áreas e integrales con suma facilidad, sin tener que determinarlas como límites de sumas, como en las secciones 5.1 y 5.2.

Para llegar al teorema fundamental, sea f una función continua en $[a, b]$ y definamos una nueva función, g, mediante

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

con $a \leqslant x \leqslant b$. Observará que g sólo depende de x, aparece como el límite superior variable en la integral. Si x es un número fijo, la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ es un número definido. Si a continuación dejamos que x varíe, el número $\int_a^x f(t)\,dt$ también varía y define a una función de x representada por $g(x)$. Por ejemplo, sean $f(t) = t$ y $a = 0$, entonces, aprovechando el resultado del ejercicio 25, sección 5.2, tenemos que

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

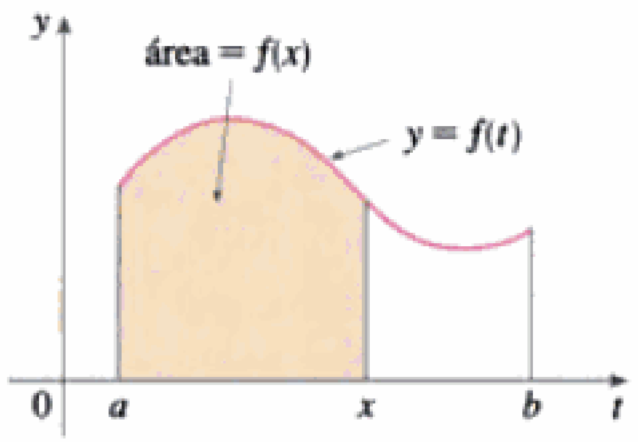


FIGURA 1

Obsérvese que $g'(x) = x$, esto es, que $g' = f$. En otras palabras, si definimos g como la integral de f mediante la ecuación (1), resulta que g es una antiderivada de f, cuando menos en este caso.

Para ver por qué podría ser cierto esto en general, nos fijaremos en cualquier función continua f donde $f(x) \geqslant 0$. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ se puede interpretar como el área bajo la gráfica de f, de a a x, en que x puede variar de a a b. (Imagine que g es la función "área hasta"; Fig. 1.)

Para calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada observamos que cuando $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene restando áreas, de modo que es el área bajo la gráfica de f desde x hasta $x + h$ (el área de color en la Fig. 2). Cuando h es pequeña en la figura puede ver que esta área es, aproximadamente, igual al área del rectángulo de altura $f(x)$ y anchura h:

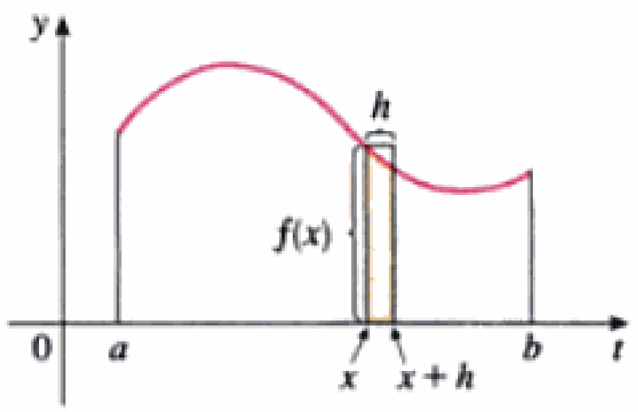


FIGURA 2

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

así que

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

Por eso, a nivel intuitivo esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que lo anterior sea cierto, aun cuando f no necesariamente sea positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

□ Abreviamos el nombre de este teorema como TFC1. En palabras dice que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado en el límite superior.

Teorema fundamental del cálculo, primera parte Si f es continua en $[a, b]$, la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Demostración Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

EJEMPLO 1 □ Determina la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Como $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la primera parte del teorema fundamental del cálculo da como resultado

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

EJEMPLO 2 □ Aunque podría parecer que una fórmula como $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es un raro modo de definir una función, los libros de física, química y estadística están llenos de esas funciones; por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

lleva el apellido de Agustin Fresnel (1788-1827), físico francés, famoso por sus trabajos en óptica. Esta función apareció por primera vez en su Teoría de la difracción de las ondas luminosas, pero últimamente se ha aplicado al diseño de autopistas.

La primera parte del teorema fundamental del cálculo nos dice cómo diferenciar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$$

Esto significa que podemos aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (Ejer. 53).

En la figura 4 se muestran las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ y de la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Empleamos una computadora a fin de graficar S, calculando el valor de esta integral para muchos valores de x. En efecto, parece como si $S(x)$ fuera el área bajo la gráfica de f desde 0 hasta $x \approx 1.4$ [cuando $S(x)$ se vuelve diferencia de áreas]. La figura 5 exhibe una mayor parte de la gráfica de S.

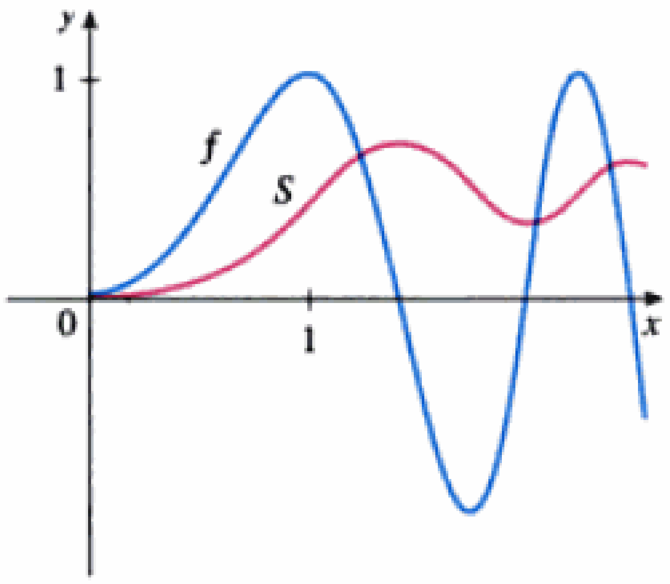


FIGURA 4
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

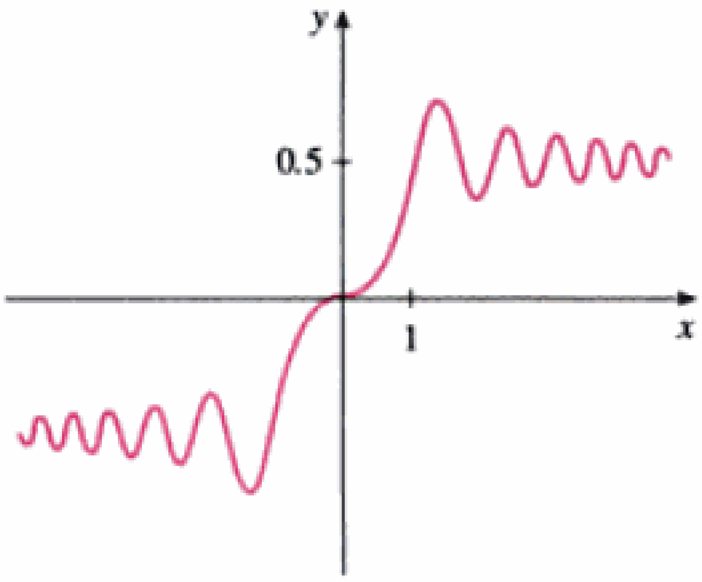


FIGURA 5
La función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

Si ahora comenzamos con la gráfica de S en la figura 4 y nos imaginamos cómo se debería ver la gráfica de su derivada, suena razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$.] De este modo obtenemos una confirmación visual de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo. □

EJEMPLO 3 □ Determina $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUCIÓN En este caso debemos emplear la regla de la cadena junto con la primera parte del teorema fundamental del cálculo. Sea $u = x^4$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\, dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\, dt \\
&= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\, dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(según la regla de la cadena)} \\
&= \sec u \frac{du}{dx} && \text{(según TFC1)} \\
&= \sec(x^4)\cdot 4x^3
\end{aligned}$$

□

En la sección 5.2 calculamos integrales a partir de la definición como límite de sumas de Riemann y vimos que a veces este procedimiento es largo y difícil. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, que se deduce con facilidad de la primera parte, ofrece un método mucho más sencillo para evaluar las integrales.

Teorema fundamental del cálculo, segunda parte Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

en donde F es cualquier antiderivada de f, esto es, una función tal que $F' = f$.

Demostración Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Sabemos, de acuerdo con la primera parte, que $g'(x) = f(x)$; esto es, que g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en $[a, b]$, según el corolario 7 sección 4.2, F y g difieren en una constante:

$$F(x) = g(x) + C \tag{6}$$

cuando $a < x < b$. Pero F y g, son continuas en $[a, b]$ y así, tomando límites en ambos lados de la ecuación (6) (cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$), vemos que también es válido cuando $x = a$ y $x = b$.

Si sustituimos $x = a$ en la fórmula de $g(x)$, obtenemos

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

Así, al emplear la ecuación (6) con $x = b$ y $x = a$, tenemos

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\
&= g(b) - g(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\, dt
\end{aligned}$$

□

La segunda parte del teorema fundamental del cálculo establece que si conocemos una antiderivada, F, de f, podremos evaluar $\int_a^b f(x)\, dx$ con sólo restar los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)\, dx$, que definimos con un pro-

Hicimos notar que la parte 1 se puede volver a escribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

en la cual se afirma que si integramos f y, a continuación, derivamos el resultado, regresamos a la función original f. Ya que $F'(x) = f(x)$, la parte 2 puede reescribirse como

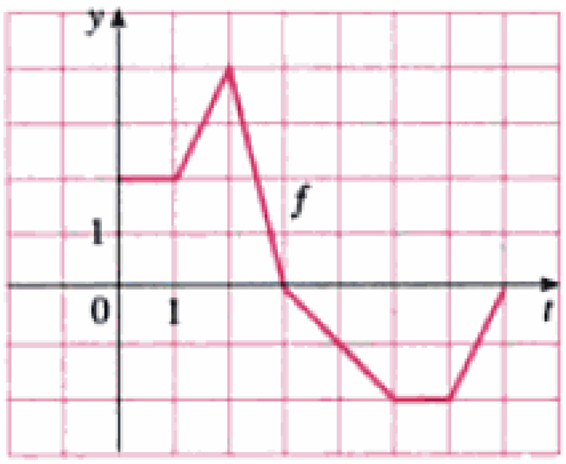
$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En esta versión se afirma que si tomamos una función F, la derivamos y luego integramos el resultado, volvemos a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

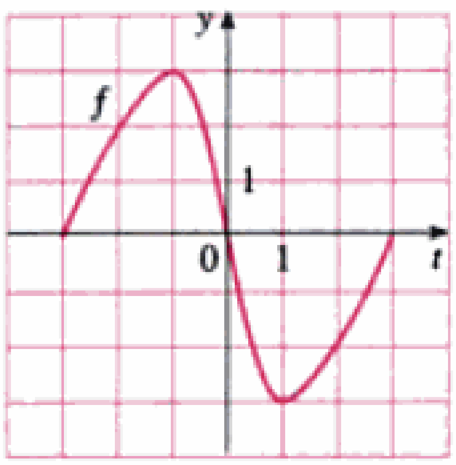
Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el teorema más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía vencer el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz moldearon como el teorema fundamental, en los próximos capítulos veremos que estos estimulantes problemas son accesibles para todos.

5.3 Ejercicios

1. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, y $g(6)$.
(b) ¿Sobre cuáles intervalos g es creciente?
(c) ¿Dónde tiene g un valor máximo?
(d) Dibuje una gráfica aproximada de g.



2. Sea $g(x) = \int_{-3}^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(-3)$ y $g(3)$.



(b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$, y $g(0)$.
(c) ¿Sobre cuál intervalo es g creciente?
(d) ¿Dónde tiene g un valor máximo?
(e) Bosqueje la gráfica de g.
(f) Use la gráfica del inciso (e) para dibujar la gráfica de $g'(x)$. Compare con la gráfica de f.

3–4 □ Haga un esquema del área representada por $g(x)$. A continuación, encuentre $g'(x)$ de dos maneras: (a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y (b) evaluando la integral con la aplicación de la parte 2 y, después, derivando.

3. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

4. $g(x) = \int_\pi^x (2 + \cos t)\,dt$

5–16 □ Use la parte del (TFC2) para hallar la derivada de la función dada.

5. $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 2t}\,dt$

6. $g(x) = \int_1^x \ln t\,dt$

7. $g(y) = \int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\,dt$

8. $g(u) = \int_{-1}^u \frac{1}{x + x^2}\,dx$

9. $F(x) = \int_x^2 \cos(t^2)\,dt$

$$\left[\textit{Sugerencia } \int_x^2 \cos(t^2)\,dt = -\int_2^x \cos(t^2)\,dt\right]$$

10. $F(x) = \int_x^{10} \tan\theta\,d\theta$

11. $h(x) = \int_2^{1/x} \arctan t\, dt$

12. $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\, dr$

13. $y = \int_3^{\sqrt{x}} \dfrac{\cos t}{t}\, dt$

14. $y = \int_1^{\cos x} (t + \operatorname{sen} t)\, dt$

15. $y = \int_{1-3x}^{1} \dfrac{u^3}{1 + u^2}\, du$

16. $y = \int_{e^x}^{0} \operatorname{sen}^3 t\, dt$

17–40 □ Use la segunda parte del teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral; explique si no existe.

17. $\int_{-1}^{3} x^5\, dx$

18 $\int_1^2 x^{-2}\, dx$

19. $\int_2^8 (4x + 3)\, dx$

20. $\int_0^4 (1 + 3y - y^2)\, dy$

21. $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$

22. $\int_0^1 x^{3/7}\, dx$

23. $\int_1^2 \dfrac{3}{t^4}\, dt$

24. $\int_{-1}^{1} \dfrac{3}{t^4}\, dt$

25. $\int_3^3 \sqrt{x^5 + 2}\, dx$

26. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta\, d\theta$

27. $\int_{-4}^{2} \dfrac{2}{x^6}\, dx$

28. $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

29. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen} t\, dt$

30. $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})\, dx$

31. $\int_{-\pi/2}^{\pi} \sec x \tan x\, dx$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi} \sec^2 \theta\, d\theta$

33. $\int_1^9 \dfrac{1}{2x}\, dx$

34. $\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^x\, dx$

35. $\int_8^9 2^t\, dt$

36. $\int_{-e^2}^{-e} \dfrac{3}{x}\, dx$

37. $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{6}{1 + x^2}\, dx$

38. $\int_0^{0.5} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

39. $\int_0^2 f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^5 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

40. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$

41–44 □ Use una gráfica para dar un estimado preliminar del área de la región por debajo de la curva dada. Luego, encuentra el área exacta.

41. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leq x \leq 27$

42. $y = x^{-4}, \quad 1 \leq x \leq 6$

43. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

44. $y = \sec^2 x, \quad 0 \leq x \leq \pi/3$

45–46 □ Evalúe la integral e interprete la diferencia de áreas. Ilustre con un bosquejo.

45. $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$

46. $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

47–50 □ Encuentre la derivada de la función.

47. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \dfrac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\, du$

$$\left[\textit{Sugerencia} \int_{2x}^{3x} f(u)\, du = \int_{2x}^{0} f(u)\, du + \int_0^{3x} f(u)\, du \right]$$

48. $g(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \dfrac{1}{\sqrt{2 + t^4}}\, dt$

49. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \operatorname{sen} t\, d$

50. $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\, du$

51. Si $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, donde $f(t) = \int_1^{t^2} \dfrac{\sqrt{1 + u^4}}{u}\, du$, halle $F''(2)$.

52. Encuentre el intervalo sobre el cual la curva

$$y = \int_0^x \frac{1}{1 + t + t^2}\, dt$$

es cóncava hacia arriba.

53. La función S de Fresnel se definió en el ejemplo 2, y su gráfica se encuentra en las figuras 4 y 5.

(a) ¿En cuáles valores de x esta función tiene valores máximos locales?

(b) ¿Sobre cuáles intervalos la función es cóncava hacia arriba?

SAC (c) Use la gráfica para resolver la ecuación siguiente, hasta una cifra decimal correcta:

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt = 0.2$$

SAC **54.** La **función integral senoidal**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

es importante en ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$ pero sabemos que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que definimos $f(0) = 1$ y esto hace que f sea continua en todas partes.]

(a) Dibuje la gráfica de Si.

(b) ¿En cuáles valores de x esta función tiene valores máximos locales?

(c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

(d) ¿Esta función tiene asíntotas horizontales?

(e) Resuelva la ecuación siguiente, correctamente hasta un decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

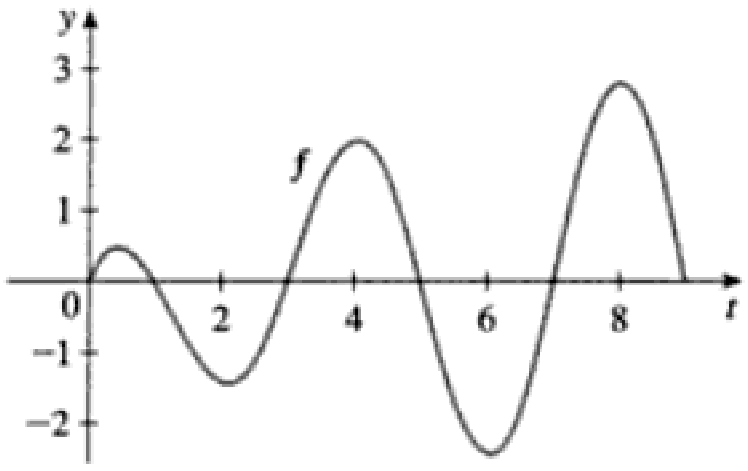
55–56 □ Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

(a) ¿En cuáles valores de x se tienen los valores máximos y mínimos locales de g?

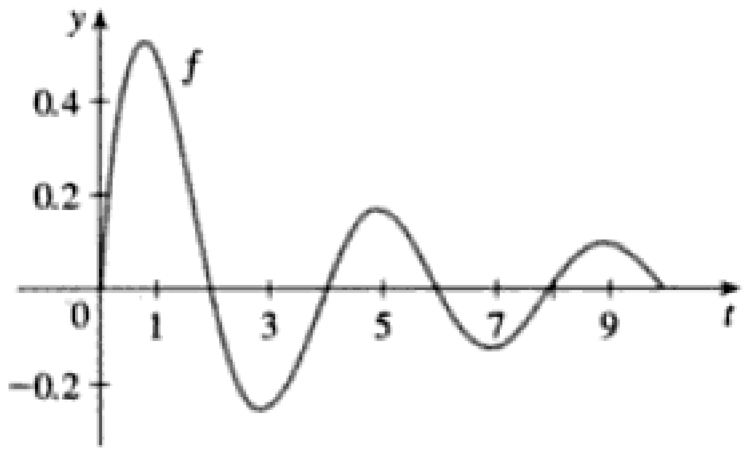
(b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?

(c) ¿Sobre cuáles intervalos g es cóncava hacia abajo?
(d) Dibuje la gráfica g.

55.



56.



57–58 □ Evalúe la integral e interprétela como diferencia de áreas. Ilustre con un dibujo en $[0, 1]$.

57. $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

58. $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$

59. Justifique (3) para el caso $h < 0$.

60. Si f es continua y g y h son funciones derivables encontrar una fórmula para

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$$

61. (a) Muestre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.
(b) Muestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx \leqslant 1.25$.

62. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

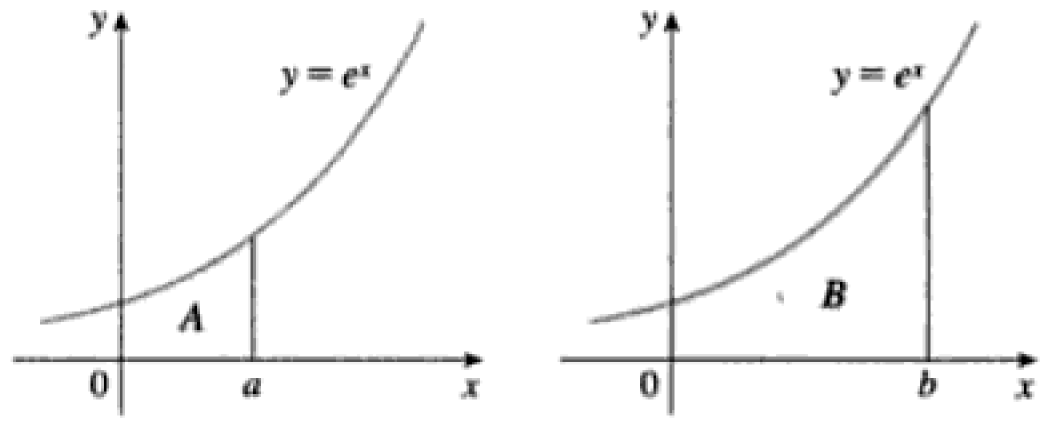
(a) Halle una expresión para $g(x)$ semejante a la de $f(x)$.
(b) Dibuje las gráficas de f y g.
(c) ¿En dónde f es derivable? ¿En donde es diferenciable g?

63. Encuentre una función f y un número a tales que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt = 2\sqrt{x}$$

para toda $x > 0$.

64. El área rotulada con B es el triple de la A. Exprese b en términos de a.



65. Una compañía manufacturera posee una pieza importante del equipo que se deprecia a la tasa (continua) de $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde su última reparación general. Debido a que se incurre en un costo fijo A cada vez que se le hace este tipo de reparación, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre reparaciones.
(a) Demuestre que $\int_0^t f(s)\, ds$ representa la pérdida en valor de la máquina durante el periodo t desde la última reparación general.
(b) Sea $C = C(t)$ dado por

$$C(t) = \frac{1}{t} \left[A + \int_0^t f(s)\, ds \right]$$

¿Qué representa C y por qué la compañía desearía minimizar C?
(c) Demuestre que C tiene un valor mínimo en los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

66. Una compañía de alta tecnología compra un nuevo sistema de computación cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará a la razón $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento a la razón $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía quiere determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.
(a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t [f(s) + g(s)]\, ds$$

Demuestre que se tienen los números críticos de C en los números t en donde $C(t) = f(t) + g(t)$.
(b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y

$$g(t) = \frac{Vt^2}{12{,}900} \qquad t > 0$$

Determine el lapso T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ sea igual al valor inicial V.
(c) Determine el mínimo absoluto de C en $(0, T]$.
(d) Dibuje las gráficas de C y de $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado en el inciso (a) en este caso.

5.4 Integrales indefinidas y teorema del cambio total

En la sección 5.3 se vio que la segunda parte del TFC proporciona un método muy poderoso para evaluar la integral definida de una función, siempre que podamos encontrar una antiderivada de la función. En esta sección introducimos una notación para las antiderivadas, revisamos las fórmulas de las antiderivadas, y las usamos para evaluar integrales definidas. También damos una reformulación del TFC2 que es más adecuada de aplicar en la ciencia y la solución de problemas de ingeniería.

Integrales indefinidas

Las dos partes del teorema fundamental establecen una conexión entre las antiderivadas y las integrales definidas. La parte 1 afirma que si f es continua entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 dice que $\int_a^b f(x)\,dx$ puede encontrarse evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Necesitamos una notación conveniente para las antiderivadas que facilite su manejo. Debido a la relación que el teorema fundamental establece entre las antiderivadas y las integrales, la notación $\int f(x)\,dx$ se usa tradicionalmente para una antiderivada de f y se llama una **integral indefinida**. Así

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)}$$

Por ejemplo, podemos escribir

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De esta forma podemos considerar una integral indefinida como toda una *familia* de funciones (una antiderivada para cada valor de la constante C).

Habrá que distinguir con cuidado las integrales definidas de las integrales indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número, en tanto que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una función (o familia de funciones). La conexión entre ellas está dada por la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

La efectividad del teorema fundamental depende de contar con una lista de antiderivada de funciones. Así, volveremos a escribir la tabla de fórmulas de antiderivación de la sección 4.10 junto con otras más en la nueva notación de las integrales indefinidas. Cualquier fórmula se podrá verificar derivando la función del lado derecho para obtener el integrando. Por ejemplo

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

EJEMPLO 2 □ Evalúe $\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUCIÓN Esta integral indefinida no se ve de inmediato en la tabla 1 de modo que reescribimos la función usando dos identidades trigonométricas y luego integramos:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$
$$= \int \csc\theta\cot\theta\,d\theta = -\csc\theta + C$$

□

EJEMPLO 3 □ Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Aplicamos la segunda parte del teorema fundamental y la tabla 1

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\Big]_0^3$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$
$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75$$

Compare este cálculo con el ejemplo 2(b), sección 5.2. □

□ La figura 2 muestra la gráfica del integrando del ejemplo 4. Sabemos (sección 5.2) que el valor de la integral puede interpretarse como la suma de las áreas rotuladas con un signo positivo menos las áreas rotuladas con signo de menos.

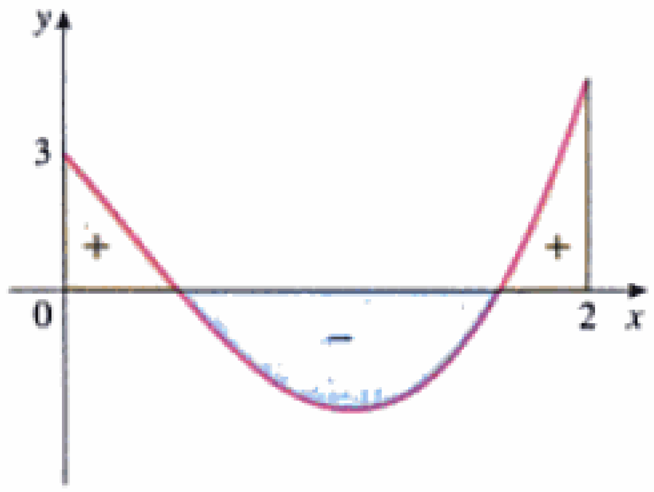


FIGURA 2

EJEMPLO 4 □ Halle $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete el resultado en términos de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental nos da

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0$$
$$= -4 + 3\tan^{-1}2$$

Este es el valor exacto de la integral. Si se quiere una aproximación decimal se usa una calculadora para $\tan^{-1}2$. Haciéndolo se obtiene

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0.67855$$

□

EJEMPLO 5 □ Evalúe $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUCIÓN Primero simplificamos el integrando por división:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$
$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9$$
$$= \left[2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$
$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

□

Aplicación

La parte 2 del teorema fundamental afirma que si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F' = f$ de modo que la ecuación puede volverse a escribir como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa la razón de cambio de $y = F(x)$ con respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio en y cuando x cambia de a a b. De modo que el TFC2 puede ser reformulado en palabras como sigue.

Teorema del cambio total La integral de una razón de cambio es el cambio total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este principio se puede aplicar a todas las razones de cambio que se presentan en las ciencias naturales y las ciencias sociales que discutimos en la sección 3.3. A continuación algunos casos de esta idea:

- Si $V(t)$ es el volumen del agua en un depósito en el instante t, entonces su derivada $V'(t)$ es la razón a la que fluye hacia adentro del depósito en el instante t. De manera que

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

  es el cambio en la cantidad almacenada de agua entre t_1 y el tiempo t_2.
- Si $[\mathrm{C}](t)$ es la concentración del producto de una reacción química en el tiempo t entonces la tasa de reacción es la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$. Así

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

  si el cambio en la concentración de C del tiempo t_1 al t_2.
- Si la masa de una varilla medida desde el extremo izquierdo hasta un punto x es $m(x)$, entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Así

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

  es la masa del segmento de varilla entre $x = a$ y $x = b$.
- Si la tasa de crecimiento de una población es dn/dt, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

  es el incremento de población en el periodo de t_1 a t_2.

- Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de una mercancía, entonces el costo marginal es la derivada $C'(x)$. Así

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

es el incremento en el costo cuando la producción aumenta de x_1 a x_2 unidades.

- Si un objeto se mueve en una línea recta según la función de posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$, de modo que

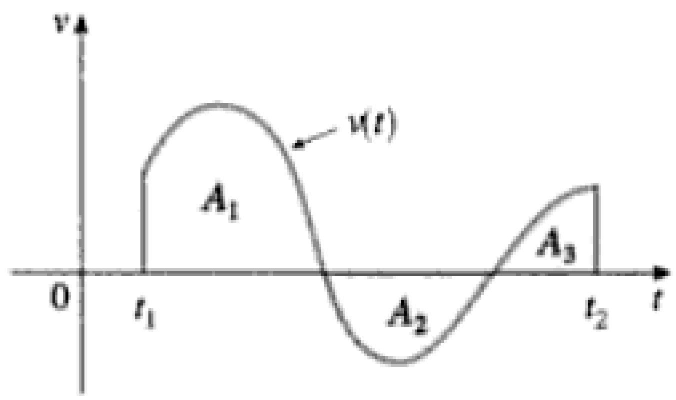
$$\boxed{2} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

es el cambio de posición o *desplazamiento* de la partícula en el periodo que transcurre entre t_1 y t_2. En la sección 5.1 adelantamos que esto era verdad cuando el objeto se movía en la dirección positiva pero siempre que sea verdad.

- Si queremos, calcular la distancia recorrida en ese intervalo de tiempo tendremos que considerar los intervalos en que $v(t) \geqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la derecha) y los intervalos cuando $v(t) \leqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la izquierda). En ambos casos la distancia se calcula integrando $|v(t)|$, que es la rapidez. Por tanto

$$\boxed{3} \qquad \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = \text{distancia recorrida}$$

La figura 3 muestra cómo pueden interpretarse el desplazamiento y la distancia recorrida en términos de áreas bajo una curva de velocidad.



desplazamiento $= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$

distancia $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$

FIGURA 3

- La aceleración del objeto es $a(t) = v'(t)$, de modo que

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

es el cambio en la velocidad del tiempo t_1 al t_2.

EJEMPLO 6 □ Una partícula se mueve a lo largo de una recta, de modo que su velocidad es $v(t) = t^2 - t - 6$ cuando el tiempo es t. (La velocidad se expresa en metros por segundo.)

(a) Calcule el desplazamiento de la partícula en el periodo $1 \leqslant t \leqslant 4$.

(b) Calcule la distancia recorrida durante este lapso.

SOLUCIÓN

(a) De acuerdo con la ecuación (2), el desplazamiento es

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Según lo anterior, la partícula se movió 4.5 m hacia la izquierda.

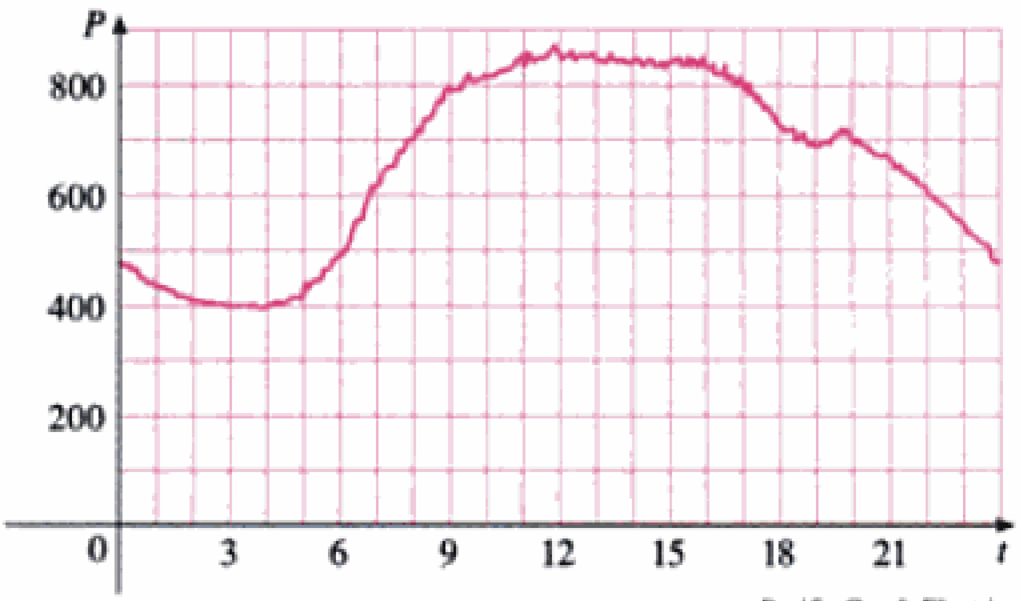
(b) Observemos que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$ y así $v(t) \leqslant 0$ en el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ en $[3, 4]$; así, según la ecuación (3), la distancia recorrida es

□ Para integrar el valor absoluto de $v(t)$, usamos la propiedad 5 de las integrales, sección 5.2, dividimos en dos partes la integración, una donde $v(t) \leqslant 0$ y la otra donde $v(t) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 |v(t)|\,dt &= \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt \\
&= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt \\
&= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\
&= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7 □ La figura 4 muestra el consumo de potencia eléctrica en la ciudad de San Francisco correspondiente al día 19 de septiembre de 1996. (P es la medida en megawatts, t es la medida en horas comenzando a la medianoche.) Estime la energía usada ese día.



Pacific Gas & Electric

FIGURA 4

SOLUCIÓN La potencia es la tasa de cambio de la energía: $P(t) = E'(t)$. De modo que por el teorema del cambio total,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía usada el 19 de septiembre de 1996. Aproximamos el valor de la integral usando la regla del punto medio con 12 subintervalos $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t \\
&\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850 \\
&\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2) \\
&= 15{,}840
\end{aligned}$$

La energía consumida fue de aproximadamente 15,840 megawatts-hora. □

■ Nota sobre unidades

¿Cómo supimos qué unidades usar para la energía en el ejemplo 7? La integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ se define como límite de sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Ahora $P(t_i^*)$ se mide en megawatts y Δt se mide en horas de manera que su producto se mide en megawatts-horas. Lo mismo es verdad del límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.4 Ejercicios

1–4 Verifique la corrección de la fórmula por derivación.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

5–14 Halle la integral indefinida general.

5. $\displaystyle\int x^{-3/4}\,dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

7. $\displaystyle\int (x^3+6x+1)\,dx$

8. $\displaystyle\int x(1+2x^4)\,dx$

9. $\displaystyle\int (1-t)(2+t^2)\,dt$

10. $\displaystyle\int \left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

11. $\displaystyle\int (2-\sqrt{x})^2\,dx$

12. $\displaystyle\int (3e^u+\sec^2 u)\,du$

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{1-\mathrm{sen}^2 x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{\mathrm{sen}\,x}\,dx$

15–16 Halle la integral indefinida. Ilustre haciendo la gráfica de varios miembros de la familia en la misma pantalla.

15. $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$

16. $\displaystyle\int (\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$

17–42 Evalúe la integral.

17. $\displaystyle\int_0^1 (1-2x-3x^2)\,dx$

18. $\displaystyle\int_1^2 (5x^2-4x+3)\,dx$

19. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x-e^x)\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^1 (y^9-2y^5+3y)\,dy$

21. $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)dt$

22. $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^6-t^2}{t^4}\,dt$

23. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^2 (x^3-1)^2\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 u(\sqrt{u}+\sqrt[3]{u})\,du$

26. $\displaystyle\int_0^5 (2e^x+4\cos x)\,dx$

27. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{5}{x}}\,dx$

28. $\displaystyle\int_{-1}^2 |x-x^2|\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-2}^3 |x^2-1|\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^{-1} (x-1)(3x+2)\,dx$

31. $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)dt$

32. $\displaystyle\int_1^8 \left(\sqrt[3]{r}+\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)dr$

33. $\displaystyle\int_{-1}^0 (x+1)^3\,dx$

34. $\displaystyle\int_{-5}^{-2} \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^2\theta\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\theta+2\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \csc x\cot x\,dx$

39. $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$

40. $\displaystyle\int_4^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

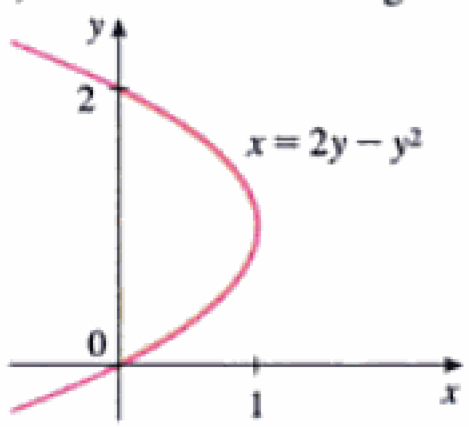
41. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-2|x|)\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^2 (x^2-|x-1|)\,dx$

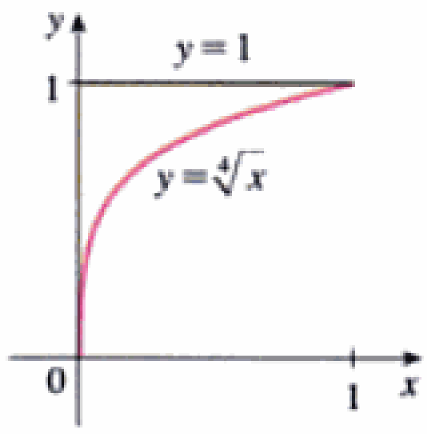
43. Use una gráfica para estimar las abscisas al origen de la curva $y = x + x^2 - x^4$. Use entonces la información para estimar el área de la región bajo la curva y por encima del eje x.

44. Repita el ejercicio 43 para la curva $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

45. El área de la región que está a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (la región sombreada de la figura) está dada por la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Gire la cabeza en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj y piense que la región está debajo de la curva $x = 2y - y^2$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$.) Halle el área de la región.



46. El borde de la región sombreada está compuesto por la recta $y = 1$, el eje de las ordenadas, y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Halle el área de esta región escribiendo x como función de y e integrando respecto a y (como en el ejercicio 45).



47. Si $w'(t)$ es la tasa de crecimiento de un niño en libras, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t)\,dt$?

48. La corriente en un alambre se define como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Véase el ejemplo 3 sección 3.3.) ¿Qué significa $\int_a^b I(t)\,dt$?

49. Si en un tanque se fuga el aceite a razón de $r(t)$ galones por minuto en el tiempo t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\,dt$?

50. Una población de abejas inicia con 100 y crece a razón de $n'(t)$ abejas por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

51. En la sección 4.8 definimos la función ingreso marginal $R'(x)$ como derivada de la función ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Qué representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

52. Si $f(x)$ es la pendiente de una vereda a una distancia de x millas desde el inicio de la vereda, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\,dx$?

53–54 □ La función velocidad m/s está dada para una partícula que se mueve en línea recta. Halle (a) el desplazamiento y (b) la distancia recorrida por la partícula en el intervalo indicado.

53. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

54. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

55–56 □ Se da la aceleración en m/s^2 y la velocidad inicial de una partícula que se mueve en línea recta. Halle (a) la velocidad en el instante t y (b) la distancia recorrida durante el intervalo indicado.

55. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

56. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

57. La densidad lineal de una varilla de 4 m de longitud es $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Halle la masa total de la varilla.

58. Una población animal crece a razón de $200 + 50t$ anualmente (t medido en años). ¿Qué tanto aumenta la población entre el año 4 y el año 10?

59. La velocidad de un automóvil leída en un velocímetro fue registrada a intervalos de diez segundos en la tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia que viajó el automóvil.

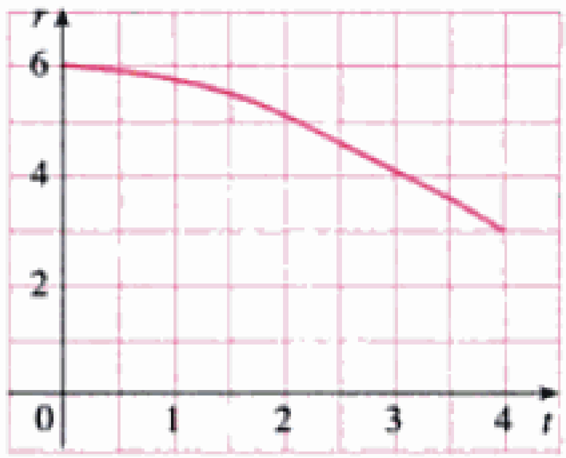
t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

60. La tasa de inflación se define frecuentemente como la derivada del índice de precios al consumidor (CPI) publicado en EUA por el departamento de estadísticas del trabajo y mide los precios de artículos de una "canasta representativa" de consumidores urbanos típicos. Se da la tabla de la tasa de inflación en EUA de 1981 a 1997. Escriba el aumento porcentual total en el CPI de 1981 a 1997 como una integral definida. Luego use la regla del punto medio para estimarla.

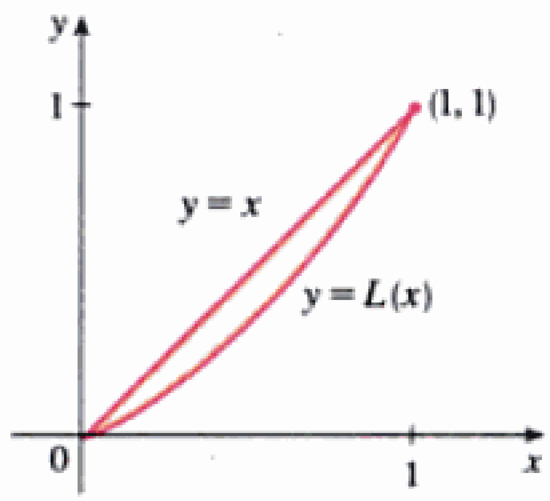
t	$r(t)$	t	$r(t)$
1981	10.3	1990	5.4
1982	6.2	1991	4.2
1983	3.2	1992	3.0
1984	4.3	1993	3.0
1985	3.6	1994	2.6
1986	1.9	1995	2.8
1987	3.6	1996	2.9
1988	4.1	1997	2.3
1989	4.8		

61. El costo marginal de la producción de una tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (en dólares por yarda). Halle el incremento en el costo si el nivel de producción se eleva de 2000 a 4000 yardas.

62. El agua escapa de un tanque a razón de $r(t)$ litros por hora, donde la gráfica de r es como se muestra. Exprese la cantidad total de agua perdida durante las cuatro primeras horas como una integral definida. Después, use la regla del punto medio para estimar esa cantidad.



63. Los economistas usan una distribución acumulativa que se llama *curva de Lorenz* para describir la distribución del ingreso entre los hogares en un país determinado. Típicamente, una curva de Lorenz está definida en $[0, 1]$, pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$, y es continua, creciente y cóncava hacia abajo. Los puntos de esta curva se determinan ordenando todos los hogares por nivel de ingreso y después calculando el porcentaje de casas cuyo ingreso es menor o igual que un porcentaje dado del ingreso total del país.



Por ejemplo el punto $(a/100, b/100)$ está en la curva de Lorenz si el $a\%$ inferior de las casas recibe una cantidad menor o igual que el $b\%$ del ingreso total. La *igualdad absoluta* del ingreso se daría cuando el $a\%$ inferior de las casas recibiera $a\%$ del ingreso en cuyo caso la curva de Lorenz sería la recta $y = x$. El área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ mide qué tanto se aparta la distribución del ingreso de la igualdad absoluta. El *coeficiente de desigualdad* es el cociente del área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ dividida entre el área bajo $y = x$.

(a) Muestre que el coeficiente de desigualdad es dos veces el área entre la curva de Lorenz y recta $y = x$, es decir, mostrar que

$$\text{coeficiente de desigualdad} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) La distribución del ingreso para cierto país está representada por la curva de Lorenz que define la ecuación

$$L(x) = \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{7}{12}x$$

¿Cuál es el porcentaje del ingreso total que recibe el 50% inferior de las casas? Halle el coeficiente de desigualdad.

64. El 7 de mayo de 1992 el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS49 con el propósito de instalar un motor en un satélite de comunicaciones Intelsat. La tabla da los valores de la velocidad de la nave entre el lanzamiento y la separación de los cohetes propulsores auxiliares.

Operación	Tiempo (s)	Velocidad (ft/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra	15	319
Válvula de estrangulación 89%	20	447
Válvula de estrangulación 67%	32	742
Válvula de estrangulación 104%	59	1325
Presión máxima del cohete auxiliar de combustible sólido	62	1445
Separación de los cohetes propulsores auxiliares	125	4151

(a) Utilice una calculadora graficadora o una computadora para modelar los datos de la tabla con un polinomio de tercer grado.

(b) Use el modelo de la parte (a) para estimar la altura alcanzada por *Endeavour*, 125 segunos después de lanzado.

Proyecto de investigación histórica — Newton, Leibniz y la invención del cálculo

A veces leemos que los inventores del cálculo fueron sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero sabemos que las ideas básicas detrás de la integración fueron investigadas hace 2500 años por los antiguos griegos, como Eudoxo y Arquímedes, y por Pierre Fermat (1601-1665), Issac Barrow (1630-1677) y otros, fueron los pioneros para hallar tangentes. Barrow, el profesor de Newton en Cambridge, fue el primero en comprender la relación inversa entre la derivación y la integración. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación, en la forma del teorema fundamental del cálculo, para convertir este último en una disciplina matemática sistemática. En este sentido es que se da a Newton y Leibniz el crédito por la invención del cálculo.

Lea acerca de las colaboraciones de estos hombres en una o más de las referencias dadas y escriba un informe sobre uno de los tres temas siguientes. Puede incluir detalles biográficos, pero el reporte debe concentrarse en una descripción, con cierto detalle, de los métodos y notaciones de Newton y Leibniz. En particular, consulte uno de los libros fuente, en los cuales se dan extractos de las publicaciones originales de ambos autores, traducidas del latín al inglés.

- La contribución de Newton en el desarrollo del cálculo
- La contribución de Leibniz en el desarrollo del cálculo
- La controversia entre los seguidores de Newton y los de Leibniz sobre la prioridad en la invención del cálculo

Bibliografía

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: John Wiley, 1987), capítulo 19.
2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development* (Nueva York: Dover, 1959), capítulo V.

3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), capítulo 8 y 9.
4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), capítulo 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York: Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Leibniz escrito por Joseph Hofmann, en el volumen VIII, y el artículo sobre Newton escrito por I. B. Cohen, en el volumen X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Nueva York: HarperCollins, 1993), capítulo 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), capítulo 17.

Libros fuentes

1. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader* (Londres: MacMillan Press, 1987), capítulos 12 y 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics* (Nueva York: Dover, 1959), capítulo V.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200–1800* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1969), capítulo V.

5.5 Regla de sustitución

En virtud del teorema de evaluación, es importante poder hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no dicen la forma de evaluar integrales como

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\,dx$$

Para hallar esta integral, aplicamos la estrategia para la solución de problemas de *introducir algo adicional*. En este caso, el "algo adicional" es una nueva variable; cambiamos de una variable x a una variable u. Suponga que hacemos que u sea la cantidad debajo del signo integral de (1), $u = 1 + x^2$. Entonces la diferencial de u es $du = 2x\,dx$. Advierta que si la dx en la notación para una integral se interpretara como una diferencial, entonces en (1) se tendría la diferencial $2x\,dx$ y, por consiguiente, desde un punto de vista formal y sin justificar nuestro cálculo, podríamos escribir

□ En la sección 3.11 se definieron las diferenciales. Si $u = f(x)$, entonces

$$du = f'(x)\,dx$$

$$\boxed{2} \qquad \begin{aligned} \int 2x\sqrt{1 + x^2}\,dx &= \int \sqrt{1 + x^2}\,2x\,dx \\ &= \int \sqrt{u}\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Pero ahora podríamos comprobar que tenemos la respuesta correcta aplicando la regla de la cadena para derivar la función final de la ecuación (2):

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

En general, este método funciona siempre que tenemos una integral de la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Observe que si $F' = f$, entonces

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Si hacemos el "cambio de variable" o la "sustitución" $u = g(x)$, entonces, a partir de la ecuación 3 tenemos

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o bien, si se escribe $F' = f$, se obtiene

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Por tanto, hemos probado la regla siguiente.

> **4 Regla de sustitución** Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, y f es continua sobre I, entonces
>
> $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Advierta que se probó la regla de sustitución para la integración aplicando la regla de la cadena para la derivación. Asimismo, observe que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de (4) como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución nos expresa: **es permitido operar con dx y du después de los signos de integral como si fueran diferenciales.**

EJEMPLO 1 □ Encuentre $\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx$.

SOLUCIÓN Haremos la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3\,dx = du/4$ y la regla de sustitución, tenemos

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

□ Compruebe la respuesta al derivarla.

Advierta que en la etapa final tuvimos que regresar a la variable original x. □

La idea detrás de la regla de sustitución es reemplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que sea función de x. Así entonces, en el ejemplo 1 reemplazamos la integral $\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx$ con la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

El reto principal en la aplicación de la regla de sustitución es pensar en una sustitución apropiada. Intente elegir u como alguna función en el integrando cuya diferencial también se presente (excepto por un factor constante). Éste fue el caso en el ejemplo 1. Si no es posible, escoja u como alguna parte complicada del integrando. Encontrar la sustitución correcta conlleva algo de arte. No es raro que la conjetura sea errónea; si su primera suposición no funciona, intente con otra.

EJEMPLO 2 □ Evalúe $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Entonces $du = 2\,dx$, de modo que $dx = du/2$. De esta forma, la regla de sustitución da

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

SOLUCIÓN 2 Otra sustitución posible es $u = \sqrt{2x+1}$. Entonces

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{de modo que} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du$$

(O bien, observe que $u^2 = 2x + 1$, de suerte que $2u\,du = 2\,dx$.) Por lo tanto

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int u \cdot u\,du = \int u^2\,du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$ □

EJEMPLO 3 □ Encuentre $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Entonces $du = -8x\,dx$, de manera que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$$
$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$ □

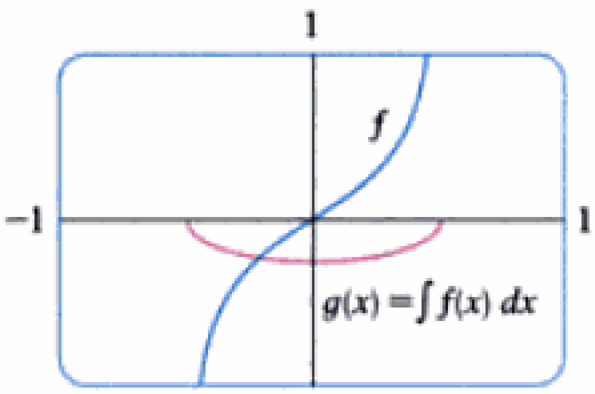


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

La respuesta para el problema 3 puede comprobarse por derivación pero, en lugar de ello, comprobémosla de manera visual. En la figura 1 usamos una computadora para trazar las gráficas del integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ así como la de su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (tomamos el caso $C = 0$). Note que $g(x)$ decrece cuando $f(x)$ es negativa, crece cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De modo que parece razonable, a partir de la evidencia gráfica, que g es una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 □ Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUCIÓN Si hacemos $u = 5x$, entonces $du = 5\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{5}\,du$. Por lo tanto

$$\int e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int e^u\,du = \tfrac{1}{5}e^u + C = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$ □

EJEMPLO 5 □ Calcule $\int \sqrt{1+x^2}\, x^5\, dx$.

SOLUCIÓN La sustitución apropiada se aclara si factorizamos x^5 como $x^4 \cdot x$. Sea $u = 1 + x^2$. Entonces $du = 2x\,dx$, luego $x\,dx = du/2$. También $x^2 = u - 1$, luego $x^4 = (u-1)^2$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\, x^5\, dx &= \int \sqrt{1+x^2}\, x^4 \cdot x\, dx \\ &= \int \sqrt{u}\,(u-1)^2 \frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\, du \\ &= \tfrac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2\cdot\tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C \\ &= \tfrac{1}{7}(1+x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1+x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 6 □ Calcule $\int \tan x\, dx$.

SOLUCIÓN En primer lugar, escribamos la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Esto sugiere que debemos sustituir $u = \cos x$, dado que entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y, como consecuencia, $\operatorname{sen} x\, dx = -du$:

$$\begin{aligned}\int \tan x\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$ □

Puesto que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, el resultado del ejemplo 6 también puede escribirse como

5 $$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C}$$

Integrales definidas

Cuando se evalúa una integral *definida* por sustitución, se pueden aplicar dos métodos. Uno es evaluar primero la integral indefinida y, enseguida, aplicar el teorema de evaluación. Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx &= \int \sqrt{2x+1}\, dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4 \\ &= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

□ En esta regla se afirma que cuando se usa una sustitución en una integral definida, debemos poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx, sino también los límites de integración. Los nuevos límites de integración son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

6 Regla de sustitución para las integrales definidas Si g' es continua en $[a, b]$ y f lo es en la imagen de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Demostración Sea F una antiderivada de f. Entonces, por (3), $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, con lo que por el teorema fundamental tenemos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica el teorema de evaluación una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

□

EJEMPLO 7 □ Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando (6).

SOLUCIÓN Si se aplica la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = du/2$. Para hallar los nuevos límites de integración, notamos que

$$\text{cuando } x = 0,\ u = 1 \qquad \text{y} \qquad \text{cuando } x = 4,\ u = 9$$

Por lo tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

□ En la figura 2 se muestra la interpretación geométrica del ejemplo 7. La sustitución $u = 2x + 1$ alarga el intervalo [0, 4] por un factor 2 y lo traslada hacia la derecha una unidad. La sustitución hace ver que dos áreas son iguales.

Observe que al usar (6) no se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evaluamos la expresión en u entre los valores apropiados de u. □

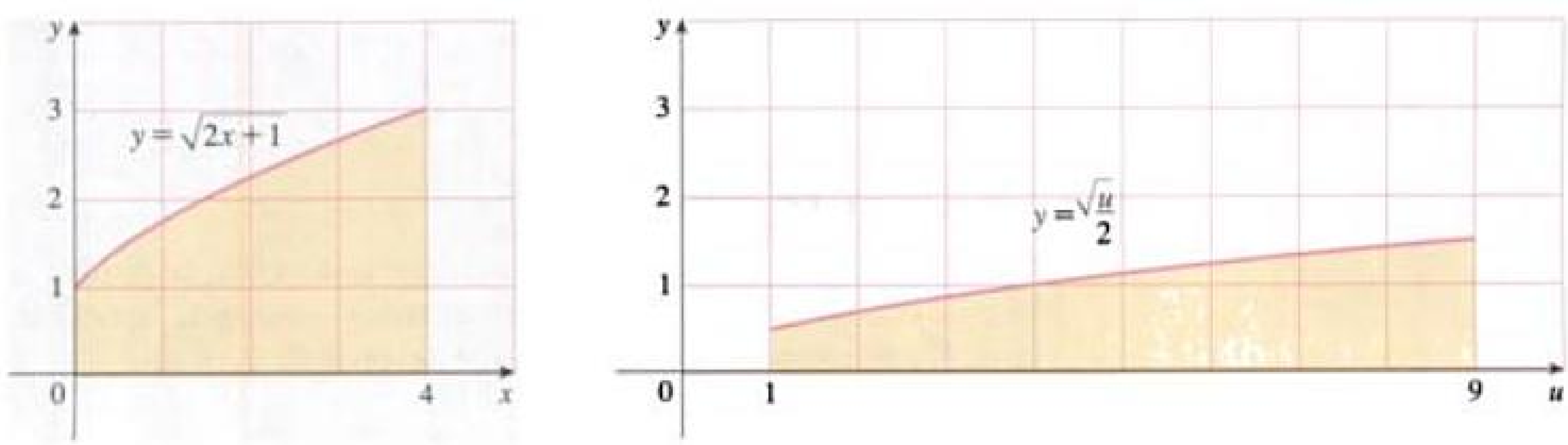


FIGURA 2

EJEMPLO 8 □ Evalúe $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

□ La integral del ejercicio 8 es una abreviación para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. Entonces $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -du/5$. Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Así

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} &= -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}\\ &= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\bigg]_{-2}^{-7}\\ &= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Hacemos $u = \ln x$ porque se tiene su diferencial $du = dx/x$ en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Así pues,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

□

□ Como la función $f(x) = (\ln x)/x$ del ejemplo 9 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada de la figura 3.

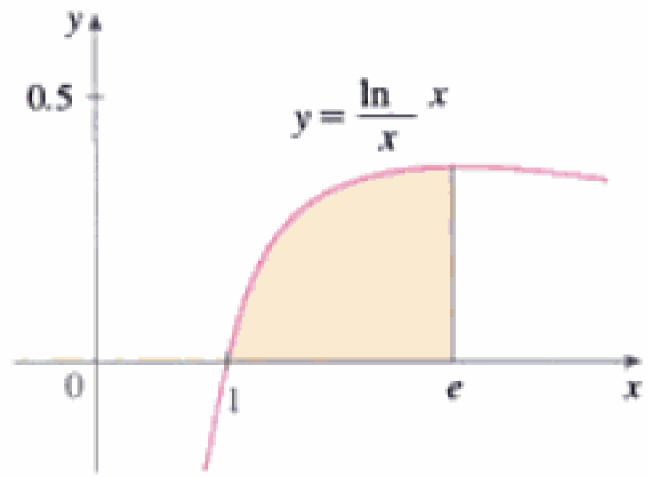


FIGURA 3

Simetría

En el teorema siguiente se usa la regla de sustitución para las integrales definidas, (6), con el fin de simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

> **7 Integrales de funciones simétricas** Supóngase que f es continua en $[-a, a]$.
>
> (a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
>
> (b) Si f es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Demostración Dividamos la integral en dos:

$$\boxed{8} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha hacemos la sustitución $u = -x$. Entonces $du = -dx$ y, cuando $x = -a$, $u = a$. Por lo tanto,

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

con lo cual, la ecuación 8 queda

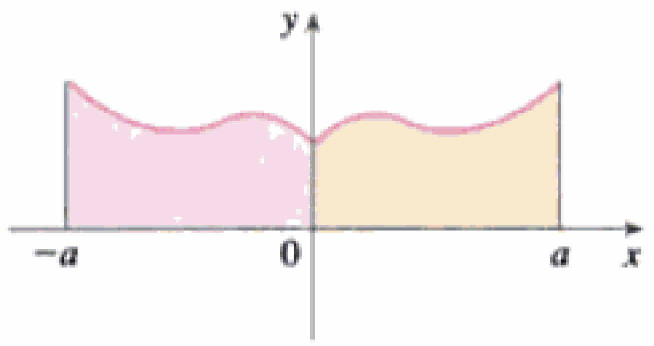
$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$ por la ecuación 9 da

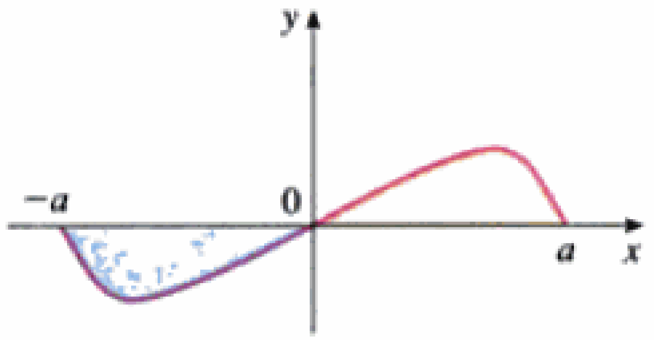
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$ y la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$ ▫



(a) f par $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



(b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

La figura 4 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, en el inciso (a) se hace ver que el área debajo de $y = f(x)$ es el doble del área desde 0 hasta a, en virtud de la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede expresar como el área arriba del eje x y debajo de $y = f(x)$ menos el área debajo del eje x y arriba de la curva. Por tanto, en el inciso (b) se hace ver que el área es 0 porque las áreas se cancelan.

EJEMPLO 10 ▫ Como $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y así

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$ ▫

EJEMPLO 11 ▫ Dado que $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es par y, por consiguiente

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$ ▫

5.5 Ejercicios

1–6 ▫ Evalúe la integral efectuando la sustitución dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$
2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$
3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$
4. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad u = \sqrt{x}$
5. $\int \dfrac{4}{(1 + 2x)^3}\,dx, \quad u = 1 + 2x$
6. $\int e^{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta\,d\theta, \quad u = \operatorname{sen}\theta$

7–44 ▫ Evalúe la integral indefinida.

7. $\int 2x(x^2 + 3)^4\,dx$
8. $\int x^3(1 - x^4)^5\,dx$
9. $\int \sqrt{x - 1}\,dx$
10. $\int (2 - x)^6\,dx$
11. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$
12. $\int \dfrac{x}{x^2 + 1}\,dx$
13. $\int \dfrac{1 + 4x}{\sqrt{1 + x + 2x^2}}\,dx$
14. $\int x(x^2 + 1)^{3/2}\,dx$
15. $\int \dfrac{2}{(t + 1)^6}\,dt$
16. $\int \dfrac{1}{(1 - 3t)^4}\,dt$
17. $\int (1 - 2y)^{1.3}\,dy$
18. $\int \sqrt[3]{3 - 5y}\,dy$

Para el caso en que $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

(b) Demuestre que

$$\int_a^b f(x + c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx$$

Para el caso en que $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

80. Muestre que el área bajo la gráfica de $y = \operatorname{sen} \sqrt{x}$ de 0 a 4 es igual al área bajo la gráfica de $y = 2x \operatorname{sen} x$ desde 0 hasta 2.

81. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1 - x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1 - x)^a\, dx$$

82. Use la substitución $u = \pi - x$ para mostrar que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx$$

83. Con ayuda del ejercicio 82 evalúe la integral

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

5.6 Logaritmo definido como una integral

En esta sección aplicaremos el teorema fundamental del cálculo para dar tratamiento alterno a las funciones $\ln x$, e^x, a^x, $\log_a x$, y a sus derivadas. En vez de comenzar con a^x y definir que $\log_a x$ es su inversa, esta vez empezaremos definiendo $\ln x$ como una integral y definiremos la función exponencial como su inversa. En esta sección debemos tener en cuenta que no usaremos definiciones y los resultados anteriores concernientes a las funciones exponenciales y logarítmicas.

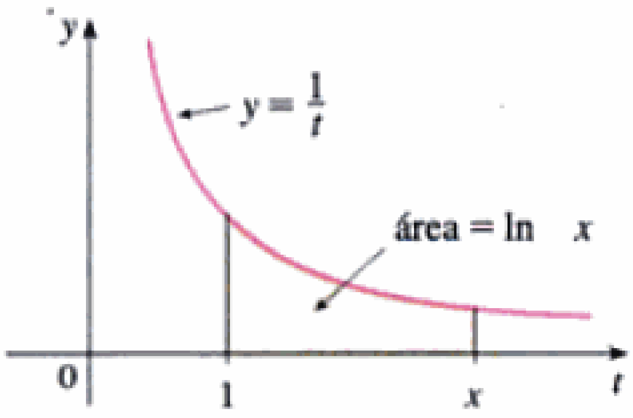


FIGURA 1

Logaritmo natural

Primero definiremos $\ln x$ como una integral.

1 Definición La **función logaritmo natural** es la función definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad x > 0$$

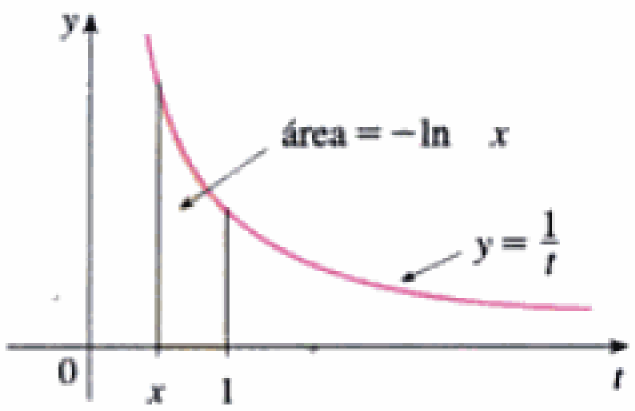


FIGURA 2

La existencia de esta función depende de hecho de que siempre existe la integral de una función continua $x > 1$, entonces $\ln x$ se puede interpretar geométricamente como el área bajo la hipérbola $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$ (Fig. 1). Cuando $x = 1$,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$$

Cuando $0 < x < 1$, $\qquad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt < 0$

por lo tanto, $\ln x$ es el negativo del área que se ve en la figura 2.

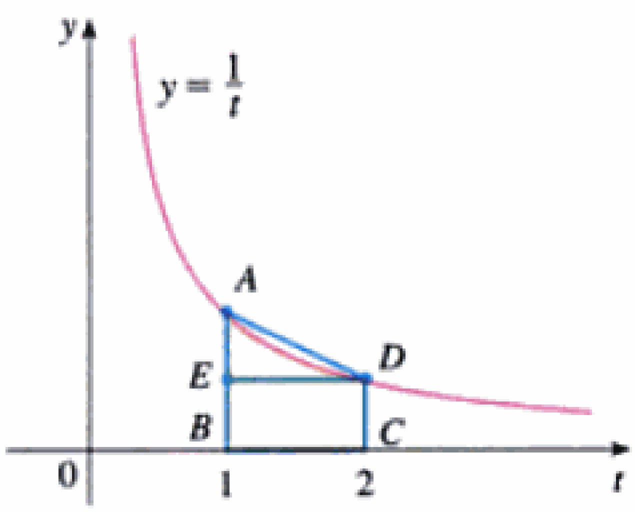


FIGURA 3

EJEMPLO 1 □
(a) Compare áreas y demuestre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.
(b) Emplee la regla del punto medio, con $n = 10$ para estimar el valor de $\ln 2$.

SOLUCIÓN
(a) Podemos interpretar $\ln 2$ como el área bajo la gráfica de $y = 1/t$ de 1 a 2. En la figura 3 vemos que esta área es mayor que la del rectángulo $BCDE$ y menor que la del

trapezoide $ABCD$; por lo tanto,

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < \tfrac{3}{4}$$

(b) Si del punto medio, con $f(t) = 1/t$, $n = 10$, y $\Delta t = 0.1$, obtenemos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx (0.1)[f(1.05) + f(1.15) + \cdots + f(1.95)]$$

$$= (0.1)\left(\frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.15} + \cdots + \frac{1}{1.95}\right) \approx 0.693$$

□

Note que la integral que define a $\ln x$ es, exactamente, el tipo de integral que describimos en la primera parte del teorema fundamental del cálculo (Sec. 5.3). De hecho, al aplicar ese teorema,

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

y así

2
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

A continuación utilizaremos esta regla de derivación para demostrar las siguientes propiedades de la función logaritmo:

3 Leyes de los logaritmos Si x y y son números positivos y r es un número racional, entonces

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r \ln x$

Demostración

1. Sea $f(x) = \ln(ax)$, donde a es una constante positiva. Entonces, si se emplea la ecuación (2) y la regla de la cadena se tiene.

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Por consiguiente, $f(x)$ y $\ln x$ tiene la misma derivada y así sólo deben diferir en una constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Si hacemos $x = 1$ obtenemos $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Por consiguiente

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Si ahora reemplazamos la constante a con cualquier número y,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

13 $$\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$$

Así, por ejemplo,

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx e^{1.20} \approx 3.32$$

La función $f(x) = a^x$ se llama ***función exponencial con base a***. Observará que a^x es positiva para toda x porque e^x lo es para toda x.

La definición (13) también permite ampliar una de las leyes de los logaritmos. Sabemos que $\ln(a^r) = r \ln a$ cuando r es racional; pero si ahora hacemos que r sea cualquier número real, de acuerdo con la definición (13),

$$\ln a^r = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$$

Así,

14 $$\ln a^r = r \ln a \qquad \text{para cualquier número real } r$$

Las leyes generales de los exponentes son resultado de la definición (13) y de las leyes de los exponentes para e^x.

15 Leyes de los exponentes Si x y y son números reales, $a, b > 0$, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = a^x/a^y$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

Demostración

1. Si empleamos la definición (13) y las leyes de los exponentes de e^x, obtendremos

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} \\ &= e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y \end{aligned}$$

3. Con el uso de la ecuación (14) tenemos

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= e^{y \ln(a^x)} = e^{yx \ln a} \\ &= e^{xy \ln a} = a^{xy} \end{aligned}$$

Las demostraciones restantes se dejan como ejercicios. □

La fórmula de derivación de las funciones exponenciales también es una consecuencia de la definición (13):

16 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a) \\ &= a^x \ln a \end{aligned}$$

□

Si $a > 1$, entonces $\ln a > 0$, y así $(d/dx)\, a^x = a^x \ln a > 0$, lo cual demuestra que $y = a^x$ es creciente (Fig. 8). Si $0 < a < 1$, entonces $\ln a < 0$ y así $y = a^x$ decrece (Fig. 9).

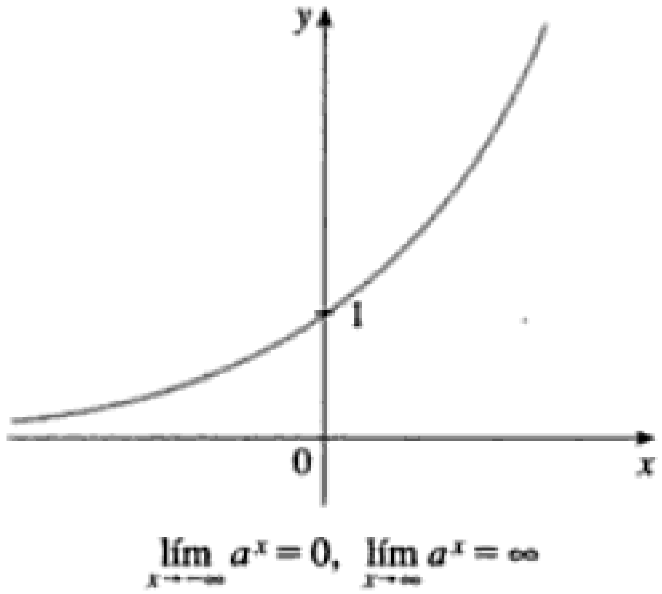


FIGURA 8
$y = a^x, a > 1$

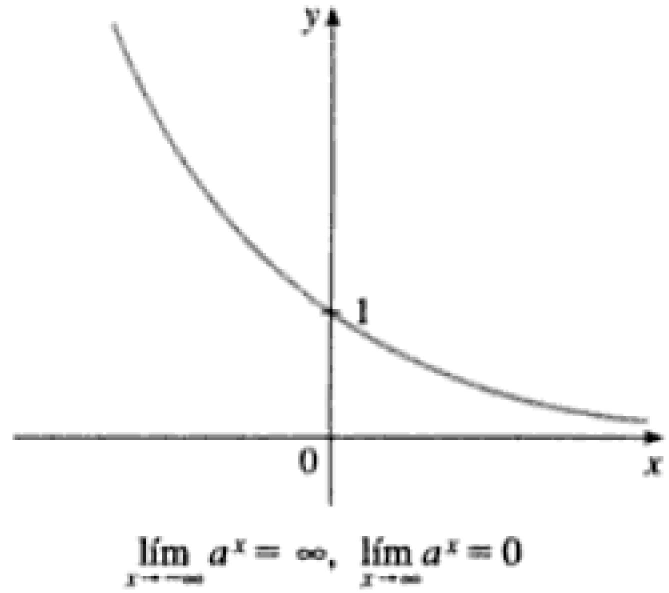


FIGURA 9
$y = a^x, 0 < a < 1$

Funciones logarítmicas generales

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $f(x) = a^x$ es una función biunívoca. Su función inversa se denomina ***función logarítmica con base a*** y se representa con $\log_a$. Por consiguiente,

17
$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

En particular, vemos que

$$\log_e x = \ln x$$

Las leyes de los logaritmos son similares a las de la función logaritmo natural y se pueden deducir de las leyes de los exponentes (Ejerc. 10).

Para derivar $y = \log_a x$, escribimos la ecuación en la forma $a^y = x$. Por la ecuación 14 tenemos $y \ln a = \ln x$, luego

$$\log_a x = y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Como $\ln a$ es constante, podemos derivar como sigue:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln a}$$

18
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

El número *e* expresado como límite

En esta sección hemos definido e como un número tal que $\ln e = 1$. El teorema siguiente demuestra que esto es igual al número e definido en la sección 3.1 (véase la ecuación 5 de la sección 3.8).

19 $$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e}$$

Demostración Sea $f(x)=\ln x$. Entonces $f'(x)=1/x$, así que $f'(1)=1$. Pero, de acuerdo con la definición de derivada,

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\Big[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\Big] \qquad \text{(por ser continua ln)}$$

Dado que $f'(1)=1$, tenemos que

$$\ln\Big[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\Big]=1$$

Por lo tanto, $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$ □

5.6 Ejercicios

1. (a) Demuestre por comparación de áreas que
$$\tfrac{1}{3}<\ln 1.5<\tfrac{5}{12}$$
(b) Aplique la regla del punto medio, con $n=10$ para estimar el ln 1.5.

2. En relación con el ejemplo 1.
(a) Obtenga la ecuación la tangente de la curva $y=1/t$ que sea paralela a la secante AD.
(b) Use la parte (a) para demostrar que $\ln 2>0.66$.

3. Demuestre por comparación de áreas que
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

4. (a) Demuestre por comparación de áreas que $\ln 2<1<\ln 3$.
(b) Deduzca que $2<e<3$.

5. Demuestre la tercera ley de los logaritmos. [*Sugerencia:* comience demostrando que ambos lados de la ecuación tienen la misma derivada.]

6. Demuestre la segunda ley de los exponentes para e^x [Ec. (11)].

7. Demuestra la tercera ley de los exponentes para e^x [Ec. (11)].

8. Demuestre la segunda ley de los exponentes para [Ec. (15)].

9. Demuestre la cuarta ley de los exponentes para [Ec. (15)].

10. Deduzca las leyes siguientes de los logaritmos a partir de la ecuación (15):
(a) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
(b) $\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$
(c) $\log_a(x^y)=y\log_a x$

5 Repaso

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación.
(b) Si $f(x)\geqslant 0$, ¿cómo se interpreta una suma de Riemann? Ilustre mediante un diagrama.
(c) Si $f(x)$ toma valores positivos y negativos ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre mediante diagrama.

2. (a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua, de a hasta b.
(b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)\geqslant 0$?
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ toma valores positivos y valores negativos? Ilustre con un diagrama.

55. $\int_0^1 e^x \cos x\,dx \leq e - 1$ **56.** $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx \leq \pi/4$

57. Utilice la regla del punto medio, con $n = 5$ y defina, aproximadamente, $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$.

58. Una partícula se mueve a lo largo de una recta y una función de velocidad $v(t) = t^2 - t$. Calcule (a) el desplazamiento (b) La distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

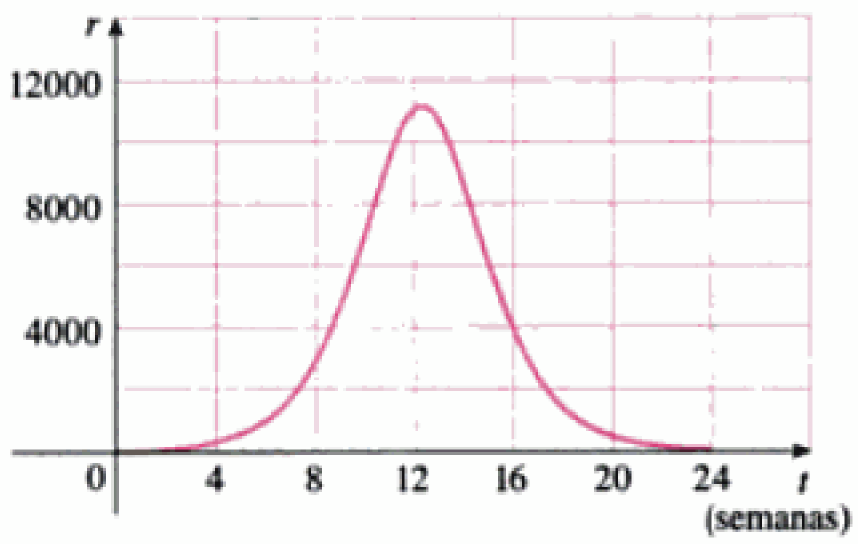
59. En la tabla se puede leer la tasa de aumento en el costo de la atención médica en EUA (como porcentaje). Use la regla del punto medio para estimar el incremento porcentual total en el costo de la atención médica de 1991 a 1997.

t	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
r	8.7	7.4	5.9	4.8	3.9	3.0	2.8

60. Se usó un radar para registrar la velocidad de un corredor en los tiempos que especifica la tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia cubierta por el corredor, en esos cinco segundos;

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

61. Una población de abejas melíferas crece a razón de $r(t)$ abejas por semana donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla del punto medio con seis subintervalos para estimar el aumento de la población durante 24 semanas.



62. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Evalúe $\int_{-3}^1 f(x)\,dx$ interpretando la integral como una diferencia de áreas.

63. Determine una antiderivada, F de $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^2)$ tal que $F(1) = 0$.

64. En la sección 5.3 presentamos la función de Fresnel, $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$ Fresnel también usó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\,dt$$

en su teoría de la difracción de las ondas luminosas.

(a) ¿En qué intervalo C es creciente?

(b) ¿En cuáles intervalos C es cóncava hacia arriba?

SAC (c) Emplee una gráfica para resolver la siguiente ecuación, con un decimal de exactitud:

$$\int_0^x \cos(\pi t^2/2)\,dt = 0.7$$

SAC (d) Trace las gráficas de C y S en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

65. Estime el valor del número c, tal que el área bajo la curva $y =$ de senh cx entre $x = 0$ y $x = 1$ sea igual a 1.

66. Supongamos que la temperatura, en una varilla larga y delgada, colocada en el eje x, es $C/(2a)$ si $|x| \leq a$ y 0 si $|x| > a$ al inicio. Se puede demostrar que si la difusividad térmica de la varilla es k, la temperatura de la varilla en el punto x y en el momento t es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\,du$$

Para calcular la distribución de temperatura resultado de un punto caliente inicial, concentrado en el origen, necesitamos calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use la regla de l'Hospital para encontrar el límite.

67. Si f es una función continua tal que

$$\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

para toda x, halle una fórmula explicita para $f(x)$.

68. Suponiendo que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$, y h'' es continua en todo número, evalúe $\int_1^2 h''(u)\,du$.

69. Si f' es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$2\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

70. Determine $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\,dt$

71. Si f es continua en $[0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1 - x)\,dx$$

72. Evalúe

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$$

Problemas especiales

Cubra la solución trate de resolverlo primero.

Ejemplo 1 Evaluar $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right)$.

Solución Un vistazo preliminar a los ingredientes de la función. ¿Qué ocurre con el primer factor, $x/(x-3)$, cuando x se acerca a 3? El numerador se acerca a 3 y el denominador a 0, de modo que

$$\frac{x}{x-3}\to\infty \quad \text{cuando} \quad x\to 3^+ \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{x-3}\to -\infty \quad \text{cuando} \quad x\to 3^-$$

El segundo factor se aproxima a $\int_3^3 (\operatorname{sen} t)/t\,dt$, que es 0. No queda claro qué le ocurre a la función completa. (Un factor se va haciendo grande y el otro pequeño.) ¿Cómo procede?

Los principios para resolver el problema se dieron en la página 78.

Uno de los principios de la reducción de los problemas es *también reconocer algo*. ¿Hay una parte de la función que le recuerde algo ya conocido? Bien, la integral

$$\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

tiene límite superior de integración igual a x, y este tipo de integral aparece en el TFC1:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Esto sugiere involucrar a la derivación.

Ya que empezamos a pensar en derivadas, el denominador $(x-3)$ nos recuerda de algo que hemos visto; una de las formas de la definición de derivada en el capítulo 2 es

$$F'(a) = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

y con $a = 3$ esto es

$$F'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$

Bueno, ¿y qué es la función F en nuestra situación? Advierta que si definimos

$$F(x) = \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

entonces $F(3) = 0$. ¿Qué hacer con el factor x en el numerador? No es más que un factor de distracción, de modo que simplemente lo escribimos afuera y queda armado el cálculo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right) &= \left(\lim_{x\to 3} x\right)\cdot \lim_{x\to 3}\frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt}{x-3}\\
&= 3\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\\
&= 3F'(3)\\
&= 3\,\frac{\operatorname{sen} 3}{3}\\
&= \operatorname{sen} 3
\end{aligned}$$

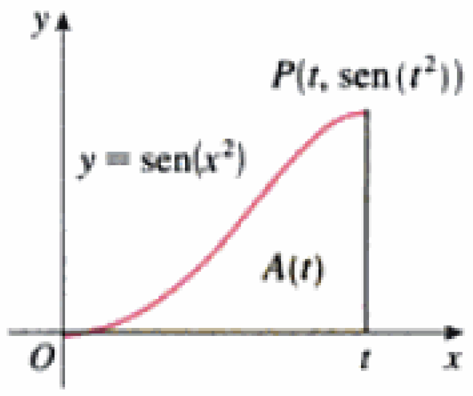
Problemas

1. Si $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$, donde f es una función continua, halle $f(4)$.

2. Si la curva $y = f(x)$ pasa por el origen y el punto $(1, 1)$. Halle el valor de la integral $\int_0^1 f'(x)\,dx$
.

3. Muestre que $\dfrac{1}{17} \leqslant \int_1^2 \dfrac{1}{1 + x^4}\,dx \leqslant \dfrac{7}{24}$.

4. (a) Grafique varios miembros de la familia de funciones $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ y observe las regiones encerradas por estas curvas y el eje x. Haga una conjetura sobre la relación entre las áreas de estas regiones.
   (b) Pruebe la conjetura de la parte (a).
   (c) Observe de nuevo las gráficas en la parte (a) y úselas para dibujar la curva trazada por los vértices (puntos más altos) de la familia de funciones. ¿Puede adivinar qué tipo de curva es?
   (d) Encuentre la ecuación de la curva que trazó en la parte (c).



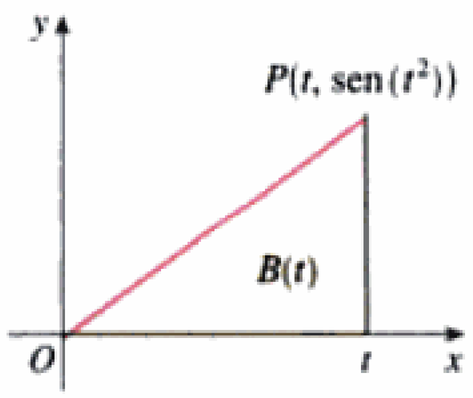


FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

5. Si $f(x) = \int_0^{g(x)} \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\,dt$, donde $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\,dt$, halle $f'(\pi/2)$.

6. Si $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, halle $f'(x)$.

7. Evalúe el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\,dt$.

8. La figura muestra dos regiones del primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ entre 0 hasta t, y $B(t)$ es el área del triángulo O, P, y $(t, 0)$.
   Halle $\lim\limits_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.

9. Halle el intervalo $[a, b]$ para el cual el valor de la integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\,dx$ es máximo.

10. Use una integral para estimar $\sum\limits_{i=1}^{10000} \sqrt{i}$.

11. (a) Evalúe $\int_0^n [\![x]\!]\,dx$, donde n es un entero positivo.
    (b) Evalúe $\int_a^b [\![x]\!]\,dx$, donde a y b son números reales con $0 \leqslant a < b$.

12. Encuentre $\dfrac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 + u^4}\,du \right) dt$.

13. Si f es una función derivable tal que $\int_0^x f(t)\,dt = [f(x)]^2$ para toda x, halle f.

14. En un evaporador se usa un disco circular de radio r y se gira en un plano vertical. Si se sumerge parcialmente en el líquido para maximizar el área húmeda, demuestre que el centro del disco debe colocarse a una altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ por arriba de la superficie.

15. Pruebe que si f es continua, entonces $\int_0^x f(u)(x - u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt \right) du$.

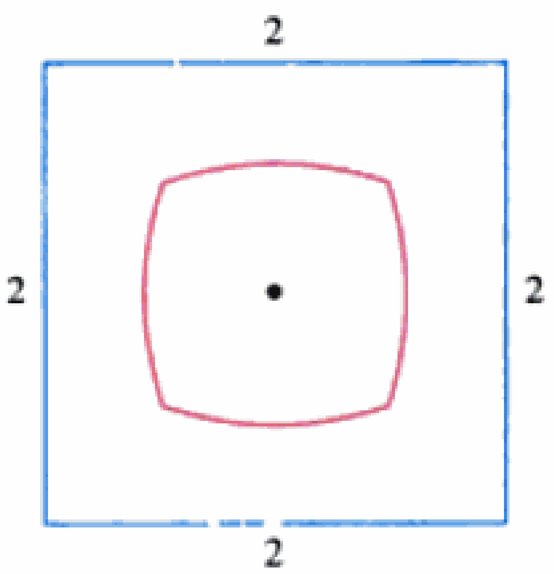


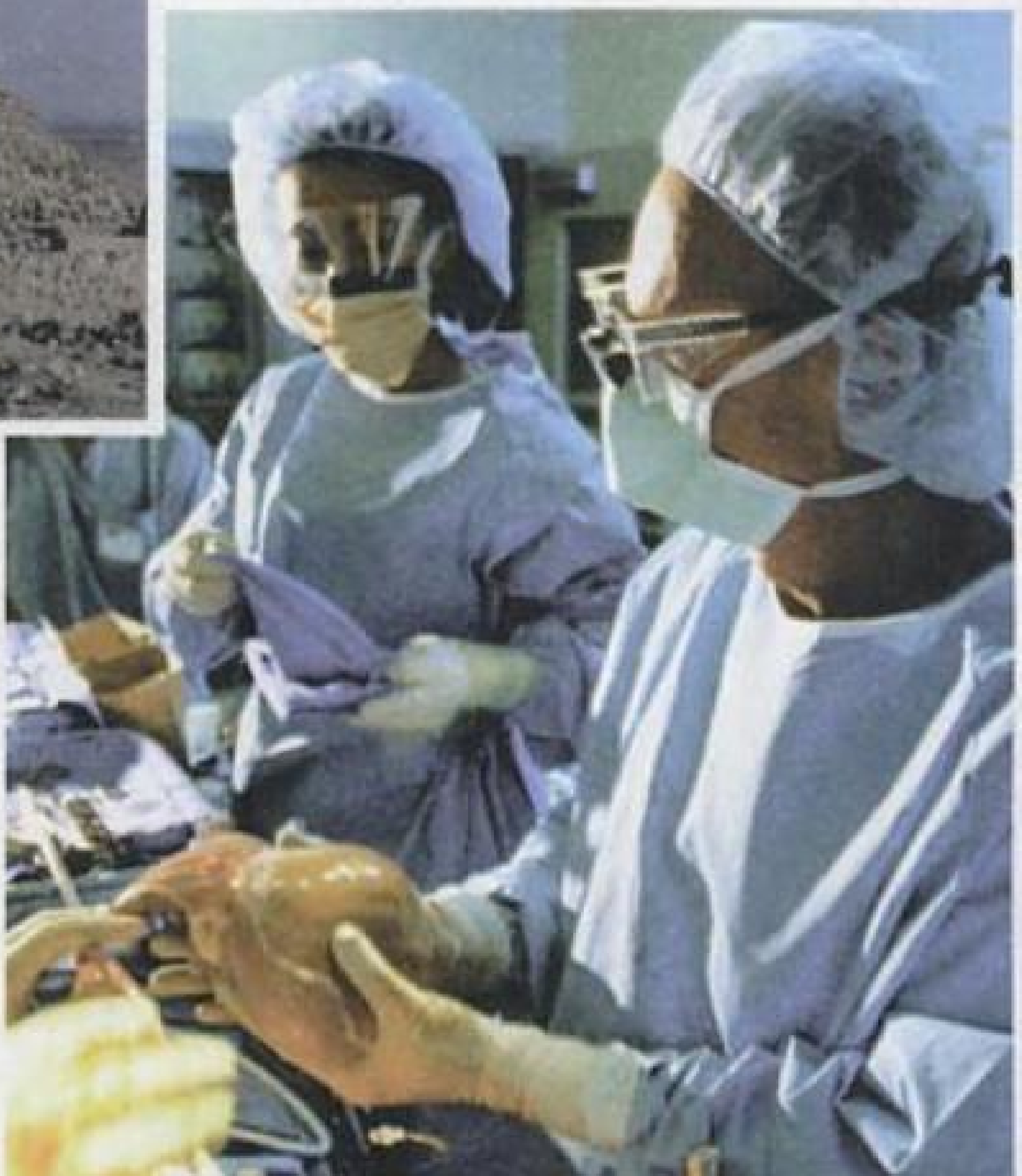
FIGURA PARA EL PROBLEMA 16

16. La figura muestra una región que consta de todos los puntos interiores a un cuadrado que son más cercanos al centro que a los lados del cuadrado. Halle el área de la región.

17. Evalúe $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$.

18. Para cualquier número c, sea $f_c(x)$ el menor de los dos números $(x - c)^2$ y $(x - c - 2)^2$. Determine ahora $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\,dx$. Halle los valores máximo y mínimo de $g(c)$ si $-2 \leqslant c \leqslant 2$
.

6 Aplicaciones de la integración



Las fotografías muestran tres objetos muy diferentes, de los cuales hallaremos el volumen en este capítulo: una rosquilla, una pirámide y un hígado humano.

[2] El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, y las rectas $x = a$, $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

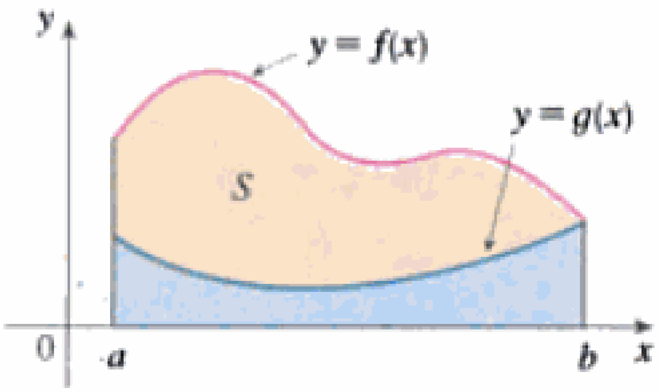


FIGURA 3
$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

En el caso especial en que $g(x) = 0$, note que S es la región debajo de la gráfica de f y nuestra definición general (1) de área se reduce a la definición anterior (definición 2, Sec. 5.1).

En el caso en que f y g son positivas, usted puede ver en la figura 3 por qué (2) es verdadera:

$$A = [\text{área debajo de } y = f(x)] - [\text{área debajo de } y = g(x)]$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

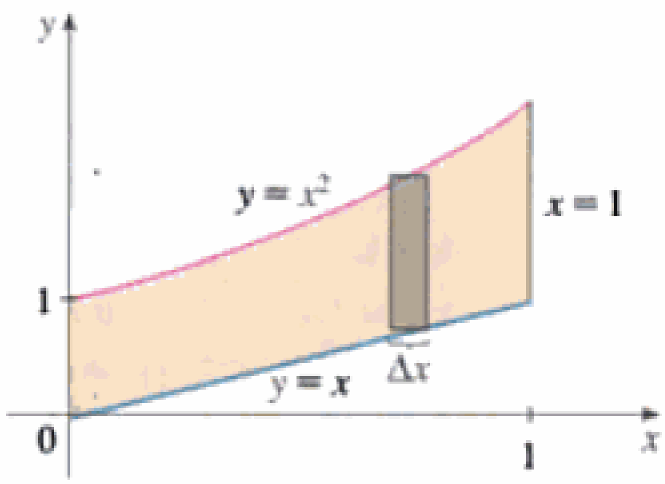


FIGURA 4

EJEMPLO 1 □ Encuentre el área de la región limitada arriba por $y = e^x$, abajo por $y = x$, y a los lados por $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN En la figura 4 se muestra la región. La curva frontera superior es $y = e^x$ y la curva frontera inferior es $y = x$. De modo que usamos la fórmula (2) del área con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$, y $b = 1$:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\, dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$ □

En la figura 4 dibujamos un rectángulo típico de aproximación, con ancho Δx como un recordatorio del procedimiento por el cual se define el área en (1). En general, cuando planteamos una integral para un área, resulta útil dibujar la región para identificar la curva de arriba y_T, la de abajo y_B, y un rectángulo de aproximación típico (Fig. 5). Entonces el área de un rectángulo típico es $(y_T - y_B)\,\Delta x$ y la ecuación

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\, dx$$

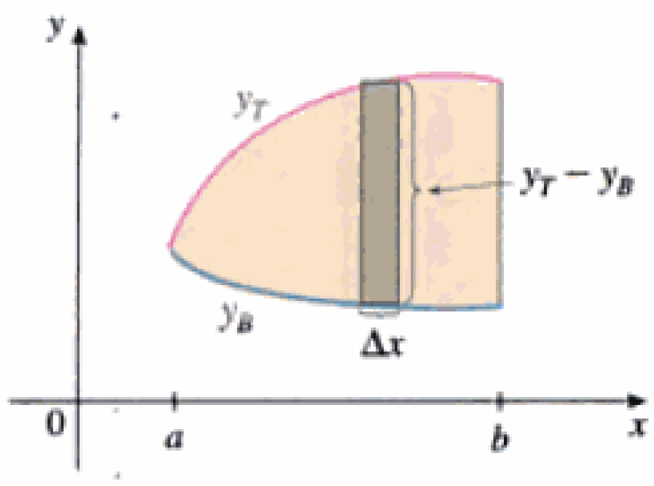


FIGURA 5

resume el procedimiento de sumar (llevando el concepto al límite) las áreas de todos los rectángulos típicos.

En la figura 5 advierta que la frontera izquierda se reduce a un punto, en tanto que en la figura 3 la frontera derecha se reduce a un punto. En el ejemplo siguiente, las dos fronteras laterales se reducen a un punto, de modo que el primer paso es hallar a y b.

EJEMPLO 2 □ Encuentre el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN En primer lugar, hallemos los puntos de intersección de las parábolas resolviendo sus ecuaciones simultáneamente. Esto da $x^2 = 2x - x^2$, o sea, $2x^2 = 2x$. Por tanto, $x(x - 1) = 0$, de modo que $x = 0$ o 1. Los puntos de intersección son (0, 0) y (1, 1).

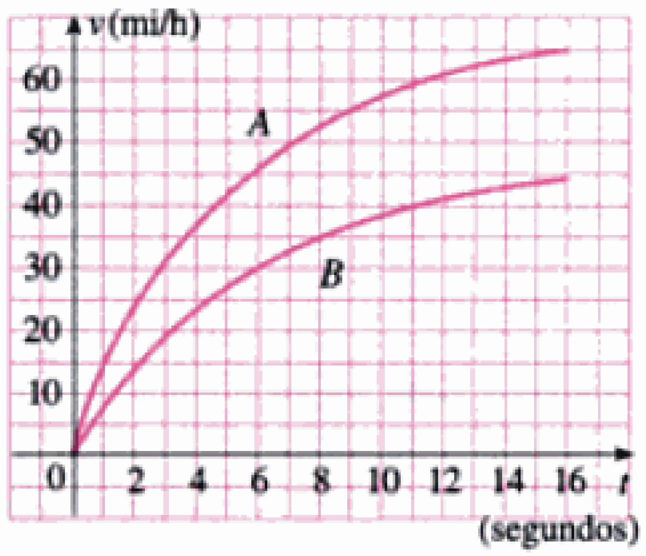


FIGURA 8

EJEMPLO 4 □ En la figura 8 se muestran las curvas de velocidad de dos automóviles, A y B, que parten uno junto al otro y se mueven a lo largo de la misma carretera. ¿Qué representa el área entre las dos curvas? Use la regla del punto medio para estimarla.

SOLUCIÓN Por lo visto en la sección 5.4, sabemos que el área debajo de la curva de velocidad A representa la distancia recorrida por el automóvil A durante los primeros 16 segundos. De manera análoga, el área debajo de la curva B es la distancia recorrida por el automóvil B durante ese periodo. Por consiguiente, el área entre estas curvas, que es la diferencia de las áreas debajo de ellas, es la distancia entre los vehículos después de 16 segundos. Leamos las velocidades en la gráfica y convirtámoslas a pies por segundo ($1 \text{ mi/h} = \frac{5280}{3600}$ pies/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Si utilizamos la regla del punto medio con $n = 4$ intervalos, de modo que $\Delta t = 4$. Los puntos medios de los intervalos son $\bar{t}_1 = 2$, $\bar{t}_2 = 6$, $\bar{t}_3 = 10$, y $\bar{t}_4 = 14$. Estimamos la distancia entre los automóviles después de 16 segundos de la siguiente forma:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\, dt \approx \Delta t\,[13 + 23 + 28 + 29]$$
$$= 4(93) = 372 \text{ pies}$$ □

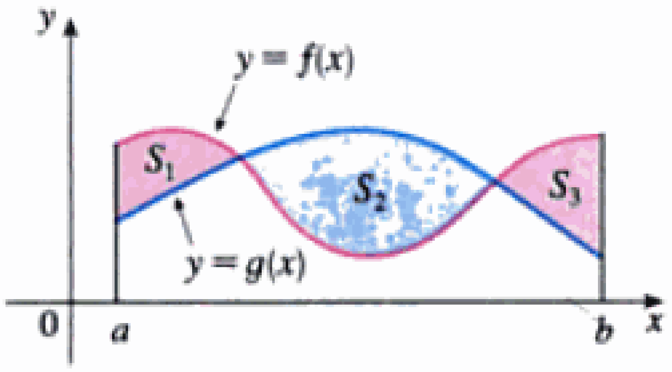


FIGURA 9

Cuando se nos pide calcular el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ donde $f(x) \geqslant g(x)$ para algunos valores de x y $g(x) \geqslant f(x)$ para otros, partimos la región dada S en varias regiones, $S_1, S_2, \ldots$ cuyas áreas son $A_1, A_2, \ldots$ (Fig. 9).

A continuación definimos el área de la región S como la suma de las áreas de las regiones más pequeñas, $S_1, S_2, \ldots$: $A = A_1 + A_2 + \cdots$. en vista de que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) \text{ cuando } f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) \text{ cuando } g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$

llegamos a la siguiente ecuación para determinar A.

> **3** El área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$ es
>
> $$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Al evaluar la integral de la ecuación (3), debemos seguir descomponiéndola en integrales que correspondan a $A_1, A_2, \ldots$.

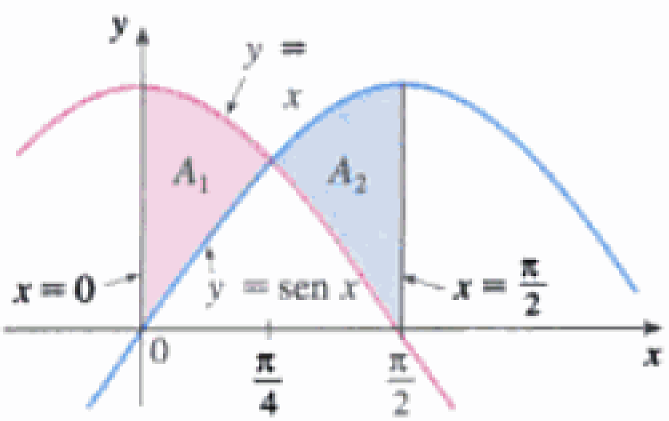


FIGURA 10

EJEMPLO 5 □ Calcule el área de la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$, y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Los puntos de intersección están donde $\operatorname{sen} x = \cos x$, esto es, cuando $x = \pi/4$ (porque $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$). En la figura 10 vemos el esquema de la región. Notará que $\cos x \geqslant \operatorname{sen} x$ cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ pero que $\operatorname{sen} x \geqslant \cos x$ cuando $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Por consiguiente, el área que se pide es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\, dx = A_1 + A_2 \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\ &= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

En este ejemplo particular podríamos ahorrar algo de trabajo observando que la región es simétrica respecto de $x = \pi/4$ y así

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx$$

□

Algunas regiones se manejan mejor considerando x como función de y. Si una región está limitada por las curvas con ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$, y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (véase la Fig. 11), entonces su área es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

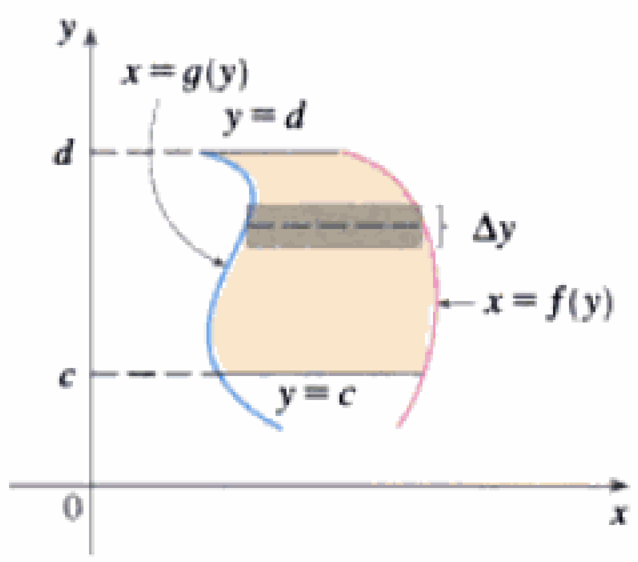


FIGURA 11

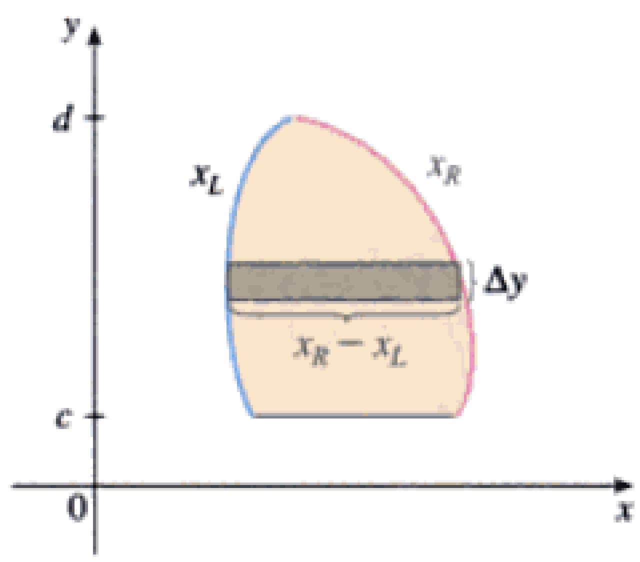


FIGURA 12

Si x_R denota la frontera derecha y x_L la izquierda, entonces, como se ilustra en la figura 12, tenemos

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\, dy$$

En este caso un rectángulo típico de aproximación tiene las dimensiones $x_R - x_L$ y Δy.

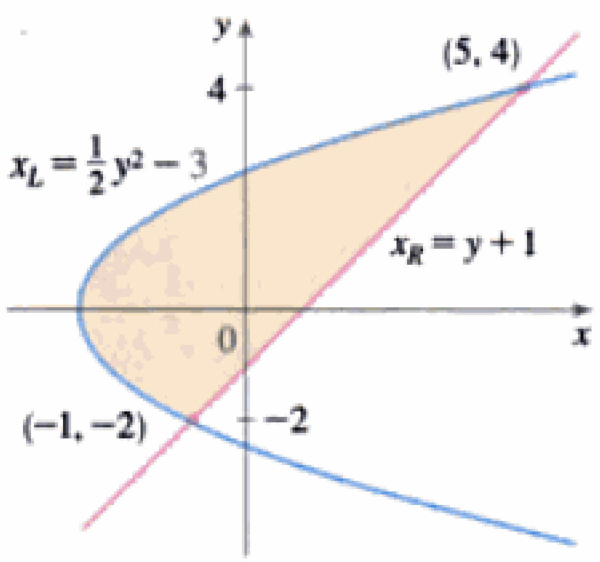


FIGURA 13

EJEMPLO 6 □ Encuentre el área encerrada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN Al resolver las dos ecuaciones, encontramos que los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. Resolvemos la ecuación de la parábola para x y advertimos, al observar la figura 13, que las curvas fronteras izquierda y derecha son

$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad x_R = y + 1$$

29–30 □ Evalúe la integral e interprétela como el área de una región.

29. $\int_{-1}^{1} |x^3 - x|\, dx$ **30.** $\int_0^{\pi} \left| \operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi}x \right| dx$

31–32 □ Use la regla del punto medio con $n = 4$ para aproximar el área de la región bordeada por las curvas que se dan.

31. $y = \sqrt{1 + x^3}$, $y = 1 - x$, $x = 2$

32. $y = x \tan x$, $y = x$

33–36 □ Use una gráfica para hallar las abscisas aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. A continuación, aproxime el área de la región encerrada por las curvas.

33. $y = x^2$, $y = 2\cos x$ **34.** $y = x^4$, $y = 3x - x^3$

35. $y = x^2$, $y = e^{-x^2}$ **36.** $y = e^x$, $y = 2 - x^2$

37–38 □ Use una gráfica para encontrar las abscisas aproximadas de los puntos de intersección de las curvas. Luego, por las reglas del punto medio, con $n = 4$, encuentre una aproximación de las áreas que limitan las curvas.

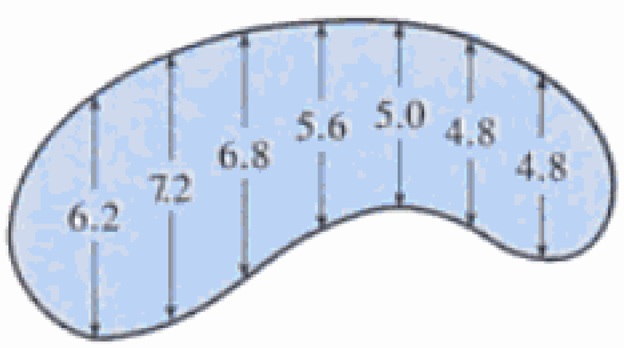
37. $y = 1 + 3x - 2x^2$, $y = \sqrt{1 + x^4}$

38. $y = x^2 - x$, $y = \operatorname{sen}(x^2)$

39. Los automóviles de carrera conducidos por Carlos y Kurt se encuentran parejos al inicio de una competencia. En la tabla se muestran las velocidades de cada vehículo (en millas por hora) durante los diez primeros segundos de la carrera. Utilice la regla del punto medio para estimar cuánto más avanza Kurt que Carlos durante los primeros diez segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

40. Se midieron los anchos (en metros) de una piscina que tiene forma de riñón a intervalos de 2 metros, como se indican en la figura. Use la regla del punto medio para estimar el área de la piscina



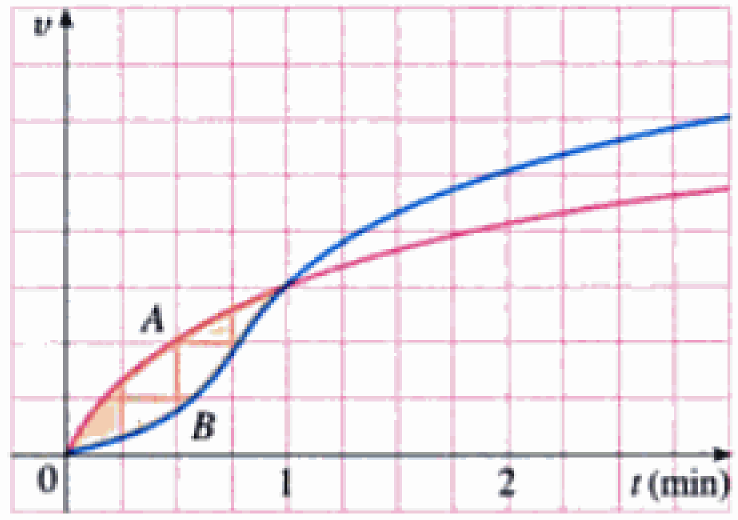
41. Dos automóvles, A y B arrancan parejos y aceleran partiendo del reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones de velocidad.

(a) ¿Cuál va adelante después de un minuto? Explique.

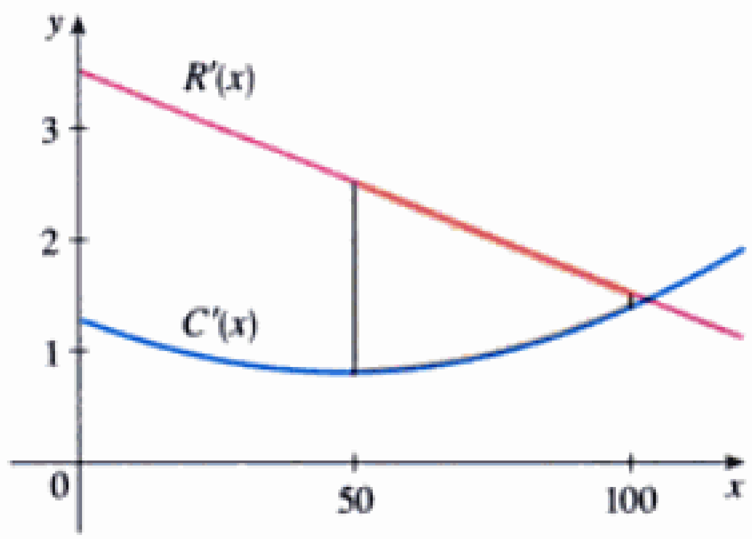
(b) ¿Qué significa la región sombreada?

(c) ¿Cuál auto va adelante luego de dos minutos? Explique.

(d) Estime el tiempo en que vuelven a estar lado a lado.



42. En la figura se muestran las gráficas de la función de ingreso marginal R' y de la función de costo marginal C' para un fabricante. [Recuerde, por lo visto en la sección 4.8, que $R(x)$ y $C(x)$ representan el ingreso y el costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que R y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Aplique la regla del punto medio para estimar el valor de esta cantidad.



43. La curva con ecuación $y^2 = x^2(x + 3)$ se llama la **cúbica de Tschirnhausen**. Si observa la gráfica, verá que la curva presenta un lazo. Halle el área encerrada por el lazo.

44. Halle el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta parábola en $(1, 1)$, y el eje x.

45. Encuentre el número b tal que la recta $y = b$ divida la región limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones con áreas iguales.

46. (a) Halle el número a tal que la recta $x = a$ biseque el área debajo de la curva $y = 1/x^2$, $1 \leq x \leq 4$.

(b) Encuentre el número b tal que la recta $y = b$ biseque el área mencionada en el inciso a).

47. Halle los valores de c tales que el área de la región encerrada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ sea 576.

48. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valores de c, el área de la región encerrada por las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$, y $x = 0$ es igual al área de la región encerrada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$, y $y = 0$?

49. ¿Para cuáles valores de m, la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ encierra una región? Encuentre el área de la región.

6.2 Volúmenes

Al tratar de hallar el volumen de un sólido, encaramos el mismo tipo de problema que al buscar áreas. Tenemos una idea intuitiva de lo que significa volumen, pero debemos afinarla aplicando el cálculo para dar una definición exacta de volumen.

Empecemos con un tipo sencillo de sólido llamado **cilindro** (o, de manera más precisa, *cilindro recto*). Como se ilustra en la Fig. 1(a), un cilindro está limitado por una región plana B_1, conocida como la **base**, y una región congruente B_2 en un plano paralelo. El cilindro consta de todos los puntos sobre los segmentos rectilíneos perpendiculares a la base y que unen B_1 con B_2. Si el área de la base es A y la altura del cilindro (la distancia desde B_1 hasta B_2) es h, su volumen V se define como

$$V = Ah$$

En particular, si la base es un círculo con radio r, entonces el cilindro es circular con volumen $V = \pi r^2 h$ [véase la figura 1(b)] y si la base es un rectángulo con largo l y ancho w, entonces el cilindro es una caja rectangular (o *paralelepípedo rectangular*) con volumen, $V = lwh$ [véase la Fig. 1(c)].

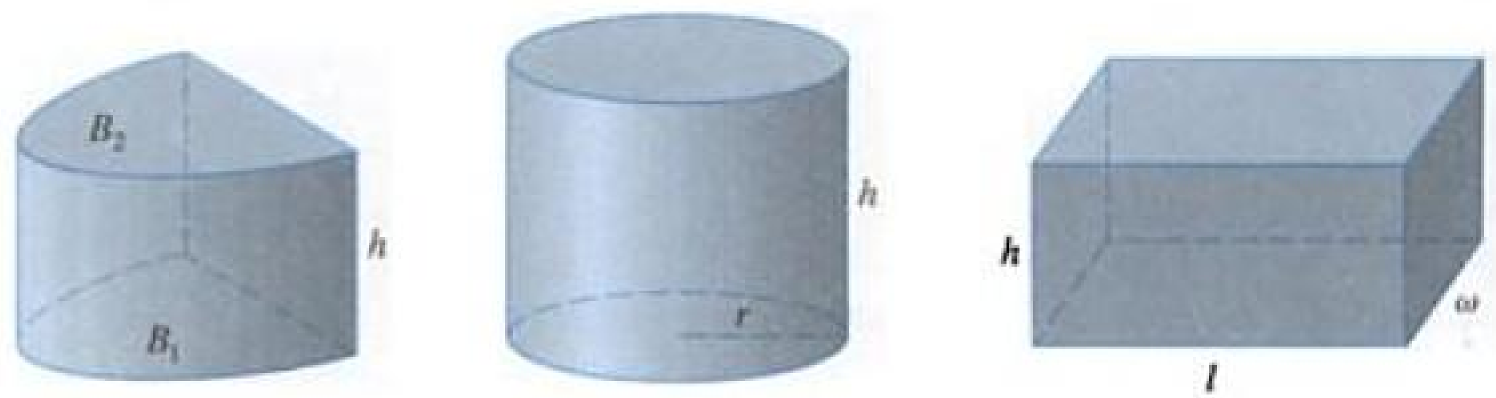


FIGURA 1

(a) Cilindro $V = Ah$

(b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$

(c) Caja rectangular $V = lwh$

Para un sólido S, que no sea un cilindro, "cortaremos" en partes el sólido S y aproximaremos cada parte con un cilindro. Estimamos el volumen de S sumando los volúmenes de los cilindros. Llegaremos al valor exacto del volumen de S por un proceso límite en el que el número de partes va en aumento..

Comencemos cortando S con un plano y obteniendo una región plana denominada **sección transversal** de S. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x y que pasa por el punto x, donde $a \leq x \leq b$. (Véase la Fig. 2. Imagine que corta S con un cuchillo a través de x y que calcula el área de la superficie consecuente.) El área de la sección transversal, $A(x)$ varía conforme a aumenta desde a hasta b.

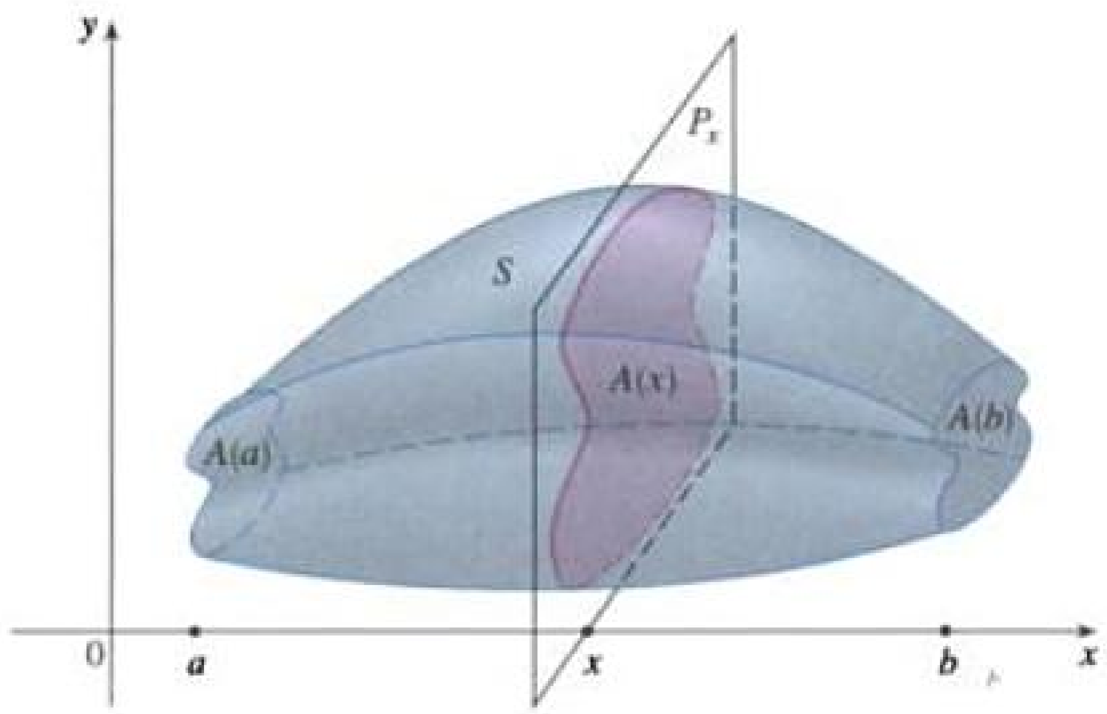


FIGURA 2

Dividamos S en n "rebanadas" de ancho igual a Δx usando los planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ para rebanar el sólido. (Piense en que se rebana una hogaza de pan.) Si elegimos los puntos muestras x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$, podemos hallar una aproximación de la i-ésima rebanada S_i (la parte de S que se encuentra entre los planos $P_{x_{i-1}}$ y P_{x_i}) por medio de un cilindro con área de la base $A(x_i^*)$ y altura Δx. (véase la Fig. 3.)

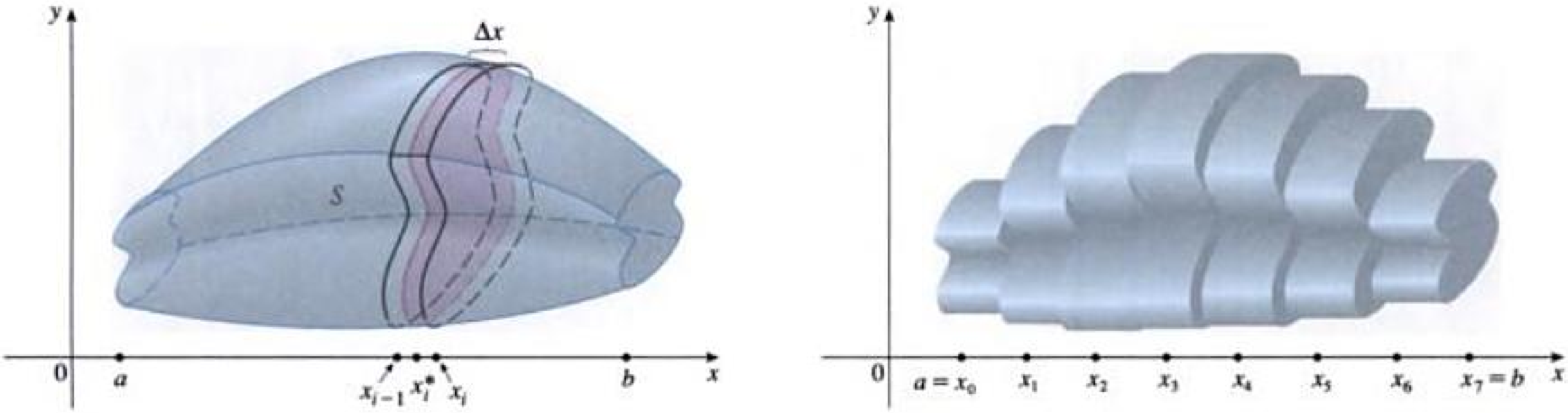


FIGURA 3

El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\,\Delta x$, de modo que una aproximación para nuestra concepción intuitiva del volumen de la i-ésima rebanada S_i es

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Si se suman los volúmenes de estas rebanadas, se obtiene una aproximación para el volumen total (es decir, lo que concebimos intuitivamente como el volumen):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximación parece mejorar conforme $n \to \infty$. (Piense que las rebanadas se van adelgazando.) Por lo tanto, *definimos* el volumen como el límite de estas sumas, cuando $n \to \infty$. Pero reconocemos el límite de sumas de Riemann como una integral definida, con lo que tenemos esta definición:

Definición de volumen Sea S un sólido que se encuentra entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, que pasa por x y es perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el **volumen** de S es

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

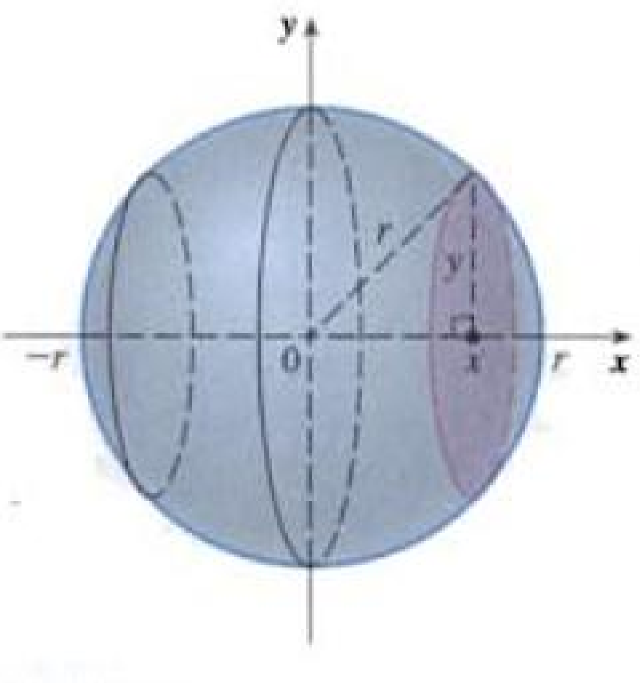


FIGURA 4

Cuando usamos la fórmula del volumen $V = \int_a^b A(x)\,dx$ es importante recordar que $A(x)$ es el área de una sección transversal móvil obtenida al cortar con un plano que contiene x, y perpendicular al eje x.

EJEMPLO 1 □ Demuestre que el volumen de la esfera de radio r es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

SOLUCIÓN Si colocamos la esfera de modo que su centro esté en el origen (véase la Fig. 4), entonces el plano P_x corta la esfera en un círculo cuyo radio (por el teorema de

Pitágoras) es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Si se aplica la definición de volumen, con $a = -r$ y $b = r$, resulta

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(El integrando es par)} \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

☐

En la figura 5 se ilustra la definición de volumen, cuando el sólido es una esfera con radio $r = 1$. A partir del resultado del ejemplo 1, sabemos que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi \approx 4.18879$. En este caso las rebanadas son cilindros circulares y las tres partes de la figura 5 muestran la interpretación geométrica de las sumas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

cuando $n = 5$, 10 y 20, si elegimos que los puntos muestras x_i^* sean los puntos medios $\bar{x}_i$. Advierta que cuando aumentamos el número de cilindros de aproximación, las sumas correspondientes de Riemann se aproximan más al volumen verdadero.

(a) Usando 5 cilindros, $V \approx 4.2726$ (b) Usando 10 cilindros, $V \approx 4.2097$ (c) Usando 20 cilindros, $V \approx 4.1940$

FIGURA 5 Apoximación del volumen de una esfera con radio 1

EJEMPLO 2 ☐ Halle el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$, de 0 a 1. Ilustre la definición de volumen dibujando un cilindro de aproximación típico.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 6(a). Si giramos alrededor del eje x, obtenemos un sólido mostrado en 6(b). Al cortar una rebanada que contenga a x obtenemos un disco de radio $\sqrt{x}$. El área de esta sección transversal es

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

y el volumen del cilindro de aproximación (un disco de espesor Δx) es

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

□ ¿Obtuvimos una respuesta razonable en el ejemplo 2? Como comprobación, reemplacemos la región dada con un cuadrado con base $[0, 1]$ y altura 1. Si lo hacemos girar, obtenemos un cilindro con radio 1, altura 1, y volumen $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Calculamos que el sólido dado tiene la mitad de este volumen. Eso parece correcto.

El sólido está entre $x = 0$ y $x = 1$, de modo que su volumen es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

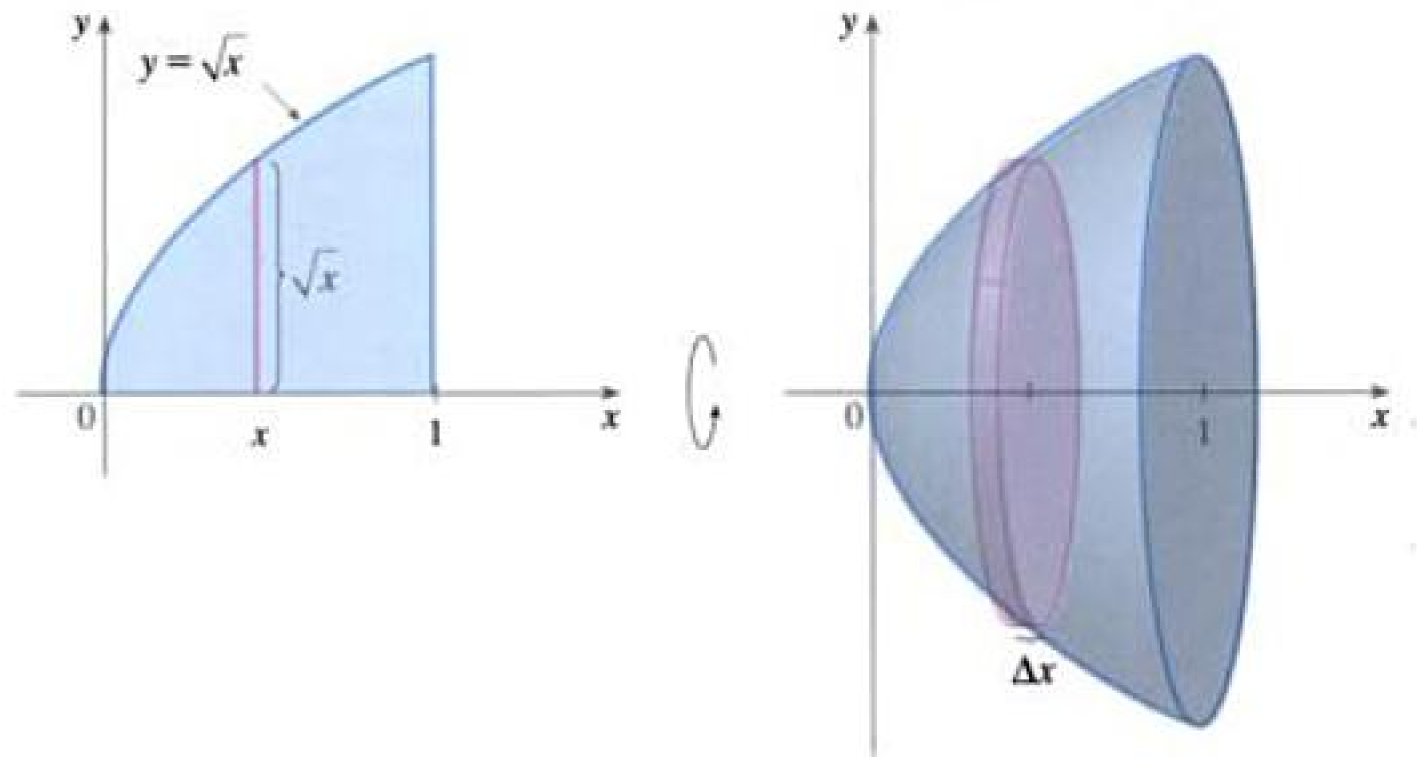


FIGURA 6 (a) (b) □

EJEMPLO 3 □ Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región limitada por $y = x^3$, $y = 8$, y $x = 0$ alrededor del eje y.

SOLUCIÓN En la figura 7(a) se muestra la región y en la figura 7(b), el sólido resultante. Debido a que se hace girar la región alrededor del eje y, tiene sentido rebanar el sólido perpendicular al eje y. Si lo rebanamos a la altura y, obtenemos un disco circular con radio x, donde $x = \sqrt[3]{y}$. De suerte que el área de la sección transversal a través de y es

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

y el volumen del cilindro de aproximación representado en la figura 7(b) es

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Puesto que el sólido se encuentra entre $y = 0$ y $y = 8$, su volumen es

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

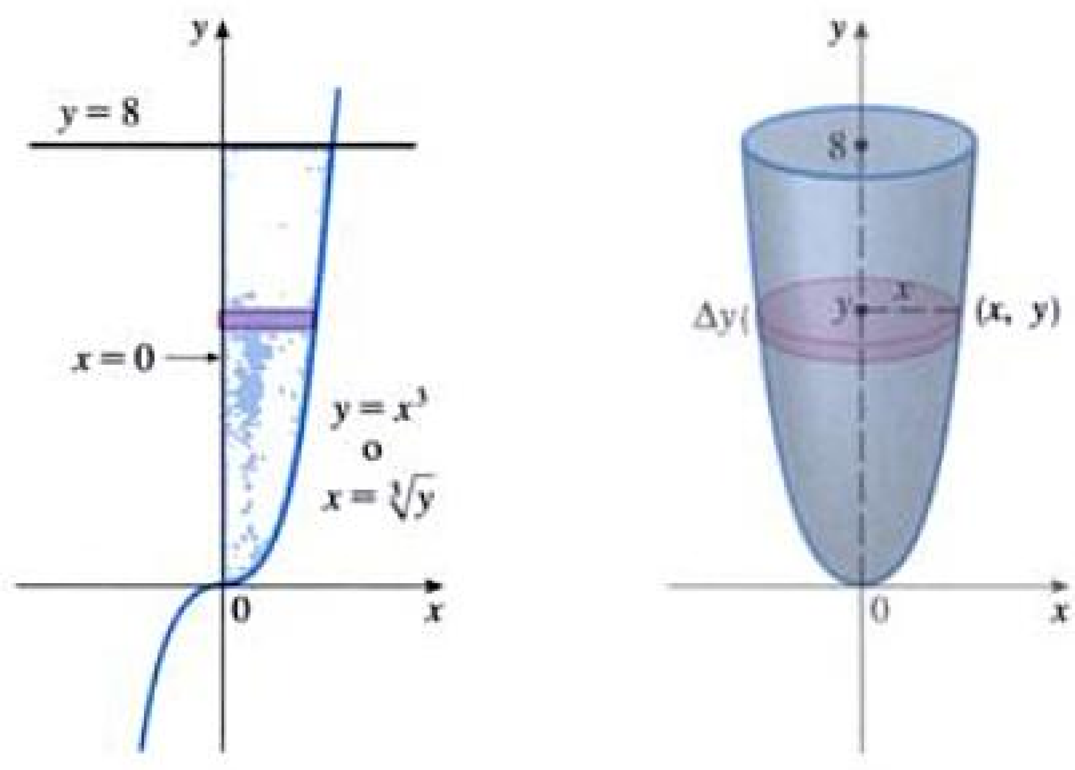


FIGURA 7 (a) (b) □

EJEMPLO 4 □ Se hace girar la región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ en torno del eje x. Halle el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Las curvas $y = x$ y $y = x^2$ se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En la figura 8 se muestran la región entre ellas, el sólido de rotación, y una sección transversal perpendicular al eje x, se muestran en la figura 8. Una sección transversal en el plano P_x tiene la forma de una *arandela* (o anillo) con radio interior x^2 y radio exterior x, de modo que el área de la sección transversal es:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Por lo tanto, tenemos

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

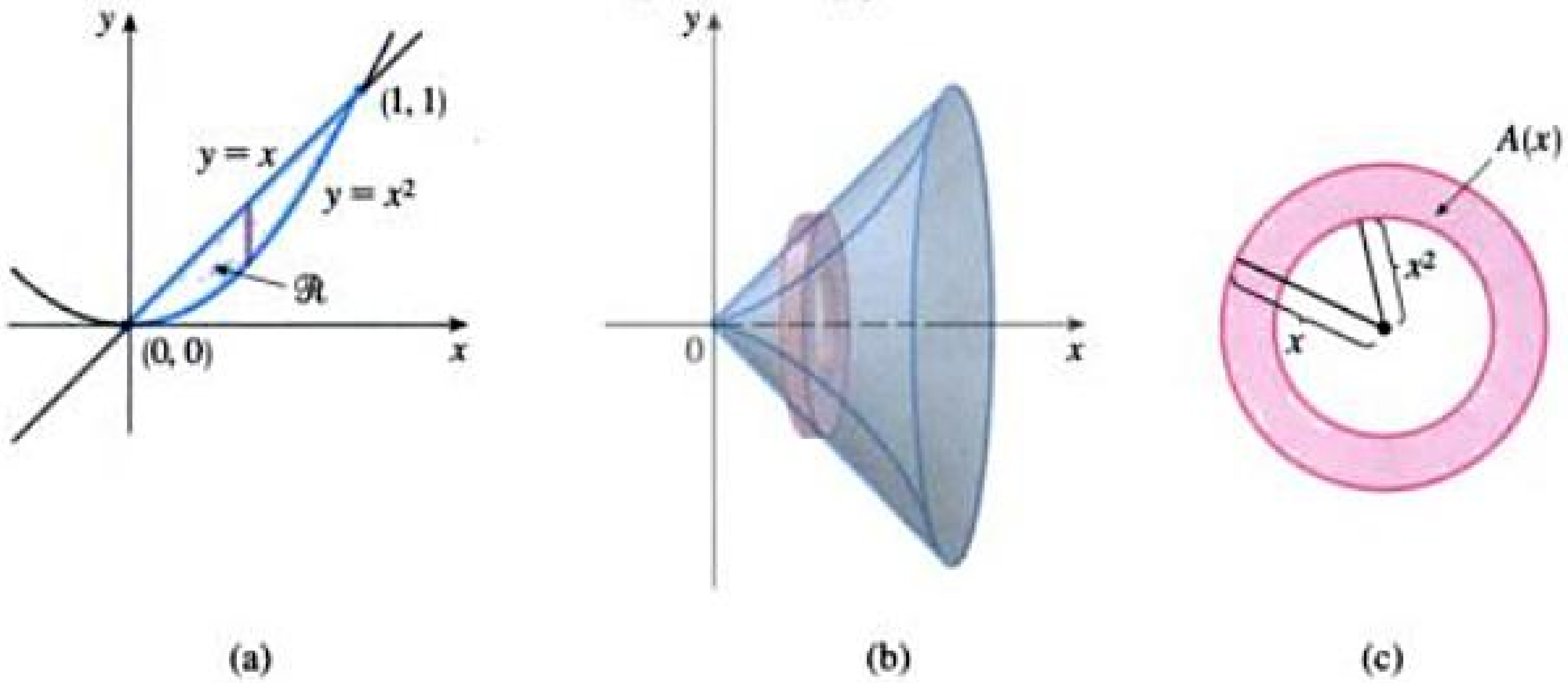


FIGURA 8

□

EJEMPLO 5 □ Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN En la figura 9 se muestra el sólido y una sección transversal. Una vez más, una sección transversal es una arandela, pero, en esta ocasión, el radio interior es $2 - x$

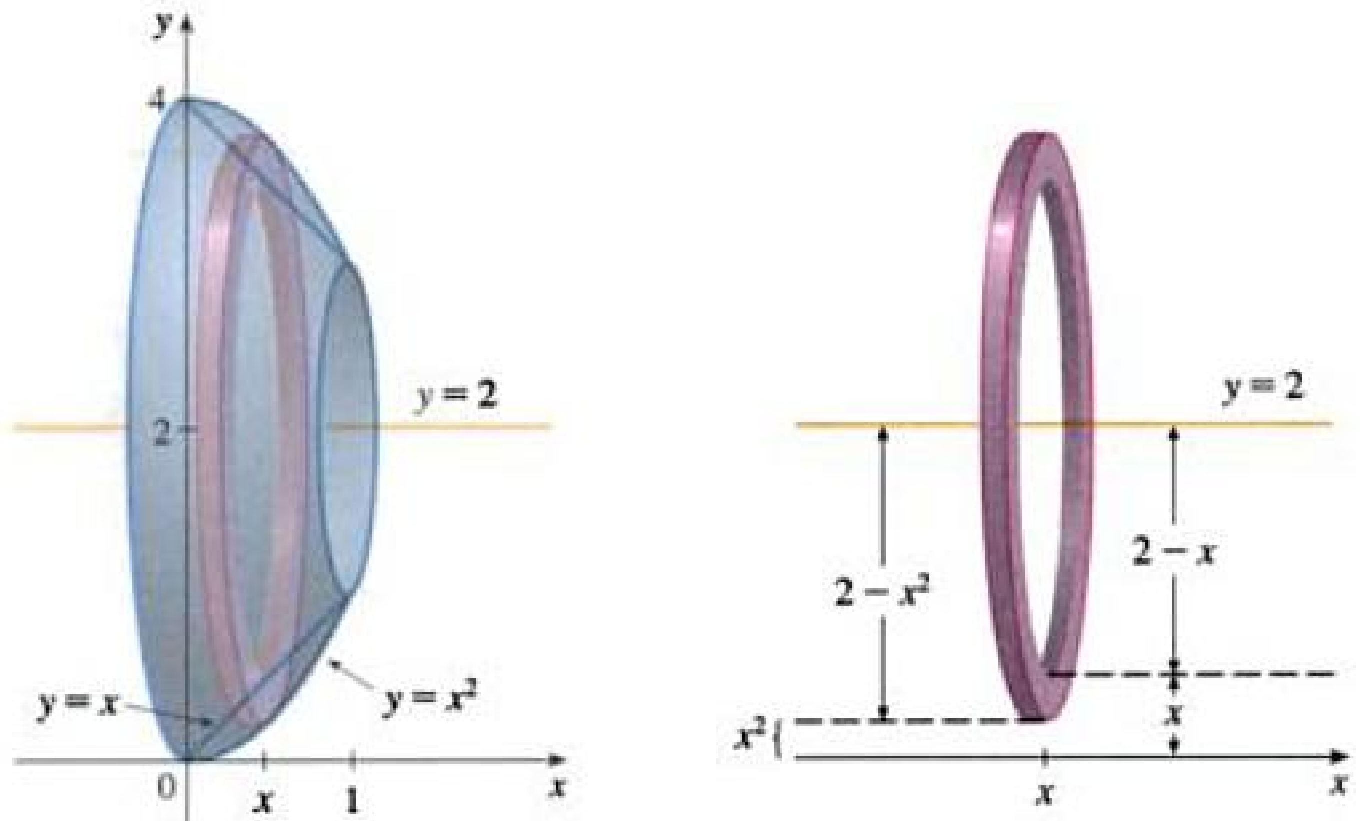


FIGURA 9

y el radio exterior es $2 - x^2$. El área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

por lo cual, el volumen de S es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

□

Los sólidos en los ejemplos 1-5 se llaman **sólidos de revolución** porque se obtienen cuando una región da vueltas alrededor de una recta. En general, el volumen de un sólido de revolución se calcula usando la fórmula básica

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

y hallamos el área en sección transversal $A(x)$ o $A(y)$ de una de las dos formas siguientes:

- Si la sección transversal es un disco (como en los ejemplos 1-3) hallamos el radio del disco (en términos de x o y) y usamos

$$A = \pi(\text{radio})^2$$

- Si la sección transversal es una arandela (ejemplos 4 y 5) hallamos el radio interior r_{interior} y el radio exterior r_{exterior} a partir de un diagrama (como en las figuras 9 y 10) y calculando el área de la arandela restamos el área interior del disco desde su área exterior:

$$A = \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$

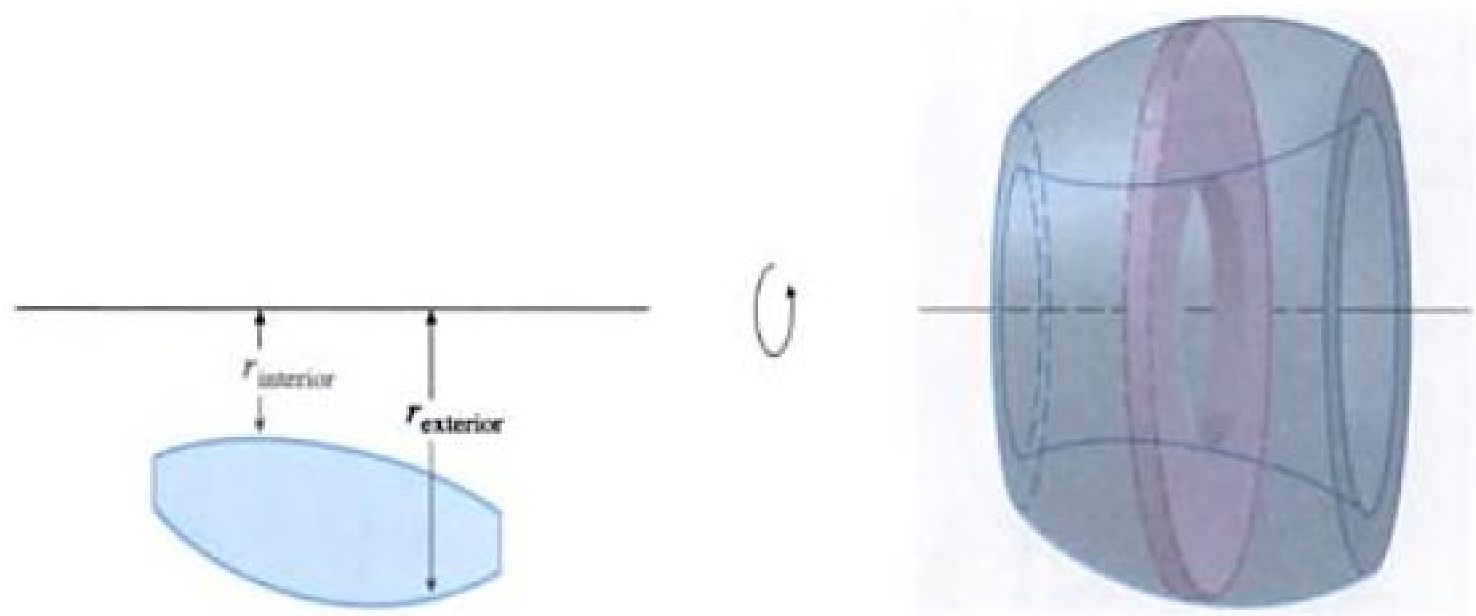


FIGURA 10

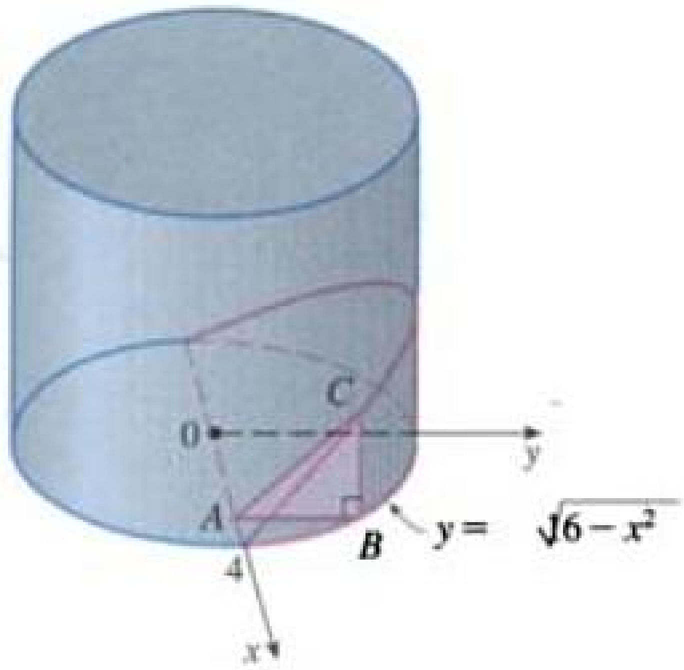
El ejemplo que sigue es otra ilustración del procesamiento.

EJEMPLO 6 □ Halle el volumen del sólido que se obtiene rotando la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $x = -1$.

de la base en el origen y el vértice sobre el eje y positivo (Fig. 16), usted puede comprobar que habríamos obtenido la integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2 h}{3}$$

EJEMPLO 9 □ De un cilindro circular de radio 4 se corta una cuña por medio de dos planos. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro plano corta al primero en un ángulo de 30° a lo largo de un diámetro del cilindro. Halle el volumen de la cuña.



SOLUCIÓN Si colocamos el eje x a lo largo del diámetro en el que se cortan los dos planos, entonces la base del sólido es un semicírculo con ecuación $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leq x \leq 4$. Una sección transversal perpendicular al eje x, y a una distancia x desde el origen es un triángulo ABC, como se muestra en la figura 17, cuya base es $y = \sqrt{16 - x^2}$ y cuya altura es $|BC| = y \tan 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Por tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2}$$
$$= \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

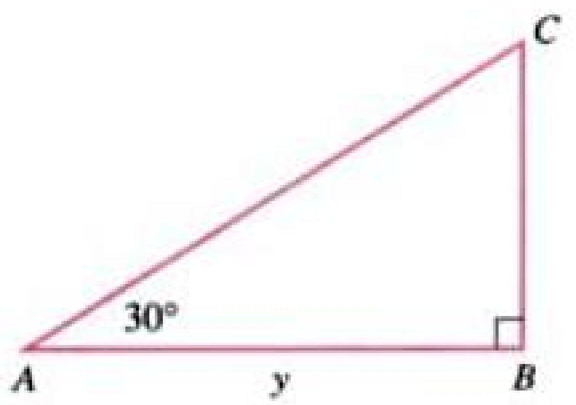


FIGURA 17

y el volumen es

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$
$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

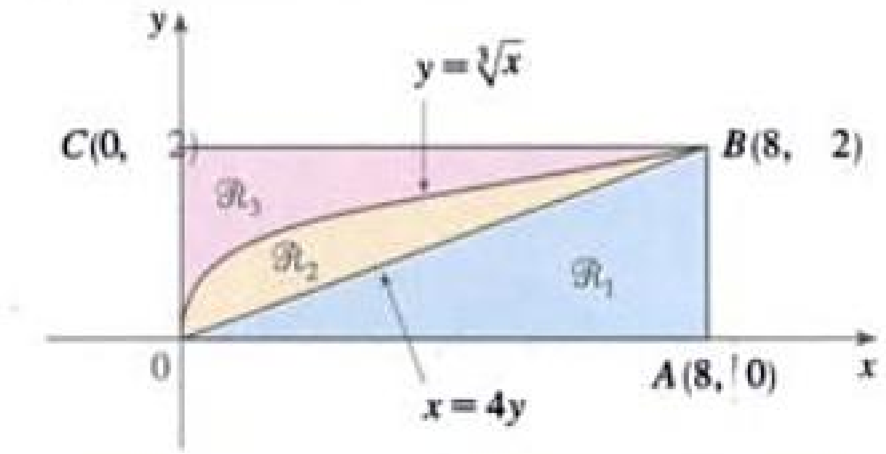
Para otros métodos véase el ejercicio 60. □

6.2 Ejercicios

1–18 □ Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por las curvas dadas alrededor del eje especificado. Trace un esquema de la región, del sólido y de un disco o anillo típico.

1. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$; alrededor del eje x
2. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; alrededor del eje x
3. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; alrededor del eje x
4. $y = \sqrt{x - 1}$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$; alrededor del eje x
5. $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $y = 4$, $x = 0$; alrededor del eje x
6. $x = y - y^2$, $x = 0$; alrededor del eje x
7. $y = x^2$, $y^2 = x$; alrededor del eje x
8. $y = \sec x$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$; alrededor del eje x
9. $y^2 = x$, $x = 2y$; alrededor del eje y
10. $y = x^{2/3}$, $x = 1$, $y = 0$; alrededor del eje y
11. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; en torno de $y = 1$
12. $y = x^2$, $y = 4$; en torno de $y = 4$
13. $y = x^4$, $y = 1$; en torno de $y = 2$
14. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; en torno de $y = -1$
15. $x = y^2$, $x = 1$; en torno de $x = 1$
16. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; en torno de $x = 2$
17. $y = x^2$, $x = y^2$; en torno de $x = -1$
18. $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; en torno de $x = 1$

19–30 □ Refiérase a la figura y encuentre el volumen generado al girar la región alrededor de la recta indicada.



19. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OA
20. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OC
21. $\mathcal{R}_1$ alrededor de AB
22. $\mathcal{R}_1$ alrededor de BC
23. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OA
24. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OC
25. $\mathcal{R}_2$ alrededor de BC
26. $\mathcal{R}_2$ alrededor de AB
27. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OA
28. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OC
29. $\mathcal{R}_3$ alrededor de BC
30. $\mathcal{R}_3$ alrededor de AB

31–36 □ Establezca, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por las curvas indicadas alrededor de la recta especificada.

31. $y = \ln x,\ y = 1,\ x = 1;$ alrededor del eje x

32. $y = \sqrt{x-1},\ y = 0,\ x = 5;$ alrededor de eje y

33. $y = 0,\ y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $y = 1$

34. $y = 0,\ y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ alrededor de $y = -2$

35. $x^2 - y^2 = 1,\ x = 3;$ alrededor de $x = -2$

36. $2x + 3y = 6,\ (y-1)^2 = 4 - x;$ alrededor de $x = -5$

37–38 □ Use una gráfica para hallar las abscisas aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego aproxime el volumen del sólido obtenido haciendo girar la región limitada por estas curvas alrededor del eje x.

37. $y = x^2,\quad y = \ln(x+1)$

38. $y = 3\operatorname{sen}(x^2),\quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

39–42 □ Cada integral representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

39. $\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

40. $\pi \int_2^5 y\, dy$

41. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8)\, dy$

42. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2]\, dx$

43. El barrido para una tomografía axial computarizada (TAC) produce vistas de secciones transversales igualmente espaciadas de un órgano humano, las que suministran información acerca de mismo que, de lo contrario, sólo se obtendrá por cirugía. Suponga que la TAC de un hígado humano muestra secciones transversales con 1.5 cm de separación. El hígado tiene 15 cm de longitud y las áreas de las secciones transversales, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Aplique la regla del punto medio para estimar el volumen del hígado.

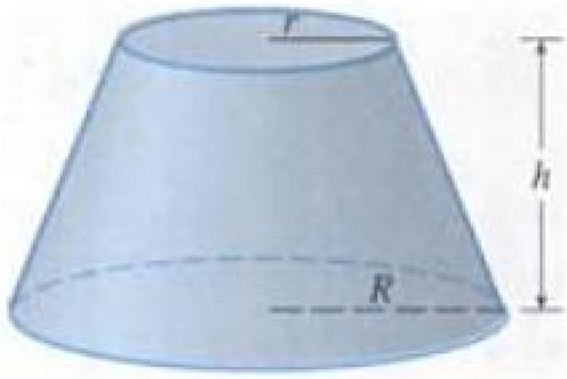
44. Un tronco de 10 m de largo se corta a intervalos de 1 m. En la tabla, aparece una lista de las áreas A de sus secciones transversales (a una distancia x del extremo del tronco). Aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen del tronco.

x (m)	A (m²)	x (m)	A (m²)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

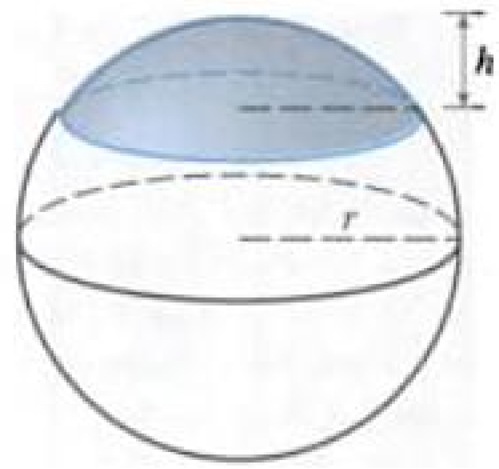
45–57 □ Encuentre el volumen del sólido S descrito.

45. Un cono circular recto con altura h y radio r de la base

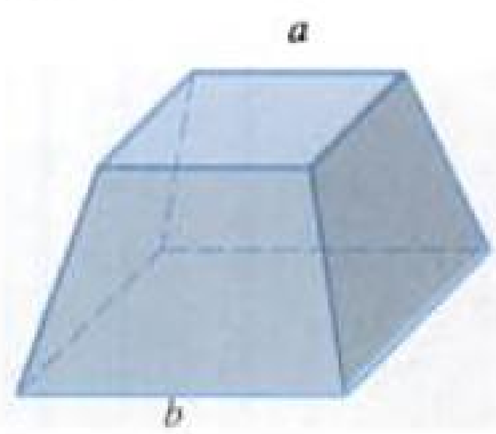
46. Un cono circular recto truncado con altura h, radio R de la base inferior y radio r de la parte superior



47. Un casquete de una esfera con radio r y altura h.



48. Una pirámide truncada con base cuadrada de lado b, lado a del cuadrado superior y altura h



49. Una pirámide con altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$

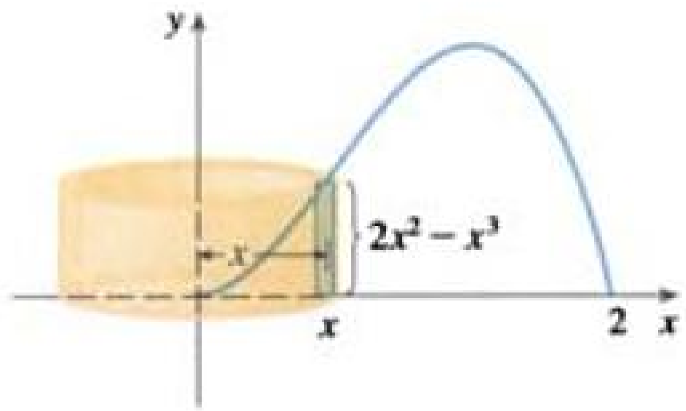


FIGURA 6

□ La figura 7 muestra una imagen generada por computadora del sólido del ejemplo 1.

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$
$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Se puede verificar que el método de los casquillos cilíndricos da la misma respuesta que el de las rebanadas. □

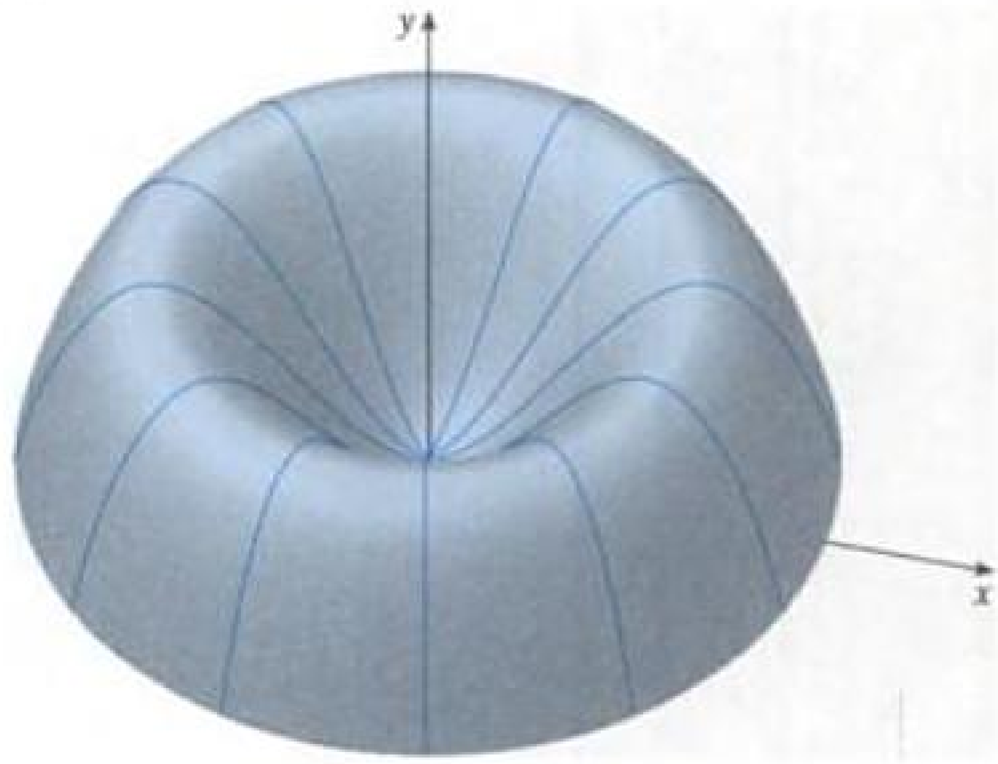


FIGURA 7

NOTA □ Al comparar la solución del ejemplo 1 con las observaciones iniciales de esta sección, vemos que el método de los cascarones cilíndricos es mucho más fácil que el de las arandelas para este problema. No tuvimos que determinar las coordenadas del máximo local ni despejar x de la ecuación en función de y. Sin embargo, los métodos de la sección anterior pueden ser más fáciles en otras circunstancias.

EJEMPLO 2 □ Calcule el volumen del cuerpo generado rotando la región intermedia entre $y = x$ y $y = x^2$ alrededor del eje y.

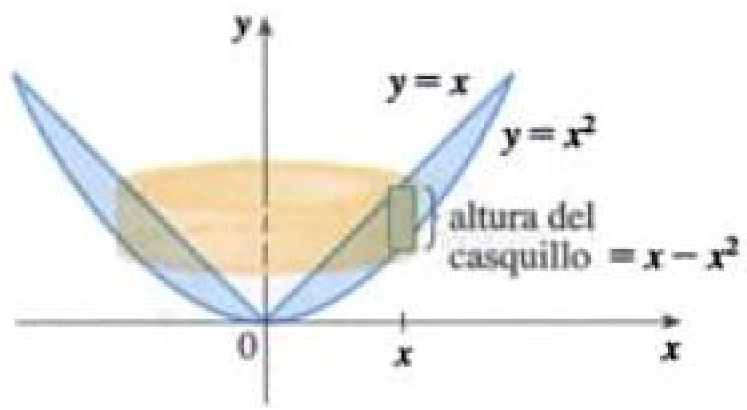


FIGURA 8

SOLUCIÓN En la figura 8 se puede ver la región y un casquillo típico. Vemos que el casquillo tiene radio x, circunferencia $2\pi x$, y altura $x - x^2$. De modo que el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$
$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$
□

El siguiente ejemplo muestra que el método de casquillos también sirve cuando el eje de rotación es el de las abscisas. Sólo hay que hacer un dibujo para identificar radio y altura de casquillo.

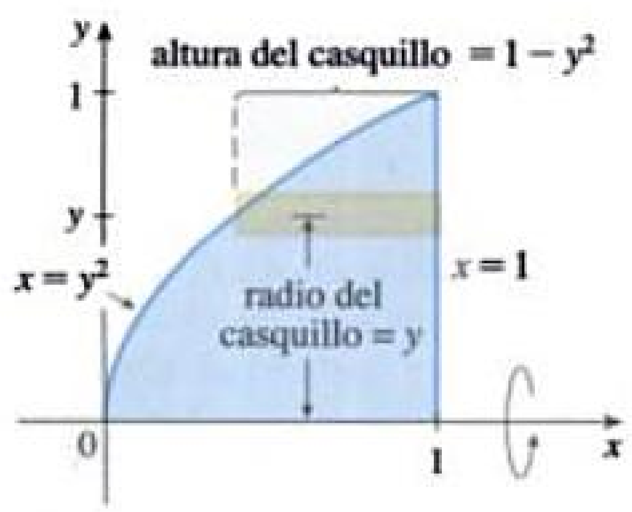


FIGURA 9

EJEMPLO 3 □ Emplee cascarones cilíndricos para calcular el volumen del cuerpo generado al girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1 en torno del eje x.

SOLUCIÓN Resolvimos este problema en el ejemplo 2 de la sección 6.2, empleando discos. Para usar cascarones, pasamos de $y = \sqrt{x}$ de la figura en ese ejemplo, a $x = y^2$ en la figura 9. Para usar la rotación alrededor del eje x vemos que un cascarón típico tiene radio y, circunferencia $2\pi y$, y altura $1 - y^2$. Luego el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy$$
$$= 2\pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

11. $y = x^2$, $y = 9$

12. $y^2 - 6y + x = 0$, $x = 0$

13. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x + y = 2$

14. $x + y = 3$, $x = 4 - (y - 1)^2$

15–20 □ Use el método de los cascarones cilíndricos a fin de calcular el volumen generado al girar la región limitada por las curvas dadas en derredor del eje especificado. Esquematice la región y un cascarón característico.

15. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; en torno de $x = 1$

16. $y = x^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$; en torno del eje y

17. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; en torno de $x = 4$

18. $y = 4x - x^2$, $y = 8x - 2x^2$; en torno de $x = -2$

19. $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 5$; en torno de $y = 3$

20. $y = x^2$, $x = y^2$; en torno de $y = -1$

21–26 □ Deduzca, pero no evalúe, una integral para calcular el volumen del cuerpo generado al girar la región limitada por las curvas dadas en torno al eje especificado.

21. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$; en torno del eje y

22. $y = x$, $y = 4x - x^2$; en torno de $x = 7$

23. $y = x^4$, $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$; en torno de $x = -1$

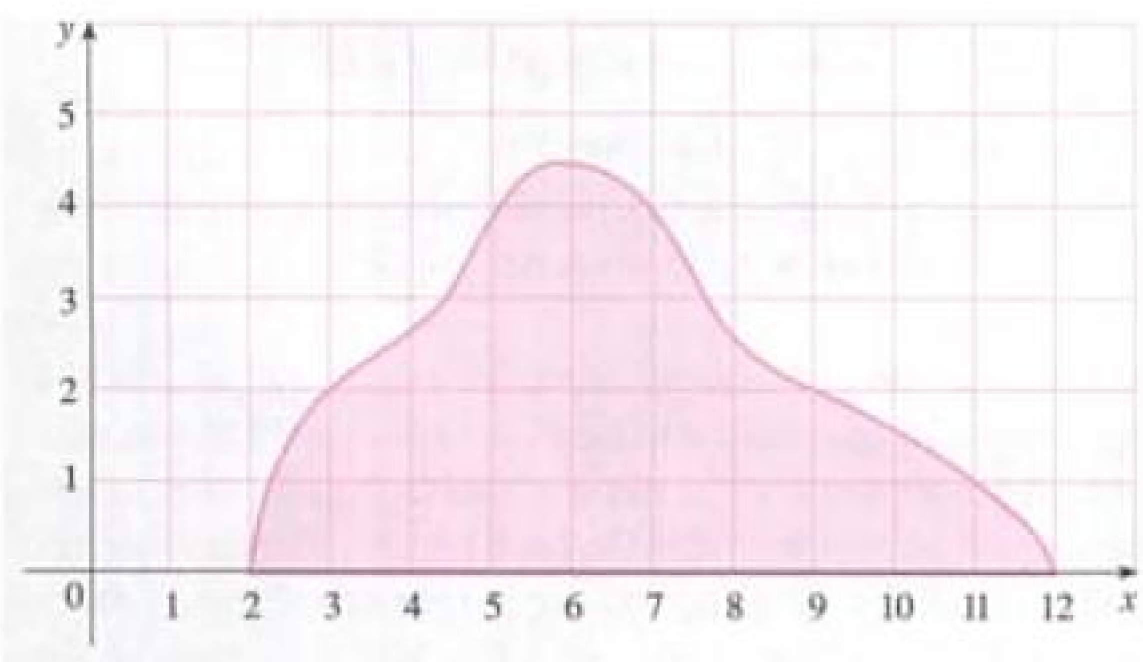
24. $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$; en torno de $x = 2$

25. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}$, $0 \leq y \leq \pi$, $x = 0$; en torno de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7$, $x = 4$; en torno de $y = 5$

27. Con la regla del punto medio, con $n = 4$, estime el volumen obtenido al girar la región bajo la curva $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \pi/4$ en torno del eje y.

28. Si gira la región que muestra la figura alrededor del eje y para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen del sólido.



29–32 □ Cada una de las integrales siguientes representa el volumen de un cuerpo; descríbalo.

29. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx$

30. $\int_0^{9} 2\pi y^{3/2} \, dy$

31. $\int_0^{1} 2\pi(x^3 - x^7) \, dx$

32. $\int_0^{\pi} 2\pi(4 - x) \operatorname{sen}^4 x \, dx$

33–34 □ Emplee una gráfica para estimar las abscisas de los puntos de intersección de las curvas dadas. A continuación, con los resultados obtenidos, estime el volumen del cuerpo generado al girar la región encerrada por esas curvas alrededor del eje y.

33. $y = 0$, $y = x + x^2 - x^4$

34. $y = x^4$, $y = 3x - x^3$

35–40 □ La región acotada por las curvas dadas se hace girar en torno del eje especificado. Calcule, el volumen del cuerpo resultante con cualquier método.

35. $y = x^2 + x - 2$, $y = 0$; en torno del eje x

36. $y = x^2 - 3x + 2$, $y = 0$; en torno del eje y

37. $y = 5$, $y = x + (4/x)$; en torno de $x = -1$

38. $x = 1 - y^4$, $x = 0$; en torno de $x = 2$

39. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; en torno del eje y

40. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; en torno del eje x

41–43 □ Emplee cascarones cilíndricos para calcular el volumen de los sólidos que se describen a continuación.

41. Una esfera de radio r

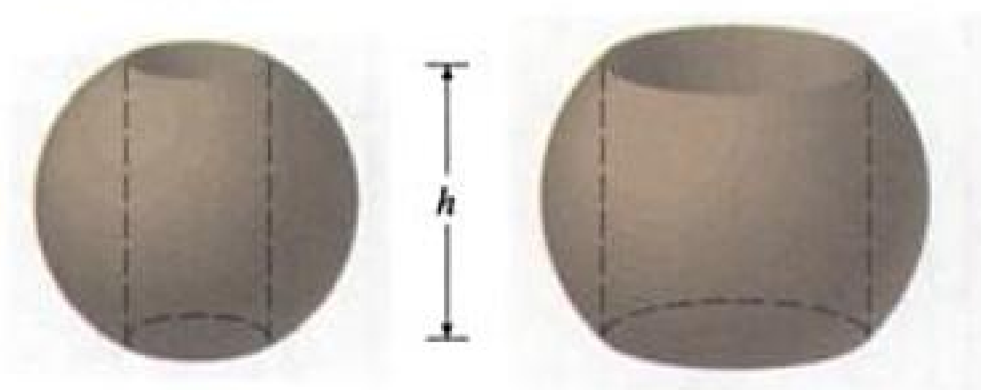
42. El toro sólido, ejercicio 59, sección 6.2

43. Un cono circular recto, con altura h y base de radio r

44. Al fabricar servilleteros de anillo perforando agujeros de varios diámetros a través de dos esferas de madera, que también tienen distintos diámetros, descubre que ambos servilleteros tienen la misma altura h, como muestra la figura.

(a) Encuentre cuál anillo tiene más madera.

(b) Compruebe su estimación: emplee cascarones cilíndricos a fin de calcular el volumen de un servilletero de anillo creado al perforar un agujero de radio r, que pasa por el centro, una esfera de radio R y exprese la respuesta en función de h.



pequeña y como f es continua, los valores de f no cambian mucho en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En otras palabras, f es casi constante en el intervalo; por consiguiente, el trabajo, W_i efectuado al mover la partícula de x_{i-1} a x_i se expresa, aproximadamente, con la ecuación (2):

$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Por lo tanto, podemos aproximar el trabajo total efectuado con

$$\boxed{3} \qquad W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Parece que esta aproximación mejora cuando n se vuelve más grande. Así, definiremos el **trabajo efectuado al mover al objeto de a a b** como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$. Dado que el lado derecho de la ecuación (3) es una suma de Riemann, reconocemos que este límite es una integral definida, y así

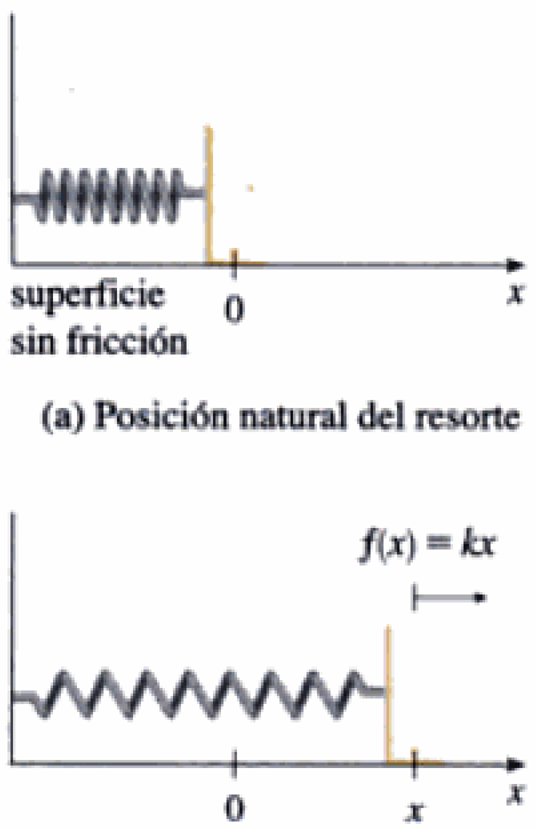
$$\boxed{4} \qquad \boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx}$$

EJEMPLO 2 □ Cuando una partícula está a una distancia de x pies del origen, actúa sobre ella una fuerza igual a $x^2 + 2x$ libras ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla de $x = 1$ hasta $x = 3$?

SOLUCIÓN

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

El trabajo es $16\frac{2}{3}$ pies-lb. □



(a) Posición natural del resorte

(b) Posición estirada del resorte

FIGURA 1

En el próximo ejemplo aplicaremos la **ley de Hooke** de la mecánica, la cual establece que la fuerza requerida para mantener estirado un resorte x unidades más allá de su longitud natural es proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

donde k es una constante positiva que se llama **constante del resorte**. La ley de Hooke es válida, siempre y cuando x no sea muy grande (Fig.1).

EJEMPLO 3 □ Se requiere una fuerza de 40 N para mantener estirado un resorte desde su longitud natural de 10 cm, hasta 15 cm. ¿Cuánto trabajo se efectúa al estirarlo de 15 a 18 cm?

SOLUCIÓN Según la ley de Hooke, la fuerza necesaria para estirar el resorte a x metros desde su longitud natural es $f(x) = kx$. Cuando el resorte se estira de 10 a 15 cm, el estiramiento es 5 cm = 0.05 m. Esto quiere decir que $f(0.05) = 40$, así que

$$0.05k = 40 \qquad k = \tfrac{40}{0.05} = 800$$

Por consiguiente, $f(x) = 800x$ y el trabajo efectuado al estirar el resorte de 15 cm a 18 cm es

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\,dx = 800\,\frac{x^2}{2}\Big]_{0.05}^{0.08}$$

$$= 400[(0.08)^2 - (0.05)^2] = 1.56 \text{ J}$$ □

Surge la pregunta: ¿hay algún número, c, en el cual el valor de f sea exactamente igual al valor promedio de la función; esto es, $f(c) = f_{prom}$? El teorema adjunto indica que sí, cuando la función es continua.

Teorema del valor medio para las integrales Si f es continua en $[a, b]$, existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

El teorema del valor medio para las integrales es una consecuencia del teorema del valor medio para las derivadas y el teorema fundamental del cálculo. En el ejercicio 21 se presenta la demostración.

La interpretación geométrica del teorema del valor medio para las integrales es que, cuando las funciones f son *positivas*, hay un número c tal que el rectángulo cuya base es $[a, b]$ y altura es $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f de a a b (Véase la figura 2 y la interpretación más bien pintoresca al margen.)

□ Siempre es posible cortar la parte alta de una montaña de dos dimensiones a cierto nivel y rellenar los valles para dejar la superficie plana.

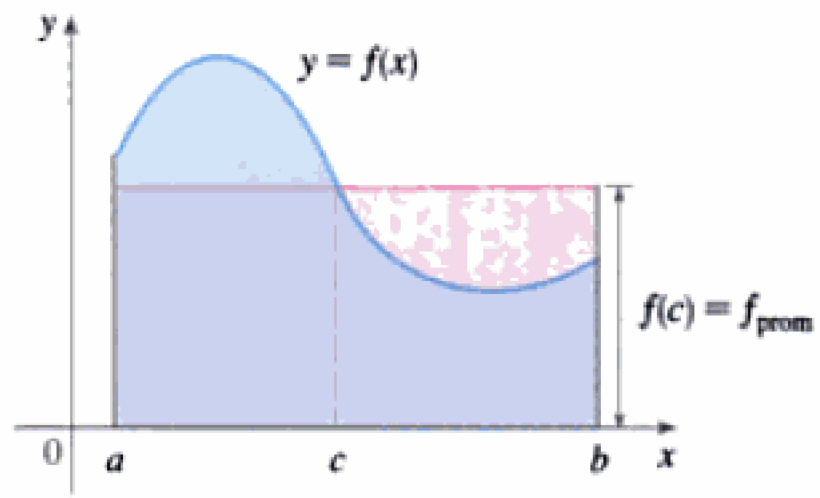


FIGURA 2

EJEMPLO 2 □ Dado que $f(x) = 1 + x^2$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$, el teorema del valor medio para las integrales establece que hay un número, c en $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = f(c)[2 - (-1)]$$

En este caso en particular, podemos despejar c explícitamente. De acuerdo con el ejemplo 1, sabemos que $f_{prom} = 2$,

$$f(c) = f_{prom} = 2$$

Por lo tanto, $\qquad 1 + c^2 = 2 \qquad$ es decir $\qquad c^2 = 1$

Así, sucede en este caso que hay dos números $c = \pm 1$ en el intervalo $[-1, 2]$ que satisfacen el teorema del valor medio para las integrales □

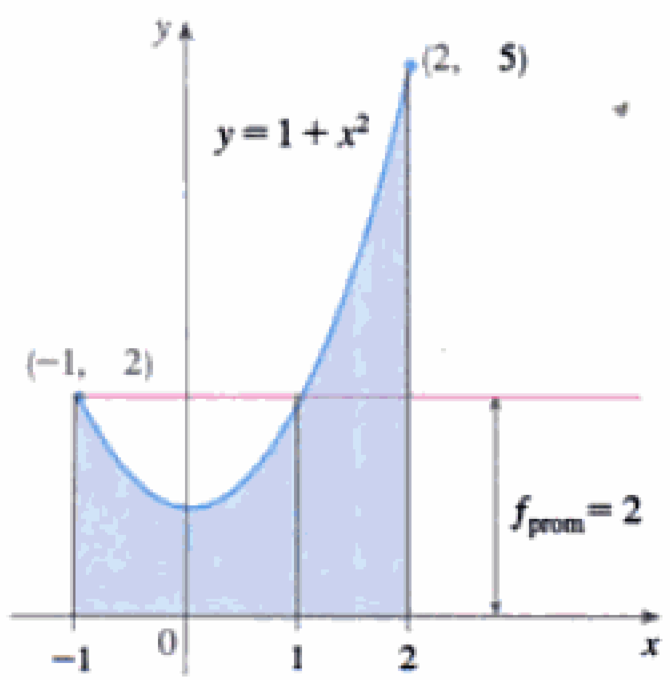


FIGURA 3

Los ejemplos 1 y 2 se ilustran en la figura 3.

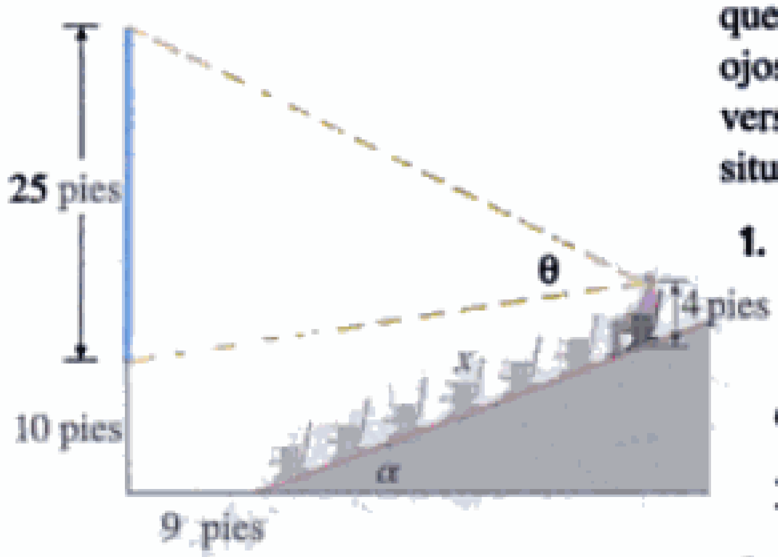
EJEMPLO 3 □ Demuestre que la velocidad promedio de un automóvil durante un intervalo $[t_1, t_2]$ es igual al promedio de sus velocidades en ese periodo.

SOLUCIÓN Si $s(t)$ es el desplazamiento del coche en el momento t, entonces, por definición, la velocidad promedio en el intervalo es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Proyecto de aplicación SAC Dónde sentarse en las salas cinematográficas

Una sala cinematográfica tiene una pantalla que está colocada 10 pies arriba del piso y su altura es de 25 pies. La primera fila de asientos se encuentra a 9 pies de la pantalla y la separación entre las filas es de 3 pies. El piso del área de asientos está inclinado formando un ángulo $\alpha = 20°$ arriba de la horizontal, y la distancia, hacia arriba del plano inclinado, donde usted se sienta es x. La sala tiene 21 filas de butacas, de modo que $0 \leqslant x \leqslant 60$. Suponga que decide que el mejor lugar está en la fila en que el ángulo θ subtendido por la pantalla en sus ojos sea un máximo. Supongamos también que sus ojos están 4 pies arriba del piso, como se muestra en la figura. (En el Ejer. 54, Sec 4.7, vimos una versión más sencilla de este problema, donde el piso es horizontal, pero este proyecto comprende una situación más complicada y requiere tecnología.)



1. Demuestre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$$

donde $\qquad a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x\operatorname{sen}\alpha)^2$

y $\qquad b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x\operatorname{sen}\alpha - 6)^2$

2. Use una gráfica de θ como función de x para estimar el valor de x que maximice θ. ¿En cuál fila debe usted sentarse? ¿Cuál es el ángulo de visión θ?

3. Use su SAC para derivar θ y encuentre un valor numérico para la raíz de la ecuación $d\theta/dx = 0$. ¿Este valor confirma el resultado del problema 2?

4. Use una gráfica de θ para estimar el valor promedio de θ este ángulo en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 60$. A continuación, use su SAC para calcular el valor promedio. Compare sus resultados con los valores máximo y mínimo de θ.

6 Repaso

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Trace dos curvas típicas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Muestre cómo aproximar el área entre estas curvas mediante una suma de Riemann y dibuje los rectángulos de aproximación correspondientes. Entonces, escriba una expresión para el área exacta.
   (b) Explique cómo la situación cambia si las curvas tienen ecuaciones $x = f(y)$ y $x = g(y)$, donde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.
2. Susy aventaja a Katy en toda la carrera de 1500 m. ¿Qué significa físicamente el área entre sus curvas de velocidad del primer minuto de la carrera?
3. (a) S es un sólido del que conocemos sus áreas en sección transversal. Explique cómo se aproxima el volumen de S por medio de sumas Riemann. Después, escriba una expresión para el volumen exacto.
   (b) Si S es un sólido de revolución, ¿cómo se encuentran sus áreas en sección transversal?
4. (a) ¿Cuánto es el volumen de un cascarón cilíndrico?
   (b) Explique como usar cascarones cilíndricos para hallar el volumen de un sólido de revolución.
   (c) ¿Porqué a veces hay que usar el método del cascarón cilíndrico en vez del método de rebanadas?
5. Si hipotéticamente el lector empuja un libro a lo largo de una mesa de 6 m ejerciendo una fuerza $f(x)$ en cada punto desde $x = 0$ hasta $x = 6$. ¿Qué representa $\int_0^6 f(x)\,dx$? Si $f(x)$ se mide en newtons ¿qué unidades son las de la integral?
6. (a) ¿Qué es el valor promedio de una función f en un intervalo $[a, b]$?
   (b) ¿Qué dice el teorema del valor medio para integrales? ¿Cuál es su interpretación geométrica?

EJERCICIOS

1–6 □ Halle el área de la región limitada por las curvas dadas.

1. $y = x^2 - x - 6, \quad y = 0$
2. $y = 20 - x^2, \quad y = x^2 - 12$
3. $y = e^x - 1, \quad y = x^2 - x, \quad x = 1$
4. $x - 2y + 7 = 0, \quad y^2 - 6y - x = 0$
5. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = -\cos x, \quad x = 0, \quad x = \pi$

6. $y = x^3, \quad y = x^2 - 4x + 4, \quad x = 0, \quad x = 2$

7–11 □ Halle el volumen del sólido que se obtiene por rotación de la región limitada por las curvas alrededor del eje especificado.

7. $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 3$; alrededor del eje x

8. $y = e^{-2x}$, $y = 1 + x$, $x = 1$; alrededor del eje x

9. $x + 3 = 4y - y^2$, $x = 0$; alrededor del eje x

10. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$; alrededor del eje y

11. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = a + h$ (donde $a > 0$, $h > 0$); alrededor del eje y

12–14 □ Escriba, pero no evalúe, una integral para el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por las curvas alrededor del eje especificado.

12. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 3\pi/2$, $x = 5\pi/2$; alrededor del eje y

13. $y = x^3$, $y = x^2$; alrededor de $y = 1$

14. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$; alrededor de $x = 2$

15. Halle los volúmenes de los sólidos que se obtienen al girar la región limitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de las rectas siguientes:
(a) El eje x (b) El eje y (c) $y = 2$

16. Sea $\mathfrak{R}$ la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Calcule las cantidades siguientes:
(a) El área de $\mathfrak{R}$
(b) El volumen obtenido al girar $\mathfrak{R}$ alrededor del eje de abscisas
(c) El volumen obtenido al girar $\mathfrak{R}$ alrededor del eje de ordenadas

17. Sea $\mathfrak{R}$ la región limitada por las curvas $y = \tan(x^2)$, $x = 1$, y $y = 0$. Use la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar.
(a) El área de $\mathfrak{R}$
(b) El volumen obtenido por la rotación de $\mathfrak{R}$ alrededor del eje de abscisas

18. Sea $\mathfrak{R}$ la región limitada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = x^6 - x + 1$. Estime las cantidades siguientes:
(a) Abscisas de los puntos de intersección de las curvas
(b) El área de $\mathfrak{R}$
(c) El volumen generado por rotación de $\mathfrak{R}$ alrededor del eje de las abscisas
(d) El volumen generado en rotación alrededor del eje de las ordenadas

19–22 □ Cada integral representa el volumen de un sólido. Describa éste último.

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx$

20. $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x \, dx$

21. $\int_0^{2} 2\pi y(4 - y^2) \, dy$

22. $\int_0^{1} \pi\left[(2 - x^2)^2 - \left(2 - \sqrt{x}\right)^2\right] dx$

23. La base de un sólido es un disco circular con radio 3. Halle el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos rectángulos isósceles on la hipotenusa situada en la base del sólido.

24. La base de un sólido es la región limitada por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2 - x^2$. Halle el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje de abscisas son cuadrados con un lado situado en la base del sólido.

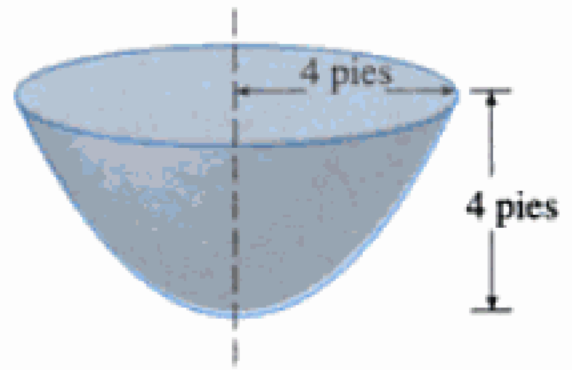
25. Un monumento tiene 20 m de altura. Una sección transversal horizontal a una distancia de x metros desde la punta del monumento es un triángulo equilátero con lado $x/4$ m. ¿Cuál es el volumen del monumento?

26. (a) La base de un sólido es un cuadrado con vértices en $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, y $(0, -1)$. Cada sección transversal perpendicular al eje de abscisas es un semicírculo. Halle el volumen del sólido.
(b) Muestre que al cortar el sólido de la parte (a) podemos rearmarlo para formar un cono. Así podrá calcular el volumen mas fácilmente.

27. Se requiere una fuerza de 30 N para mantener estirado un resorte hasta 15 cm. Siendo su longitud natural de 12 cm, ¿cuánto trabajo se realiza al estirarlo de los 12 hasta 20 cm?

28. Un elevador de 1600 lb está suspendido de un cable de 200 pies que pesa 10 lb/pie. ¿Cuánto trabajo se requiere para subir al elevador de la planta baja hasta el tercer piso, una distancia de 30 pies?

29. Un tanque que está lleno de agua, tiene la forma de un paraboloide de revolución, como en la figura, que se obtiene al girar una parábola respecto a un eje vertical.
(a) Si su altura es de 4 pies la mismo que su radio en la parte alta, halle el trabajo requerido para bombear el agua fuera del tanque.
(b) Luego de realizar un trabajo de 4000 pies-lb. ¿Cuánta agua queda en el tanque?



30. Halle el valor promedio de la función $f(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}$ en el intervalo $[0, 2]$.

31. Si f es una función continua ¿Cuál es el límite cuando $h \to 0$ del valor promedio de f en el intervalo $[x, x + h]$?

32. Sea $\mathfrak{R}_1$ la región limitada por $y = x^2$, $y = 0$, y $x = b$, donde $b > 0$. Sea $\mathfrak{R}_2$ la región limitada por $y = x^2$, $x = 0$, y $y = b^2$.
(a) ¿Existe un valor b tal que $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ tengan áreas idénticas?
(b) ¿Existe un valor b tal que $\mathfrak{R}_1$ genere el mismo volumen al girar alrededor del eje x que al girar alrededor del eje y?
(c) ¿Existe un valor b tal que $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ generen el mismo volumen al girar alrededor del eje x?
(d) ¿Existe un valor b tal que $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ generen el mismo volumen al girar alrededor del eje y?

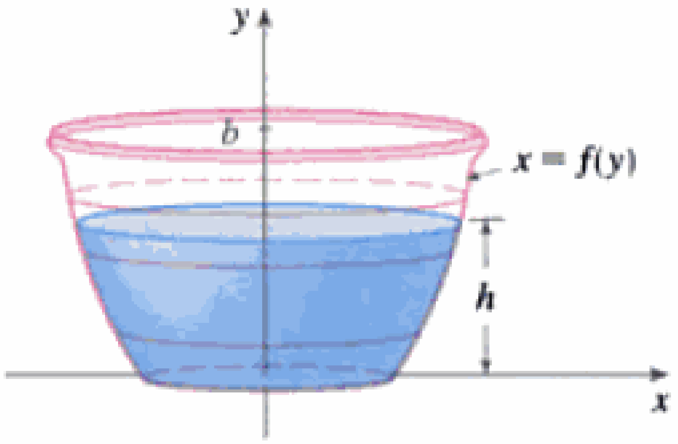


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

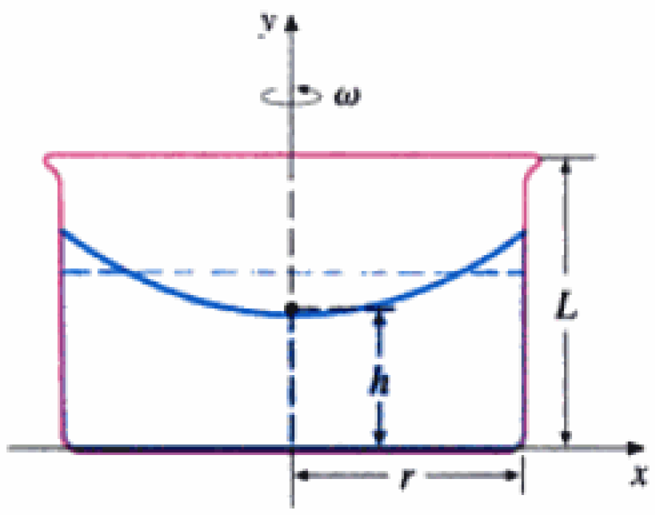


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

(a) Determine V como función de h.
(b) Muestre que

$$\frac{dV}{dt} = \pi[f(h)]^2 \frac{dh}{dt}$$

(c) Supóngase que A es el área del orificio del fondo. Se sigue por la ley de Torricelli que la razón de cambio del volumen de agua dada

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

donde k es una constante negativa. Determine una fórmula para la función f tal que dh/dt sea una constante C. ¿Cuál es la ventaja de tener $dh/dt = C$?

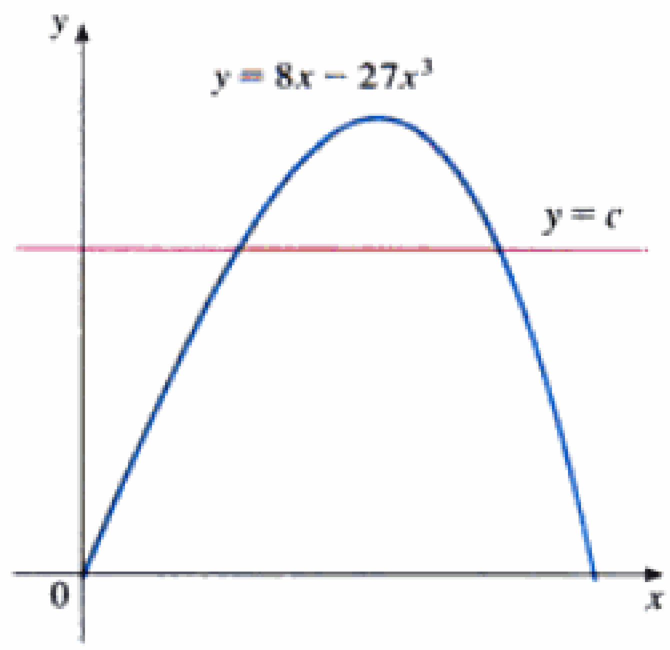
12. Un recipiente cilíndrico de radio t y altura L está parcialmente lleno de un líquido cuyo volumen es V. Si el recipiente se hace girar respecto de su eje de simetría con velocidad angular constante ω, entonces el recipiente inducirá un movimiento rotacional en el líquido alrededor del mismo eje. En algún momento el líquido estará girando a la misma velocidad angular de! recipiente. La superficie del líquido será convexa como lo indica la figura, porque la fuerza centrífuga sobre las partículas del líquido crece con la distancia desde el eje cilíndrico. Se puede demostrar que la superficie del líquido es un paraboloide de revolución generado por rotación de la parábola

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

alrededor del eje y donde g es la aceleración debida a la gravedad.
(a) Determine h como función de ω.
(b) ¿A qué velocidad angular tocará el fondo la superficie del líquido? ¿A qué velocidad se desbordará?
(c) Si el radio del recipiente es 2 pies, la altura 7 pies y el recipiente tiene la misma velocidad de rotación que el líquido y si además la superficie del líquido llega a 5 pies por debajo del borde superior del recipiente en el eje central y si el líquido está 4 pies abajo del borde superior a una distancia de 1 pie del eje central.
  (i) Determine la velocidad angular del recipiente y el volumen del fluido.
  (ii) ¿Qué tan abajo del borde del recipiente está el líquido de la pared o costado del recipiente?

13. Si la tangente en un punto P de la curva $y = x^3$ interseca a la curva de nuevo en Q, sea A el área de la región limitada por la curva y el segmento PQ. Sea B el área de la región definida del mismo modo pero comenzando con Q en vez de P. ¿Qué relación hay entre A y B?

14. La figura muestra una recta horizontal $y = c$ que corta la curva $y = 8x - 27x^3$. Halle el número c tal que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales.



7 Técnicas de integración

Las técnicas de este capítulo nos permiten estimar el área de una alberca, hallar la altura de un cohete espacial un minuto después del lanzamiento, calcular la velocidad de escape del cohete, y frenar el crecimiento de una población de insectos introduciendo machos estériles. Aquí se ven larvas esterilizadas de la mosca de la fruta del Mediterráneo.

De acuerdo con el teorema fundamental del cálculo, podemos integrar una función si conocemos su antiderivada; esto es, una integral indefinida. En seguida resumiremos las integrales más importantes que hemos aprendido hasta ahora.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

En este capítulo desarrollaremos técnicas que nos permitirán emplear estas fórmulas básicas con objeto de llegar a integrales indefinidas de funciones más complicadas. En la sección 5.5 aprendimos el método de integración más importante, la regla de sustitución. La otra técnica general, la integración por partes, se presenta en la sección 7.1. Y después, describiremos métodos especiales para determinadas clases de funciones, como las trigonométricas y las racionales.

La integración no es tan directa como la diferenciación; no hay reglas que garanticen, de modo absoluto, la obtención de una integral indefinida de una función; por consiguiente, en la sección 7.5 describiremos una estrategia para la integración.

7.1 Integración por partes

Toda regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente; por ejemplo, la regla de sustitución para integrar corresponde a la regla de la cadena para derivar. La regla que corresponde a la del producto para la derivación se llama regla de *integración por partes*.

La regla del producto establece que si f y g son funciones derivables.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación de las integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

o sea
$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

podemos reordenar esta ecuación como sigue:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx} \tag{1}$$

La fórmula (1) se denomina **fórmula de integración por partes**. Quizá sea más fácil recordarla con la siguiente notación: sean $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces, tenemos $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)\,dx$, así que, según la regla de sustitución, la fórmula de integración por partes se transforma en

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \tag{2}$$

EJEMPLO 1 □ Determine $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN CON LA FÓRMULA 1 Elegimos $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces, $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Podemos escoger *cualquier* antiderivada de g' como g.) Por consiguiente, al aplicar la fórmula (1).

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\
&= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\
&= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

Es aconsejable comprobar la respuesta derivándola. Al hacerlo, llegaremos a $x \operatorname{sen} x$, como era de esperarse.

□ Es útil emplear el modelo:

$u = □ \qquad dv = □$

$du = □ \qquad v = □$

SOLUCIÓN CON LA FÓRMULA 2 Sean

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces
$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

y así

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x\,dx &= \int \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\ \overbrace{dx}^{du} \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\
&= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$
□

NOTA □ El objeto de emplear la integración por partes es obtener una integral más sencilla que la inicial. Así en el ejemplo 1, empezamos con $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ y la expresamos en

Sustituimos lo anterior en la ecuación (3) y resulta

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx\\ &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x + C)\\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 4 □ Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x se simplifican cuando se derivan, sin embargo, trataremos de hacerlo eligiendo $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces, $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$, así que, con integración por partes, llegamos a

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx$$

La integral que obtuvimos, $\int e^x\cos x\,dx$, no es más simple que la original, pero tampoco es más difícil. Como en el ejemplo anterior resolvimos el problema integrando dos veces por partes, perseveraremos e integraremos de nuevo por partes. Esta vez haremos $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces, $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$ y

$$\boxed{5} \qquad \int e^x\cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

□ La figura 1 ilustra el ejemplo 4 porque se ven las gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como comprobación visual del resultado, podrá notar que $f(x) = 0$ cuando F tiene un máximo o un mínimo.

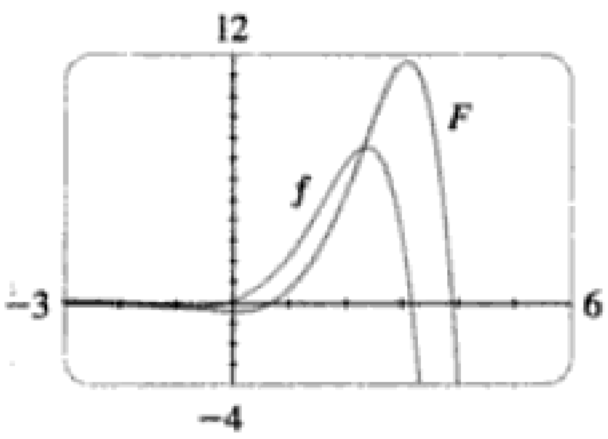


FIGURA 1

A primera vista parece que no ganamos nada porque llegamos a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que es de donde partimos. Sin embargo, si sustituimos la ecuación (5) en la ecuación (4), obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Podemos considerar que ésta es una ecuación de donde se va a despejar la integral desconocida. Al hacerlo, obtenemos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividimos entre 2, sumanos la constante de integración y resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$ □

Si combinamos la fórmula de la integración por partes con la segunda sección del teorema fundamental del cálculo, podremos evaluar integrales definidas por partes. Ahora evaluamos ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponemos que f' y g' son continuas, aplicamos el teorema fundamental y obtenemos

$$\boxed{6} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

EJEMPLO 5 □ Calcule $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$.

SOLUCIÓN Sean

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces
$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Así que, de acuerdo con la fórmula (6)

$$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$
$$= 1 \cdot \tan^{-1}1 - 0 \cdot \tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

□ Ya que $\tan^{-1}x \geqslant 0$ cuando $x \geqslant 0$, la integral del ejemplo 5 se puede interpretar como el área de la región de la figura 2.

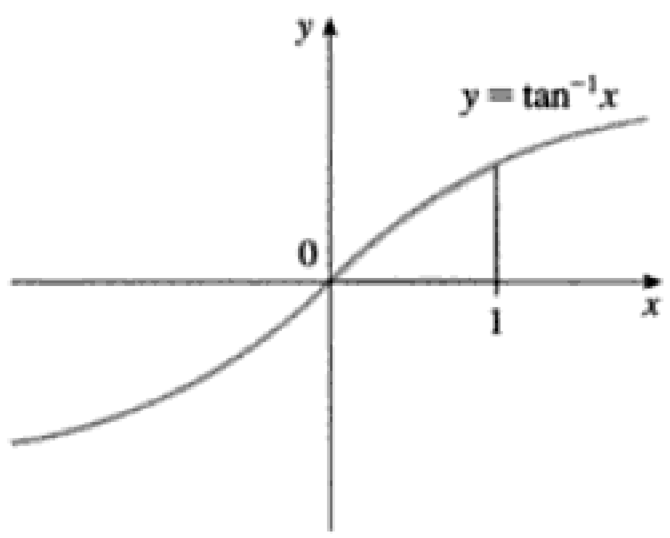


FIGURA 2

Para evaluar esta integral emplearemos la sustitución $t = 1 + x^2$ (porque u tiene otro significado en este ejemplo). Entonces $dt = 2x\,dx$, así que $x\,dx = dt/2$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; y cuando $x = 1$, $t = 2$; entonces

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Por consiguiente, $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ □

EJEMPLO 6 □ Demuestre la fórmula de reducción

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

en donde $n \geqslant 2$ es un entero.

SOLUCIÓN Sean $\quad u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen}x\,dx$

Entonces, $\quad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$

la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

En vista de que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Al igual que en el ejemplo 4, despejaremos la integral deseada de esta ecuación pasando el último término del lado derecho al izquierdo. Así, se tiene

$$n \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

o bien

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$ □

La fórmula de reducción, ecuación (7), es útil porque si se aplica en forma repetida podemos, al final, expresar $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x \, dx$ (si n es impar) o de $\int (\operatorname{sen} x)^0 dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 Ejercicios

1–2 □ Evalúe la integral por partes con la elección indicada para u y dv.

1. $\int x \ln x \, dx$; $u = \ln x$, $dv = x\, dx$

2. $\int \theta \sec^2\theta \, d\theta$; $u = \theta$, $dv = \sec^2\theta \, d\theta$

3–28 □ Evalúe cada una de las integrales siguientes.

3. $\int xe^{2x} dx$

4. $\int x \cos x \, dx$

5. $\int x \operatorname{sen} 4x \, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^{-1} x \, dx$

7. $\int x^2 \cos 3x \, dx$

8. $\int x^2 \operatorname{sen} ax \, dx$

9. $\int (\ln x)^2 dx$

10. $\int t^3 e^t dt$

11. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta \, d\theta$

12. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta \, d\theta$

13. $\int y \operatorname{senh} y \, dy$

14. $\int y \cosh ay \, dy$

15. $\int_0^1 te^{-t} dt$

16. $\int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x} dx$

17. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$

18. $\int_1^4 \sqrt{t} \ln t \, dt$

19. $\int_1^4 \ln \sqrt{x} \, dx$

20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \csc^2 x \, dx$

21. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x \, dx$

22. $\int_0^1 x5^x dx$

23. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$

24. $\int x \tan^{-1} x \, dx$

25. $\int \cos(\ln x) \, dx$

26. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}} dr$

27. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2 dx$

28. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s) \, ds$

29–32 □ Primero haga una sustitución y después la integración por partes en la evaluación de cada una de estas integrales.

29. $\int \operatorname{sen} \sqrt{x} \, dx$

30. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

31. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2) \, d\theta$

32. $\int x^5 e^{x^2} dx$

33–36 □ Evalúe la integral indefinida. Ilustre su respuesta y compruebe que sea razonable graficando a la vez, la función y su antiderivada (considere que $C = 0$).

33. $\int x \cos \pi x \, dx$

34. $\int x^{3/2} \ln x \, dx$

35. $\int (2x + 3)e^x dx$

36. $\int x^3 e^{x^2} dx$

37. (a) Emplee la fórmula de reducción del ejemplo 6 para demostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Con el resultado del inciso (a) y la fórmula de reducción evalúe $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$.

38. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

(b) Emplee el resultado del inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x \, dx$.

(c) Utilice los resultados de los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x \, dx$.

39. (a) Con la fórmula de reducción del ejemplo 6 demuestre que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

en donde $n \geq 2$ es un entero.

(b) Emplee el resultado del inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \, dx$.

64. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx$.

(a) Demuestre que $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$.

(b) Emplee el resultado del ejercicio 40 para demostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Emplea los resultados de los incisos (a) y (b) para demostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

y deducir que $\lim_{x \to \infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Use los resultados del inciso (c) y de los ejercicios 39 y 40 a fin de demostrar que

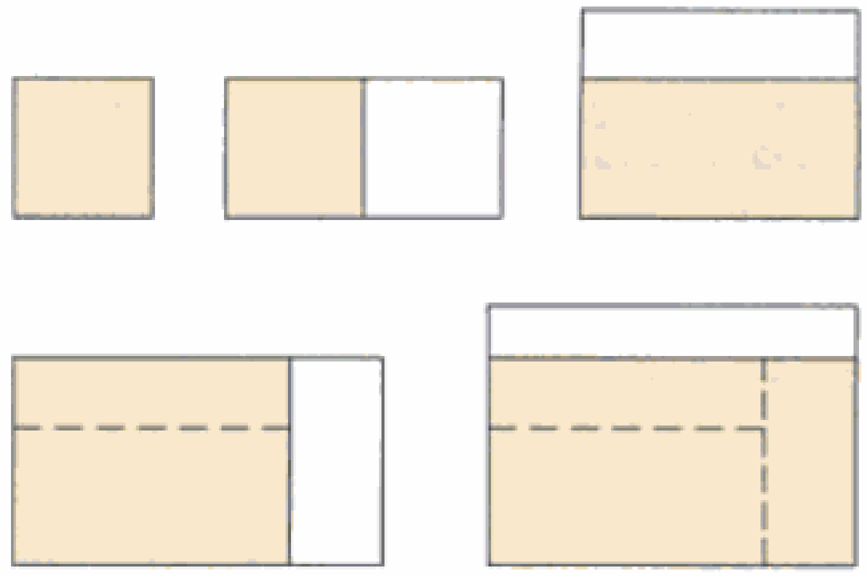
$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Por lo general, esta fórmula se escribe en forma de producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots$$

y se llama *producto de Wallis.*

(e) Formaremos rectángulos como sigue: comenzando con un cuadrado de área 1, agregaremos rectángulos de área 1 de manera alterna, al lado o arriba del rectángulo anterior (véase la figura adjunta). Calcule el límite de las razones del ancho respecto a la altura de esos ractángulos.



7.2 Integrales trigonométricas

En esta sección las identidades trigonométricas nos servirán para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas. Comenzaremos con las potencias de seno y coseno.

EJEMPLO 1 Evaluar $\int \cos^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN La simple sustitución $u = \cos x$ no va a servir pues $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Para integrar potencias del coseno necesitaríamos un factor sen x extra. También una potencia del seno necesitaría un factor cos x de más. De modo que se puede separar un factor del coseno y convertir el que queda, es decir, $\cos^2 x$, en una expresión que contenga el seno por medio de la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x$$

Es útil contar con el factor adicional, luego se evalúa la integral sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$, y $du = \cos x\, dx$, y

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx \\
&= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3} u^3 + C \\
&= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C
\end{aligned}$$

□

En general trataremos de escribir un integrando que contenga potencias de seno y de coseno en una forma que contenga un solo factor seno (y lo restante de la expresión en términos de coseno) o bien un solo factor coseno (y lo demás en términos de seno), la identidad $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 x = 1$ nos permite convertir de potencias pares de seno a potencias pares de coseno e inversamente.

EJEMPLO 2 Determine $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$.

Ya que se presenta $\cos^2 2x$, debemos emplear otra fórmula de mitad de ángulo:

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Con esto llegamos a

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \tfrac{1}{4}\int [1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)]\, dx \\
&= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C
\end{aligned}$$

Como resumen, listamos los lineamientos a seguir al evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ donde $m \geqslant 0$ y $n \geqslant 0$ son enteros.

Cómo evaluar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$

(a) Si la potencia del coseno es impar ($n = 2k + 1$), aparte un factor de coseno y emplee $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del seno:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx &= \int \operatorname{sen}^m x\, (\cos^2 x)^k \cos x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen}^m x\, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx
\end{aligned}$$

A continuación, sustituya $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Si la potencia del seno es impar ($m = 2k + 1$), aparte un factor de seno y use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos del coseno:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx
\end{aligned}$$

Luego, reemplace $u = \cos x$. Advierta que si las potencias de sen y de cos son ambas impares use (a) o (b)

(c) Si las potencias del seno y coseno son pares a la vez, aplicamos las identidades de mitad del ángulo:

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

A veces es útil emplear la identidad

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

Usaremos una estrategia similar para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$. Sabiendo que $(d/dx) \tan x = \sec^2 x$, podemos separar un factor $\sec^2 x$ y convertir la potencia restante (impar) de secante a una expresión que contiene tangente usando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. O, ya que $(d/dx) \sec x = \sec x \tan x$, podemos separar un factor $\sec x \tan x$ y convertir la potencia restante (par) de tangente a secante.

EJEMPLO 5 □ Evalúe $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si separamos un factor $\sec^2 x$ podemos expresar el restante factor $\sec^2 x$ en términos de tangente usando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Entonces podemos evaluar la integral sustituyendo $u = \tan x$ poniendo también $du = \sec^2 x\, dx$.:

$$\begin{aligned}
\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx \\
&= \int \tan^6 x\,(1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx \\
&= \int u^6(1 + u^2)\, du = \int (u^6 + u^8)\, du \\
&= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\
&= \tfrac{1}{7}\tan^7 x + \tfrac{1}{9}\tan^9 x + C
\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 6 □ Determine $\int \tan^5 x \sec^7 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si separamos un factor $\sec^2 x$, como en el ejemplo precedente, nos quedamos con un factor $\sec^5 x$ que no se convierte fácilmente a tangente. Sin embargo, si separamos un factor $\sec x \tan x$ podemos convertir la potencia restante de tangente en una expresión que sólo contenga secante por medio de la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Luego podemos evaluar la integral al sustituir $u = \sec x$, con $du = \sec x \tan x\, dx$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \sec^7 x\, dx &= \int \tan^4 x \sec^6 x \sec x \tan x\, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \tan x\, dx \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6\, du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6)\, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11} x - \tfrac{2}{9}\sec^9 x + \tfrac{1}{7}\sec^7 x + C
\end{aligned}$$ □

Los ejemplos anteriores demuestran las estrategias para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ para dos casos, que ahora sintetizamos.

EJEMPLO 7 □ Determine $\int \tan^3 x \, dx$.

SOLUCIÓN Aquí factorizamos $\tan^3$ y usamos $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescribir el factor $\tan^2 x$ en términos de $\sec^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \, dx &= \int \tan x \tan^2 x \, dx \\ &= \int \tan x \, (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

En la primera integral hemos sustituido mentalmente $u = \tan x$, de manera que $du = \sec^2 x \, dx$. □

Si n es impar y m es par, todo el integrando se expresa en términos de $\sec x$. Es posible que las potencias de $\sec x$ requieran integración por partes como en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 8 □ Determine $\int \sec^3 x \, dx$.

SOLUCIÓN En este caso integramos por partes, poniendo

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x \, dx$$

$$du = \sec x \tan x \, dx \qquad v = \tan x$$

Entonces
$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \, (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx\end{aligned}$$

Al emplear la fórmula (1) y despejar la integral que buscamos tenemos

$$\int \sec^3 x \, dx = \tfrac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$ □

Las integrales como la del ejemplo 8 pueden parecer muy especiales, pero se presentan con frecuencia en aplicaciones, como veremos en el capítulo 8. Las integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$ se pueden determinar con métodos semejantes, a causa de la identidad $1 + \cot^2 x = \csc 2x$.

Para terminar, tenemos otro juego de identidades trigonométricas que se van a usar:

2 Para evaluar las integrales (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx$, o (c) $\int \cos mx \cos nx \, dx$, se emplean las identidades correspondientes:

(a) $\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$

(b) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

(c) $\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

Para evaluar esta integral trigonométrica, escribimos todo en términos de sen θ y cos θ:

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Por consiguiente, con la sustitución $u = \operatorname{sen}\theta$,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C$$

$$= -\frac{\csc\theta}{4} + C$$

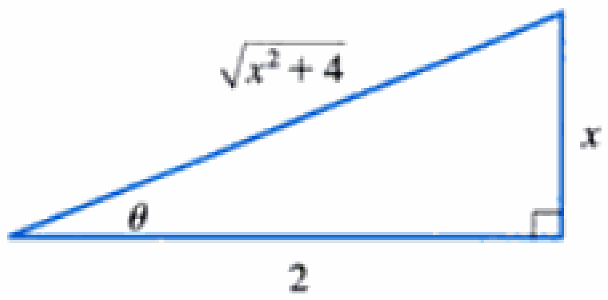


FIGURA 3

$\tan\theta = \frac{x}{2}$

Emplearemos la figura 3 para determinar que $\csc\theta = \sqrt{x^2+4}/x$ y así

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$ □

EJEMPLO 4 □ Determine $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sería posible emplear la sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$ en este caso (como en el Ejem. 3), pero es más sencilla la sustitución directa $u = x^2 + 4$ porque $du = 2x\,dx$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$ □

NOTA □ El ejemplo 4 muestra que aun cuando las sustituciones trigonométricas sean factibles, quizá no produzcan la solución más fácil. Lo primero que se debe hacer es buscar el método más sencillo.

EJEMPLO 5 □ Evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, donde $a > 0$.

SOLUCIÓN 1 Sea $x = a\sec\theta$ en donde $0 < \theta < \pi/2$ o $\pi < \theta < 3\pi/2$. Entonces, $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a|\tan\theta| = a\tan\theta$$

Por consiguiente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

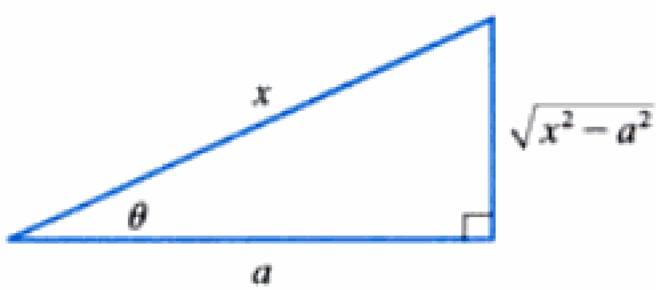


FIGURA 4

$\sec\theta = \frac{x}{a}$

En el triángulo de la figura 4, $\tan\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, así que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C$$

Si escribimos $C_1 = C - \ln a$, tendremos

$$\boxed{1} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_1$$

SOLUCIÓN 2 Cuando $x > 0$ también se puede usar la sustitución hiperbólica $x = a\cosh t$. Aplicamos la identidad $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, y resulta

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{senh}^2 t} = a \operatorname{senh} t$$

Como $dx = a \operatorname{senh} t\, dt$, obtendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} t\, dt}{a \operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

En vista de que $\cosh t = x/a$, $t = \cosh^{-1}(x/a)$ y

$$\boxed{2} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aunque las fórmulas 1 y 2 se ven diferentes, son equivalentes, de acuerdo con la fórmula 3.9.4. □

NOTA □ Como vemos en el ejemplo 5, se pueden usar las sustituciones hiperbólicas en lugar de las trigonométricas, que a veces conducen a respuestas más sencillas. Pero, en general, utilizaremos las trigonométricas porque las identidades trigonométricas son más conocidas que las hiperbólicas.

EJEMPLO 6 □ Determine $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx$.

SOLUCIÓN Primero vemos que $(4x^2 + 9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2 + 9})^3$, y por consiguiente la sustitución trigonométrica es adecuada. Aunque $\sqrt{4x^2 + 9}$ no es como ocualquiera de las expresiones de la tabla de las sustituciones trigonométricas, la transformamos en una de ellas si hacemos la sustitución preliminar $u = 2x$. Al combinar esto con la sustitución de la tangente, tenemos $x = \frac{3}{2}\tan\theta$, que implica $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ y

$$\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Cuando $x = 0$, $\tan\theta = 0$, de modo que $\theta = 0$; cuando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, de manera que $\theta = \pi/3$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}}\, dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta}\, \tfrac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta \\
&= \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

Ahora haremos la sustitución $u = \cos\theta$ para que $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Cuando $\theta = 0$, $u = 1$; y cuando $\theta = \pi/3$, $u = 1/2$.

11. $\int \sqrt{1 - 4x^2}\, dx$

12. $\int x\sqrt{25 + x^2}\, dx$

13. $\int \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{x}\, dx$

14. $\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

15. $\int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\, dx$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2 - 9}}$

17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\, dx$

18. $\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

20. $\int_0^3 x\sqrt{9 - x^2}\, dx$

21. $\int_0^{2/3} x^3\sqrt{4 - 9x^2}\, dx$

22. $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

23. $\int \sqrt{2x - x^2}\, dx$

24. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 6x - 8}}\, dx$

26. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

28. $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{5/2}}$

29. $\int e^t\sqrt{9 - e^{2t}}\, dt$

30. $\int \sqrt{e^{2t} - 9}\, dt$

31. (a) Emplee la sustitución trigonométrica para demostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

(b) Con la sustitución hiperbólica $x = a$ senh t demuestre que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Vea su relación con la fórmula 3, sec. 3.9.

32. Evalúe

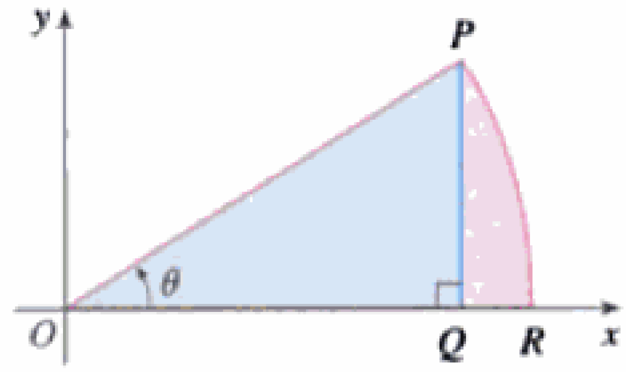
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\, dx$$

(a) con sustitución trigonométrica y (b) con sustitución hiperbólica $x = a$ sen*h* t.

33. Determine el valor promedio de $f(x) = (4 - x^2)^{3/2}$ en el intervalo $[0, 2]$.

34. Determine el área de la región acotada por la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

35. Demuestre la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para calcular el área de un sector circular de radio r y ángulo central θ. [*Sugerencia:* Suponga que $0 < \theta < \pi/2$ y coloque el centro del círculo en el origen para que su ecuación sea $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces, A es la suma del área del triángulo POQ y el área de la región PQR de la figura adjunta.]



36. Evalúe la integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

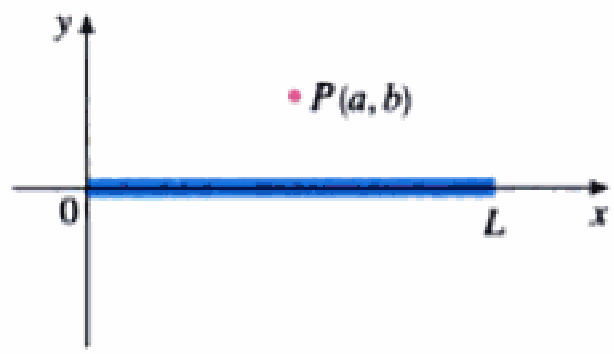
Grafique el integrando y su integral indefinida en la misma pantalla y compruebe que su respuesta sea razonable.

37. Emplee una gráfica para aproximar las raíces de la ecuación $x^2\sqrt{4 - x^2} = 2 - x$. y en seguida el área limitada por la curva $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$ y la recta $y = 2 - x$.

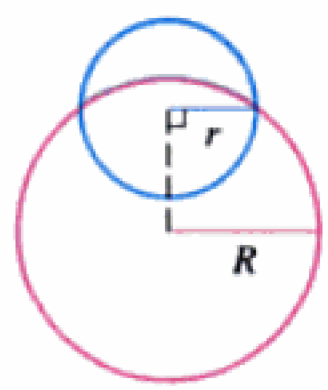
38. Una varilla cargada, de longitud L, produce un campo eléctrico en el punto $P(a, b)$ que está dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

donde λ es la densidad de carga por unidad de longitud en la varilla y ε_0 es la permisividad de espacio vacío (ver la figura). Evalúe la integral para determinar una expresión para el campo eléctrico $E(P)$.



39. Calcule el área de la región en forma de cuarto creciente (llamada *lúnula*), acotada por arcos de círculos de radios r y R (ver la figura.)



40. Un tanque de almacenamiento de agua de forma cilíndrica y 10 pies de diámetro, está montado de tal modo que los cortes circulares son verticales. Si la profundidad del agua es de 7 pies, ¿qué porcentaje de la capacidad total tiene agua?

41. Un toro o toroide se genera al girar el círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ alrededor del eje x. Calcule el volumen encerrado por el toro.

7.4 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales

En esta sección veremos cómo integrar cualquier función racional (como razón de polinomios) expresándola como una suma de fracciones más simples, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabemos integrar. A fin de ilustrar el método, expresaremos las fracciones $2/(x-1)$ y $1/(x+2)$ con un denominador común y las restaremos, con lo cual

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Si ahora invertimos el procedimiento, entenderemos cómo integrar la función del lado derecho de esa ecuación:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver cómo funciona en general el método de fracciones parciales, trabajaremos sobre una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

en donde P y Q son polinomios. Es posible expresar f como una suma de fracciones más sencillas, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. Esa función racional se llama *propia*. Recuerde que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en donde $a_n \neq 0$, el grado de P es n, lo cual se expresa con $\text{grad}(P) = n$.

Si f es impropia; esto es, si $\text{grad}(P) \geqslant \text{grad}(Q)$, el primer paso es dividir Q entre P, con división larga, hasta obtener un residuo, $R(x)$, tal que $\text{grad}(R) < \text{grad}(Q)$. Lo que se afirma es

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

en donde S y R son polinomios.

Según planteamos en el ejemplo siguiente, a veces todo lo que se requiere es este paso preliminar.

EJEMPLO 1 □ Determine $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 2 \\ \hline x-1 & x^3 \qquad + x \\ & \underline{x^3 - x^2} \\ & \quad x^2 + x \\ & \quad \underline{x^2 - x} \\ & \qquad 2x \\ & \qquad \underline{2x - 2} \\ & \qquad\quad 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero haremos una división larga. Con ella escribiremos

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

□

El siguiente paso es factorizar el denominador $Q(x)$ tanto como sea posible. Se puede demostrar que cualquier polinomio, Q, es factorizable como un producto de factores lineales (de la forma $ax + b$) y de factores cuadráticos irreducibles (de la forma $ax^2 + bx + c$, en donde $b^2 - 4ac < 0$); por ejemplo, si $Q(x) = x^4 - 16$, podríamos factorizar el polinomio como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

El tercer paso consiste en expresar la función racional propia, $R(x)/Q(x)$ (de la Ec. 1), a manera de una suma de **fracciones parciales**, de la forma

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \qquad \text{o} \qquad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$$

Un teorema del álgebra nos garantiza que siempre es posible hacer esto. Al describir los cuatro casos que se pueden encontrar explicaremos los detalles.

CASO I □ El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.
Esto significa que podemos escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

en donde no hay factor que se repita. En este caso, el teorema de las fracciones parciales establece que existen constantes, $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tales que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Estas constantes se encuentran como se plantea en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 □ Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUCIÓN Ya que el grado del numerador es menor que el del denominador no necesitamos dividir. Factorizamos el denominador como sigue:

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

El denominador tiene tres factores lineales distintos y la descomposición en fracciones parciales del integrando (2) posee la forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

□ Después de este ejemplo describiremos otro método para hallar a A, B y C, en la nota.

Para hallar los valores de A, B y C, multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $x(2x - 1)(x + 2)$ y obtenemos

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación (4) y expresarlo en la forma normal de los polinomios, obtenemos

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Los polinomios de la ecuación (5) son idénticos, de modo que sus coeficientes han de ser iguales. El coeficiente de x^2, en el lado derecho, es $2A + B + 2C$, y debe ser igual al coeficiente de x^2 en el lado izquierdo, que es 1. De igual forma, los coeficientes de x son iguales y los términos constantes también. Con esto llegamos al siguiente sistema de ecuaciones en A, B y C:

□ La figura 1 muestra las gráficas del integrando del ejemplo 2 y de su integral indefinida con $K = 0$. ¿Cuál es cuál?

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

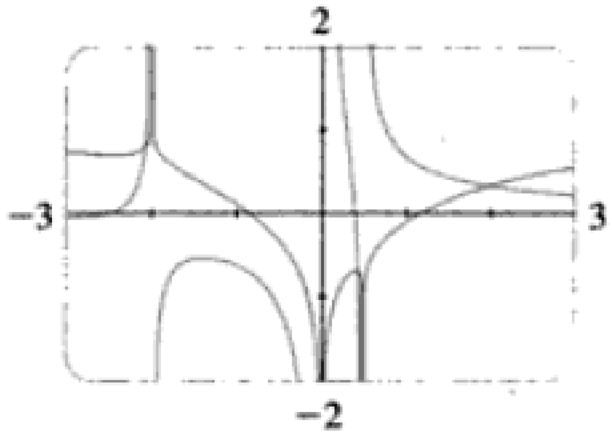


FIGURA 1

Al resolver el sistema obtenemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$, así

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2}\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

Al integrar el término intermedio hemos recurrido a la sustitución mental $u = 2x - 1$, que implica $du = 2dx$ y $dx = du/2$. □

NOTA □ Podemos emplear un método alterno a fin de calcular los coeficientes A, B y C en el ejemplo 2. La ecuación (4) es una identidad; es cierta para todo valor de x. Elijamos valores de x que la simplifiquen. Si $x = 0$ en la ecuación (4), el segundo y tercer término de la derecha se anulan y la ecuación se transforma en $-2A = -1$, o sea, $A = \frac{1}{2}$. Asimismo, $x = \frac{1}{2}$ origina $5B/4 = \frac{1}{4}$ y $x = -2$ origina $10C = -1$, así que $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$. (Podría replicar que la ecuación (3) no es válida para $x = 0, \frac{1}{2}$, o -2, por lo tanto, ¿por qué la ecuación (4) había de serlo para esos valores? De hecho, la ecuación (4) es cierta para todos los valores de x, incluso $x = 0, \frac{1}{2}$, y -2. Vea la razón en el Ejer. 69.)

EJEMPLO 3 □ Determine $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, en donde $a \neq 0$.

SOLUCIÓN El método de fracciones parciales da

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

y, por consiguiente,

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Al emplear el método descrito en la nota anterior, hacemos $x = a$ en esta ecuación y llegamos a $A(2a) = 1$, así que $A = 1/(2a)$. Si $x = -a$, obtenemos $B(-2a) = 1$ y entonces $B = -1/(2a)$. Así

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\ln|x - a| - \ln|x + a|\right] + C$$

Como $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, podemos escribir la integral en la forma

$$\boxed{6} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

En los ejercicios 55–56 se puede consultar cómo se aplica esta fórmula. □

CASO II □ **$Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.** Considere que el primer factor lineal, $(a_1x + b_1)$, se repite r veces; esto es, en la factorización de $Q(x)$. Entonces, en lugar del término único $A_1/(a_1x + b_1)$ de la ecuación (2), emplearíamos

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Como ejemplo podríamos escribir

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

pero mejor trabajaremos en detalle con un ejemplo más sencillo

EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx.$

SOLUCIÓN El primer paso es dividir. La división larga es

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

El segundo paso es factorizar el denominador, $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ es un factor y obtenemos

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

El factor lineal $x - 1$ aparece dos veces, por lo cual la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicamos por el mínimo común denominador, $(x-1)^2(x+1)$ y obtenemos

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

□ Otro método para calcular los coeficientes:
Sea $x = 1$ en la ecuación (8): $B = 2$.
Sea $x = -1$: $C = -1$.
Sea $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Las ecuaciones para los coeficientes son:

$$\begin{aligned} A \qquad + \; C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + \; C &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema llegamos a $A = 1$, $B = 2$ y $C = -1$, de modo que

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x + 1| + K$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K$$

▫

CASO III ▫ $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite.

Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$, en donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, además de las fracciones parciales de las ecuaciones 2 y 7, la expresión de $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

9
$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes que se deben determinar; por ejemplo, la función $f(x) = x/[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)]$ tiene su descomposición en fracciones parciales en la forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

El término de la ecuación (9) se puede integrar completando el cuadrado y con la fórmula

10
$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

EJEMPLO 5 ▫ Encuentre $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN En vista de que $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ ya no se puede factorizar más escribiremos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicamos por $x(x^2 + 4)$, para obtener

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$

$$= (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

Al igualar coeficientes, llegamos a

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Así, $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$ por lo cual

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right] dx$$

Para integrar el segundo término, lo descompondremos en dos partes:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Efectuaremos la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera integral, de manera que $du = 2x\,dx$. Para evaluar la segunda integral, aplicamos la fórmula (10), con $a = 2$:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \qquad \square$$

EJEMPLO 6 □ Determine $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$.

SOLUCIÓN Como el grado del numerador no es menor que el del denominador; primero dividimos:

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Observamos que el polinomio cuadrático $4x^2 - 4x + 3$ no es reducible porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Esto significa que no se puede factorizar, de manera que no necesitaremos aplicar la técnica de las fracciones parciales.

Para integrar la función dada, completamos el cuadrado en el denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x-1)^2 + 2$$

Esto nos sugiere sustituir $u = 2x - 1$. Entonces, $du = 2\,dx$ y $x = (u+1)/2$, de modo que

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 3}\right)dx$$

$$= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\tfrac{1}{2}(u+1) - 1}{u^2+2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C \qquad \square$$

NOTA □ El ejemplo 6 describió el procedimiento general para integrar una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{donde } b^2 - 4ac < 0$$

Se completa el cuadrado en el denominador y a continuación se efectúa una sustitución que cambie la integral a la forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

La primera integral es un logaritmo y la segunda se puede expresar en términos de $\tan^{-1}$.

CASO IV □ **$Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreductible repetido.**
Si en $Q(x)$ aparece el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, en donde $b^2 - 4ac < 0$ entonces, en lugar de la fracción parcial única de la ecuación 9, se tiene la suma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

en la descomposición en fracciones parciales de $R(x)/Q(x)$. Cada uno de los términos de la ecuación (11) se puede integrar completando el cuadrado como un primer paso.

□ Sería demasiado tedioso obtener a mano los valores numéricos de los coeficientes del ejemplo 7, y la mayor parte de los sistemas algebraicos de cómputo lo hacen con mucha rapidez; por ejemplo, el comando

convert(f, parfrac, x)

de Maple o el comando

Apart[f]

de Mathematica dan los siguientes valores:

$A = -1, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = D = -1,$

$E = \frac{15}{8}, \quad F = -\frac{1}{8}, \quad G = H = \frac{3}{4},$

$I = -\frac{1}{2}, \quad J = \frac{1}{2}$

EJEMPLO 7 □ Escriba la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}$$ □

EJEMPLO 8 □ Determine $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN La forma de la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Al multiplicar por $x(x^2 + 1)^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A \end{aligned}$$

Si igualamos coeficientes, llegamos al sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

Cuya solución es $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ y $E = 0$. Entonces

7.4 Ejercicios

1–12 □ Descomponga en fracciones parciales cada una de las funciones dadas (como en el Ejem. 7). No determine los valores numéricos de los coeficientes.

1. $\dfrac{3}{(2x+3)(x-1)}$

2. $\dfrac{5}{2x^2-3x-2}$

3. $\dfrac{x^2+9x-12}{(3x-1)(x+6)^2}$

4. $\dfrac{z^2-4z}{(3z+5)^3(z+2)}$

5. $\dfrac{1}{x^4-x^3}$

6. $\dfrac{x^4+x^3-x^2-x+1}{x^3-x}$

7. $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

8. $\dfrac{x^3-4x^2+2}{(x^2+1)(x^2+2)}$

9. $\dfrac{t^4+t^2+1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$

10. $\dfrac{3-11x}{(x-2)^3(x^2+1)(2x^2+5x+7)^2}$

11. $\dfrac{x^4}{(x^2+9)^3}$

12. $\dfrac{1}{x^6-x^3}$

13–42 □ Evalúe cada una de estas integrales:

13. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{y}{y+2}\,dy$

15. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+x^2-12x+1}{x^2+x-12}\,dx$

21. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

22. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+3}{x^3+2x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{2t^3-t^2+3t-1}{(t^2+1)(t^2+2)}\,dt$

34. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

37. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

40. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

43–52 □ Haga una sustitución para expresar el integrando como una función racional y luego evalúe la integral.

43. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}\,dx$

45. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

48. $\displaystyle\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Sugerencia:* sustituya $u = \sqrt[6]{x}$]

50. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$ [*Sugerencia:* sustituya $u = \sqrt[12]{x}$]

51. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}\,dx$

53. Emplee una gráfica de $f(x) = 1/(x^2-2x-3)$ para decidir si $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positiva o negativa. De acuerdo con la gráfica, haga una estimación preliminar del valor de la integral y después use fracciones parciales para establecer el valor exacto.

54. Grafique $y = 1/(x^3-2x^2)$ y su antiderivada en la misma pantalla.

55–56 □ Evalúe la integral completando el cuadrado y use la fórmula 6.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

56. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

57. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815–1897) observó que la sustitución $t = \tan(x/2)$ convierte toda función racional de sen x y cos x en una función racional ordinaria de t.

(a) Si $t = \tan(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, dibuje un triángulo rectángulo o use identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Demuestre que

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

(c) Muestre que

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt$$

58–61 □ Use la sustitución del ejercicio 57 para transformar el integrando en una función racional de t y entonces evaluar la integral.

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 5 \operatorname{sen} x}$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{3 \operatorname{sen} x - 4 \cos x}\, dx$

60. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}\, dx$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x}\, dx$

62–63 □ Calcule el área de la región bajo la curva dada, de a a b.

62. $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$, $\quad a = 5,\ b = 10$

63. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $\quad a = 2,\ b = 3$

64. Halle el volumen del sólido que resulta si la región bajo la curva $y = 1/(x^2 + 3x + 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ (a) gira alrededor el eje x y (b) el eje y.

65. Un método para frenar el crecimiento de una población de insectos sin usar pesticidas es el de introducir machos estériles en la población. Si P representa el número de insectos hembras, S el número de machos estériles que entran en cada generación y r la tasa natural de crecimiento de la población, entonces la población de hembras se relaciona con la variable t, de tiempo por

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r - 1)P - S]}\, dP$$

Suponga que una población de insectos con 10 000 hembras crece a razón de $r = 0.10$ y 900 machos estériles son agregados. Evalúe la integral para dar una ecuación que relacione población de hembras y tiempo. (Note que la ecuación resultante no se puede resolver específicamente para P.)

66. Factorice $x^4 + 1$ como diferencia de cuadrados, sumando y restando primero la misma cantidad. Emplee esa factorización para evaluar $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$.

SAC **67.** (a) Con un sistema algebraico de cómputo, encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Emplee el resultado obtenido en el inciso (a) para hallar a mano $\int f(x)\, dx$ compare su resultado con el que se obtiene usando SAC para integrar directamente f. Haga comentarios si encuentra discrepancias.

SAC **68.** (a) Determine la descomposición, en fracciones parciales, de la función

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Con el resultado de la parte (a) encuentre $\int f(x)\, dx$ y grafique f y su integral indefinida en la misma pantalla.

(c) Emplee la gráfica de f para identificar las características principales de la gráfica de $\int f(x)\, dx$.

69. Si F, G y Q son polinomios, y si

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para toda x salvo que $Q(x) = 0$, demuestre que $F(x) = G(x)$ para toda x. [*Sugerencia:* emplee la continuidad.]

70. Si f es una función cuadrática tal que $f(0) = 1$ y si

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x + 1)^3}\, dx$$

es una función racional, determine el valor de $f'(0)$.

7.5 Estrategia para la integración

La integración ofrece más retos que la derivación. Para hallar la derivada de una función, es obvia la fórmula de derivación que se debe aplicar; pero quizá no sea obvia la técnica adecuada para integrar cierta función.

Hasta ahora hemos aplicado técnicas individuales en cada sección; por ejemplo, casi siempre empleamos la sustitución en los ejercicios de la sección 5.5, la integración por partes en los de la sección 7.1 y las fracciones parciales en la sección 7.4. Pero en esta sección presentaremos un conjunto de diversas integrales, ordenadas al azar, y el objeto principal será reconocer cuál técnica de fórmula emplear. No se pueden dar reglas inalterables y efectivas respecto a cuál método aplicar en determinado caso, pero presentaremos algunos consejos sobre la etrategia que pueden serle de utilidad.

Uno de los prerrequisitos para seleccionar una estrategia es el conocimiento de las fórmulas básicas de integración. En la tabla siguiente hemos reunido las integrales de la lista anterior con varias fórmulas adicionales que presentamos en este capítulo. Es útil conocer todas y debe memorizarlas en su mayor parte, excepto las marcadas con un asterisco, pues se deducen con facilidad. Puede evitar la fórmula 19 si emplea fracciones parciales y en lugar de la fórmula 20 puede usar sustituciones trigonométricas

Tabla de fórmulas de integración Se han omitido las constantes de integración.

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	**2.** $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$
3. $\int e^x\,dx = e^x$	**4.** $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$	**6.** $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$	**8.** $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$
9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$	**10.** $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$
11. $\int \sec x\,dx = \ln\lvert \sec x + \tan x\rvert$	**12.** $\int \csc x\,dx = \ln\lvert \csc x - \cot x\rvert$
13. $\int \tan x\,dx = \ln\lvert \sec x\rvert$	**14.** $\int \cot x\,dx = \ln\lvert \operatorname{sen} x\rvert$
15. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	**16.** $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
17. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
***19.** $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	***20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert$

Una vez con estas fórmulas básicas de integración, si no percibimos de inmediato cómo atacar una integral específica, podremos entonces seguir la estrategia de cuatro pasos que describiremos en seguida.

1. Simplifique el integrando, si es posible A veces, si se emplea el álgebra o identidades trigonométricas, se podrá simplificar el integrando y el método de integración será más obvio. A continuación presentamos algunos ejemplos:

$$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)dx = \int \left(\sqrt{x}+x\right)dx$$

$$\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen}2\theta\,d\theta$$

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)\,dx$$
$$= \int (1 + 2\operatorname{sen} x\cos x)\,dx$$

2. Vea si hay una sustitución obvia Se debe tratar de encontrar alguna función, $u = g(x)$, en el integrando, cuya derivada, $du = g'(x)\,dx$ también esté presente, sin importar un factor constante; por ejemplo, en la integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$$

observamos que si $u = x^2 - 1$, entonces $du = 2x\,dx$; por consiguiente, usamos la sustitución $u = x^2 - 1$, en lugar de las fracciones parciales.

3. Clasifique el integrando de acuerdo con su forma Si no se ha llegado a la solución con los pasos 1 y 2, hay que fijarse en la forma del integrando, $f(x)$.

(a) *Funciones trigonométricas*. Si $f(x)$ es un producto de potencias de sen x y cos x, de tan x y sec x, o de cot x y csc x, aplicaremos las sustituciones recomendadas en la sección 7.2. Si f es una función trigonométrica de otro tipo, pero que sigue siendo una función racional de sen x y cos x, debemos emplear la sustitución de Weierstrass, $t = \tan(x/2)$. (Vea el ejercicio 57, sección 7.4)

(b) *Funciones racionales*. Si f es una función racional, aplicaremos el procedimiento de la sección 7.4, donde intervienen fracciones parciales.

(c) *Integración por partes*. Si $f(x)$ es un producto de una potencia de x (o de un polinomio) por una función trascendente (una función trigonométrica, exponencial o logarítmica), probaremos la integración por partes, definiendo u y dv de acuerdo con lo que se dijo en la sección 7.1. Si revisamos las funciones en los ejercicios de la sección 7.1, veremos que la mayor parte es del tipo que acabamos de describir.

(d) *Radicales*. Se recomiendan determinadas sustituciones cuando uno se encuentra con ciertos radicales

(i) Si se presenta $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ cabe emplear una sustitución trigonométrica de acuerdo con la tabla de la sección 7.3.

(ii) Si se presenta $\sqrt[n]{ax + b}$ se aplica la sustitución de racionalización, $u = \sqrt[n]{ax + b}$. En el caso más general, esto da resultados a veces, con $\sqrt[n]{g(x)}$.

4. Pruebe de nuevo Si no ha llegado a la respuesta con los primeros tres pasos, recuerde que sólo hay dos métodos básicos de integración: por sustitución y por partes.

(a) *Pruebe con la sustitución*. Si no hay sustitución obvia (paso 2), a veces la inspiración, el ingenio (incluso la desesperación), pueden sugerir la sustitución adecuada.

(b) *Intente con las partes*. Aunque la integración por partes se emplea casi siempre en productos de la forma descrita en el paso 3(c), en ocasiones opera para una sola función. Al repasar la sección 7.1, vemos que trabajó en $\tan^{-1} x$, $\operatorname{sen}^{-1} x$ y $\ln x$, y que todas ellas son funciones inversas.

(c) *Modifique el integrando*. El manejo algebraico (quizá racionalizar el denominador o usar identidades trigonométricas) puede ser de utilidad para transformar a la integral en una forma más fácil. Estos cambios pueden ser más importantes que las que se intentaron en el paso 1, y precisar cierto ingenio; por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \cos x}\cdot\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx$$
$$= \int \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)dx$$

(d) *Relacione el problema con otros anteriores*. Cuando haya acumulado algo de experiencia en la integración, podrá emplear cierto método en una integral que sea semejante a un método que haya aplicado a otra integral. O hasta podrá expresar la integral dada en términos de una anterior; por ejemplo, $\int \tan^2 x \sec x\, dx$ es una integral difícil, pero si podemos emplear la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, escribiremos

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

y si hemos evaluado antes $\int \sec^3 x\, dx$ (Ejem. 8 Sec. 7.2), este procedimiento servirá en el problema presente.

(e) *Emplee varios métodos*. A veces se necesitan dos o tres métodos a fin de evaluar una integral. En la evaluación pueden intervenir varias sustituciones sucesivas de diversos tipos o se puede combinar la integración por partes con una o más sustituciones.

En los ejemplos que siguen indicaremos un método de ataque, mas no resolveremos por completo la integral.

EJEMPLO 1 □ $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx$

De acuerdo con el paso 1, reformularemos la integral:

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$$

Ahora, la integral se encuentra en la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ y m es impar, de modo que podremos seguir el consejo de la sección 7.2

Asimismo, si en el paso 1 hubiéramos escrito

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x}\, \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx$$

podríamos continuar como sigue, con la sustitución $u = \cos x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x}\, \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6}\, (-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6}\, du = \int (u^{-4} - u^{-6})\, du$$

□

EJEMPLO 2 □ $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

Según lo que describimos en el paso 3(d) (ii), sustituimos $u = \sqrt{x}$. Entonces $x = u^2$, así que $dx = 2u\, du$ y

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int u e^u\, du$$

El integrando ya es un producto de u por la función transcendental e^u y, por ende, se puede integrar por partes. □

EJEMPLO 3 $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\,dx$

No es obvia alguna simplificación o sustitución algebraica, de manera que en este caso no se aplican los pasos 1 y 2. El integrando es una función racional, por lo que aplicaremos el procedimiento de la sección 7.4, recordando que la primera etapa es dividir. □

EJEMPLO 4 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

En este caso basta el paso 2. Sustituimos $u = \ln x$ porque su derivada es $du = dx/x$, que se encuentra en la integral. □

EJEMPLO 5 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx$

Aunque la sustitución de racionalización

$$u = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

es aplicable aquí [paso 3(d) (ii)], produce una función racional muy complicada. Un método más sencillo consiste en ciertos cambios algebraicos [como en los pasos 1 o 4(c)]. Si multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{1 - x}$, llegamos a

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx &= \int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned}$$

□

¿Pueden integrarse todas las funciones continuas?

Surge la pregunta: ¿nuestra estrategia de integración nos permitirá llegar a la integral de todas las funciones continuas? En particular, ¿podremos emplearla para evaluar $\int e^{x^2}\,dx$? La respuesta es no, al menos no en términos de las funciones que conocemos.

Las funciones con que hemos trabajado en este libro se llaman *funciones elementales*. Son los polinomios, las funciones racionales, las potencias (x^a), las exponenciales(a^x), las funciones logarítmicas, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas, las híperbólicas e hiperbólicas inversas, y todas aquellas que se pueden obtener de las mencionadas por las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición; por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

es una función elemental.

Si f es una función elemental, f' también lo es, pero $\int f(x)\,dx$ no necesariamente es una función elemental; por ejemplo, tenemos $f(x) = e^{x^2}$. Dado que f es continua, su integral existe, y si definimos la funcion F mediante

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

de acuerdo con la primera parte del teorema fundamental del cálculo

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Por lo tanto, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada, F, pero se ha demostrado que F no es una función elemental. Esto significa que a pesar de todo lo que nos esforcemos, nunca llegaremos a evaluar $\int e^{x^2}\,dx$ en términos de funciones que conozcamos. (Sin embargo, en el Cap. 11 aprenderemos a expresar $\int e^{x^2}\,dx$ como una serie infinita.) Lo mismo se puede decir de las integrales siguientes:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De hecho, la mayor parte de las funciones elementales carecen de antiderivada elemental. No obstante, puede estar seguro de que todas las integrales de los ejercicios que siguen son funciones elementales.

7.5 Ejercicios

1–76 □ Evalúe la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2}\,dy$

4. $\displaystyle\int_{1}^{2} x^3 \ln x\,dx$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}\,dx$

9. $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

10. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

11. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2t}{(t-3)^2}\,dt$

12. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx$

15. $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,dx$

16. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

17. $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$

19. $\displaystyle\int t^3 e^{-2t}\,dt$

20. $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

21. $\displaystyle\int_{0}^{1} (1+\sqrt{x})^8\,dx$

22. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{z}\,(z+\sqrt[3]{z})\,dz$

23. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx$

25. $\displaystyle\int \cot x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

26. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{at}\,dt$

27. $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x^3+x^2-2x|\,dx$

28. $\displaystyle\int \sqrt{1+x-x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx$

31. $\displaystyle\int_{0}^{5} \frac{3w-1}{w+2}\,dw$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-8}\,dx$

33. $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{9-\cos^4 x}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^8 \operatorname{sen} x\,dx$

36. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\,dx$

37. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \cos^2\theta \tan^2\theta\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan^3 x \sec^4 x\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{x}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy$

41. $\displaystyle\int \theta \tan^2\theta\,d\theta$

42. $\displaystyle\int \tan^2 4x\,dx$

43. $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{x+a}{x^2+a^2}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-a^4}\,dx$

47. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 \pi x \cos^4 \pi x\,dx$

48. $\displaystyle\int x^2 \tan^{-1} x\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

Por consiguiente, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x \tan^{-1}x\, dx = 2\pi\left[\frac{x^2+1}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2}\right]_0^1 \\ &= \pi[(x^2+1)\tan^{-1}x - x]_0^1 = \pi(2\tan^{-1}1 - 1) \\ &= \pi[2(\pi/4) - 1] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2 □ Consulte la tabla de integrales para determinar $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Si buscamos en la sección *Formas donde interviene* $\sqrt{a^2-u^2}$, veremos que lo que más se aproxima es la número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

No es exactamente lo que tenemos, de modo que efectuaremos la sustitución $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5-u^2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du$$

Entonces emplearemos la fórmula 34 con $a^2 = 5$ (así que $a = \sqrt{5}$):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx &= \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du = \frac{1}{8}\left[-\frac{u}{2}\sqrt{5-u^2} + \frac{5}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}}\right] + C \\ &= -\frac{x}{8}\sqrt{5-4x^2} + \frac{5}{16}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3 □ Utilice la tabla de integrales para determinar $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$.

SOLUCIÓN Buscamos en la sección *Formas trigonométricas* y vemos que ninguna de las integrales incluye explícitamente un factor u^3. Sin embargo, podemos usar la fórmula de reducción en el número 84, con $n = 3$:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3\cos x + 3\int x^2 \cos x\, dx$$

85. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du$

Ahora tenemos que evaluar $\int x^2 \cos x\, dx$. Podemos usar la fórmula de reducción en el número 85 con $n = 2$ y luego, la integral del número 82:

$$\begin{aligned} \int x^2\cos x\, dx &= x^2\operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= x^2 \operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - x\cos x) + K \end{aligned}$$

Al combinar estos cálculos, obtenemos

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C$$

en donde $C = 3K$. □

EJEMPLO 4 □ Determine $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$ con la tabla de integrales.

SOLUCIÓN Dado que en la tabla se encuentran formas donde interviene $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$, y no $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, primero completaremos el cuadrado:

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$$

A continuación hacemos la sustitución $u = x + 1$ (luego $x = u - 1$), para que el integrando involucre la expresión $\sqrt{a^2 + u^2}$:

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx = \int (u - 1)\sqrt{u^2 + 3}\,du$$

$$= \int u\sqrt{u^2 + 3}\,du - \int \sqrt{u^2 + 3}\,du$$

La primera integral se evalúa con la sustitución $t = u^2 + 3$:

$$\int u\sqrt{u^2 + 3}\,du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}t^{3/2} = \tfrac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

Por la segunda, emplearemos la fórmula 21 con $a = \sqrt{3}$:

$$\int \sqrt{u^2 + 3}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 3} + \tfrac{3}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 3}\right)$$

Por consiguiente,

$$\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \frac{x + 1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \tfrac{3}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) + C$$

□

Sistemas algebraicos computacionales

Hemos visto que el uso de tablas entraña la comparación de la forma del integrando con las formas de los integrandos en las tablas. Las computadoras se prestan muy bien para comparar las pautas y tal como hemos usado sustituciones conjuntamente con tablas, un SAC puede hacer sustituciones que transforman una integral dada en una que se encuentra entre las fórmulas registradas. No es, por tanto, de sorprender que los sistemas algebraicos computacionales sean excelentes integradores. Esto no quiere decir que la integración a mano sea una destreza obsoleta. En ocasiones, un cálculo manual produce una integral indefinida en forma más conveniente que la respuesta de la máquina.

Para empezar, veamos lo que sucede cuando pedimos a una máquina que integre la función $y = 1/(3x - 2)$, relativamente fácil. Por ejemplo, si usamos la sustitución $u = 3x - 2$, con un lápiz fácilmente llegamos a

$$\int \frac{1}{3x - 2}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|3x - 2| + C$$

mientras que Derive, Mathematica y Maple dan como respuesta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x - 2)$$

Lo primero que notamos es que los sistemas algebraicos computacionales omiten la constante de integración; en otras palabras, producen una antiderivada *particular* y no la más

Si en su lugar integramos a mano con la sustitución $u = x^2 + 5$, llegamos a

□ Con Derive y el TI-92 también llega a esta respuesta.

$$\int x(x^2 + 5)^8\,dx = \tfrac{1}{18}(x^2 + 5)^9 + C$$

Esta contestación es más conveniente para casi cualquier finalidad. □

EJEMPLO 7 Emplee un sistema algebraico computacional para determinar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 de la sección 7.2 hallamos

$$\boxed{1} \qquad \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Con Derive y Maple la respuesta es

$$-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^4 x\cos^3 x - \tfrac{4}{35}\operatorname{sen}^2 x\cos^3 x - \tfrac{8}{105}\cos^3 x$$

y según Mathematica es

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Es de esperar que haya identidades trigonométricas que muestren la equivalencia de estas tres respuestas. De hecho, si pedimos a estos programas que simplifiquen sus expresiones empleando identidades trigonométricas, terminan llegando al mismo tipo de respuesta que la de la ecuación 1. □

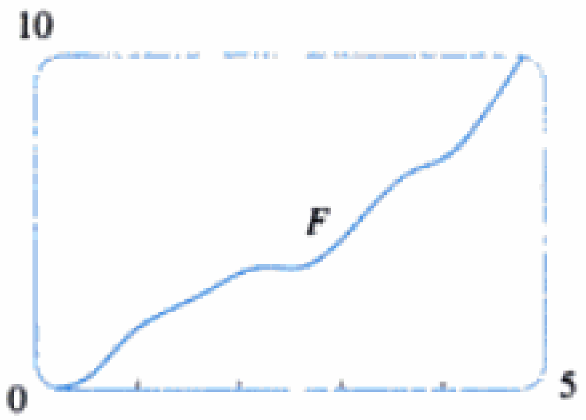


FIGURA 1

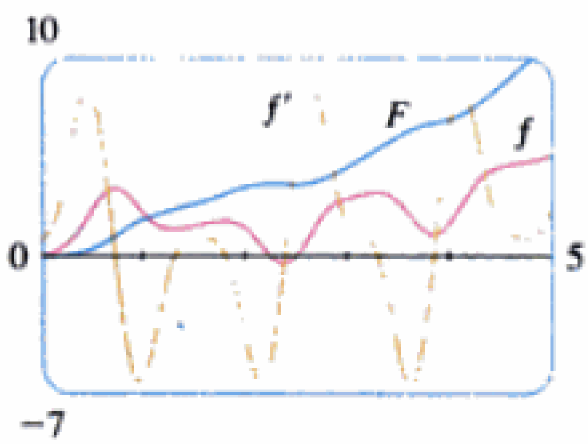


FIGURA 2

EJEMPLO 8 Si $f(x) = x + 60\operatorname{sen}^4 x\cos^5 x$, halle la antiderivada, F de f, tal que $F(0) = 0$. Grafique F en $0 \leqslant x \leqslant 5$. ¿Dónde tiene F valores extremos y puntos de inflexión?

SOLUCIÓN La antiderivada de F, según Maple, es

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{20}{3}\operatorname{sen}^3 x\cos^6 x - \tfrac{20}{7}\operatorname{sen} x\cos^6 x + \tfrac{4}{7}\cos^4 x\operatorname{sen} x + \tfrac{16}{21}\cos^2 x\operatorname{sen} x + \tfrac{32}{21}\operatorname{sen} x$$

y vemos que $F(0) = 0$. Es probable que se pueda simplificar esta expresión, pero no es necesario porque un sistema algebraico computacionial puede graficar F tan fácilmente en esta forma como en cualquier otra. En la figura 1 se ilustra una gráfica de F. Para ubicar los valores extremos de F graficamos su derivada, $F' = f$ (Fig. 2) y observamos que F tiene un máximo local cuando $x \approx 2.3$ y un mínimo local cuando $x \approx 2.5$. La gráfica de $F'' = f'$, en la figura 2, muestra que F tiene puntos de inflexión cuando $x \approx 0.7, 1.3, 1.8, 2.4, 3.3$ y 3.9. □

7.6 Ejercicios

1–4 □ Use el rubro indicado de la tabla de integrales al final de libro para evaluar la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{7 - 2x^2}}{x^2}\,dx$; número 33

2. $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{3 - 2x}}\,dx$; número 55

3. $\displaystyle\int \sec^3(\pi x)\,dx$; número 71

4. $\displaystyle\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$; número 98

5–30 Emplee la tabla de integrales al final para evaluar cada una de las integrales siguientes:

5. $\displaystyle\int_0^1 2x\cos^{-1}x\,dx$

6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 7}}\,dx$

7. $\int e^{-3x}\cos 4x\,dx$

8. $\int \csc^3(x/2)\,dx$

9. $\int x\,\text{sen}^{-1}(x^2)\,dx$

10. $\int x^3\text{sen}^{-1}(x^2)\,dx$

11. $\int_{-1}^{0} t^2e^{-t}\,dt$

12. $\int_0^{\pi} x^2\cos 3x\,dx$

13. $\int \frac{\sqrt{9x^2-1}}{x^2}\,dx$

14. $\int \frac{\sqrt{4-3x^2}}{x}\,dx$

15. $\int e^x\,\text{sech}(e^x)\,dx$

16. $\int \frac{\text{sen}\,\theta}{1+2\cos\theta}\,d\theta$

17. $\int_{-2}^{1}\sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

18. $\int \frac{x^5}{x^2+\sqrt{2}}\,dx$

19. $\int \text{sen}^2x\cos x\ln(\text{sen}\,x)\,dx$

20. $\int \frac{dx}{e^x(1+2e^x)}$

21. $\int \sqrt{2+3\cos x}\,\tan x\,dx$

22. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}\,dx$

23. $\int \sec^5x\,dx$

24. $\int \text{sen}^6 2x\,dx$

25. $\int_0^{\pi/2}\cos^5x\,dx$

26. $\int_0^1 x^4e^{-x}\,dx$

27. $\int \sqrt{e^{2x}-1}\,dx$

28. $\int e^t\,\text{sen}(\alpha t-3)\,dt$

29. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$

30. $\int x^2\tan^{-1}x\,dx$

31. Calcule el volumen del cuerpo generado cuando la región bajo la curva $y = 1/(1+5x)^2$ gira alrededor del eje y de 0 a 1.

32. La región bajo la curva $y = \tan^2x$ se rota de 0 a $\pi/4$ alrededor del eje x. Calcule el volumen del cuerpo resultante.

33. Compruebe la fórmula 53 de la tabla de integrales: (a) por diferenciación y (b) empleando la sustitución $t = a + bu$.

34. Compruebe la fórmula 31: (a) por diferenciación y (b) por sustitución de $u = a\,\text{sen}\,\theta$.

SAC **35–42** □ Emplee un sistema algebraico computacional para evaluar cada una de estas integrales. Compare la respuesta con el resultado que obtenga empleando las tablas; si difieren, demuestre que son equivalentes.

35. $\int x^2\sqrt{5-x^2}\,dx$

36. $\int x^2(1+x^3)^4\,dx$

37. $\int \text{sen}^3x\cos^2x\,dx$

38. $\int \tan^2x\sec^4x\,dx$

39. $\int x\sqrt{1+2x}\,dx$

40. $\int \text{sen}^4x\,dx$

41. $\int \tan^5x\,dx$

42. $\int x^5\sqrt{x^2+1}\,dx$

SAC 43. Los sistemas algebraicos de computación ocasionalmente requieren un poco de ayuda humana. Pida a su SAC que evalúe

$$\int 2^x\sqrt{4^x-1}\,dx$$

Si no lo hace intente

$$\int 2^x\sqrt{2^{2x}-1}\,dx$$

como alternativa. ¿Por qué será que esta forma del integrando sí produce respuesta?

SAC 44. Intente evaluar

$$\int (1+\ln x)\sqrt{1+(x\ln x)^2}\,dx$$

con un SAC. Si no hay respuesta hágase una sustitución que cambia la integral a una que *sí* puede evaluar el SAC.

SAC **45–46** □ Use un sistema algebraico computacional para determinar una antiderivada, F de f, tal que $F(0) = 0$. Grafique F y f y sitúe, aproximadamente, las abscisas de los puntos extremos y los puntos de inflexión de F.

45. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$

46. $f(x) = xe^{-x}\,\text{sen}\,x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

SAC **47–48** □ Emplee una graficadora para trazar una gráfica de f y con esa gráfica bosqueje a mano la gráfica de la antiderivada, F, tal que $F(0) = 0$. A continuación, use un sistema algebraico computacional para hallar F de modo explícito y grafíquela. Compare la gráfica computarizada con su bosquejo.

47. $f(x) = \text{sen}^4x\cos^6x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

48. $f(x) = \frac{x^3-x}{x^6+1}$

7.7 Integración aproximada

Hay dos situaciones en que es imposible calcular el valor exacto de una integral definida.

La primera es consecuencia de que para evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ con el teorema fundamental del cálculo, necesitamos conocer una antiderivada de f; sin embargo, a veces es difícil, o hasta imposible, encontrarla (Sec. 7.5). Por ejemplo, es imposible evaluar con exactitud las integrales siguientes:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

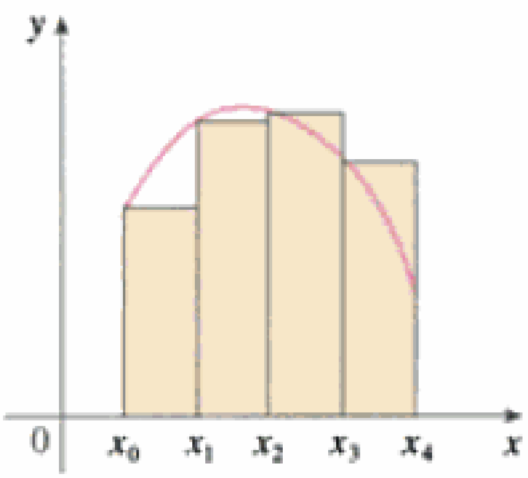
La segunda situación se presenta cuando la función se determina con un experimento científico utilizando las indicaciones de instrumentos. Puede no haber fórmula para la función (Ejem. 5).

En ambos casos necesitamos calcular valores aproximados de las integrales definidas. Ya conocemos uno de los métodos. Recordaremos que la integral definida es el límite de las sumas de Riemann, así que cualquier suma de Riemann servirá como una aproximación. En especial, definamos una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, $\Delta x = (b-a)/n$. Entonces,

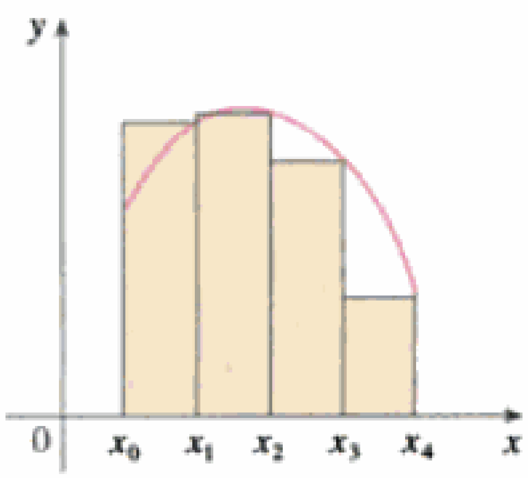
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\,\Delta x$$

en donde x_i^* es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo, $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición. En caso de elegir x_i^* como el extremo izquierdo del intervalo, $x_i^* = x_{i-1}$ y así

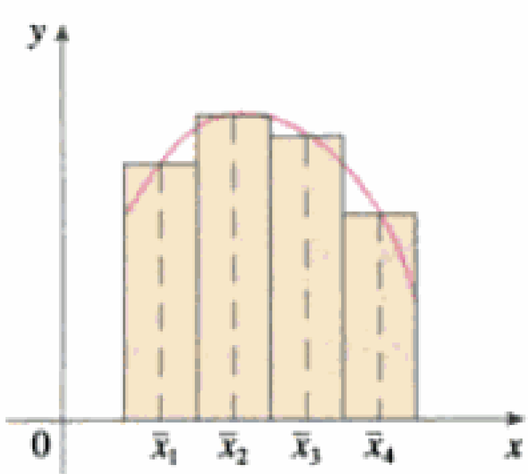
$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\,\Delta x$$



(a) Aproximación con extremos izquierdos



(b) Aproximación con extremos derechos



(c) Aproximación con puntos medios

FIGURA 1

Si $f(x) \geqslant 0$, la integral representa un área y la ecuación 1 representa una aproximación a esa área mediante los rectángulos que vemos en la figugra 1(a). Si elegimos x_i^* como los extremos derechos, entonces $x_i^* = x_i$ y así

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x$$

[Fig. 1(b).] Las aproximaciones L_n y R_n, definidas por las ecuaciones 1 y 2, se llaman **aproximación con extremos izquierdos** y **aproximación con extremos derechos**, respectivamente.

En la sección 5.2 también vimos el caso en que se elige $\bar{x}_i$ como el punto medio, x_i^* del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En la figura 1(c) aparece la aproximación con punto medio, M_n, que parece ser mejor que L_n o R_n.

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

y $\qquad \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$

Otra aproximación es consecuencia del promedio de las aproximaciones representadas por las ecuaciones (1) y (2):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \cdots + \left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

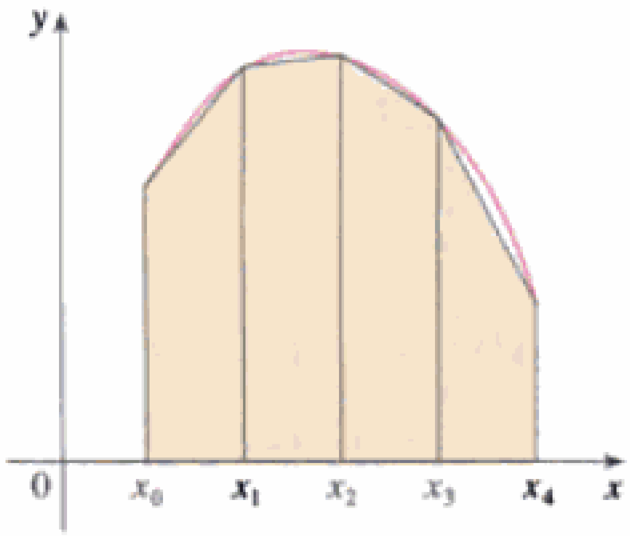


FIGURA 2
Aproximación trapezoidal

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $x_i = a + i\,\Delta x$.

La causa del nombre de la regla del trapecio se puede ver en la figura 2, que muestra el caso cuando $f(x) \geqslant 0$. El área del trapecio sobre el i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$$

y si sumamos las áreas, de esos trapecios obtenemos el lado derecho de la regla del trapecio.

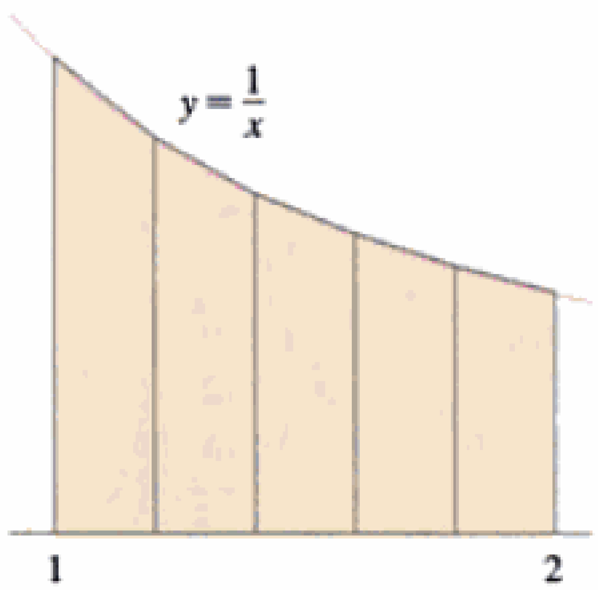


FIGURA 3

EJEMPLO 1 □ Emplee (a) la regla del trapecio y (b) la regla del punto medio, con $n = 5$, para calcular, aproximadamente, la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 5$, $a = 1$ y $b = 2$, tenemos que $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0.2$, y así, la regla del trapecio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0.2}{2}\left[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)\right]$$

$$= 0.1\left[\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right]$$

$$\approx 0.695635$$

En la figura 3 se presenta esta aproximación.

(b) Los puntos medios de los cinco intervalos son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9, y con ellos aplicamos la regla del punto medio.

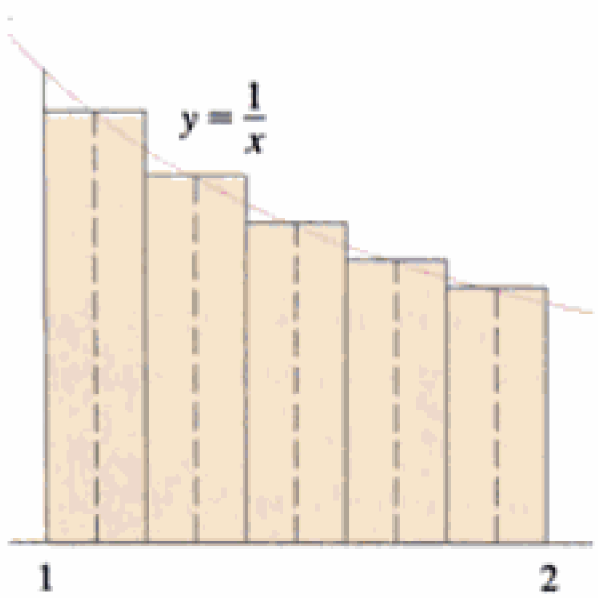


FIGURA 4

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\left[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

Esta aproximación se ilustra en la figura 4. □

En este ejemplo hemos elegido deliberadamente una integral cuyo valor pueda calcularse a fin de constatar la exactitud de las reglas del trapecio y del punto medio. De acuerdo con el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0.693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ aproximación + error

El **error** al emplear una aproximación se define como la cantidad que se necesita sumar a la aproximación para volverla exacta. En los valores obtenidos en el ejemplo 1 vemos que los errores cometidos en las aproximaciones de la regla del trapecio y del punto medio, para $n = 5$, son

$$E_T \approx -0.002488 \qquad \text{y} \qquad E_M \approx 0.001239$$

En general, tenemos

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{y} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

Las tablas siguientes exhiben los resultados de cálculos semejantes a los del ejemplo 1, pero para $n = 5$, 10 y 20, y para aproximaciones con los extremos izquierdo y derecho, así como con las reglas del trapecio y del punto medio.

■ Aproximación a $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.745635	0.645635	0.695635	0.691908
10	0.718771	0.668771	0.693771	0.692835
20	0.705803	0.680803	0.693303	0.693069

■ Errores correspondientes

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0.052488	0.047512	−0.002488	0.001239
10	−0.025624	0.024376	−0.000624	0.000312
20	−0.012656	0.012344	−0.000156	0.000078

A partir de estas tablas, podemos establecer varios puntos:

Estas observaciones se vuelven ciertas en la mayoría de los casos.

1. En todos los métodos se alcanzan aproximaciones más exactas al aumentar el valor de n. (Pero cuando n es muy grande, se necesitan tantas operaciones aritméticas que debemos cuidarnos del error acumulado por redondeo.)
2. Los errores en las aproximaciones con los extremos izquierdo y derecho tienen signos contrarios y parecen disminuir en un factor aproximado de 2 al duplicar el valor de n.
3. Las reglas del trapecio y del punto medio son más exactas que las aproximaciones con los extremos.
4. Los errores generados con las reglas del trapecio y del punto medio tienen signos contrarios y parecen disminuir en un factor aproximado de 4 cuando el valor de n se duplica.
5. El tamaño del error con la regla del punto medio es, aproximadamente, la mitad del correspondiente con la regla del trapecio.

En la figura 5 mostramos por qué se puede esperar que la regla del punto medio sea más exacta que la del trapecio. El área de un rectángulo cualquiera, en la regla del punto medio, es igual a la del trapecio $ABCD$, cuyo lado superior es la tangente a la gráfica en P. El área

A fin de tener la misma exactitud con la regla del punto medio, elegimos n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.0001$$

con lo cual
$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$$

EJEMPLO 3

(a) Aplique la regla del punto medio, con $n = 10$, para hallar, aproximadamente, la integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$.
(b) Establezca una cota superior para el error cometido en esta aproximación.

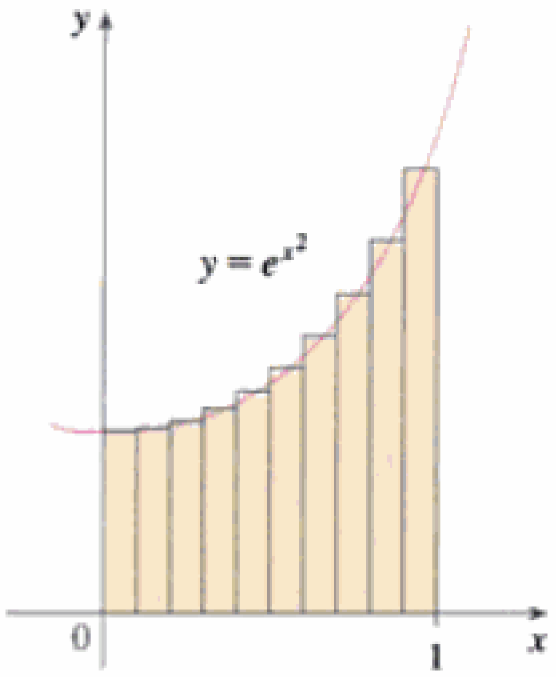


FIGURA 6

□ Las estimaciones del error son cotas superiores del mismo, corresponden a los enunciados teóricos más pesimistas. El error presente aquí es como de 0.0023.

SOLUCIÓN

(a) Ya que $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$, la regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} dx &\approx \Delta x\,[f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.85) + f(0.95)]\\ &= 0.1[e^{0.0025} + e^{0.0225} + e^{0.0625} + e^{0.1225} + e^{0.2025} + e^{0.3025}\\ &\qquad + e^{0.4225} + e^{0.5625} + e^{0.7225} + e^{0.9025}]\\ &\approx 1.460393\end{aligned}$$

la figura 6 muestra esa aproximación.

(b) En vista de que $f(x) = e^{x^2}$, entonces $f'(x) = 2xe^{x^2}$ y $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. También, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, tenemos $x^2 \leqslant 1$ y así

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

Con $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$, en la ecuación (3) para estimar el error, se ve que una cota superior del error es

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0.007$$

Regla de Simpson

Otra regla para aproximar resultados de integración emplea segmentos parabólicos en lugar de segmentos de recta. Como antes, tomaremos una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud, $h = \Delta x = (b - a)/n$; pero esta vez supondremos que n es un número *par*. Entonces, en cada par consecutivo de intervalos, aproximamos la curva $y = f(x) \geqslant 0$ por medio de una parábola (Fig. 7). Si $y_i = f(x_i)$, entonces $P_i(x_i, y_i)$ es el punto de la curva que está arriba de x_i. Una parábola característica pasa por tres puntos consecutivos, P_i, P_{i+1} y P_{i+2}.

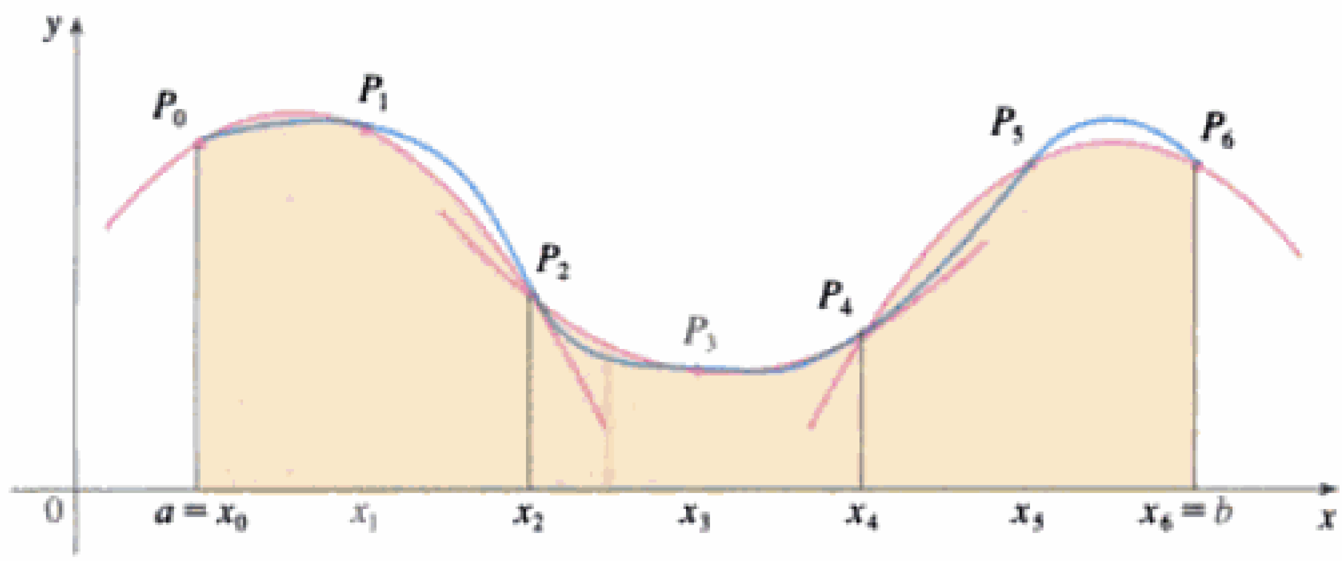


FIGURA 7

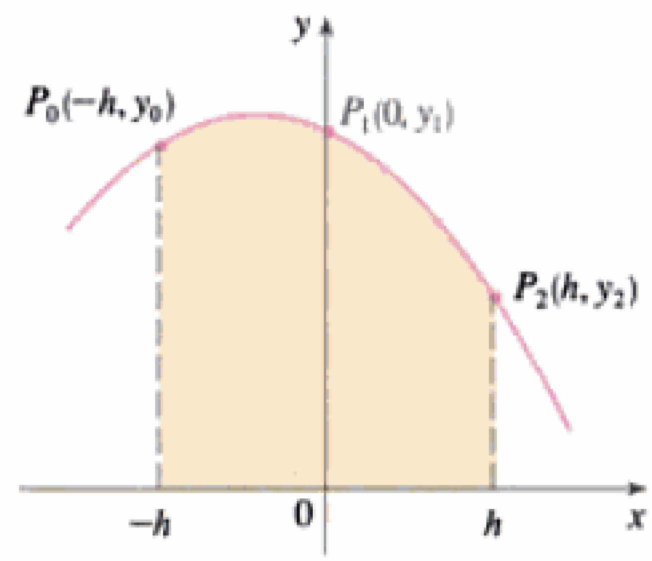


FIGURA 8

□ Thomas Simpson fue un tejedor que aprendió matemáticas por sí mismo y progresó hasta llegar a ser uno de los mejores matemáticos ingleses del siglo XVIII. Lo que denominamos ahora regla de Simpson ya lo conocían en realidad Cavalieri y Gregory, en el siglo XVII; pero Simpson lo divulgó en su libro de texto de cálculo, un éxito editorial titulado *A New Treatise of Fluxions* (Nuevo tratado sobre las fluxiones).

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

en donde n es par y $\Delta x = (b - a)/n$.

EJEMPLO 4 □ Aplique la regla de Simpson, con $n = 10$, para hallar, aproximadamente $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN Sean $f(x) = 1/x$, $n = 10$ y $\Delta x = 0.1$ en la regla de Simpson, con lo cual resulta

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx S_{10}\\ &= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]\\ &= \frac{0.1}{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right]\\ &\approx 0.693150\end{aligned}$$

□

En el ejemplo 4 notará que la regla de Simpson da como resultado una aproximación mucho mejor ($S_{10} \approx 0.693150$) al valor real de la integral ($\ln 2 \approx 0.693147\ldots$) que la regla del trapecio ($T_{10} \approx 0.693771$) o la regla del punto medio ($M_{10} \approx 0.692835$). Las aproximaciones con la regla de Simpson (Ejer. 46) son promedios ponderados de las cantidades que se usan en las reglas del trapecio y del punto medio.

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Recuerde que E_T y E_M tienen signos contrarios y que $|E_M|$ es, aproximadamente, la mitad del valor de $|E_T|$.)

En numerosas aplicaciones del cálculo necesitamos evaluar una integral aun si no se conoce una fórmula explícita para y como función de x. Una función puede darse gráficamente o como tabla de valores de un conjunto de datos. Si existe evidencia de que los valores no están cambiando con rapidez, entonces la regla del trapecio o la regla de Simpson pueden utilizarse para hallar un valor aproximado para $\int_a^b y\,dx$, la integral de y respecto a x.

t	$r(t)$	t	$r(t)$
1981	10.3	1990	5.4
1982	6.2	1991	4.2
1983	3.2	1992	3.0
1984	4.3	1993	3.0
1985	3.6	1994	2.6
1986	1.9	1995	2.8
1987	3.6	1996	2.9
1988	4.1	1997	2.3
1989	4.8		

EJEMPLO 5 □ La tasa de inflación $r(t)$ es la derivada del índice de precios al consumidor (IPC) que mide precios promedio de artículos de una "canasta representativa de consumidores urbanos. La tabla proporciona la tasa de inflación (como porcentaje) en Estados Unidos de 1981 a 1997 como fue publicada por la Oficina de Estadística del Trabajo de ese país. Usaremos la regla de Simpson para estimar el aumento total en porcentaje en el IPC de 1981 a 1997.

SOLUCIÓN Dado que la derivada del IPC es la tasa de inflación $r(t)$, el teorema del cambio total (sección 5.4) nos dice que el incremento en el IPC de 1981 a 1997 es

$$\int_{1981}^{1997} r(t)\,dt$$

3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ usando (a) la regla trapezoidal y (b) la regla del punto medio, cada vez con $n = 4$. A partir de una gráfica del integrando, decidir si sus respuestas son sobre o subestimaciones. ¿Qué puede concluir del valor verdadero de la integral?

4. Trace la gráfica de $f(x) = \text{sen}(x^2/2)$, empleando la pantalla [0, 1] por [0, 0.5], y sea $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
(a) Utilice la gráfica para decidir si L_2, R_2, M_2 y T_2 son sobreestimaciones o subestimaciones de I.
(b) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente.
(c) Calcule L_5, R_5, M_5 y T_5. Consulte la gráfica y señale cuál produce la mejor estimación de I.

5–6 □ Use (a) la regla del punto medio y (b) la regla de Simpson para aproximarse a una de las integrales siguientes con el valor especificado de n. Redondee sus respuestas a seis decimales. Compare con el valor real para determinar el error en cada aproximación.

5. $\int_0^{\pi} x^2 \,\text{sen}\, x\,dx, \quad n = 8$

6. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx, \quad n = 6$

7–10 □ Use (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson para aproximar cada una de estas integrales con el valor especificado de n. Redondee sus respuestas a seis decimales.

7. $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx, \; n = 8$

8. $\int_0^{1/2} \text{sen}(x^2)\,dx, \quad n = 4$

9. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\text{sen}\, x}{x}\,dx, \quad n = 6$

10. $\int_0^{\pi/4} x \tan x\,dx, \; n = 6$

11–20 □ Use (a) la regla del trapecio (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson para aproximar la integral con el valor especificado de n. (Redondee a 6 decimales.)

11. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \quad n = 10$

12. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx, \quad n = 10$

13. $\int_0^{1/2} \text{sen}(e^{t/2})\,dt, \quad n = 8$

14. $\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,dx, \; n = 10$

15. $\int_1^2 e^{1/x}\,dx, \quad n = 4$

16. $\int_0^1 \ln(1 + e^x)\,dx, \quad n = 8$

17. $\int_0^1 x^5 e^x\,dx, \quad n = 10$

18. $\int_0^4 \sqrt{x}\,\text{sen}\, x\,dx, \quad n = 8$

19. $\int_0^3 \frac{1}{1 + y^5}\,dy, \quad n = 6$

20. $\int_2^4 \frac{e^x}{x}\,dx, \quad n = 10$

21. (a) Halle las aproximaciones T_{10} y M_{10} para la integral $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$.
(b) Estime los errores en la aproximación de la parte (a).
(c) ¿Qué tan grande deberá ser n para que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) tengan exactitud dentro de un medio de 0.00001?

22. (a) Halle las aproximaciones T_8 y M_8 para $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$.
(b) Estime los errores en las aproximaciones del inciso (a).
(c) ¿Qué tan grande tendrá que ser n para que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) tenga una exactitud del orden de 0.00001?

23. (a) Halle las aproximaciones T_{10} y S_{10} para $\int_0^1 e^x\,dx$ y los errores correspondientes E_T y E_S.
(b) Compare los errores reales del inciso (a) con los errores estimados que dan (3) y (4).
(c) ¿Qué tan grande debemos elegir n para que las aproximaciones T_n, M_n y S_n a la integral del inciso (a) tengan exactitud de orden 0.00001?

24. ¿Qué valor hay que dar a n a fin de garantizar que la aproximación con la regla de Simpson, a la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ tenga una exactitud dentro de 0.00001?

25. El problema de estimar el error es que a menudo es muy difícil calcular a mano cuatro derivadas y obtener una buena cota superior K de $|f^{(4)}(x)|$. Pero los sistemas algebraicos computacionales no tienen problema en calcular $f^{(4)}$ y graficarla; así es posible determinar con facilidad, un valor de K a partir de la computadora. Este ejercicio se relaciona con aproximaciones a la integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, donde $f(x) = e^{\cos x}$.
(a) Emplee una gráfica para obtener una buena cota superior de $|f''(x)|$.
(b) Use M_{10} para aproximar I.
(c) Con el resultado del inciso (a) estime el error de (b).
(d) Utilice la integración numérica incorporada de su sistema algebraico computacional a fin de hallar una aproximación a I.
(e) ¿Cómo se compara el error real con su estimado, obtenido en el inciso (c)?
(f) Obtenga una buena cota de $|f^{(4)}(x)|$ mediante una gráfica.
(g) Emplee S_{10} con objeto de aproximar I.
(h) Use el resultado del inciso (f) para estimar el error incurrido en el inciso (g).
(i) ¿Cómo se compara el error real con el estimado de error del inciso (h)?
(j) ¿Cuánto debe valer n a fin de garantizar que la magnitud del error cometido al emplear S_n sea menor que 0.0001?

26. Repita el ejercicio 23 con la integral $\int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^3}\,dx$.

27–28 □ Determine las aproximaciones L_n, R_n, T_n y M_n para $n = 4$, 8 y 16. A continuación calcule los errores correspondientes, E_L, E_R, E_T y E_M. (Redondee sus respuestas a seis decimales. Puede usar el comando de suma en un sistema algebraico para cálculo.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando n se duplica?

27. $\int_0^1 x^3\,dx$

28. $\int_0^2 e^x\,dx$

29–30 □ Calcule las aproximaciones T_n, M_n y S_n, cuando $n = 6$ y 12. Luego calcule los errores correspondientes, E_T, E_M y E_S. Redondee sus respuestas a seis decimales. ¿Qué observaciones

FIGURA 2

También observará que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada tiende a 1 cuando $t \to \infty$ (Fig. 2); así pues, el área de la región infinita, S, es igual a 1. Esto se escribe

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Con este ejemplo como guía, definimos la integral de f (no necesariamente una función positiva) sobre un intervalo infinito como el límite de integrales sobre intervalos finitos.

1 Definición de una integral impropia del tipo 1

(a) Si existe $\int_a^t f(x)\,dx$ para todo número $t \geq a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

siempre y cuando exista este límite (como un número finito)

(b) Si existe $\int_t^b f(x)\,dx$ para todo número $t \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que haya este límite (como un número finito)

Las integrales impropias de $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si hay tal límite y **divergentes** si no existe.

(c) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces, por definición

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Se puede emplear cualquier número real a en la parte (c). (Consulte el Ejer. 74).

Cualquiera de las integrales impropias de la definición 1 se puede interpretar como un área, siempre que f sea una función positiva; por ejemplo, en el caso (a) si $f(x) \geq 0$ y la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$ en la figura 3 se define como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

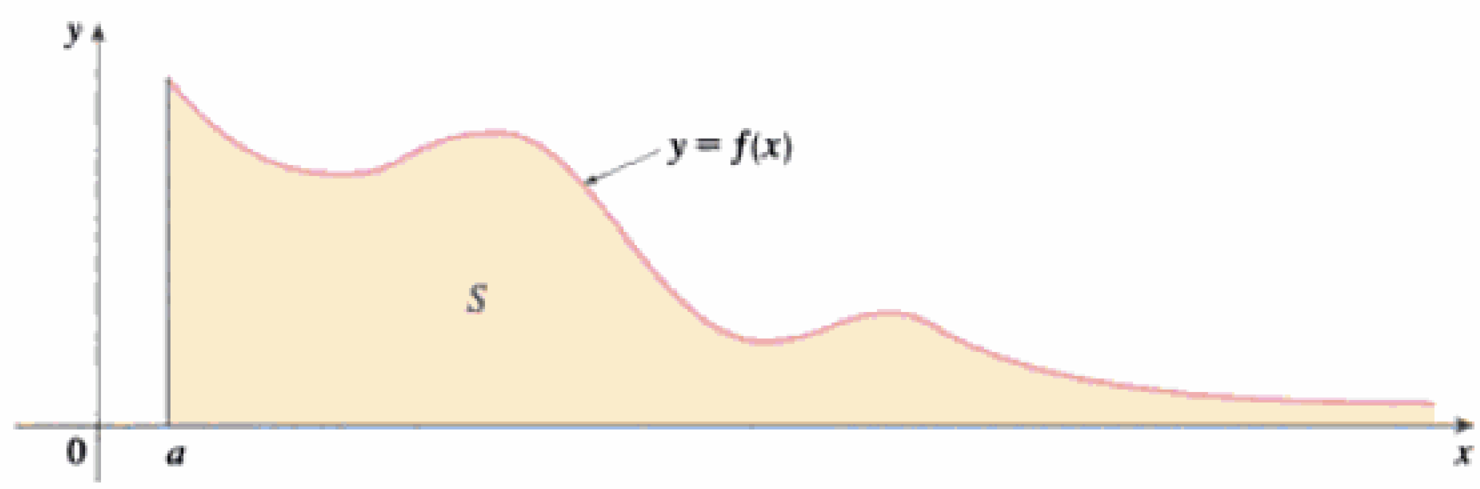


FIGURA 3

EJEMPLO 3 □ Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Conviene elegir $a = 0$ en la definición 1 (c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Ahora debemos evaluar por separado las integrales del lado derecho:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}t - \tan^{-1}0) = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}x\Big]_t^0 \\ &= \lim_{t\to-\infty}(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t) \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Como ambas son convergentes, la integral original es convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

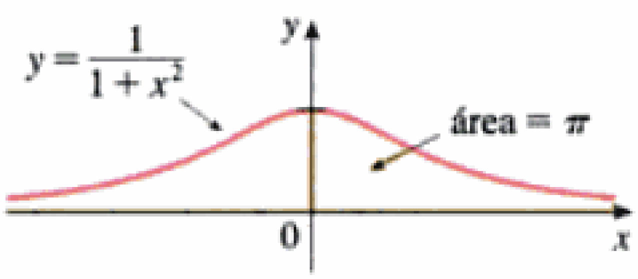


FIGURA 6

En vista de que $1/(1+x^2) > 0$, la integral impropia dada se puede interpretar como el área de la región infinita bajo la curva $y = 1/(1+x^2)$ y arriba del eje x (Fig. 6). □

EJEMPLO 4 □ ¿Para qué valores de p la integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

es convergente?

SOLUCIÓN Por el ejemplo 1 sabemos que si $p = 1$, la integral es divergente, así que supongamos que $p \neq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} \frac{1}{x^p}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]\end{aligned}$$

Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$, y así $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ cuando $1/t^{p-1} \to 0$. Por lo tanto,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si } p > 1$$

y la integral converge. Pero si $p < 1$, entonces $p - 1 < 0$ y así

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{cuando } t \to \infty$$

y la integral diverge. □

Resumiremos el resultado del ejemplo 4 como referencia para el futuro:

> **2** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si $p > 1$, y divergente si $p \leqslant 1$.

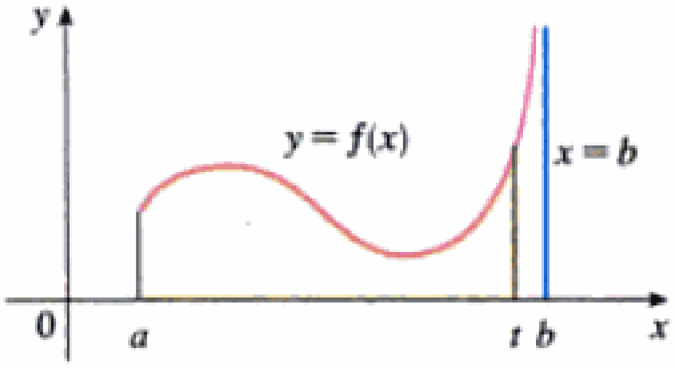


FIGURA 7

Tipo 2: integrandos discontinuos

Sea f una función positiva continua, definida en un intervalo finito, $[a, b)$, con una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y sobre el eje x, entre a y b. (Para las integrales del tipo 1, las regiones se prolongan indefinidamente en dirección horizontal. En este caso, la región es infinita en sentido vertical.) El área de la parte de S entre a y t (región sombreada que se muestra en la Fig. 7) es

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si $A(t)$ tiende a un número definido, A, cuando $t \to b^-$, se dice que el área de la región S es A y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Esta ecuación sirve para definir una integral impropia de tipo (2), aun cuando no sea una función positiva, sin importar qué tipo de discontinuidad tiene f en b.

En las figuras 8 y 9 aparecen las partes (b) y (c) para el caso cuando $f(x) \geqslant 0$ y f tiene asíntotas verticales en a y c, respectivamente.

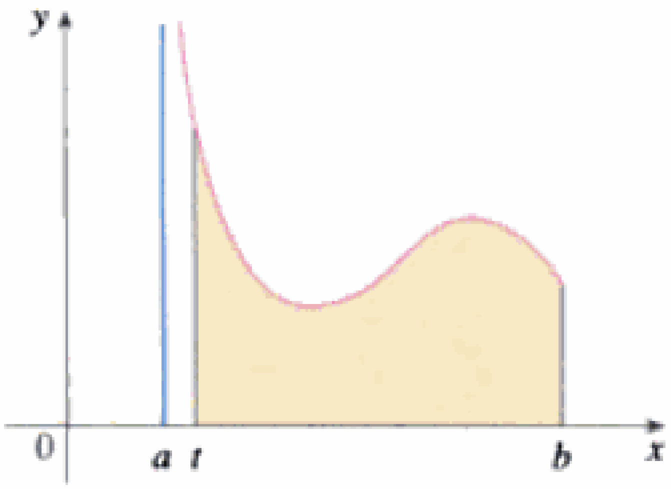


FIGURA 8

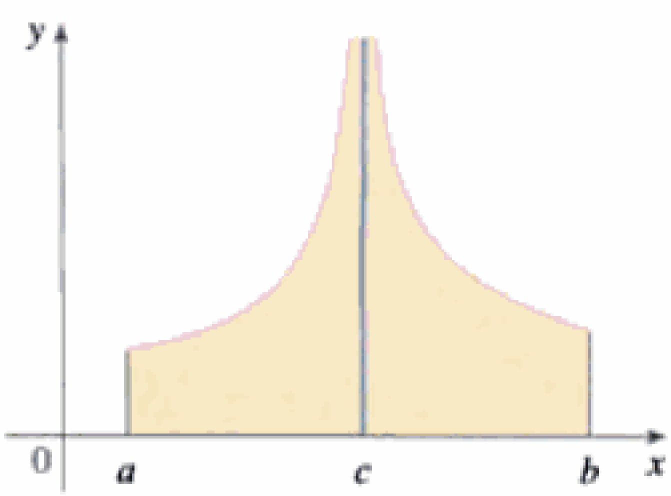


FIGURA 9

> **3 Definición de una integral impropia del tipo 2**
>
> (a) Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en b,
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$
>
> si este límite existe, como un número finito.
>
> (b) Si f es continua en $(a, b]$ y discontinua en a,
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$
>
> si este límite existe, como un número finito.
>
> La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se denomina **convergente** si existe el límite, y **divergente** si no existe.
>
> (c) Si f tiene una discontinuidad en c, y $a < c < b$, y si son convergentes tanto $\int_a^c f(x)\,dx$ como $\int_c^b f(x)\,dx$ por definición
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO 5 □ Determine $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero que nada, observemos que la integral dada es impropia ya que $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tiene la asíntota vertical $x = 2$. Como la discontinuidad infinita se presenta en el extremo izquierdo de $[2, 5]$, aplicamos la parte (b) de la definición 3:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

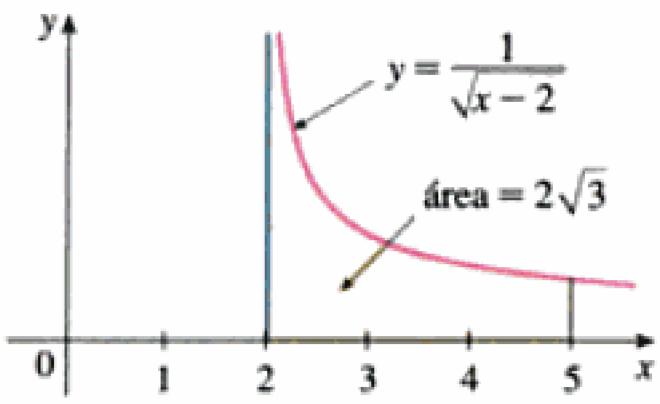


FIGURA 10

Por consiguiente, la integral impropia del problema es convergente y, como el integrando es positivo, podemos interpretar que el valor de la integral es el área de la región sombreada en la figura 10. □

EJEMPLO 6 □ Indique si $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Notará que la integral dada es impropia, pues $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Al emplear el inciso (a) de la definición 3 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\,dx \\ &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to(\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1] \\ &= \infty\end{aligned}$$

ya que $\sec t \to \infty$ y $\tan t \to \infty$ cuando $t \to (\pi/2)^-$; así pues, la integral impropia original es divergente. □

EJEMPLO 7 □ Evalúe $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ de ser posible.

SOLUCIÓN La recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando. Como se presenta a la mitad del intervalo $[0, 3]$, usaremos la parte (c) de la definición 3, con $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

en donde

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) \\ &= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty\end{aligned}$$

porque $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Por lo tanto, $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente. Esto quiere decir que $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. [No necesitamos evaluar $\int_1^3 dx/(x-1)$.] □

Teorema de comparación Sean f y g funciones continuas y $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ cuando $x \geqslant a$.

(a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

(b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

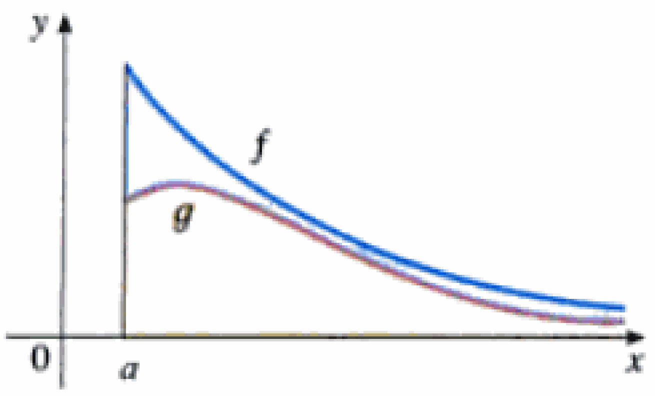


FIGURA 12

Omitiremos la demostración del teorema de comparación, pero en la figura 12 se aprecia su factibilidad. Cuando el área bajo la curva superior, $y = f(x)$, es finita, también lo es el área bajo la curva inferior, $y = g(x)$; y si el área bajo $y = g(x)$ es infinita, también lo será el área bajo $y = f(x)$. Nótese que la inversa no es necesariamente verdad si la $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, la $\int_a^\infty f(x)\,dx$ puede o no ser convergente y si la $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente puede ser o no divergente $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

EJEMPLO 9 □ Demuestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente.

SOLUCIÓN No podemos evaluar directamente la integral, pues la antiderivada de e^{-x^2} no es una función elemental, como explicamos en la sección 7.5. Escribiremos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

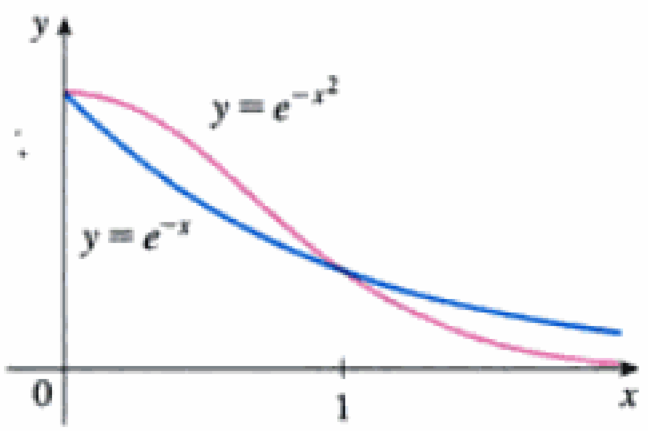


FIGURA 13

y vemos que la primera integral es una integral definida ordinaria. Para la segunda integral emplearemos el hecho de que cuando $x \geqslant 1$, $x^2 \geqslant x$, así que $-x^2 \leqslant -x$ y por tanto $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ (Fig. 13). Es fácil evaluar la integral e^{-x}:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Así, con $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el teorema de comparación, tenemos que $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente, de ahí que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ también sea convergente. □

TABLA 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

En el ejemplo 9 hemos demostrado que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente sin haber calculado su valor. En el ejercicio 70 indicaremos cómo demostrar que su valor aproximado es 0.8862. En la teoría de las probabilidades es importante conocer el valor exacto de esta integral impropia, como se verá en la sección 8.5; con los métodos del cálculo de varias variables se puede mostrar que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$. La tabla 1 ilustra la definición de una integral impropia mostrando cómo los valores (calculados en computadora) de $\int_0^t e^{-x^2}dx$ tienden a $\sqrt{\pi}/2$ al crecer t. De hecho estos valores convergen muy rápidamente porque $e^{-x^2} \to 0$ muy rápidamente cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 10 □ La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente de acuerdo con el teorema de comparación porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

e $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente, de acuerdo con el ejemplo 1 [o (2) con $p = 1$]. □

La tabla 2 ilustra la divergencia de la integral del ejemplo 10. Se observa que los valores no se aproximan a valor alguno.

TABLA 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1000	7.1271392134
10000	9.4297243064

7.8 Ejercicios

1. Explique por qué es impropia cada una de las integrales

   (a) $\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

   (c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ (d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\,dx$

2. Cuáles de las integrales son impropias. ¿Por qué?

   (a) $\int_1^2 \frac{1}{2x - 1}\,dx$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\,dx$

   (c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$ (d) $\int_1^2 \ln(x - 1)\,dx$

3. Calcule el área bajo la curva $y = 1/x^3$, de $x = 1$ a $x = t$ y evalúela cuando $t = 10$, 100 y 1000. A continuación determine el área total bajo esta curva, para $x \geq 1$.

4. (a) Grafique las funciones $f(x) = 1/x^{1.1}$ y $g(x) = 1/x^{0.9}$ en las pantallas $[0, 10]$ por $[0, 1]$ y en $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
   (b) Calcule las área bajo las gráficas de f y g, desde $x = 1$ hasta $x = t$, y evalúelas para $t = 10$, 1000, 10^4, 10^6, 10^{10} y 10^{20}.
   (c) Calcule el área total bajo cada curva para $x \geq 1$, si existe.

5–40 □ Señale si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente. Evalúe las convergentes.

5. $\int_1^\infty \frac{1}{(3x + 1)^2}\,dx$

6. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x - 5}\,dx$

7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 - w}}\,dw$

8. $\int_2^\infty \frac{1}{(x + 3)^{3/2}}\,dx$

9. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

10. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

11. $\int_{-\infty}^\infty x^3\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{w - 5}}\,dw$

13. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$

14. $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx$

15. $\int_0^\infty \frac{1}{(x + 2)(x + 3)}\,dx$

16. $\int_0^\infty \frac{x}{(x + 2)(x + 3)}\,dx$

17. $\int_0^\infty \cos dx$

18. $\int_{-\infty}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$

19. $\int_{-\infty}^1 xe^{2x}\,dx$

20. $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

22. $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$

23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^2}\,dx$

24. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{r^2 + 4}\,dr$

25. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

26. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

27. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

28. $\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$

30. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x - 9}}\,dx$

31. $\int_0^{\pi/4} \csc^2 t\,dt$

32. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$

33. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{4y - 1}\,dy$

35. $\int_0^\pi \sec x\,dx$

36. $\int_0^4 \frac{1}{x^2 + x - 6}\,dx$

37. $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$

38. $\int_0^2 \frac{x - 3}{2x - 3}\,dx$

39. $\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$

40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

41–46 □ Bosqueje la región y calcule su área (si ésta es finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^x\}$

42. $S = \{(x, y) \mid x \geq -2,\ 0 \leq y \leq e^{-x/2}\}$

43. $S = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq (\ln x)/x^2\}$

44. $S = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1/\sqrt{x + 1}\}$

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \tan x \sec x\}$

46. $S = \{(x, y) \mid 3 < x \leq 7,\ 0 \leq y \leq 1/\sqrt{x-3}\}$

47. (a) Si $g(x) = (\text{sen}^2 x)/x^2$, utilice calculadora o computadora para hacer una tabla de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1000$ y $10{,}000$. ¿Se ve que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente?

(b) Use el teorema de comparación con $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

(c) Ilustre la parte (b) graficando f y g en la misma pantalla para $1 \leq x \leq 10$. Use la gráfica para explicar intuitivamente por qué $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

48. (a) Si $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, utilice una calculadora o computadora para hacer una tabla de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5, 10, 100, 1000$ y $10{,}000$. ¿Se ve que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es convergente o divergente?

(b) Use el teorema de comparación con $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar la divergencia de $\int_2^\infty g(x)\,dx$.

(c) Ilustre la parte (b) graficando f y g en la misma pantalla para $2 \leq x \leq 20$. Use la gráfica para explicar intuitivamente por qué es divergente $\int_2^\infty g(x)\,dx$.

49–54 Aplique el teorema de comparación para determinar si las integrales son convergentes o divergentes.

49. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1 + x^2}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x + e^{2x}}$

52. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \,\text{sen}\, x}$

54. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

55. La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

es impropia por dos razones $[0, \infty)$ es infinito y el integrando no está acotado cerca de 0. Evalúela expresándola como una suma de integrales impropias del tipo 2 y del tipo 1 como sigue:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

56. Evalúe

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$$

con el mismo método que el ejercicio 55.

57–59 Calcule los valores de p para los cuales la integral converge; evalúe la integral para esos valores.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

58. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

60. (a) Evalúe la integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ y 3.

(b) Conjeture el valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ cuando n es un entero positivo arbitrario.

(c) Demuestre su tanteo empleando la inducción matemática.

61. (a) Demuestre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ es divergente.

(b) Demuestre que

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} x\,dx = 0$$

Esto evidencia que no podemos definir.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

62. La *velocidad promedio* de las moléculas de un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas, y v es la velocidad molecular. Muestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Del ejemplo 1 se sabe que la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$ tiene área infinita. Muestre que al girar $\mathcal{R}$ respecto al eje x obtenemos un sólido con volumen finito.

64. Use la información y los datos en los ejercicios 25 y 26 de la sección 6.4 para hallar el trabajo necesario para impulsar un satélite de 1,000 kg fuera del campo gravitacional de la Tierra.

65. Halle la *velocidad de escape* v_0 que se necesita para lanzar un cohete de masa m fuera del campo gravitacional de un planeta con masa M y radio R. Use la ley de gravitación de Newton (ejercicio 25 de la sección 6.4) y el hecho de que la energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ proporciona el trabajo necesario.

66. Los astrónomos usan una técnica llamada *estereometría* estelar para determinar la densidad de las estrellas en un conglomerado de estrellas a partir de la densidad (en dos dimensiones) observadas que se puede analizar en una fotografía. Suponga que en un conglomerado esférico de radio R la densidad de las estrellas depende sólo de la distancia desde el centro del conglomerado. Si la densidad estelar percibida es $y(s)$, donde s es la distancia plana observada desde el centro del conglomerado, y $x(r)$ es la densidad real, puede mostrarse que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\,x(r)\,dr$$

Si la densidad real de las estrellas en un conglomerado es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, halle la densidad percibida $y(s)$.

67. Un fabricante de focos desea producir focos que duren alrededor de 700 hrs., pero, por supuesto, algunos se funden antes

que otros. Sea $F(t)$ la fracción que define que se funden antes de t horas, de modo que $F(t)$ siempre está entre 0 y 1.
(a) Bosqueje una gráfica propuesta para F.
(b) ¿Qué significa la derivada $r(t) = F'(t)$?
(c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^\infty r(t)\,dt$? ¿Por qué?

68. Como se verá en la sección 9.4 una sustancia radiactiva se desintegra exponencialmente; la masa al tiempo t es $m(t) = m(0)\,e^{kt}$ donde $m(0)$ es la masa inicial y k es una constante negativa. La *vida media* M de un átomo en la sustancia es

$$M = -k \int_0^\infty te^{kt}\,dt$$

Para el isótopo radiactivo del carbono usado en el fechado de radiocarbono el valor de la constante es $k = -0.000121$. Halle la vida media de un átomo ${}^{14}C$.

69. Determine qué tan grande debe ser el número a para que la

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx < 0.001$$

70. Estime el valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ escribiéndolo como la suma de $\int_0^4 e^{-x^2}\,dx$ y $\int_4^\infty e^{-x^2}\,dx$. Aproxime la primera integral con la regla de Simpson $n = 8$ y muestre que la segunda integral es menor que $\int_4^\infty e^{-4x}\,dx$, que es menor que 0.0000001.

71. Si $f(t)$ es continua para $t \geqslant 0$, la *transformada de Laplace* de x es la función F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

y el dominio de F es el conjunto de todos los números s para lo que es convergente la integral. Halle la transformada de Laplace de las funciones

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

72. Muestre que si $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde M y a son constantes, entonces la transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponga que $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ y $0 \leqslant f'(t) \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde f' es continua. Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ y la transformada de Laplace de $f'(t)$ es $G(s)$, muestre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es convergente y a y b son números reales, muestre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

75. Muestre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

76. Muestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\,dy$ interpretando los integrales como áreas.

77. Halle el valor de la constante C para el cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

78. Halle el valor de la constante C para el cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

Problemas especiales

Cubra la solución del ejemplo, trate de resolverlo primero.

Ejemplo

(a) Pruebe que f es una función continua, entonces

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(b) Usando el inciso (a) muestre que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

para todos los números positivos n.

Solución

(a) A primera vista la ecuación dada puede parecer un tanto desconcertante. ¿Cómo podría conectarse el lado derecho con el izquierdo? Las conexiones a menudo se pueden establecer mediante uno de los principios básicos del arte de resolver problemas: *introducir algo extra*. Aquí el ingrediente extra es una nueva variable. Acostumbramos introducir una nueva variable cuando usamos la regla de sustitución con el fin de integrar una función específica. Pero esa técnica también es útil en esta situación en la que se presenta una función general f.

Los principios de la resolución de problemas se pueden ver en la página 78.

Con la idea de la sustitución, la forma del lado derecho sugiere que debería ser $u = a - x$. Entonces $du = -dx$. Cuando $x = 0$, $u = a$; cuando $x = a$, $u = 0$. Así pues

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

Pero esta integral del lado derecho se escribe también como $\int_0^a f(x)\,dx$. De manera que ha quedado demostrada la ecuación que se dio.

(b) Si denominamos I a la integral que se da y se aplica el inciso (a) con $a = \pi/2$, se obtiene

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Las gráficas de computadora en la Fig. 1 dan verosimilitud al hecho de que las tres integrales den el mismo valor. Cada gráfica de cada integrando viene rotulada con el valor correspondiente de m.

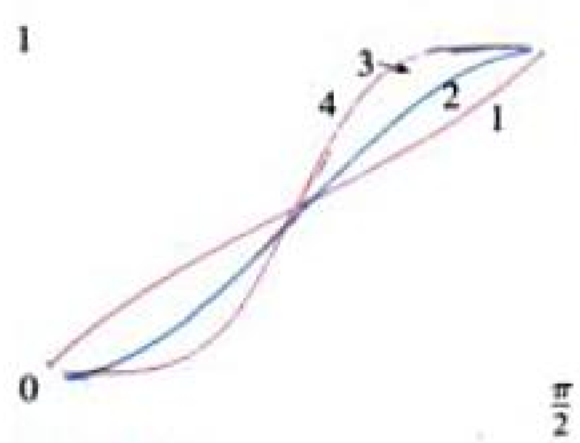


FIGURA 1

Una identidad trigonométrica muy conocida que dice que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ y $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, de modo que

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx$$

Nótese que ambas expresiones para I son muy semejantes. De hecho los integrandos tienen el mismo denominador. Esto sugiere sumar las dos expresiones. Si lo hacemos obtenemos

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Luego, $I = \pi/4$.

8. Suponga que f es una función positiva con derivada continua.
   (a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ sen nx con la de $y = f(x)$? ¿Qué pasa cuando n tiende a infinito?
   (b) Proponga un valor para el límite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

   basándose en gráficas del integrando.
   (c) Usando integración por partes confirme (b). (Use el hecho de que como f' es continua hay una constante M tal que $|f'(x)| \leq M$ para $0 \leq x \leq 1$.)

9. Si $0 < a < b$, halle $\lim_{t \to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1 - x)]^t dx \right\}^{1/t}$.

10. Grafique $f(x) = \operatorname{sen} e^x$ y use la gráfica para estimar el valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\, dx$ sea un máximo. Entonces halle el valor exacto de t que maximice esta integral.

11. Usar integración por partes para mostrar que para toda $x > 0$,

$$0 < \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\ln(1 + x + t)}\, dt < \frac{2}{\ln(1 + x)}$$

12. Los **polinomios de Chebyshev** T_n se definen por $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
   (a) Cuáles son el dominio y la imagen de esas funciones
   (b) Se sabe que $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. Exprese T_2 explícitamente como un polinomio cuadrático y T_3 como un polinomio cúbico.
   (c) Muestre que para $n \geq 1$,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

   (d) Use el inciso (c) para mostrar que T_n es un polinomio de grado n.
   (e) Use los incisos (b) y (c) para expresar T_4, T_5, T_6 y T_7 explícitamente como polinomios.
   (f) ¿Cuáles son los ceros de T_n? ¿En qué números T_n tiene valores máximos y mínimos locales?
   (g) Grafique T_2, T_3, T_4 y T_5 en una pantalla común.
   (h) Grafique T_5, T_6 y T_7, en una misma pantalla.
   (i) Basándose en sus observaciones de los incisos (g) y (h), ¿cómo se relacionan los ceros de T_n con los de T_{n+1}? ¿Qué puede decir de las abscisas de los valores mínimos y máximos?
   (j) Con base en sus gráficas de los incisos (g) y (h), ¿qué puede decir de $\int_{-1}^1 T_n(x)\, dx$ cuando n es impar y cuando n es par?
   (k) Use la sustitución $u = \arccos x$ para evaluar la integral de la parte (j).
   (l) La familia de funciones $f(x) = \cos(c \arccos x)$ están definidas cuando c no es un entero (pero entonces f no es un polinomio). Describa, ¿cómo cambia la gráfica de f al crecer c?

En el capítulo 6 vimos algunas aplicaciones de las integrales: áreas, volúmenes, trabajo y promedios. Aquí exploraremos algunas de las numerosas aplicaciones geométricas de la integración —la longitud de una curva, el área de una superficie— y también cantidades que son de interés en la física, la ingeniería, la biología, la economía y la estadística. Por ejemplo, investigaremos el centro de gravedad de una placa, la fuerza que ejerce la presión del agua sobre un dique, el flujo de sangre que produce el corazón humano y el tiempo promedio de espera para hacer una llamada telefónica.

8.1 Longitud de arco

FIGURA 1

¿Qué se entiende cuando se habla de la longitud de una curva? ¿Podríamos pensar en ajustar un hilo a la curva de la Fig. 1 y luego medir el hilo con una regla. Pero tal cosa sería difícilmente realizable tratándose de una curva complicada. Necesitamos una definición precisa para la longitud de un arco de curva, en los mismos términos en que desarrollamos los conceptos de área y de volumen.

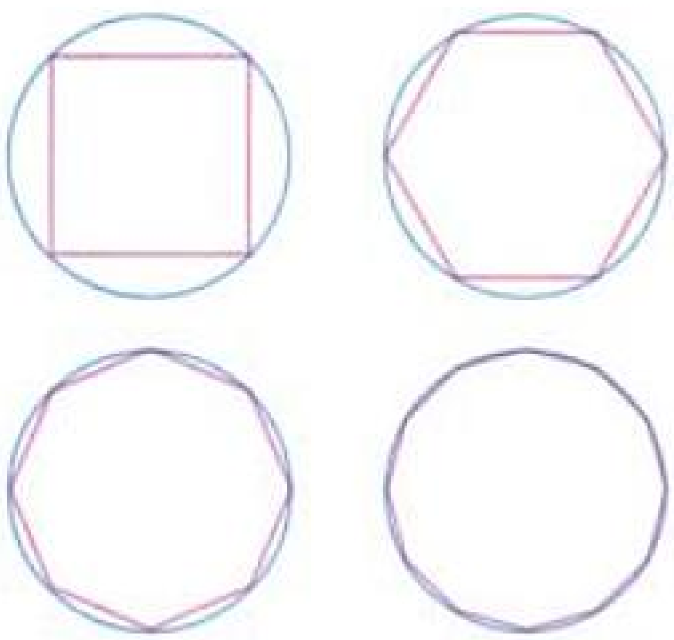


FIGURA 2

Si la curva es un polígono, es fácil determinar su longitud; simplemente sumamos las longitudes de todos los segmentos de recta que forman el polígono. (Para la distancia entre los extremos de cada segmento podemos usar la fórmula conocida para la distancia.) Vamos a definir la longitud de una curva general aproximándola con un polígono y entonces tomando un límite cuando el número de segmentos del polígono aumenta. Este proceso es bien conocido para el caso de la circunferencia, en el que la circunferencia es el límite de las longitudes de los polígonos inscritos (ver la Fig. 2).

Supongamos ahora que una curva C ha sido definida por medio de la ecuación $y = f(x)$, donde f es continua en $a \leq x \leq b$. Obtenemos una aproximación poligonal a C dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con los extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y todos de la misma longitud Δx. Si $y_i = f(x_i)$, entonces, el punto $P_i(x_i, y_i)$ está en la curva C y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, que se ilustran en la figura 3 es una aproximación de C. La longitud L de C es aproximadamente igual a la longitud de este polígono y la aproximación es mejor cuando crece n. (Véase la figura 4 donde el arco de la curva entre P_{i-1} y P_i aparece agrandado y se muestran aproximaciones con valores sucesivos decrecientes de Δx.) Por lo anterior, definiremos la **longitud**, L, de la curva C, cuya ecuación es $y = f(x)$,

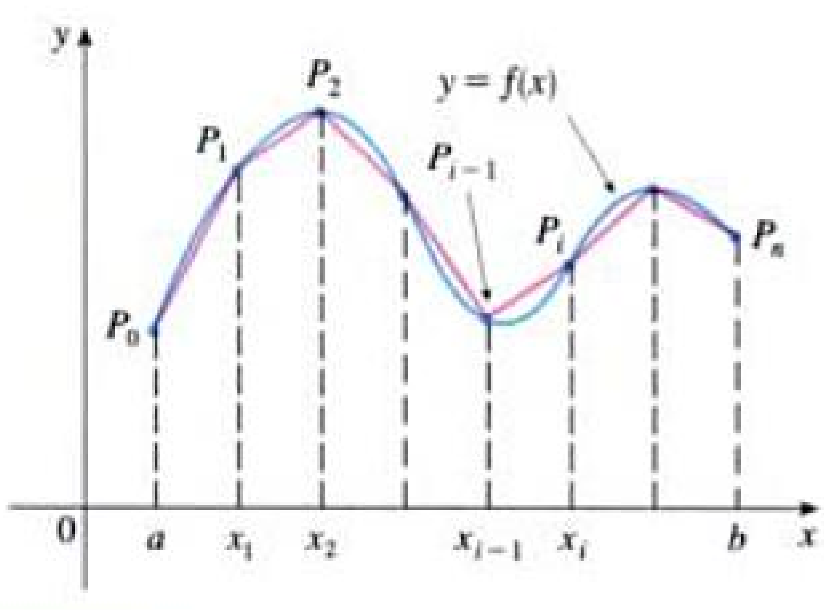


FIGURA 3

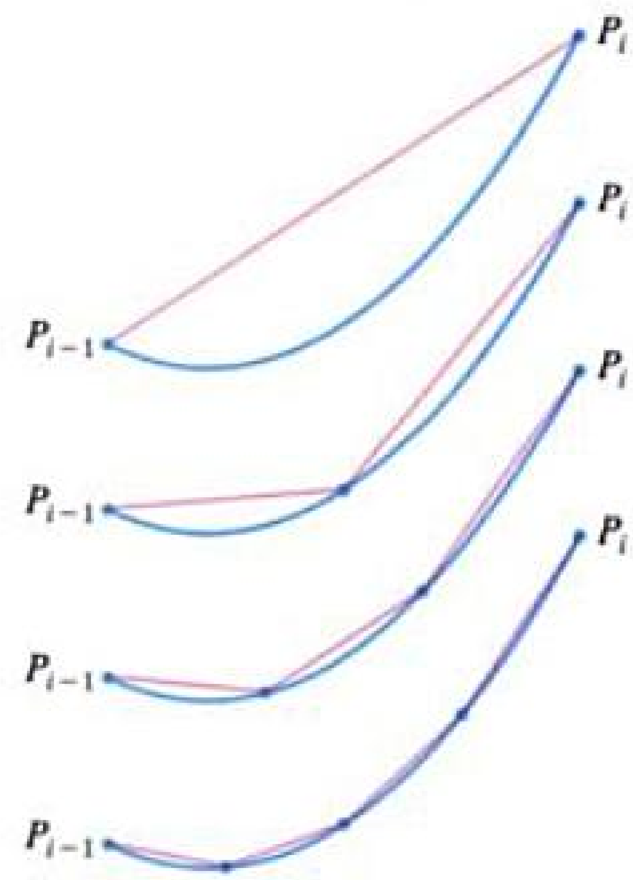


FIGURA 4

$a \leqslant x \leqslant b$, como igual al límite de la suma de las longitudes de esos polígonos inscritos (si existe el límite):

1
$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Observará que el procedimiento para definir la longitud del arco se parece mucho al que empleamos al definir el área y el volumen. Dividimos la curva en un gran número de partes pequeñas. Luego calculamos las longitudes aproximadas de las partes pequeñas para después sumarlas. Por último, sacamos el límite cuando $n \to \infty$.

La definición de longitud de arco, expresada por la ecuación 1, no es muy cómoda para fines de cómputo, pero podemos deducir una fórmula integral a fin de calcular L en el caso en que f tenga una derivada continua. Una función así, se denomina función **lisa** o función **suave**, porque un cambio de x origina una pequeña alteración de $f'(x)$.

Con $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, entonces

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Al aplicar el teorema del valor medio a f, en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, vemos que hay un número, x_i^* entre x_{i-1} y x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

esto es,
$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\,\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\sqrt{(\Delta x)^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \qquad \text{(puesto que } \Delta x > 0) \end{aligned}$$

Entonces, según la definición 1,

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Reconocemos que esta expresión es igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

de acuerdo con la definición de una integral definida. Esta integral existe porque la función $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es continua; por consiguiente, hemos demostrado el teorema siguiente:

2 Fórmula de longitud del arco Si f' es continua en $[a, b]$, la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Con la notación de Leibniz de derivadas podemos escribir la fórmula de la longitud de arco de esta manera:

3
$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

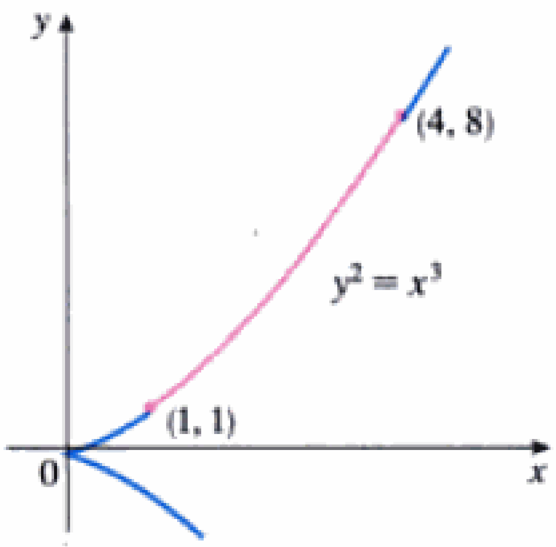


FIGURA 5

□ Como comprobación de la respuesta obtenida en el ejemplo 1, en la figura 5 observamos que debería ser un poco mayor que la distancia de (1, 1) a (4, 8), que es

$$\sqrt{58} \approx 7.615733$$

Según nuestros cálculos en el ejemplo 1,

$$L = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \approx 7.633705$$

Claramente es ésta un poco mayor que la longitud del segmento de recta.

EJEMPLO 1 □ Calcule la longitud del arco de la parábola semicúbica, $y^2 = x^3$ entre los puntos (1, 1) y (4, 8). (Fig. 5.)

SOLUCIÓN Para la mitad superior de la curva,

$$y = x^{3/2} \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

así que, con la fórmula de la longitud del arco,

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\, dx$$

Si sustituimos $u = 1 + 9x/4$, entonces $du = 9\,dx/4$. Cuando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; cuando $x = 4$, $u = 10$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\, du = \tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{2}{3} u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10} \\ &= \tfrac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right] \\ &= \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \end{aligned}$$ □

Si la ecuación de una curva es $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, y $g'(y)$ es continua, al intercambiar los papeles de x y y en la fórmula 2 o en la ecuación 3, obtendremos la fórmula siguiente, para calcular su longitud:

4
$$\boxed{L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy}$$

EJEMPLO 2 □ Calcule la longitud del arco de parábola $y^2 = x$ de (0, 0) a (1, 1).

SOLUCIÓN Como $x = y^2$, entonces $dx/dy = 2y$, y la fórmula 4 da

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$$

Haremos la sustitución trigonométrica $y = \frac{1}{2}\tan\theta$, con la que $dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ y $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sec\theta$. Cuando $y = 0$, $\tan\theta = 0$, de modo que $\theta = 0$; cuando $y = 1$, $\tan\theta = 2$, y así $\theta = \tan^{-1}2 = \alpha$, por ejemplo. Entonces

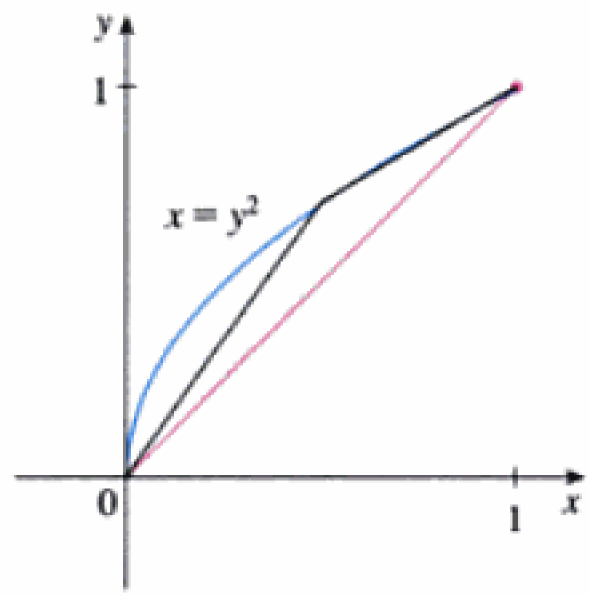
$$\begin{aligned} L &= \int_0^\alpha \sec\theta \cdot \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_0^\alpha \qquad \text{(según el Ejerc. 8, Sec. 7.2)} \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\sec\alpha\tan\alpha + \ln|\sec\alpha + \tan\alpha|\right) \end{aligned}$$

(También pudimos usar la fórmula 21 de la tabla de integrales). En vista de que $\tan\alpha = 2$, entonces $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 5$, y así $\sec\alpha = \sqrt{5}$ y

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\left(\sqrt{5}+2\right)}{4}$$

□ La figura 6 ilustra el arco de la parábola cuya longitud calculamos en el ejemplo 2, junto con aproximaciones poligonales con $n = 1$ y $n = 2$ segmentos de recta, respectivamente. Para $n = 1$ la longitud aproximada es $L_1 = \sqrt{2}$, la diagonal de un cuadrado. La tabla adjunta muestra las aproximaciones, L_n que se obtienen al dividir a $[0, 1]$ en n subintervalos iguales. Observe que cada vez que se duplica la cantidad de lados del polígono nos acercamos a la longitud exacta, que es

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\left(\sqrt{5}+2\right)}{4} \approx 1.478943$$



n	L_n
1	1.414
2	1.445
4	1.464
8	1.472
16	1.476
32	1.478
64	1.479

FIGURA 6

Debido a la presencia del signo de raíz cuadrada en las fórmulas 2 y 4, a menudo el cálculo de la longitud de arco desemboca en una integral muy difícil (o hasta imposible) de evaluar de manera explícita; por consiguiente, a veces nos debemos contentar con estimar una aproximación a la longitud de una curva, como veremos en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 3 □
(a) Escriba una integral para calcular la longitud del arco de la hipérbola $xy = 1$, del punto $(1, 1)$ al punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Aplique la regla de Simpson, con $n = 10$, a fin de estimar la longitud del arco.

SOLUCIÓN
(a) Tenemos que

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

y entonces la longitud del arco es

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\, dx$$

(b) Con la regla de Simpson (Sec. 7.7) y $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0.1$, y $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$, tenemos que

□ Al obtener el valor de la integral definida con ayuda de un sistema algebraico computacional, vemos que la aproximación con la regla de Simpson es de una exactitud de cuatro decimales.

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)\right]$$

$$\approx 1.1321$$

Función longitud de arco

Va a resultar de utilidad contar con una función que mide la longitud de arco desde un punto inicial particular hasta otro cualquiera de la curva, de modo que si una curva suave C tiene ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, sea $s(x)$ la distancia a lo largo de C desde el punto inicial $P_0(a, f(a))$ hasta $Q(x, f(x))$. Entonces es una función llamada **función longitud de arco** y por la fórmula 2,

$$\boxed{5} \qquad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

(Hemos reemplazado la variable de integración por t para que x no tenga dos significados.) Podemos emplear la primera parte del teorema fundamental del cálculo a fin de derivar la ecuación 5 porque el integrando es continuo:

$$\boxed{6} \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

La ecuación 6 indica que la tasa de cambio de s con respecto a x siempre es, cuando menos, 1, y que es igual a 1 cuando $f'(x)$, la pendiente de la curva, es 0. La diferencial de la longitud del arco es

$$\boxed{7} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

y en ocasiones esta ecuación, se escribe en forma simétrica:

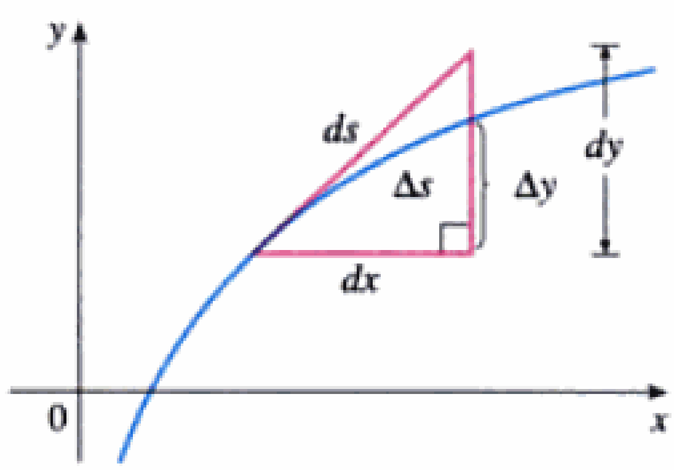


FIGURA 7

$$\boxed{8} \qquad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

La interpretación geométrica de la ecuación 8 se presenta en la figura 7. Se puede usar como artificio mnemotécnico para recordar las fórmulas 3 y 4, a la vez. Si escribimos $L = \int ds$, entonces, a partir de la ecuación 8 podemos llegar a la ecuación 3 o bien a

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

que nos conduce a la ecuación 4.

EJEMPLO 4 Determine la función integral de arco para la curva $y = x^2 - (\ln x)/8$ tomando $P_0(1, 1)$ como punto inicial.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^2 - (\ln x)/8$, entonces

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

19–22 □ Deduzca, pero no evalúe, una integral para calcular la longitud de cada una de las curvas siguientes:

19. $y = x^3, \quad 0 \le x \le 1$ **20.** $y = 2^x, \quad 0 \le x \le 3$

21. $y = e^x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/2$ **22.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

23–26 □ Aplique la regla de Simpson, con $n = 10$, a fin de estimar la longitud de cada una de estas curvas:

23. $y = x^3, \quad 0 \le x \le 1$ **24.** $y = 1/x, \quad 1 \le x \le 2$

25. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi$ **26.** $y = \tan x, \quad 0 \le x \le \pi/4$

27. (a) Grafique la curva $y = x\sqrt[3]{4 - x}$, $0 \le x \le 4$.
(b) Compare las longitudes de los polígonos inscritos con $n = 1, 2$ y 4 lados. (Divida el intervalo en subintervalos iguales.) Ilustre sus métodos trazando los polígonos, como en la figura 6.
(c) Deduzca una integral a fin de calcular la longitud de la curva.
(d) Si su dispositivo (sea calculadora o SAC) evalúa integrales definidas, úselo a fin de calcular la longitud de la curva con cuatro decimales exactos. Si no, aplique la regla de Simpson con las aproximaciones de la parte (b).

28. Repita el ejercicio 27 para la curva

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

SAC **29.** Use un SAC o una tabla de integrales para encontrar la longitud exacta del arco de la curva $x = \ln(1 - y^2)$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(\ln \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$.

SAC **30.** Use un SAC (o bien una tabla de integrales para hallar la longitud exacta del arco de la curva $y = x^{4/3}$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Si su SAC no puede evaluar la integral haga una sustitución *ad hoc*.

31. Trace la curva cuya ecuación es $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y calcule su longitud empleando su simetría.

32. (a) Trace la curva $y^3 = x^2$.
(b) Use las fórmulas 3 y 4 para deducir dos integrales que le permitan calcular la longitud de arco de $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$. Observe que una de ellas es integral impropia, y evalúe ambas.
(c) Cacule la longitud del arco de esta curva, desde $(-1, 1)$ hasta $(8, 4)$.

33. Halle la función longitud de arco para la curva $y = 2x^{3/2}$ con punto inicial $P_0(1, 2)$.

34. (a) Grafique la curva $y = \frac{1}{3}x^3 + 1/(4x)$, $x > 0$.
(b) Halle la función longitud de arco con punto inicial $P_0(1, \frac{7}{12})$.
(c) Grafique la curva.

35. Un halcón vuela a 15 m\s a una altitud de 180 m y accidentalmente suelta a su presa. La trayectoria parabólica de la presa en caída libre está descrita por la ecuación

$$y = 180 - \frac{x^2}{45}$$

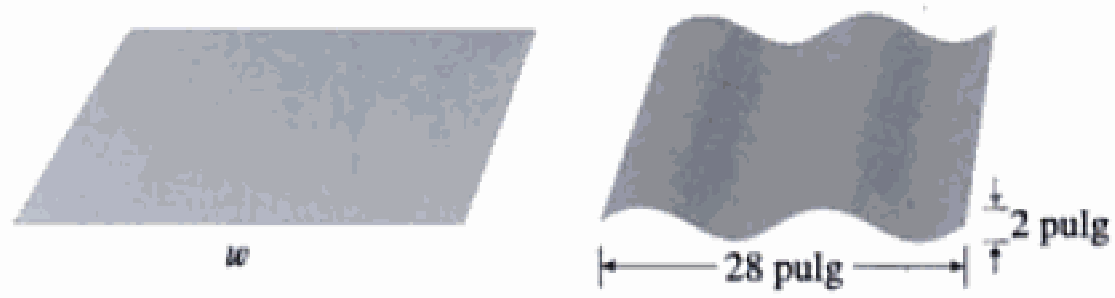
hasta tocar tierra, donde y es la altura sobre el suelo y x es la distancia horizontal, en metros. Calcule la distancia que recorre la presa entre el instante que la suelta y al tocar tierra. La respuesta deberá ser correcta hasta el número de decímetros.

36. Una cometa vuela al oeste. La altura de la cometa por arriba del suelo desde la posición horizontal $x = 0$ hasta $x = 80$ pies está dada por

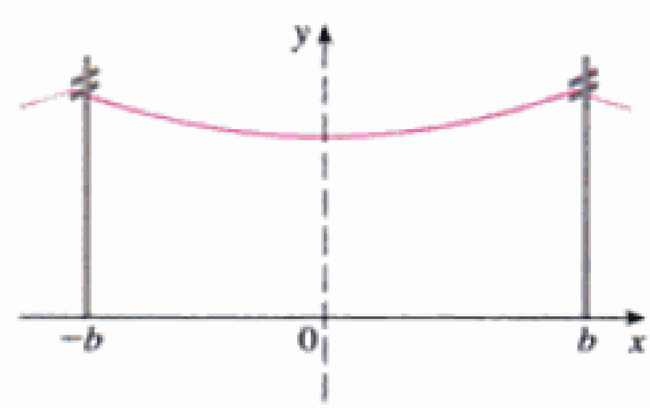
$$y = 150 - \tfrac{1}{40}(x - 50)^2$$

Calcule la distancia recorrida.

37. Un fabricante de techos de lámina metálica acanalada desea producir piezas de 28 pulgadas de ancho y 2 de altura de onda, a partir de láminas planas, como se ve en la figura de abajo. El perfil del techo tiene la forma de una senoide. Compruebe que la ecuación de la senoide es $y = \operatorname{sen}(\pi x/7)$ y calcula el ancho, ω, de una lámina metálica plana, necesario para producir las piezas de 28 pulgadas. Use su calculadora o programa algebraico si evalúa integrales definidas; en caso contrario, aplique la regla de Simpson.



38. (a) La figura muestra una línea telefónica que cuelga entre dos postes, en $x = -b$ y $x = b$. Toma la forma de una catenaria, cuya ecuación es $y = c + a \cosh(x/a)$. Calcule la longitud del cable.
(b) Dos postes telefónicos están a 50 pies de distancia y la longitud del cable entre ambos es 51 pies, si el punto más bajo del cable debe estar a 20 pies de altura respecto al suelo, ¿qué tan alto deberá sujetarse el cable?



39. Calcule la longitud de la curva $y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt$, $1 \le x \le 4$.

40. Las curvas cuyas ecuaciones son $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$, se llaman **círculos gordos.** Grafique las curvas con $n = 2, 4, 6, 8$, y 10 para ver por qué. Deduzca una integral que exprese la longitud L_{2k}, del círculo con $n = 2k$. Sin tratar de evaluar exprese esta integral y establezca el valor de

$$\lim_{k \to \infty} L_{2k}$$

Con la notación de Leibniz para las derivadas, esta fórmula se transforma en

5 $$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

Si la curva se describe con la ecuación $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, la fórmula se convierte entonces en

6 $$\boxed{S = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy}$$

y las dos fórmulas, la 5 y la 6, se pueden resumir, de manera simbólica, con la notación de longitud de arco que establecimos en la sección 8.1, así:

7 $$\boxed{S = \int 2\pi y\, ds}$$

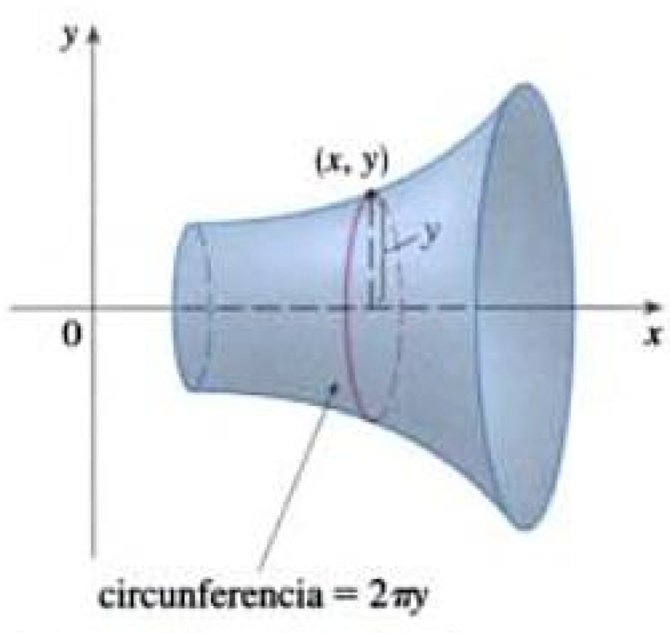
Cuando la rotación es en torno del eje y, el área superficial es

8 $$\boxed{S = \int 2\pi x\, ds}$$

en donde, como antes, podemos utilizar

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{o} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Estas fórmulas se pueden recordar imaginando que $2\pi y$ o $2\pi x$ son la circunferencia de un círculo descrito por el punto (x, y) en la curva, al girarla en torno del eje x o del eje y, respectivamente (Fig. 5).



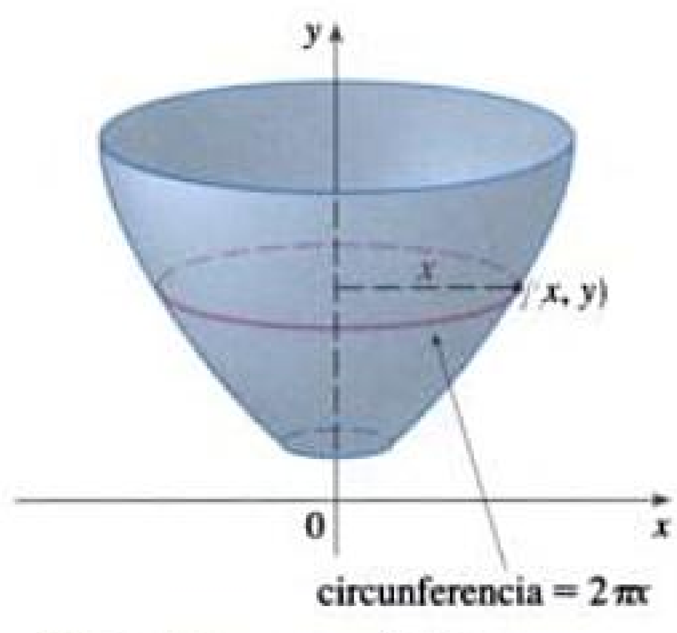


FIGURA 5

(a) Rotación en torno del eje x: $S = \int 2\pi y ds$

(b) Rotación en torno del eje y: $S = \int 2\pi x\, ds$

□ La figura 6 muestra la parte de esfera que se calcula en el Ejemplo 1.

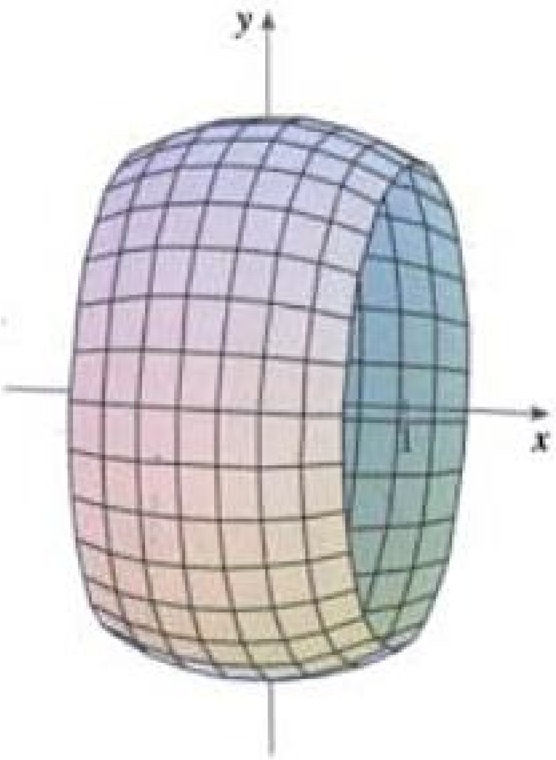


FIGURA 6

□ La figura 7 muestra la superficie de revolución cuya área se calcula en el ejemplo 2.

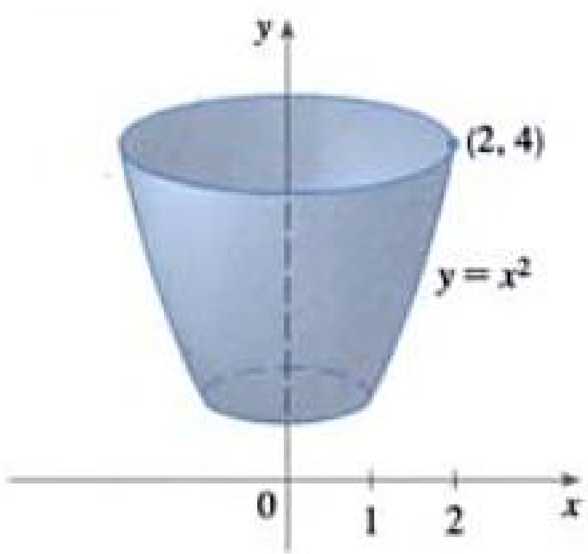


FIGURA 7

□ Para verificar nuestra respuesta al ejemplo 2, observe que el área superficial no debería ser muy diferente de la de un cilindro circular con la misma altura y con el radio a medio camino entre el superior y el inferior: $2\pi(1.5)(3) \approx 28.27$. Se calculó que el área fue

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \approx 30.85$$

cosa que parece razonable. En forma alternativa el área superficial debería ser un poco mayor que el área de un cono truncado con la misma base y tapa. Según la ecuación 2, esto es $2\pi(1.5)(\sqrt{10}) \approx 29.80$.

EJEMPLO 1 □ La curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, es un arco del círculo $x^2 + y^2 = 4$. Calcule el área de la superficie generada al rotar ese arco alrededor del eje x. (La superficie es una parte de la esfera de radio 2 (Fig. 6).

SOLUCIÓN Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

y así, según la fórmula 5, el área superficial es

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx \\ &= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi(2) = 8\pi \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2 □ El arco de la parábola $y = x^2$ se hace girar en torno del eje y de (1, 1) a (2, 4). Calcule el área de la superficie resultante.

SOLUCIÓN 1 Al emplear

$$y = x^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

se tiene, según la fórmula 8

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi x\, ds = \int_{1}^{2} 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{1}^{2} x \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \end{aligned}$$

Al sustituir $u = 1 + 4x^2$, obtenemos $du = 8x\, dx$. No olvidemos cambiar los límites de integración, entonces

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4} \int_{5}^{17} \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4} \left[\tfrac{2}{3} u^{3/2}\right]_{5}^{17} \\ &= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Partimos de

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

tenemos

$$S = \int 2\pi x\, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u}\, du \qquad \text{(en donde } u = 1 + 4y\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

□

EJEMPLO 3 □ Calcule el área de la superficie de revolución generada al girar la curva $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, en derredor del eje x.

□ Otro método: aplique la fórmula 6. con $x = \ln y$.

SOLUCIÓN Utilizamos la fórmula 5 y hacemos

$$y = e^x \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

entonces,

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du \qquad \text{(en donde } u = e^x\text{)}$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta\, d\theta \qquad \text{(en donde } u = \tan\theta \text{ y } \alpha = \tan^{-1}e\text{)}$$

□ O bien empleamos la fórmula 21 de la tabla de integrales.

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad \text{(según el ejemplo 8, sección 7.2)}$$

$$= \pi\left[\sec\alpha\tan\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$$

Como $\tan\alpha = e$, entonces $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + e^2$ y

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

□

8.2 Ejercicios

1–4 □ Escriba, pero no evalúe, una integral para el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva alrededor del eje dado.

1. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$; eje x
2. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; eje x
3. $y = \sec x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; eje y
4. $y = e^x$, $1 \leqslant y \leqslant 2$; eje y

5–14 □ Calcule el área de la superficie de revolución obtenida al hacer girar cada una de las curvas siguientes en torno del eje x.

5. $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$
6. $y^2 = 4x + 4$, $0 \leqslant x \leqslant 8$
7. $y = \sqrt{x}$, $4 \leqslant x \leqslant 9$
8. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, $1 \leqslant x \leqslant 4$

9. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

10. $y = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6$

11. $y = \cosh x, \quad 0 \leq x \leq 1$

12. $2y = 3x^{2/3}, \quad 1 \leq x \leq 8$

13. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}, \quad 1 \leq y \leq 2$

14. $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \leq y \leq 2$

15–20 □ Cada una de estas curvas se gira en torno del eje y. Calcule el área de la superficie de revolución resultante.

15. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leq y \leq 2$

16. $y = 1 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$

17. $x = e^{2y}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$

18. $x = \sqrt{2y - y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1$

19. $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y^2 - \ln y), \quad 1 \leq y \leq 2$

20. $x = a\cosh(y/a), \quad -a \leq y \leq a$

21–22 □ Emplee la regla de Simpson, con $n = 10$ para calcular el área de la superficie de revolución generada al girar la curva dada en torno del eje x.

21. $y = x^4, \quad 0 \leq x \leq 1$

22. $y = \tan x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4$

SAC **23–24** □ Use un SAC o una tabla de integrales para hallar el área exacta de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva dada alrededor del eje x.

23. $y = 1/x, \quad 1 \leq x \leq 2$

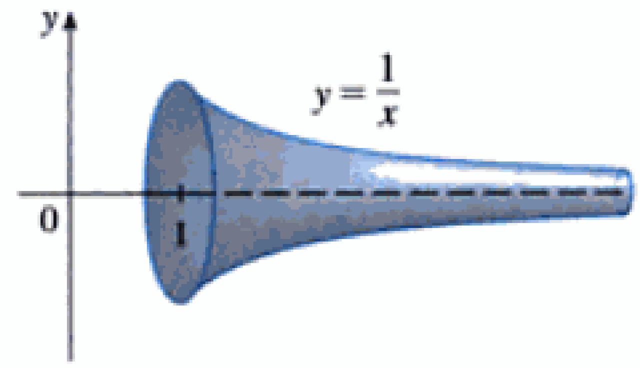
24. $y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad 0 \leq x \leq 3$

SAC **25–26** □ Use un SAC para encontrar el área exacta de la superficie de revolución obtenida girando la curva alrededor del eje y. Si el SAC no puede evaluar la integral, exprese el área superficial como integral en la otra variable.

25. $y = x^3, \quad 0 \leq y \leq 1$

26. $y = \ln(x + 1), \quad 0 \leq x \leq 1$

27. Si la región $\mathscr{R} = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$ se gira en derredor del eje x, el volumen del cuerpo generado es finito (Ejer. 63, Sec. 7.8). Demuestre que el área superficial generada es infinita (la figura muestra la superficie, que se llama **trompeta de Gabriel**)



28. Si la curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, se hace girar en torno del eje x, calcule el área de la superficie que resulta.

29. Calcule el área de la superficie de revolución generada al girar un ciclo (o rizo) de la curva $8y^2 = x^2(1 - x^2)$ alrededor del eje x.

30. Un grupo de ingenieros está construyendo una antena parabólica para un satélite, con la forma de la superficie obtenida al rotar la curva $y = ax^2$ alrededor del eje y. Si la antena debe tener diámetro de 10 pies y profundidad máxima de 2 pies, halle el valor de a y el área superficial de la antena.

31. La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

se hace girar en torno del eje x para formar una superficie llamada elipsoide. Calcule el área superficial del elipsoide.

32. Calcule el área de la superficie del toroide del ejercicio 59, sección 6.2.

33. Si la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, se hace girar en toda la recta horizontal $y = c$, donde $f(x) \leq c$, deduzca una fórmula para calcular el área de la superficie resultante.

SAC **34.** Utilice el resultado del ejercicio 33 para establecer una integral para encontrar el área de la superficie de revolución generada al girar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor de la recta $y = 4$. Entonces evalúe la integral con un SAC.

35. Calcule el área de la superficie de revolución generada al girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de la recta $y = r$.

36. Demuestre que el área superficial de la zona de una esfera comprendida entre dos planos paralelos es $S = \pi dh$, donde d es el diámetro de la esfera y h la distancia entre los planos. (Observe que S sólo depende la distancia entre los planos y no de su ubicación, siempre y cuando ambos planos intersequen la esfera.)

37. La fórmula (4) sólo es válida cuando $f(x) \geq 0$. Demuestre que cuando $f(x)$ no es necesariamente positiva, la fórmula del área superficial se transforma en

$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

38. Sea L la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, y f es positiva y tiene derivada continua. Sea S_f el área de la superficie generada al girar la curva en torno del eje x. Si c es una constante positiva, define $g(x) = f(x) + c$ y sea S_g el área superficial correspondiente generada por la curva $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$. Exprese S_g en términos de S_f y L.

8.3 Aplicaciones a la física y a la ingeniería

De entre las numerosas aplicaciones del cálculo a la física y a la ingeniería consideramos ahora dos: la fuerza debida a la presión del agua y los centros de masa. Tal como en nuestras aplicaciones anteriores a la geometría (áreas, volúmenes y longitudes) y al trabajo, nuestra estrategia es la de dividir la cantidad física en un gran número de partes más pequeñas, aproximar cada parte, sumar los resultados, tomar el límite y evaluar la integral que resulte.

Presión y fuerza hidrostática

Los buzos saben que la presión del agua se incrementa conforme nadan a mayor profundidad. Esto es a causa del aumento en el peso del agua que está arriba de ellos.

FIGURA 1

En general, supongamos que una placa delgada, horizontal, con un área de A metros cuadrados, se sumerge en un fluido cuya densidad es de ρ kilogramos por metro cúbico, a una profundidad de d metros bajo la superficie, como en la figura 1. El fluido que se encuentra directamente arriba de la placa tiene el volumen $V = Ad$, de modo que su masa es $m = \rho V = \rho Ad$. La fuerza que ejerce el fluido sobre la placa es

$$F = mg = \rho gAd$$

en donde g es la aceleración debida a la gravedad. La presión, P sobre la placa, se define como la fuerza por unidad de área:

$$P = \frac{F}{A} = \rho gd$$

□ En unidades inglesas se escribe $P = \rho gd = \delta d$, donde $\delta = \rho g$ la densidad de peso (en contraposición a ρ, que es la densidad de masa); por ejemplo, como la densidad del agua es $\delta = 62.5$ lb/pie^3.

La unidad SI para expresar la presión es newtons por metro cuadrado, que también se llama pascal (con sus abreviaturas, 1 N/m^2 = 1 Pa). Como la unidad es pequeña, se usa mucho el kilopascal (kPa); por ejemplo, como la densidad del agua es $\rho = 1000$ kg/m^3, la presión en el fondo de una alberca de 2 m de profundidad es

$$\begin{aligned} P = \rho gd &= 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} \\ &= 19{,}600 \text{ Pa} = 19.6 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Uno de los principios más importantes acerca de la presión de los fluidos es el hecho, comprobado experimentalmente, de *que en cualquier punto en el seno de un líquido, la presión es igual en todas direcciones* (un buzo siente la misma presión en sus oídos que en su nariz); por consiguiente, la presión en cualquier dirección, a la profundidad d, en un fluido cuya densidad de masa es ρ se expresa como

$$\boxed{1} \qquad P = \rho gd = \delta d$$

Podemos ayudarnos con esta ecuación para calcular la fuerza hidrostática ejercida en una placa *vertical*, pared, o cortina de presa, por un fluido. No es un problema directo, ya que la presión no es constante, sino que se incrementa al aumentar la profundidad.

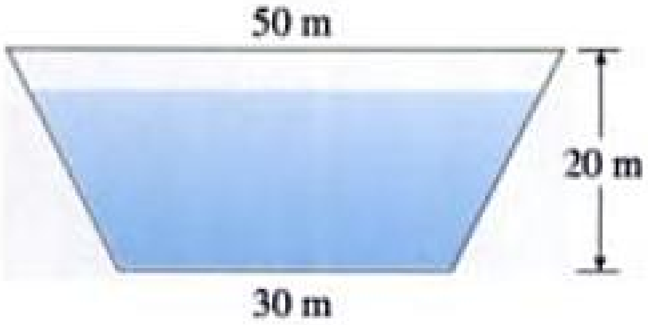


FIGURA 2

EJEMPLO 1 □ Una presa tiene la forma de un trapecio (Fig. 2). La altura es 20 m y el ancho es 50 m en el coronamiento y 30 m en el fondo. Calcule la fuerza ejercida por la presión hidrostática sobre la cortina, si el nivel del agua llega a 4 m del coronamiento.

SOLUCIÓN Elegimos un eje x vertical con el origen en la superficie del agua (Fig. 3a). La profundidad del agua es 16 m, de modo que dividiremos el intervalo [0, 16], en

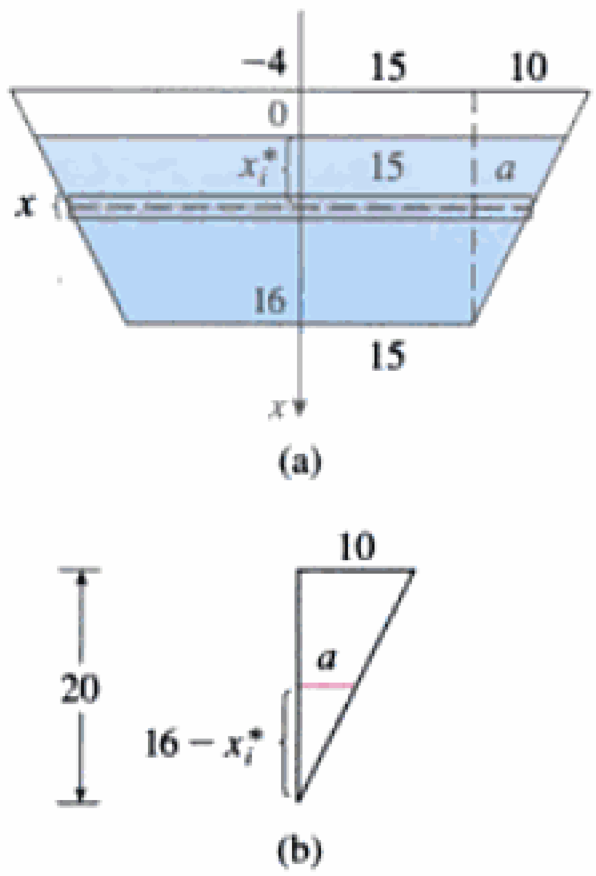


FIGURA 3

subintervalos iguales mediante los puntos extremos x_i, y elegimos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La i-ésima banda horizontal de la cortina queda aproximada mediante un rectángulo de Δx de alto y w_i, de ancho, en que, por los triángulos semejantes de la figura 3(b),

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad \text{luego} \qquad a = \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2}$$

y así

$$w_i = 2(15 + a) = 2\left(15 + 8 - \tfrac{1}{2}x_i^*\right) = 46 - x_i^*$$

Si A_i es el área de la i-ésima banda

$$A_i \approx w_i\,\Delta x = (46 - x_i^*)\,\Delta x$$

Si Δx es pequeño, la presión, P_i en la i-ésima banda es el producto de la presión por el área

$$P_i \approx 1000gx_i^*$$

La fuerza hidrostática, F_i que actúa sobre la i-ésima banda es el producto de la presión por el área:

$$F_i = P_iA_i \approx 1000gx_i^*(46 - x_i^*)\,\Delta x$$

Al sumar esas fuerzas y tomar el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos la fuerza hidrostática total sobre la cortina:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1000gx_i^*(46 - x_i^*)\,\Delta x \\ &= \int_0^{16} 1000gx(46 - x)\,dx \\ &= 1000(9.8)\int_0^{16} (46x - x^2)\,dx \\ &= 9800\left[23x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{16} \\ &\approx 4.43 \times 10^7\ \text{N} \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2 Calcule la fuerza hidrostática sobre la tapa de un tambor cilíndrico de 3 pies de radio, si el tambor está sumergido bajo 10 pies de agua.

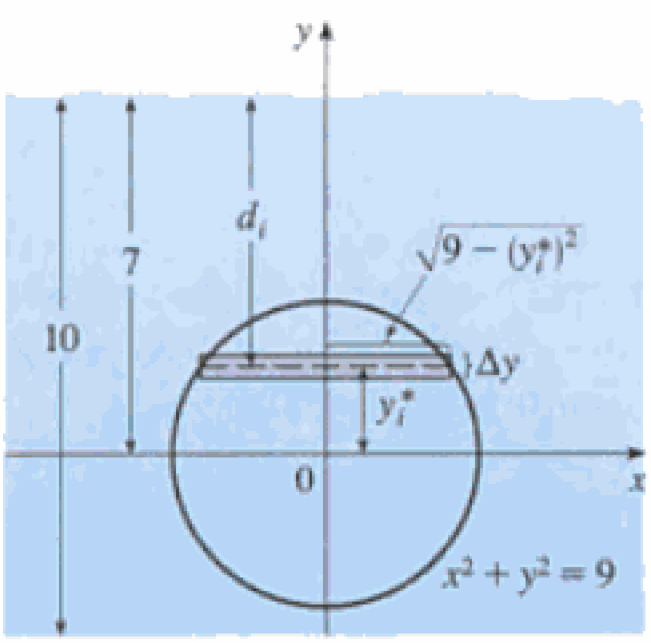


FIGURA 4

SOLUCIÓN Aquí conviene situar los ejes como en la figura 4 para que el origen quede en el centro del tambor. Entonces se simplifica la ecuación del círculo, $x^2 + y^2 = 9$. Al igual que en el ejemplo 1, dividiremos la región circular en bandas horizontales. Según la ecuación del círculo, la longitud de la i-ésima banda es $2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}$ y su área es

$$A_i = 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

La presión aproximada sobre esta banda es

$$\delta d_i = 62.5(7 - y_i^*)$$

de modo que la fuerza sobre la banda es, aproximadamente,

$$\delta d_iA_i = 62.5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

La fuerza total se obtiene sumando las fuerzas en todas las bandas y tomando el límite:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62.5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

$$= 125 \int_{-3}^{3} (7 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

$$= 125 \cdot 7 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy - 125 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

La segunda integral es cero porque el integrando es una función impar (teorema 6, sec. 5.5). La primera integral puede evaluarse usando la sustitución trigonométrica $y = 3$ sen θ pero es más simple observar que es el área de un disco semicircular de radio 3. Así

$$F = 875 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy = 875 \cdot \tfrac{1}{2}\pi(3)^2$$

$$= \frac{7875\pi}{2} \approx 12{,}370 \text{ lb}$$

□

Momentos y centros de masa

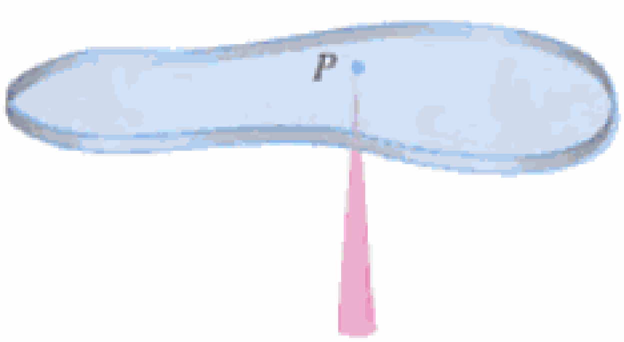


FIGURA 5

El objetivo principal de esta sección es determinar el punto P en el cual se equilibra, horizontalmente, una placa delgada de cualquier forma dada, como en la figura 5. Este punto se llama **centro de masa** (o centro de gravedad) de la placa.

Primero describiremos el caso más sencillo (Fig. 6), en que dos masas, m_1 y m_2 están fijas en los extremos opuestos de una varilla de masa mínima o nula, apoyada en un pivote o apoyo, a las distancias respectivas d_1 y d_2 del fulcro. La varilla quedará en equilibrio si

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \tag{2}$$

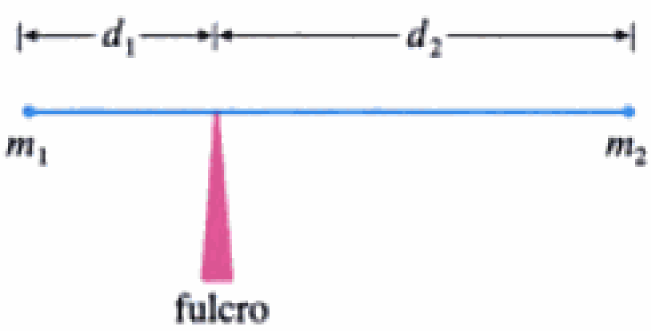


FIGURA 6

Esto es un hecho experimental, descubierto por Arquímedes, llamado Ley de la palanca. (Imagine una persona flaca equilibrándose con un gordo en un sube y baja; el flaco se debe sentar más lejos del apoyo central.)

Ahora suponga que la varilla está en el eje x, m_1 en x_1 y m_2 en x_2 y el centro de masa en $\bar{x}$. Si comparamos las figuras 6 y 7, vemos que $d_1 = \bar{x} - x_1$ y $d_2 = x_2 - \bar{x}$ y entonces, de acuerdo con al ecuación 2

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

Los números m_1x_1 y m_2x_2 se denominan **momentos** de las masas m_1 y m_2 con respecto al origen. La ecuación 3 indica que el centro de masa, $\bar{x}$, se determina sumando los momentos de las masas y dividiendo la suma entre la masa total $m = m_1 + m_2$.

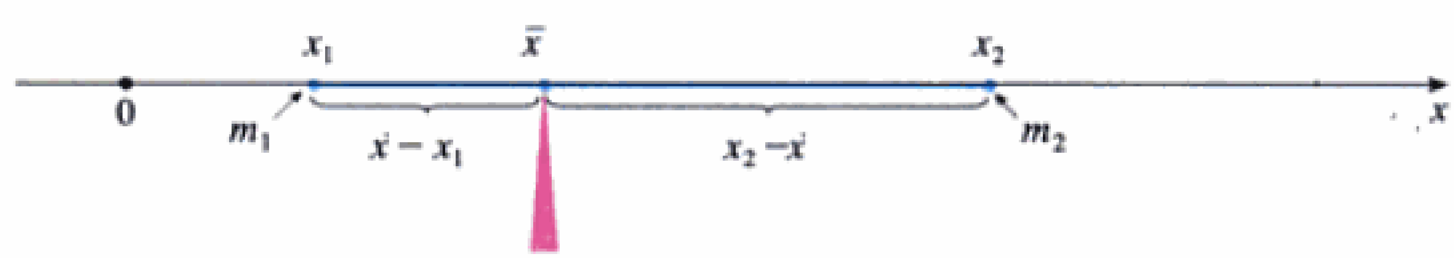


FIGURA 7

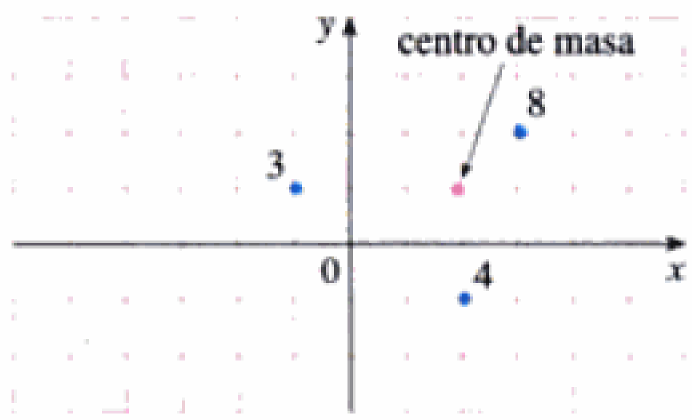


FIGURA 9

En vista de que $m = 3 + 4 + 8 = 15$, emplearemos las ecuaciones (7) a fin de obtener

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Así, el centro de masa está en $\left(1\frac{14}{15}, 1\right)$. (Fig. 9.) ◻

Ahora examinaremos el caso de una placa (*lámina* en latín) con densidad uniforme, ρ que ocupa una región $\mathcal{R}$ en el plano. Deseamos localizar el centro de masa de la placa, llamado **centroide** de $\mathcal{R}$. Para esto, aplicaremos los siguientes principios de la física: el **principio de simetría** establece que si $\mathcal{R}$ es simétrica respecto de una línea, l, su centroide está en l. (Si $\mathcal{R}$ se refleja respecto a l, entonces $\mathcal{R}$ queda inalterada de modo que su centroide permanece fijo. Pero los únicos puntos fijos bajo la reflexión están en l.) Por tanto el centroide de un rectángulo está en su centro. Los momentos se deben definir de tal modo que si toda la masa de una región se concentra en el centro de masa, sus momentos permanezcan inalterados. También, el momento de la unión de dos regiones que no se traslapan ha de ser igual a la suma de los momentos de las regiones individuales.

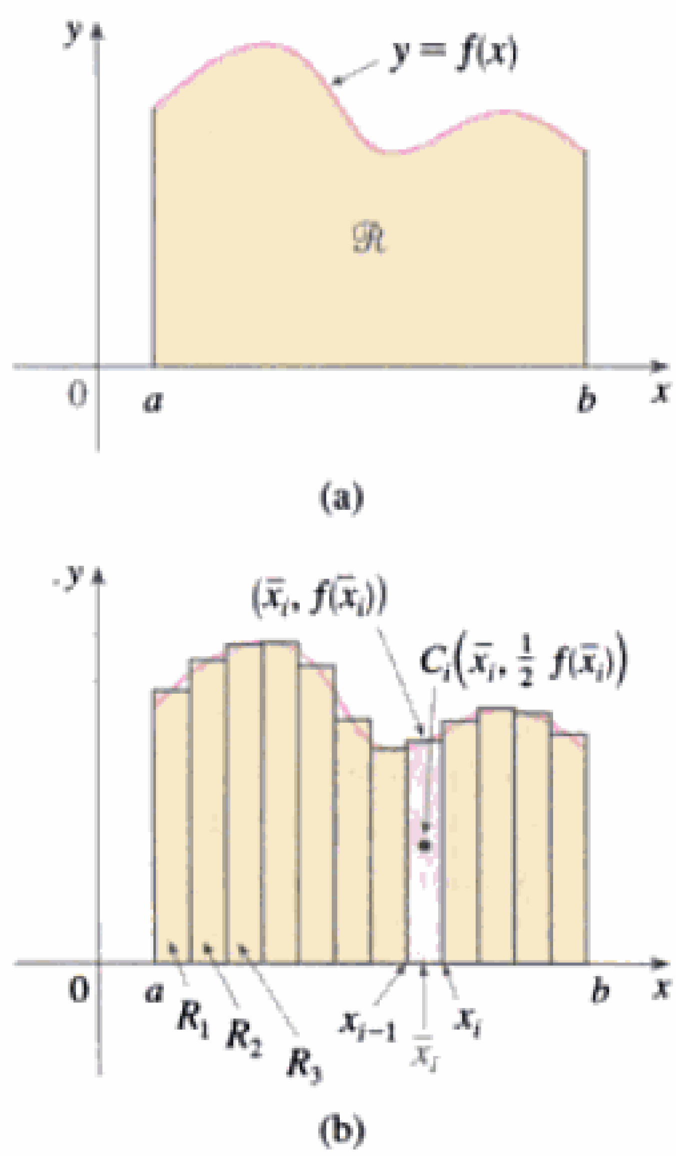


FIGURA 10

Suponga que la región $\mathcal{R}$ es del tipo que vemos en la figura 10(a); esto es, $\mathcal{R}$ queda entre las líneas $x = a$ y $x = b$, arriba de del eje x y abajo de la gráfica de f, donde f es una función continua. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y misma longitud Δx. Elegimos el punto muestra como punto medio x_i^* del subintervalo i-ésimo, es decir, $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Así queda determinada la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$ que se aprecia en la figura 10(b). El centroide del i-ésimo rectángulo de aproximación, R_i es su centro, $C_i\left(\bar{x}_i, \frac{1}{2}f(\bar{x}_i)\right)$. Su área es $f(\bar{x}_i)\,\Delta x$, por lo tanto, su masa es

$$\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Primero supondremos que la región R_i respecto del eje y es el producto de su masa por la distancia de C_i al eje y, que es $\bar{x}_i$. Por consiguiente,

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\bar{x}_i = \rho\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Al sumar estos momentos obtenemos el momento de la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$, y, a continuación, sacando el límite cuando $n \to \infty$ el momento de la $\mathcal{R}$ misma respecto al eje y:

$$\boxed{M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \rho\int_a^b x f(x)\,dx}$$

En forma similar, calculamos el momento de R_i respecto del eje x, como el producto de su masa por la distancia de C_i al eje x:

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\tfrac{1}{2}f(\bar{x}_i) = \rho\cdot\tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

De nuevo sumamos esos momentos y sacamos el límite, para obtener el momento de $\mathcal{R}$ con respecto al eje x:

$$\boxed{M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho\cdot\tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x = \rho\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}$$

De igual modo que para sistemas de partículas, el centro de masa de la placa se define de tal forma que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. pero la masa de la placa es igual al producto de su densidad por su área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\,dx$$

y así

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b xf(x)\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Notará que las ρ, se cancelan. El lugar del centro de masa es independiente de la densidad.

En resumen, el centro de masa de la placa (o el centroide de $\mathcal{R}$) está en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

8

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}$$

EJEMPLO 4 ☐ Sitúe el centro de masa de una placa semicircular de radio r.

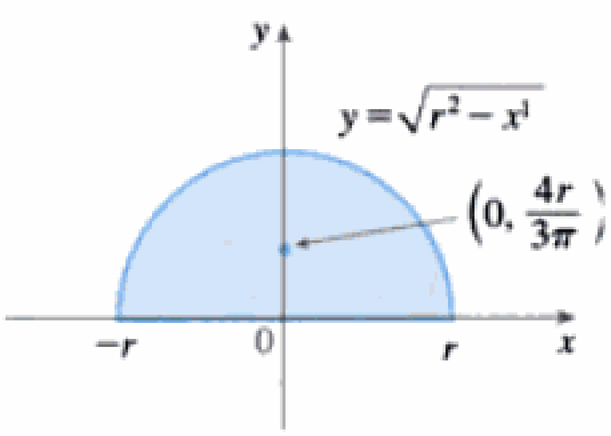


FIGURA 11

SOLUCIÓN Para emplear las ecuaciones 8, colocamos el semicírculo como en la figura 11, de tal manera que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $a = -r$, $b = r$. En este caso no hay necesidad de aplicar la fórmula para el cálculo de $\bar{x}$ porque, debido al principio de simetría, el centro de masa debe estar en el eje y, así que $\bar{x} = 0$. El área del semicírculo es $A = \pi r^2/2$, y entonces

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx \\
&= \frac{1}{\pi r^2/2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}
\end{aligned}$$

El centro de masa se ubica en el punto $(0, 4r/(3\pi))$. ☐

EJEMPLO 5 ☐ Localice el centroide de la región limitada por las curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN El área de la región es

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

y las ecuaciones 8 dan como resultado

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} xf(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx\\ &= x\,\mathrm{sen}\,x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\,x\,dx \qquad \text{(por integración por partes)}\\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

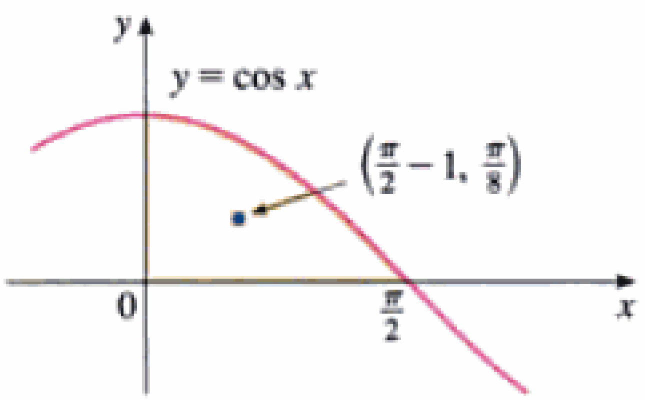


FIGURA 12

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx\\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{4}\left[x + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x\right]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

El centroide está en $((\pi/2) - 1, \pi/8)$ y se muestra en la figura 12. □

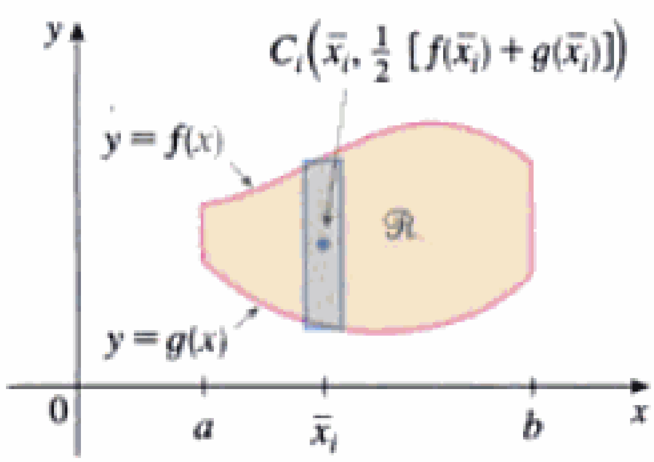


FIGURA 13

Si la región $\mathcal{R}$ está entre las dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$, como en la figura 13, el argumento que nos condujo a las fórmulas 8 se puede usar para demostrar que el centroide de $\mathcal{R}$ está en $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\boxed{9} \qquad \bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx \qquad\qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

(Véase ejercicio 41.)

EJEMPLO 6 □ Encuentre el centroide de la región limitada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

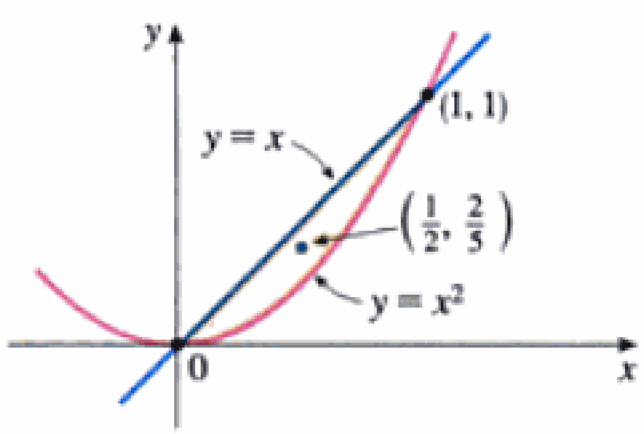


FIGURA 14

SOLUCIÓN En la figura 14 hemos trazado esa región. Sean $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$, y $b = 1$ en las ecuaciones 9. Primero, observaremos que el área de la región es

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A}\int_0^1 x[f(x) - g(x)]\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 x(x - x^2)\,dx\\ &= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4)\,dx\\ &= 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

El centroide está en $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$. □

Terminaremos esta sección describiendo una relación sorprendente entre los centroides y los volúmenes de revolución.

□ Este teorema recibe el nombre de Pappus de Alejandría, matemático griego del siglo IV a.C.

> **Teorema de Pappus** Sea $\mathcal{R}$ una región plana que está totalmente a un lado de una recta l en el plano. Si $\mathcal{R}$ se hace girar en torno de l, el volumen del cuerpo resultante es el producto del área A de $\mathcal{R}$ por la distancia d recorrida por el centroide de $\mathcal{R}$.

Demostración Describiremos la demostración para el caso especial cuando la región está entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$ como en la figura 13, y la línea l es el eje y. Al aplicar el método de las capas cilíndricas (Sec. 6.3),

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi(\bar{x}A) && \text{(según fórmulas 9)} \\ &= (2\pi\bar{x})A = Ad \end{aligned}$$

en donde $d = 2\pi\bar{x}$ es la distancia recorrida por el centroide durante una vuelta alrededor del eje y. □

EJEMPLO 7 □ Un toroide se forma al girar un círculo de radio r en torno de una línea en el plano del círculo, que está a una distancia R ($> r$) del centro del círculo. Calcule el volumen del toroide.

SOLUCIÓN El área del círculo es $A = \pi r^2$. De acuerdo con el principio de simetría, su centroide es su centro y así, la distancia recorrida por el centroide durante una vuelta es $d = 2\pi R$. Entonces, de acuerdo con el teorema de Pappus, el volumen del toroide es

$$V = Ad = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$ □

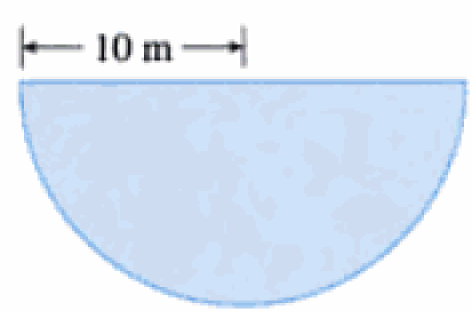
Se recomienda comparar el método del ejemplo 7 con el del ejercicio 59, en la sección 6.2.

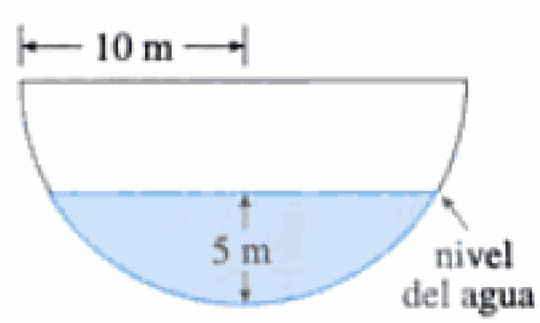
8.3 Ejercicios

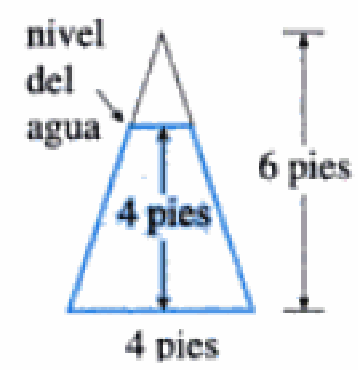
1. Un acuario tiene 5 pies de longitud, 2 de ancho y 3 de profundidad y está lleno de agua. Calcule (a) la presión hidrostática sobre el fondo del acuario; (b) la fuerza hidrostática sobre el fondo; (c) la fuerza hidrostática sobre un extremo.

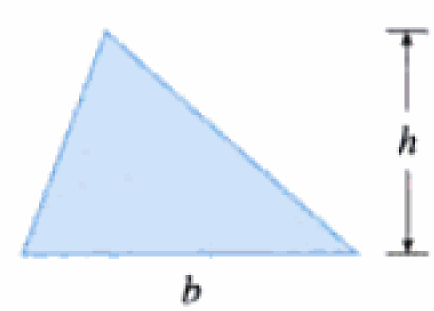
2. Una alberca mide 5 m de ancho, 10 m de longitud y 3 de profundidad; se llena con agua de mar (cuya densidad es 1030 kg/m^3) hasta 2.5 m de profundidad. Calcule la fuerza hidrostática sobre el fondo; y (c) la fuerza hidrostática sobre un extremo.

3–9 □ Los tanques de almacenamiento que están a la derecha tienen extremos verticales con la forma exhibida en las figuras y están llenos de agua. Explique cómo se aproxima la fuerza hidrostática sobre un extremo del tanque con una suma de Riemann. Luego exprese la fuerza como una integral de Riemann y evalúela].

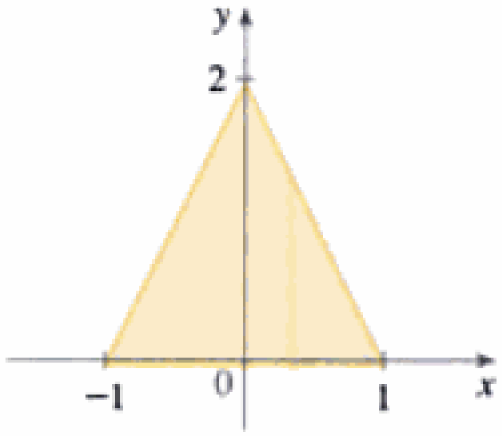
3.


4.


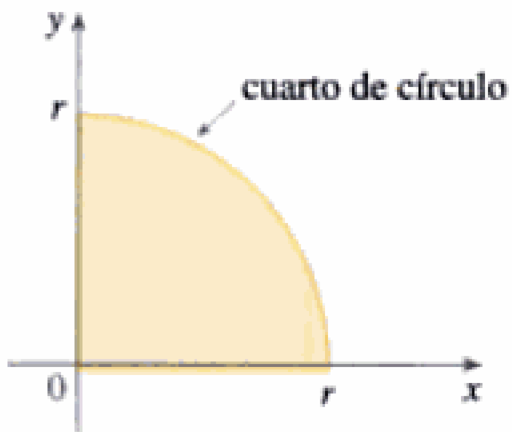
5.


6.


31. $\rho = 1$



32. $\rho = 2$



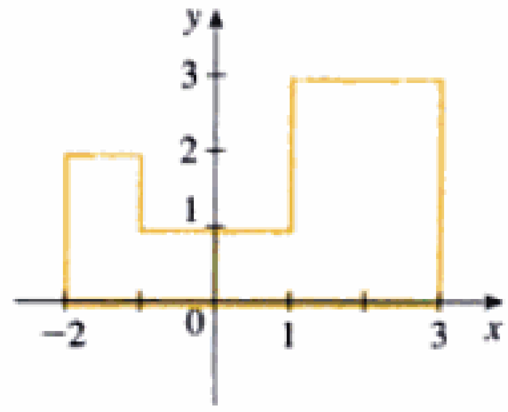
33. Halle el centroide de la región limitada por las curvas $y = 2^x$ y $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, hasta el tercer decimal. Dibuje la región y marque el centroide para ver si su respuesta es razonable.

34. Utilice una gráfica para obtener valores aproximados a las abscisas de los puntos de intersección de las curvas $y = x + \ln x$ y $y = x^3 - x$. Luego halle (aproximadamente) el centroide de la región limitada por estas curvas.

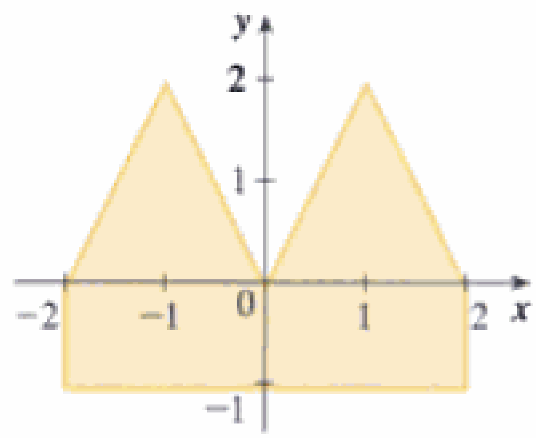
35. Demuestre que el centroide de cualquier triángulo está en el punto de intersección de sus medianas. [*Sugerencias*: coloque los ejes de modo que los vértices estén en $(a, 0)$, $(0, b)$, y $(c, 0)$. Recuerde que una mediana es el segmento de la recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto. También, recuerde que las medianas se intersecan en un punto que está a dos tercios de la longitud de la mediana, partiendo de los vértices.]

36–37 □ Halle el lugar del centroide de la región que muestra cada figura, no por integración, sino localizando los centroides de los rectángulos y los triángulos (de acuerdo con el resultado del Ejer. 35) y aplicando la aditividad de los momentos.

36.



37.



38–40 □ Aplique el teorema de Pappus para calcular el volumen del cuerpo dado.

38. Una esfera de radio r (use el resultado del ejemplo 4.)

39. Un cono de altura h y radio de la base r.

40. El sólido que se obtiene al girar el triángulo con vértices $(2, 3)$, $(2, 5)$, y $(5, 4)$ respecto al eje x

41. Demuestre las ecuaciones 9.

42. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por las curvas $y = x^m$ y $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, donde m y n son enteros y $0 \leqslant n < m$.

(a) Trace la región $\mathcal{R}$.

(b) Calcule las coordenadas del centroide de $\mathcal{R}$.

(c) Trate de determinar valores de m y n tales que el centroide quede *fuera* de $\mathcal{R}$.

8.4 Aplicaciones a la economía y a la biología

En esta sección consideraremos algunas aplicaciones de la integración a la economía (superávit del consumidor) y a la biología (flujo sanguíneo, gasto cardiaco). Otras aplicaciones se encuentran en los ejercicios.

Superávit del consumidor

Recuerde, por lo visto en la sección 4.8, que la función de demanda $p(x)$ es el precio que una compañia tiene que cargar para vender x unidades de un artículo. Por lo general, la venta de cantidades mayores exige que se bajen los precios, de modo que la función de demanda es decreciente. En la figura 1 se presenta la gráfica de una función típica de demanda, llamada **curva de demanda**. Si X es la cantidad actual del artículo disponible, entonces $P = p(X)$ es el precio actual de venta.

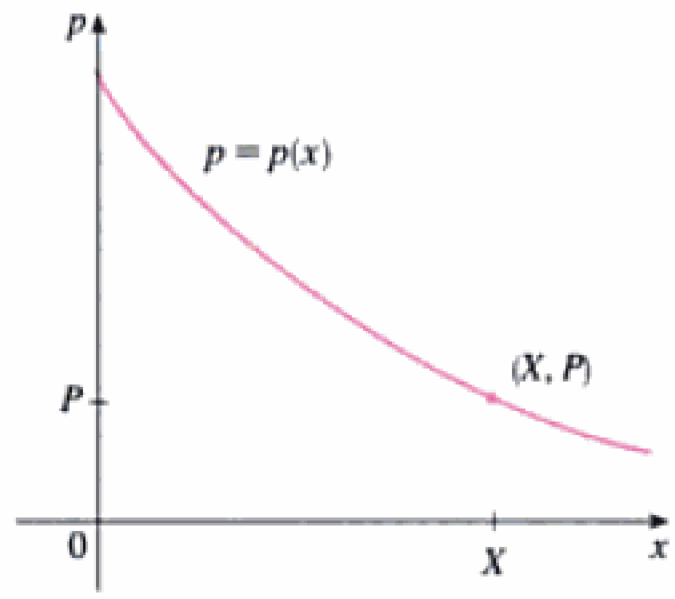


FIGURA 1
Una curva típica de demanda

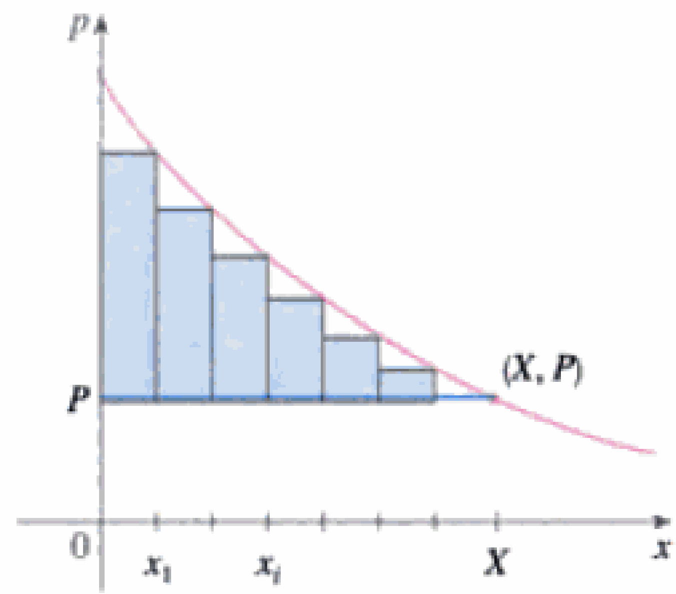


FIGURA 2

Dividamos el intervalo $[0, X]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta x = X/n$, y sea $x_i^* = x_i$ el punto extremo de la derecha del i-ésimo subintervalo, como en la figura 2. Si después de que se vendieron las primeras x_{i-1} unidades quedara disponible un total de sólo x_i unidades y se hubiese fijado el precio por unidad en $p(x_i)$ dólares, entonces se podrían haber vendido las Δx unidades adicionales (pero no más). Los consumidores que habían pagado $p(x_i)$ dólares pusieron un valor alto al producto; habrían pagado lo que estiman que es su valor. De modo que al pagar sólo P dólares, ahorraron una cantidad de

$$(\text{ahorros por unidad})\,(\text{número de unidades}) = [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

Si se consideran grupos similares de consumidores dispuestos para cada uno de los subintervalos y se suman los ahorros, se obtienen los ahorros totales:

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

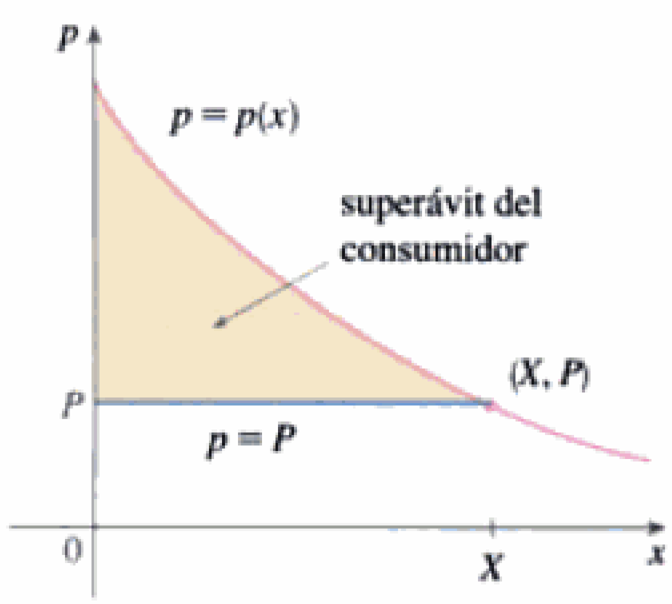


FIGURA 3

(Esta suma corresponde al área encerrada por los rectángulos en la figura 2.) Si hacemos que $n \to \infty$, esta suma de Riemann tiende a la integral

$$\boxed{1} \qquad \int_0^X [p(x) - P]\,dx$$

lo que los economistas llaman **superávit del consumidor** para el artículo.

Este superávit representa la cantidad de dinero ahorrado por los consumidores al comprar el artículo al precio P, correspondiente a una cantidad demandada de X. En la figura 3 se muestra la interpretación del superávit del consumidor como el área debajo de la curva de demanda y arriba de la recta $p = P$.

EJEMPLO 1 □ La demanda de un producto, en dólares, es

$$p = 1200 - 0.2x - 0.0001x^2$$

Encuentre el superávit del consumidor cuando el nivel de ventas es de 500.

SOLUCIÓN Puesto que la cantidad de producto vendidos es $X = 500$, el precio correspondiente es

$$P = 1200 - (0.2)(500) - (0.0001)(500)^2 = 1075$$

Por lo tanto, a partir de la definición 1, el superávit del consumidor es

$$\begin{aligned}
\int_0^{500} [p(x) - P]\,dx &= \int_0^{500} (1200 - 0.2x - 0.0001x^2 - 1075)\,dx \\
&= \int_0^{500} (125 - 0.2x - 0.0001x^2)\,dx \\
&= 125x - 0.1x^2 - (0.0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^{500} \\
&= (125)(500) - (0.1)(500)^2 - \frac{(0.0001)(500)^3}{3} \\
&= \$33,333.33
\end{aligned}$$

□

Flujo sanguíneo

En el ejemplo 7 de la sección 3.3 se expuso la ley del flujo laminar:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

la cual da la velocidad v de la sangre que fluye por una vena con radio R y longitud l a una distancia r del eje central, donde P es la diferencia de presión entre los extremos de la vena η es la viscosidad de la sangre. Ahora, para calcular el *flujo* (volumen por unidad de tiempo), consideremos los radios más pequeños, igualmente espaciados, $r_1, r_2, \ldots$. El área aproximada del anillo con radio interior r_{i-1} y radio exterior r_i es

$$2\pi r_i\,\Delta r \qquad \text{en donde} \quad \Delta r = r_i - r_{i-1}$$

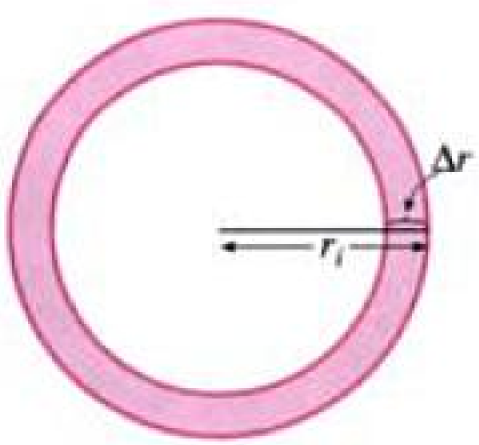


FIGURA 4

(Véase la Fig. 4.) Si Δr es pequeño, entonces la velocidad es casi constante en todo el anillo y se puede aproximar con $v(r_i)$. De este modo, el volumen de sangre por unidad de tiempo que fluye por el anillo es aproximadamente

$$(2\pi r_i\,\Delta r)\,v(r_i) = 2\pi r_i v(r_i)\,\Delta r$$

y el volumen total de sangre que fluye a través de una sección transversal por unidad de tiempo es poco más o menos

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)\,\Delta r$$

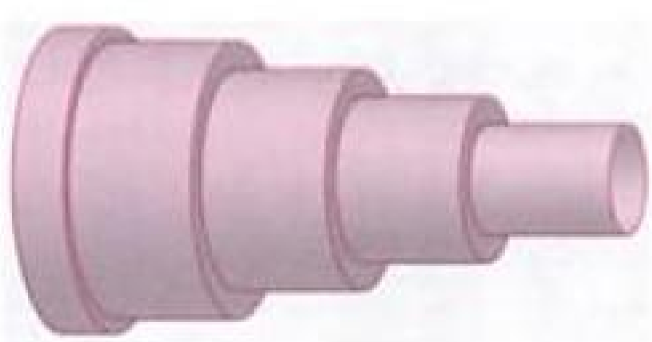


FIGURA 5

En la figura 5 se ilustra esta aproximación. Advierta que la velocidad (y, por consiguiente, el volumen por unidad de tiempo) aumenta hacia el centro del vaso sanguíneo. La aproximación mejora cuando n se incrementa. Cuando tomamos el límite, obtenemos el valor exacto del **flujo** (o *descarga*), el cual es el volumen de sangre que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo:

$$\begin{aligned}
F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)\,\Delta r \\
&= \int_0^R 2\pi r v(r)\,dr \\
&= \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)\,dr
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R}$$

$$= \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

La ecuación resultante

2 $$F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

se llama **ley de Poiseuille**; ésta indica que el flujo es proporcional a la cuarta potencia del radio del vaso sanguíneo.

Gasto cardiaco

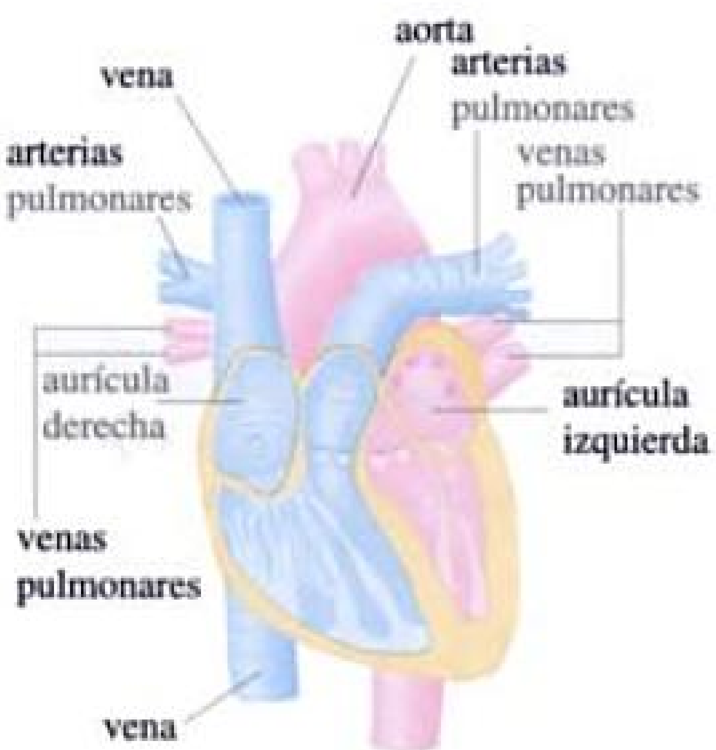


FIGURA 6

En la figura 6 se muestra el sistema cardiovascular humano. La sangre regresa por las venas, entra a la aurícula derecha del corazón y se bombea a los pulmones por las arterias pulmonares para su oxigenación. A continuación, fluye de regreso hacia la aurícula izquierda por las venas pulmonares y, después, hacia afuera al resto del cuerpo por la aorta. El **gasto cardiaco** es el volumen de sangre bombeado por el corazón por unidad de tiempo; es decir, es la razón del flujo hacia la aorta.

El *método de la dilución de colorante* se aplica para medir el gasto cardiaco. El colorante se inyecta en la aurícula derecha y fluye por el corazón hacia la aorta. Una sonda introducida en ésta mide la concentracion del colorante que sale del corazón, en momentos igualmente espaciados, durante un periodo $[0, T]$ hasta que el tinte desaparece. Sea $c(t)$ la concentración del tinte en el instante t. Si dividimos $[0, T]$ en subintervalos de igual longitud Δt, entonces la cantidad de tinte que fluye y pasa por el punto de medición durante el subintervalo de $t = t_{i-1}$ a $t = t_i$ es aproximadamente

$$(\text{concentración})(\text{volumen}) = c(t_i)(F\,\Delta t)$$

donde F es el gasto que intentamos determinar. De donde, la cantidad total de colorante es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i)F\,\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\,\Delta t$$

y si $n \to \infty$, encontramos que la cantidad de tinte es

$$A = F\int_0^T c(t)\,dt$$

Por tanto, el gasto cardiaco se expresa por medio de

3 $$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)\,dt}$$

donde se conoce la cantidad de tinte A y se puede obtener una aproximación de la integral a partir de las lecturas de la concentración.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6.1
1	0.4	7	4.0
2	2.8	8	2.3
3	6.5	9	1.1
4	9.8	10	0
5	8.9		

EJEMPLO 2 □ Un bolo* de colorante de 5 mg se inyecta en la aurícula derecha. Se mide la concentración del tinte (en miligramos por litro) en la aorta a intervalos de un segundo, como se muestra en la tabla. Estime el gasto cardiaco.

SOLUCIÓN En este caso, $A = 5$, $\Delta t = 1$, y $T = 10$. Aplicamos la regla de Simpson para obtener una aproximación de la integral de la concentración:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} c(t)\,dt &\approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0.4) + 2(2.8) + 4(6.5) + 2(9.8) + 4(8.9)\\ &\qquad + 2(6.1) + 4(4.0) + 2(2.3) + 4(1.1) + 0]\\ &\approx 41.87\end{aligned}$$

Por consiguiente, la fórmula 3 indica que el gasto cardiaco es

$$\begin{aligned}F &= \frac{A}{\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41.87}\\ &\approx 0.12 \text{ L/s} = 7.2 \text{ L/min}\end{aligned}$$

□

8.4 Ejercicios

1. La función de costo marginal $C'(x)$ se definió como la derivada de la función de costo. (Véanse las Secs., 3.3 y 4.8.) Si el costo marginal para fabricar x unidades de un producto es $C'(x) = 0.006x^2 - 1.5x + 8$ (en dólares por unidad) y el costo fijo de arranque es $C(0) = \$1,500,000$, dólares, aplique el teorema del cambio total para hallar el costo de producción de las primeras 2000 unidades.

2. El ingreso marginal proveniente de vender x artículos es $90 - 0.02x$. lo que da \$8800 por la venta de los primeros 100 artículos. ¿A cuánto asciende dicho ingreso por la venta de los primeros 200 artículos?

3. El costo marginal de producción de x unidades de cierto producto es $74 + 1.1x - 0.002x^2 + 0.00004x^3$ (en dólares por unidad). Encuentre el aumento de costo si el nivel de producción se eleva de 1200 unidades a 1600.

4. La función de demanda para cierto artículo es $p = 5 - x/10$. Encuentre el superávit del consumidor cuando el nivel de ventas es 30. Ilustre la respuesta trazando la curva de demanda y la identificación del superávit del consumidor como un área.

5. Se da una curva de demanda por $p = 450/(x + 8)$. Halle el superávit del consumidor cuando el precio de venta es de 10 dólares.

6. La **función de oferta**, $p_S(x)$ de un producto expresa la relación entre el precio de venta y la cantidad de unidades que elaborará la empresa a este precio. Cuando el precio es mayor, el fabricante producirá más unidades, de modo que p_S es una función creciente de x. Sea X la cantidad del producto que se fabrica en la actualidad y sea $P = p_S(X)$ el precio actual. Algunos productores podrían fabricar y vender el producto a un precio menor de venta, y con ello recibirían más que el precio mínimo. El exceso se llama **excedente de productor**. Con un razonamiento parecido al del excedente de consumidores, se demuestra que el excedente de productor está representado por la integral

$$\int_0^X [P - p_S(x)]\,dx$$

Calcule el excedente de productor para la función de oferta $p_S(x) = 3 + 0.01x^2$ cuando el nivel de ventas es $X = 10$. Para ilustrar las condiciones trace al curva de oferta e identifique el excedente de productor como un área.

7. Una curva de oferta está representada por $p = 5 + \frac{1}{10}\sqrt{x}$. Calcule el excedente de productor cuando el precio de venta es \$10.

8. Para cierto producto, y en ambiente de competencia pura, la cantidad de unidades producidas y el precio unitario quedan determinados en forma de las coordenadas del punto de intersección de las curvas de oferta y de demanda. Dada la curva de demanda $p = 50 - x/20$ y la curva de oferta, $p = 20 + x/10$, calcula el excedente de consumidores y el excedente de productor. Ilustre los resultados con las curvas de oferta y de demanda e identificando los excedentes como áreas.

9. Una compañía modela la curva de demanda para un producto con

$$p = \frac{800{,}000e^{-x/5000}}{x + 20{,}000}$$

use una gráfica para estimar el nivel de ventas cuando el precio de venta es \$16. Luego, encuentre aproximadamente el excedente de los consumidores para este nivel de ventas.

10. Una sala de cine ha estado cobrando \$7.50 por persona y vendiendo como 400 boletos cada noche. Luego de una encuesta

entre consumidores la empresa estima que por cada 50 centavos de rebaja el número de asistentes se incrementará en 35 por noche. Halle la función de demanda y calcule el excedente de los consumidores cuando se cobre a \$6 la entrada.

11. Si el capital que tiene una empresa en el momento t es $f(t)$, entonces la derivada, $f'(t)$, se llama *flujo neto de inversión*. Si el flujo neto de inversión es de $\sqrt{t}$ millones de dólares anuales (t representa número de años), calcule el aumento de capital (la *formación de capital*) desde el cuarto hasta el octavo año.

12. Un verano cálido y húmedo está causando un cambio en la población de mosquitos en una zona vacacional cerca de un lago. El número de mosquitos crece a razón de $2200 + 10e^{0.8t}$ según estimaciones, por semana (t se mide en semanas). ¿Cuánto crecerá la población de esos insectos de la semana 5 a la semana 9 del verano?

13. Aplique la ley de Poiseuille para calcular el flujo en una arteria humana normal, en donde podemos suponer que $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm, y $P = 4000$ dinas/cm^2.

14. La presión arterial alta se debe a la constricción de las arterias. Para mantener el mismo flujo, el corazón debe bombear más, y aumentar la presión de la sangre. Con la ley de Poiseuille demuestre que si R_0 y P_0 son los valores normales del radio y la presión en una arteria, y en los vasos constreñidos los valores son R y P, entonces para que el flujo permanezca constante, P y R se deben relacionar mediante la ecuación

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

Demuestre que si el radio de una arteria se reduce a las tres cuartas partes de su valor normal, la presión aumenta a más del triple.

15. Se emplea el método de dilución de colorante a fin de medir el trabajo cardiaco, con 8 mg de colorante. Las concentraciones del mismo, en mg/l, están expresadas por $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t)$, $0 \leqslant t \leqslant 12$, donde t se da en segundos. Determine el trabajo cardiaco.

16. Después de inyectar 8 mg de colorante, las indicaciones de la concentración del mismo, en intervalos de dos segundos, aparecen en la tabla siguiente. Estime el trabajo cardiaco con la regla de Simpson.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	12	3.9
2	2.4	14	2.3
4	5.1	16	1.6
6	7.8	18	0.7
8	7.6	20	0
10	5.4		

8.5 Probabilidad

El cálculo participa en el análisis del comportamiento aleatorio. Suponga que consideramos el nivel de colesterol de una persona elegida al azar de un cierto grupo de edades, la estatura de una adulta escogida aleatoriamente, o la duración de una batería de cierto tipo tomada al azar. Los estadísticos llaman **variables aleatorias continuas** a esas cantidades porque sus valores varían sobre un intervalo de número reales, aunque podrían mediarse o registrarse sólo hasta el entero más cercano. Podríamos interesarnos en la probabilidad de que un nivel de colesterol en la sangre sea mayor que 250, en la probabilidad de que la estatura de una adulta se encuentre entre 60 y 70 pulgadas o en la probabilidad de que la batería que estamos comprando dure entre 100 y 200 horas. Si X representa la duración de ese tipo de batería, denotamos esta última probabilidad como sigue:

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200)$$

Según la interpretación de la probabilidad en términos de frecuencia, este número es la proporción a largo plazo de todas las baterías del tipo especificado cuyas duraciones se encuentran entre 100 y 200 horas. Como representa una proporción, es natural que la probabilidad se encuentre entre 0 y 1.

Toda variable aleatoria continua X tiene una **función de densidad de probabilidad** f. Esto, significa que la probabilidad de que X se encuentre entre a y b se encuentra integrando f desde a hasta b:

$$\boxed{1} \qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Por ejemplo, en la figura 1 se presenta la gráfica de un modelo de la función de densidad de probabilidad f para una variable aleatoria X, definida como la estatura en pulgadas de una adulta en Estados Unidos (de acuerdo con los datos de la National Health Survey). La probabilidad de que la estatura de una mujer elegida al azar de esta población esté entre 60 y 70 pulgadas es igual al área debajo de la gráfica de f, desde 60 hasta 70.

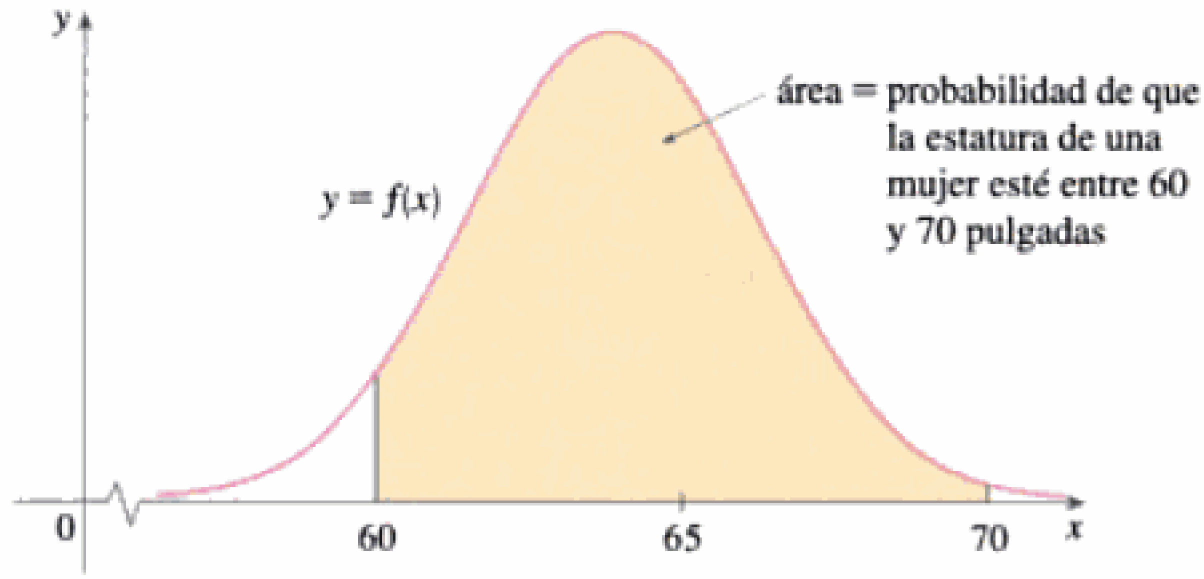


FIGURA 1
Función de densidad de probabilidad para la estatura de una mujer adulta

En general, la función de densidad de probabilidad f de una variable aleatoria X satisface que $f(x) \geqslant 0$ para toda x. En virtud de que las probabilidades se miden en una escala de 0 a 1, se concluye que

$$\boxed{2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

EJEMPLO 1 □ Por lo común, los fenómenos como los tiempos de espera y los tiempos de falla del equipo se modelan con funciones de densidad de probabilidad que son decrecientes y de orden exponencial. Encuentre la forma exacta de una función de ese tipo.

SOLUCIÓN Piense en la variable aleatoria como si fuera el tiempo que espera antes de que un agente de una compañía a la que está telefoneando responda su llamada. De modo que usemos t en lugar de x, para representar el tiempo en minutos. Si f es la función de densidad de probabilidad y usted habla en el instante $t = 0$, entonces, con base en la definición 1, $\int_0^2 f(t)\, dt$ representa la probabilidad de que un agente responda en los dos primeros minutos y $\int_4^5 f(t)\, dt$ es la probabilidad de que lo haga durante el quinto minuto.

Resulta claro que $f(t) = 0$ para $t < 0$ (el agente no puede responder antes de que usted haga la llamada). Para $t > 0$ se nos dijo que usemos una función que decrezca exponencialmente; es decir, una función de la forma $f(t) = Ae^{-ct}$, donde A y c son constantes positivas; con lo cual,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Usemos la condición 2 para determinar el valor de A:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\, dt \\ &= \int_0^{\infty} Ae^{-ct}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x Ae^{-ct}\, dt \\ &= \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{A}{c} e^{-ct} \right]_0^x = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{c}(1 - e^{-cx}) \\ &= \frac{A}{c} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A/c = 1$ y, por consiguiente, $A = c$. De donde, toda función de densidad exponencial tiene la forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

En la figura 2 se muestra una gráfica típica. □

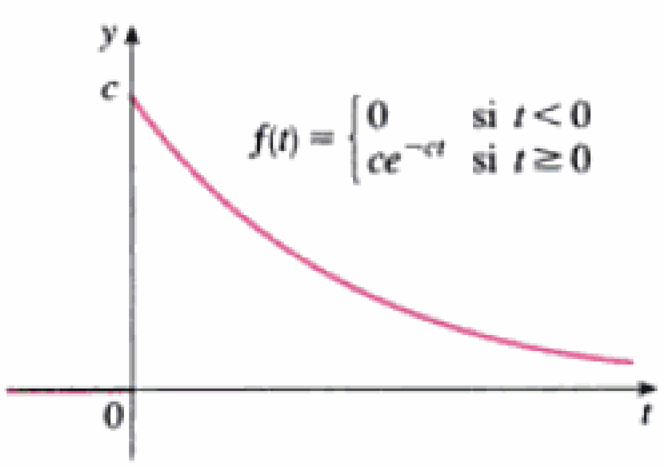


FIGURA 2
Una función de densidad exponencial

Valores promedios

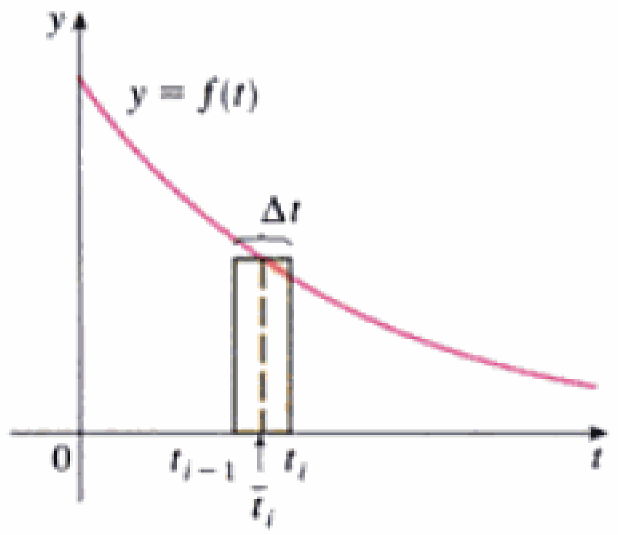


FIGURA 3

Suponga que está esperando que una compañía responda a su llamada telefónica y se pregunta cuánto tiempo, en promedio, podría tener que aguardar. Sea $f(t)$ la función de densidad correspondiente, donde t se mide en minutos y piense en una muestra de N personas que han llamado a esa compañía. Lo más probable es que ninguna haya tenido que esperar más de una hora, de modo que restrinjamos la atención al intervalo $0 \leqslant t \leqslant 60$. Dividamos ese intervalo en n intervalos de longitud Δt y puntos extremos $0, t_1, t_2, \ldots$. (Piense en que Δt dura un minuto, medio minuto, 10 segundos o, incluso, un segundo.) La probabilidad de que se dé respuesta a la llamada de alguien durante el periodo de t_{i-1} a t_i es el área debajo de la curva $y = f(t)$ desde t_{i-1} hasta la t_i, la cual es aproximadamente igual a $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$. (Ésta es el área del rectángulo de aproximación de la figura 3, donde $\bar{t}_i$ es el punto medio del intervalo.)

Ya que la proporción de llamadas que obtienen una respuesta en el periodo desde t_{i-1} hasta t_i es $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$, esperamos que de la muestra de N personas que hicieron la llamada, la cantidad que recibió respuesta en ese periodo sea aproximadamente $Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t$ y el tiempo que cada uno esperó es aproximadamente $\bar{t}_i$. Por lo tanto, el tiempo total que esperaron es el producto de estos números: aproximadamente $\bar{t}_i[Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t]$. Si sumamos respecto a los intervalos, obtenemos el total aproximado del tiempo global de espera:

$$\sum_{i=1}^{n} N\bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Si ahora dividimos entre el número N de llamadas, obtenemos el tiempo *promedio* aproximado de espera:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Reconocemos esto como una suma de Riemann para la función $tf(t)$. A medida que el intervalo se contrae (es decir, $\Delta t \to 0$ y $n \to \infty$), esta suma de Riemann tiende a la integral

$$\int_0^{60} tf(t)\,dt$$

Esta integral se llama *tiempo medio de espera*.

En general, la **media** de cualquier función de densidad de probabilidad f se define como

▢ Es tradicional denotar la media con la letra griega μ (mu).

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

La media se puede interpretar como el valor promedio a la larga de la variable aleatoria X o como una medida de lo central de la función de densidad de probabilidad.

La expresión para la media se parece a una integral que ya hemos visto antes. Si $\mathcal{R}$ es la región que se encuentra debajo de la gráfica de f, con base en la fórmula 8 de la sección 8.3 sabemos que la coordenada x del centroide de $\mathcal{R}$ es

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \mu$$

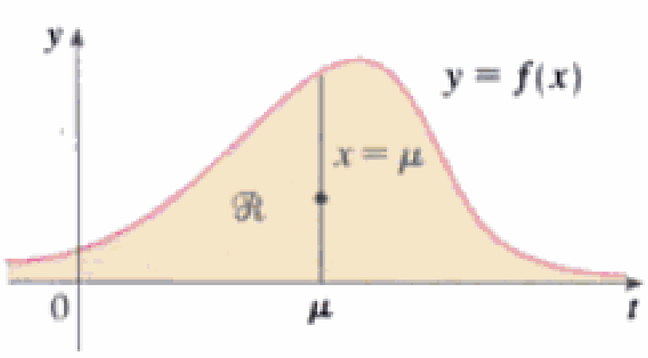


FIGURA 4
$\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la recta $x = \mu$

en virtud de la ecuación 2. De modo que una placa delgada con la forma de $\mathcal{R}$ se equilibra sobre la recta vertical $x = \mu$. (Figura 4.)

EJEMPLO 2 □ Encuentre la media de la distribución exponencial del ejemplo 1:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de media, tenemos

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\, dt = \int_0^{\infty} tce^{-ct}\, dt$$

Para evaluar esta integral, usamos la integración por partes con $u = t$ y $dv = ce^{-ct}\, dt$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} tce^{-ct}\, dt &= \lim_{x \to \infty} \int_0^x tce^{-ct}\, dt \\ &= \lim_{x \to \infty} \left(-te^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\, dt \right) \\ &= \lim_{x \to \infty} \left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c} \right) \\ &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

□ Por la regla de l'Hospital, el límite del primer término es 0.

La media es $\mu = 1/c$, por lo que podemos volver a escribir la función de densidad de probabilidad como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$ □

EJEMPLO 3 □ Suponga que el tiempo promedio de espera para que el representante de una compañía conteste la llamada de un cliente es de cinco minutos.
(a) Halle la probabilidad de que se dé respuesta a una llamada durante el primer minuto.
(b) Encuentre la probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos para que se le conteste.

SOLUCIÓN
(a) Se nos da que la media de la distribución exponencial es $\mu = 5$ min y, por consiguiente, a partir del resultado del ejemplo 2, sabemos que la función de densidad de probabilidad es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.2e^{-t/5} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

De donde, la probabilidad de que se responda una llamada durante el primer minuto es

$$\begin{aligned} P(0 \leq T \leq 1) &= \int_0^1 f(t)\, dt \\ &= \int_0^1 0.2e^{-t/5}\, dt \\ &= 0.2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1 \\ &= 1 - e^{-1/5} \approx 0.1813 \end{aligned}$$

Entonces, durante el primer minuto se responde 18% de las llamadas.

(b) La probabilidad de que un cliente espera más de cinco minutos es

$$P(T > 5) = \int_5^\infty f(t)\,dt = \int_5^\infty 0.2e^{-t/5}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_5^x 0.2e^{-t/5}\,dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x/5})$$

$$= \frac{1}{e} \approx 0.368$$

Casi 37% espera más de cinco minutos antes de que contesten sus llamadas. □

Ponga atención en el resultado del ejemplo 3(b); aun cuando el tiempo medio de espera es de 5 minutos, sólo 37% de quienes llaman esperan más de 5 minutos. La razón es que algunos tienen que esperar mucho más tiempo (10 o 15 minutos) y esto hace subir el promedio.

Otra medida de lo central de una función de densidad de probabilidad es la *mediana*. Ése es un número m tal que la mitad de quienes llaman tienen un tiempo de espera menor que m y los otros tienen un tiempo de espera mayor m. En general, la **mediana** de una función de densidad de probabilidad es el número m tal que

$$\int_m^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Esto significa que la mitad del área de la gráfica de f se encuentra a la derecha de m. En el ejercicio 5 tendrá que demostrar que el tiempo de espera correspondiente a la mediana es aproximadamente 3.5 minutos para la compañía del ejemplo 3.

Distribuciones normales

Muchos fenómenos aleatorios importantes —como las calificaciones en las pruebas de aptitud, las estaturas y los pesos de los individuos de una población homogénea, la precipitación pluvial anual en un lugar dado— se modelan por medio de una **distribución normal**. Esto significa que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X es un miembro de la familia de funciones

$$\boxed{3} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

□ La desviación estándar se denota con la letra griega minúscula σ (sigma).

Usted puede corroborar que la media para esta función es μ. La constante positiva σ se llama **desviación estándar**; ésta mide cuán dispersos están los valores de X. A partir de las gráficas acampanadas de los miembros de la familia de la figura 5 vemos que para valores pequeños de σ los valores de X se agrupan alrededor de la media, en tanto que para los va-lores más grandes de σ se dispersan más. Los estadísticos tienen métodos para usar conjuntos de datos con el fin de hallar μ y σ.

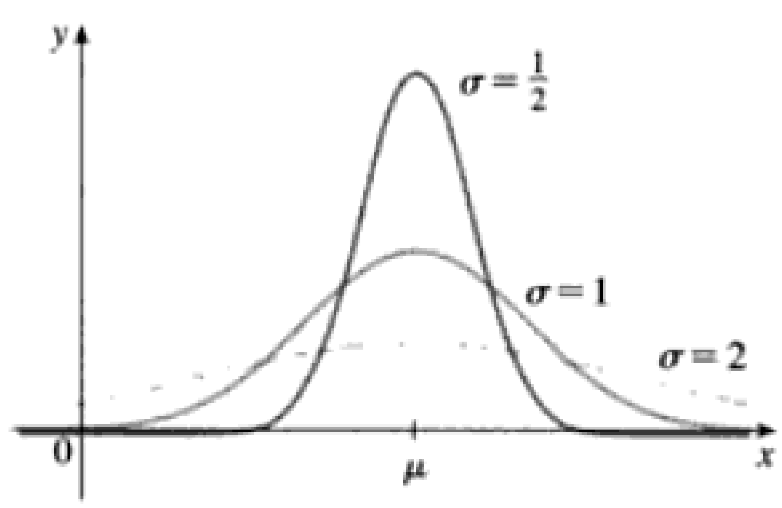


FIGURA 5
Distribuciones normales

Se necesita el factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ para que f sea una función de densidad de probabilidad. Se puede comprobar aplicando los métodos del cálculo de varias variables que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx = 1$$

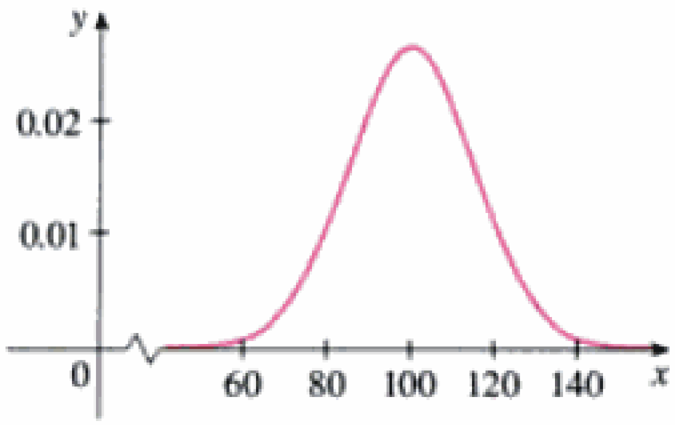


FIGURA 6
Distribuciones de las calificaciones del IQ

EJEMPLO 4 □ Las calificaciones del cociente de inteligencia (IQ, por Intelligence Quotient) se distribuyen normalmente con media 100 y desviación estándar 15. (En la Fig. 6 se muestra la función de densidad de probabilidad correspondiente.)

(a) ¿Qué porcentaje de la población tiene una calificación IQ entre 85 y 115?
(b) ¿Qué porcentaje tiene un IQ arriba de 140?

SOLUCIÓN

(a) Ya que las calificaciones IQ se distribuyen normalmente, usamos la función de densidad de probabilidad dada por la ecuación 3 con $\mu = 100$ y $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)}\,dx$$

Recuerde, por lo visto en la sección 7.5, que la función $y = e^{-x^2}$ no tiene una antiderivada elemental, de modo que no podemos evaluar la integral con exactitud. Pero podemos usar la capacidad de integración numérica de una calculadora o una computadora (o bien la regla del punto medio o la de Simpson) para estimar la integral. Si así lo hacemos encontramos que

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0.68$$

Por consiguiente, alrededor de 68% de la población tiene un IQ entre 85 y 115; esto es, dentro de una desviación estándar respecto de la media.

(b) La probabilidad de que el IQ de una persona elegida al azar sea mayor que 140 es

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450}\,dx$$

Para evitar la integral impropia, podríamos obtener una aproximación de ella por la integral de 140 a 200. (Se puede afirmar con bastante seguridad que las personas con IQ de más de 200 son en extremo raras.) Entonces

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450}\,dx \approx 0.0038$$

Por lo tanto, alrededor de 0.4% de la población tiene un IQ de más de 140. □

8.5 Ejercicios

1. Si $f(t)$ es la función de densidad de probabilidad para la duración de un tipo de batería, donde t se mide en horas, ¿cuál es el significado de cada integral?

(a) $\int_{100}^{200} f(t)\,dt$ (b) $\int_{200}^{\infty} f(t)\,dt$

2. Si $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad para el nivel de colesterol en la sangre de los hombres de más de 40 años, donde x se mide en miligramos por decilitro, exprese las probabilidades siguientes como integrales.

(a) La probabilidad de que el nivel de colesterol de uno de esos hombres se encuentre entre 180 y 240
(b) La probabilidad de que dicho nivel sea menor de 200

3. Una aguja giratoria de un juego de tablero indica de manera aleatoria un número real entre 0 y 10. La aguja es legal en el sentido de que señala un número en un intervalo dado con la misma probabilidad con que indica un número en cualquier otro intervalo de la misma longitud.

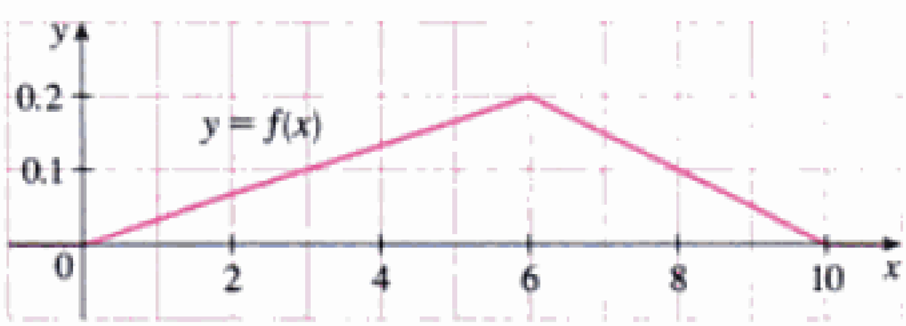
(a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 10 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad para los valores de la aguja giratoria.

(b) ¿Qué le dice su intuición acerca del valor de la media? Compruebe su conjetura evaluando una integral.

4. (a) Explique por qué la función cuya gráfica se muestra es una densidad de probabilidad.
(b) Use la gráfica para hallar las probabilidades siguientes:
(i) $P(X < 3)$ (ii) $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$
(c) Calcule la media.



5. Demuestre que el tiempo de espera correspondiente a la mediana para una llamada telefónica a la compañía del ejemplo 3 es de unos 3.5 minutos.

6. (a) La etiqueta de un tipo de bombilla señala que ésta tiene una vida promedio de 1,000 horas. Es razonable modelar la probabilidad de falla de estas bombillas con una función de densidad exponencial cuya media $\mu = 1{,}000$. Use este modelo para hallar la probabilidad de que una bombilla
(i) Falle en las primeras 200 horas,
(ii) Se queme después de más de 800 horas.
(b) ¿Cuál es la mediana del promedio de vida de estas bombillas?

7. La gerente de un restaurante de comida rápida determina que el tiempo promedio que sus clientes esperan para recibir el servicio es de 2.5 minutos.
(a) Encuentre la probabilidad de que un cliente tenga que esperar más de 4 minutos.
(b) Encuentre la probabilidad de que un cliente sea servido en los primeros 2 minutos.
(c) Ella quiere anunciar que quien no sea servido en cierto tiempo recibirá una hamburguesa gratis, pero no desea regalar hamburguesas a más del 2% de sus clientes. ¿Qué debe decir el anuncio?

8. Según la National Health Survey, la estatura del estadounidense maduro tiene una distribución normal con media de 69.0 pulgadas y desviación estándar de 2.8 pulgadas.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto elegido al azar tenga una estatura entre 65 y 73 pulgadas?
(b) ¿Qué porcentaje de la población de hombres adultos tiene más de 6 pies de estatura?

9. El "Proyecto Basura" de la Universidad de Arizona señala que la cantidad semanal de papel desechado por las familias tiene una distribución normal con una media de 9.4 lb y una desviación estándar de 4.2 lb. ¿Qué porcentaje de las familias tira por lo menos 10 lb de papel a la semana?

10. Las etiquetas de unas cajas indican que éstas contienen 500 g de cereal. La máquina que las llena produce pesos con distribución normal y desviación estándar de 12 g.
(a) Si el peso objetivo es de 500 g, ¿cuál es probabilidad de que la máquina produzca una caja con menos de 480 g de cereal?
(b) Suponga que una ley establece que no más del 5% de las cajas de cereal de un fabricante puede contener menos del peso expresado de 500 g. ¿A qué peso objetivo debe ajustar el fabricante la máquina de llenado?

11. Para cualquier distribución normal, halle la probabilidad de que la variable aleatoria se encuentre dentro de dos desviaciones estándar de la media.

12. La desviación estándar para una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f y media μ se define por medio de

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx\right]^{1/2}$$

Encuentre la desviación estándar para una función exponencial de densidad con media μ.

13. El átomo de hidrógeno está compuesto por un protón en el núcleo y un electrón que se mueve alrededor de él. En la teoría cuántica de la estructura del átomo, se supone que el electrón no se mueve en una órbita bien definida. En lugar de ello, ocupa un estado conocido como un *orbital*, el cual se puede concebir como un "nube" de carga negativa que rodea el núcleo. En el estado de energía más baja, conocido como *estado fundamental* u *orbital ls*, se supone que la nube tiene forma de esfera con centro en el núcleo. Esta esfera se describe en términos de la función de densidad de probabilidad

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3}\, r^2 e^{-2r/a_0} \qquad r \geqslant 0$$

donde a_0 es el radio de Bohr ($a_0 \approx 5.59 \times 10^{-11}$ m). La integral

$$P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3}\, s^2 e^{-2s/a_0}\, ds$$

da la probabilidad de que el electrón se encuentre dentro de la esfera de radio r metros con centro en el núcleo.
(a) Compruebe que $p(r)$ es una función de densidad de probabilidad.
(b) Encuentre $\lim_{r \to \infty} p(r)$. ¿Para cuál valor de r la función $p(r)$ tiene su valor máximo?
(c) Grafique la función de densidad.
(d) Encuentre la probabilidad de que el electrón se encuentre dentro de la esfera de radio $4a_0$ con centro en el núcleo.
(e) Calcule la distancia media del electrón al núcleo en el estado fundamental del átomo del hidrógeno.

8 Repaso

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Cómo se define la longitud de una curva?
   (b) Escriba una expresión para la longitud de la curva dada por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.
   (c) ¿Cómo es si x está dado como función de y?
2. (a) Escriba una expresión para el área superficial de la superficie de revaluación obtenida al girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x.
   (b) ¿Cómo es si x viene dada como función de y?
   (c) ¿Cómo es si la curva gira alrededor del eje y?
3. Describa cómo hallamos la fuerza hidrostática ejercida contra una pared vertical inmersa en un fluido?
4. (a) ¿Cuál es el significado físico del centro de masa de una placa delgada?
   (b) Si la placa se encuentra entre $y = f(x)$ y $y = 0$, donde $a \leq x \leq b$, escriba expresiones para las coordenadas del centro de masa.
5. ¿Qué afirma el teorema de Pappus?
6. Dada una función de demanda $p(x)$, explique qué se quiere dar a entender por superávit del consumidor, cuando la cantidad disponible del artículo es X y el precio actual de venta es P. Ilustre la respuesta con un esquema.
7. (a) ¿Qué es el gasto cardiaco?
   (b) Explique cómo se puede medir el gasto cardiaco mediante el método de la dilución de colorante.
8. ¿Qué es una función densidad de probabilidad? ¿Qué propiedades tiene?
9. Suponga que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad para el peso de los estudiantes de universidad, donde x se mide en libras.
   (a) ¿Cuál es el significado de la integral $\int_0^{100} f(x)\,dx$?
   (b) Escriba una expresión para la media de esta función de densidad.
   (c) ¿Cómo puede encontrarse la mediana de esa función densidad?

EJERCICIOS

1–2 □ Halle la longitud de la curva.

1. $3x = 2(y-1)^{3/2}, \quad 2 \leq y \leq 5$

2. $y = \ln x - \dfrac{x^2}{8}, \quad 1 \leq x \leq 4$

3. (a) Halle el área de la superficie obtenida al girar

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \qquad 1 \leq x \leq 2$$

   (b) Halle el área de la superficie obtenida al girar la curva de (a) alrededor del eje x.

4. (a) La curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, se gira alrededor del eje y. Encuentre el área de la superficie que resulta.
   (b) Como en el inciso (a) pero alrededor del eje x.

5. Use la regla del Simpson con $n = 14$ para estimar la longitud del arco de curva $y = \sqrt[3]{x}$ entre $(1, 1)$ y $(8, 2)$.

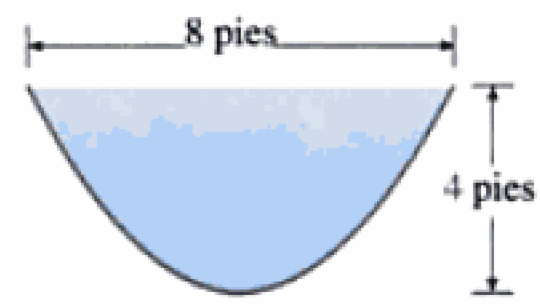
6. Use la regla de Simpson con $n = 14$ para estimar el área de la superficie obtenida al girar la curva $y = \sqrt[3]{x}$ de $(1, 1)$ a $(8, 2)$ respecto del eje x.

7. Halle la superficie generada al girar el lazo de la curva $9ay^2 = x(3a - x)^2$ respecto del eje y.

8. Si el lazo del ejercicio 7 se hace girar alrededor del eje x halle el área de la superficie que resulta.

9. Una compuerta en un canal de irrigación tiene la forma de un trapecio de 3 pies de ancho en el fondo, 5 pies de ancho en la parte superior y 2 pies de alto. Está colocada verticalmente en el canal y el agua llega hasta su parte superior. Encuentre la fuerza hidrostática sobre uno de los costados de la compuerta.

10. Una artesa está llena de agua y sus extremos verticales tienen la forma de la región parabólica mostrada en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática sobre uno de los costados de la artesa.



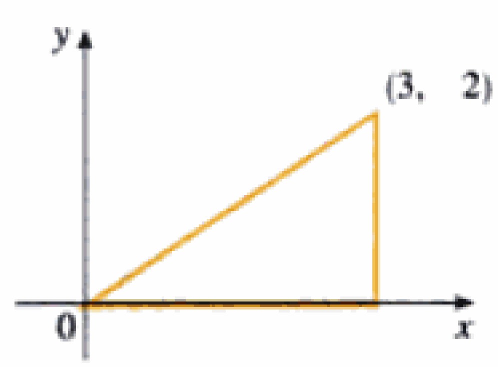
11–12 □ Halle el centroide de la región limitada por las curvas que se dan.

11. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$

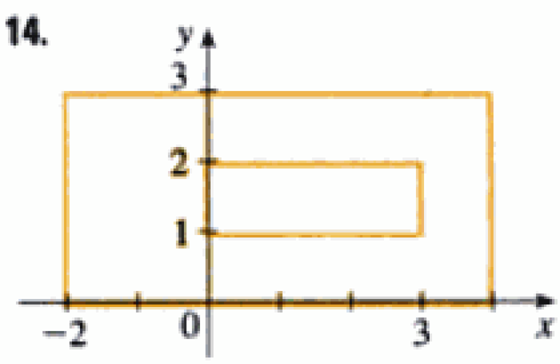
12. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4, \quad x = 3\pi/4$

13–14 □ Halle el centroide de la región que se muestra.

13.



14.



7. Sea P una pirámide con base cuadrada $2b$ y suponga que S es una esfera con su centro en la base de P y es tangente a las ocho aristas de P. Halle la altura de P y luego el volumen de la intersección de S y P.

8. Considere una placa de metal plana que se coloca verticalmente bajo el agua, 2 metros debajo de la superficie. Determine una forma para la placa de modo de que si la placa es dividida en cualquier número de bandas horizontales de igual altura, la fuerza hidrostática en cada banda sea la misma.

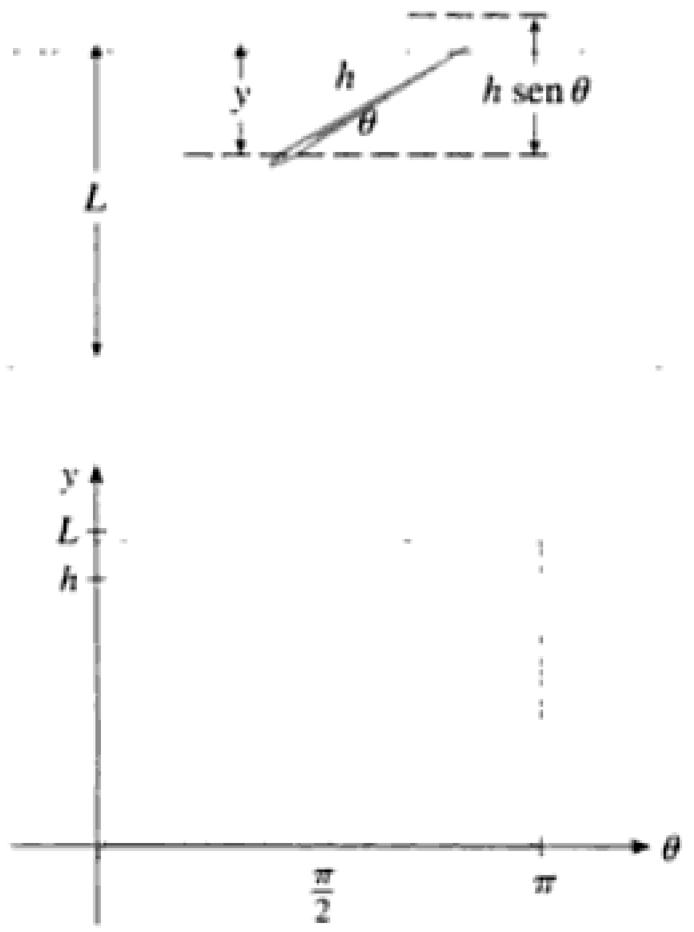


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. En un famoso problema del siglo XVIII, conocido como el *problema de la aguja de Buffon*, se deja caer una aguja de longitud h sobre una superficie plana (por ejemplo, una mesa) sobre la cual se han trazado rectas paralelas separadas una distancia L, $L \geq h$, El problema es determinar la probabilidad de que la aguja quede en reposo cruzando con una de las rectas. Suponga que éstas van de este a oeste, paralelas al eje x, en un sistema de coordenadas rectangulares (como en la figura). Sea y la distancia del extremo "sur" de la aguja hasta la recta más cercana hacia el norte. (Si el extremo sur de la aguja queda sobre una recta, sea $y = 0$. Si la aguja queda en dirección este-oeste, considérese que el extremo "oeste" es el extremo "sur".) Sea θ el ángulo que la aguja forma con un rayo que se extiende hacia el este desde el extremo "sur". Entonces $0 \leq y \leq L$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. Note que la aguja cruza una de las rectas sólo cuando $y < h \operatorname{sen} \theta$. Ahora bien, se puede identificar el conjunto total de posibilidades para la aguja con la región rectangular $0 \leq y \leq L$, $0 \leq \theta \leq \pi$, y la proporción de veces que la aguja cruza una recta es la razón

$$\frac{\text{área debajo de } y = h \operatorname{sen} \theta}{\text{área del rectángulo}}$$

Esta razón es la probabilidad de que la aguja cruce una recta. Encuentre la probabilidad de que esto ocurra si $h = L$. ¿Qué sucede si $h = L/2$?

10. Si la aguja del problema 9 tiene longitud $h > L$, es posible que la aguja corte más de una recta.

(a) Si $L = 4$, halle la probabilidad de que una aguja de longitud 7 se interseque con cuando menos una recta.
[*Sugerencia*: Se puede proceder como en el problema 9. Definimos y como antes; entonces el conjunto total de posibilidades para la aguja se puede identificar con la misma región rectangular $0 \leq y \leq L$, $0 \leq \theta \leq \pi$. ¿Qué porción del rectángulo corresponde a que la aguja se interseque con una recta?]

(b) Si $L = 4$, halle la probabilidad de que una aguja de longitud 7 interseque con *dos* líneas.

(c) Si $2L < h \leq 3L$, halle una fórmula general para la probabilidad de que la aguja interseque tres rectas

9 Ecuaciones diferenciales

Las fotografías ilustran tres situaciones que se analizan con ecuaciones diferenciales en este capítulo: el crecimiento de las poblaciones de peces, la interacción de las poblaciones del lince de Canadá y de la liebre de las nieves y la colocación de un jugador del cuadro en béisbol para realizar un tiro de relevo al plato de home.

Quiza las más importantes de todas las aplicaciones del cálculo sean las ecuaciones diferenciales. Cuando los científicos de física o de las ciencias sociales utilizan el cálculo, lo más frecuente es que tengan que analizar una ecuación diferencial que ha surgido en el proceso de modelado de algún fenómeno en estudio. Aun cuando con frecuencia es imposible hallar una fórmula explícita para la solución de una ecuación diferencial, veremos que los procedimientos gráficos y numéricos proporcionan la información necesaria.

9.1 Modelado con ecuaciones diferenciales

Este es un buen momento para leer (o releer) el análisis del modelado matemático, de la página 24.

En la descripción del proceso de modelado (sección 1.2), hablamos acerca de formular un modelo matemático de un problema del mundo real a través de un razonamiento intuitivo acerca del mismo o a partir de leyes físicas basadas en la evidencia proveniente de la experimentación. El modelo matemático a menudo toma la forma de una *ecuación diferencial*; es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas. Esto no resulta sorprendente debido a que, en un problema del mundo real, con frecuencia advertimos que ocurren cambios y queremos predecir el comportamiento futuro sobre la base de cómo cambian los valores actuales. Empecemos por examinar varios ejemplos de la forma en que surgen las ecuaciones diferenciales cuando modelamos los fenómenos físicos.

Modelos de crecimiento de población

Un modelo para el crecimiento de una población se basa en la hipótesis de que ésta crece con una rapidez proporcional a su tamaño. Es una hipótesis razonable para una población de bacterias o de animales en condiciones ideales (medio ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, inmunidad ante las enfermedades).

Identifiquemos y nombremos las variables en este modelo:

t = tiempo (variable independiente)

P = cantidad de individuos en la población (variable dependiente)

La tasa de crecimiento de una población es la derivada dP/dt. De modo que nuestra hipótesis de que la rapidez de crecimiento de esa población es porporcional a su tamaño se escribe como la ecuación

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad. La ecuación 1 es el primer modelo para el crecimiento de las poblaciones; es una ecuación diferencial porque contiene una función desconocida P y su derivada dP/dt.

Luego de formular un modelo, veamos sus consecuencias. Si descartamos una población de 0, entonces $P(t) > 0$ para toda t. De modo que, si $k > 0$, entonces la ecuación 1 indica que $P'(t) > 0$ para toda t. Esto significa que la población crece siempre. De hecho, a medida que $P(t)$ aumenta, la ecuación 1 muestra que dP/dt se vuelve más grande. En otras palabras, la tasa de crecimiento aumenta al incrementarse la población.

Intentemos pensar en una solución de la ecuación 1, la cual nos pide hallar una función cuya derivada sea un múltiplo constante de ella. Sabemos que las funciones exponenciales tiene esa propiedad. De hecho, con $P(t) = Ce^{kt}$ tenemos:

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Por tanto, cualquier función exponencial de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ es una solución de la ecuación 1. Cuando la estudiemos con detalle en la sección 9.4, veremos que no hay otra solución.

Si dejamos que C varíe sobre todos los números reales, obtenemos la *familia* de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ cuyas gráficas se ilustran en la figura 1. Pero las poblaciones sólo tienen valores positivos y, por consiguiente, sólo nos interesan las soluciones con $C > 0$ y es probable que sólo tengamos interés en valores de t mayores que el instante inicial $t = 0$. En la figura 2 se muestran las soluciones con significado físico. Con $t = 0$, obtenemos $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que la constante C resulta ser la población inicial $P(0)$.

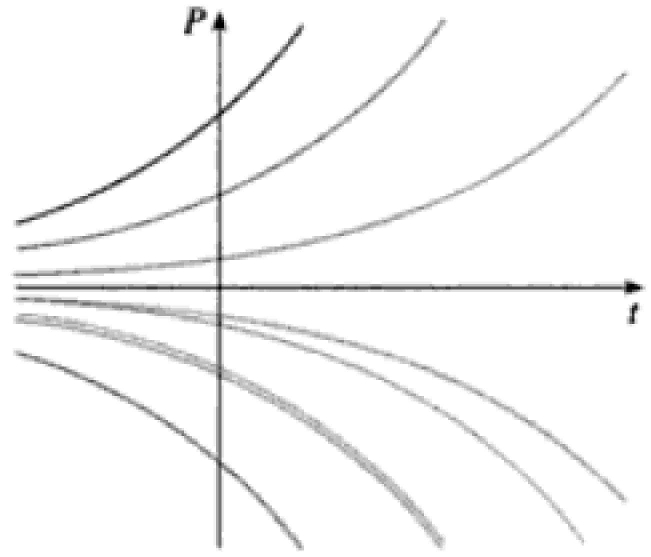


FIGURA 1
Familia de soluciones $dP/dt = kP$

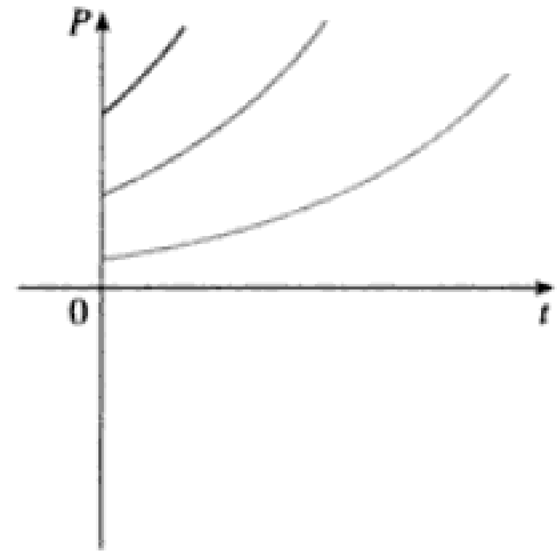


FIGURA 2
Familia de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ con $C > 0$ y $t \geqslant 0$

La ecuación 1 es apropiada para modelar el crecimiento de poblaciones en condiciones ideales, pero tenemos que reconocer que un modelo más realista debe reflejar que un medio dado tiene recursos limitados. Muchas poblaciones empiezan creciendo de una manera exponencial, pero se nivelan cuando tienden a su *capacidad de contención* K (o decrecen hacia K, si llegaran a sobrepasarla). Para que un modelo tome en cuenta ambas tendencias, establecemos dos hipótesis:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ P es pequeña (En un inicio, la tasa de crecimiento es proporcional a P.)
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ si $P > K$ (P decrece si sobrepasa a K.)

Una expresión sencilla que incorpora las dos hipótesis es la ecuación

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Advierta que si P es pequeña en comparación con K, entonces P/K es negativa y, como consecuencia, $dP/dt \approx kP$. Si $P > K$, entonces $1 - P/K$ es negativa y, por consiguiente, $dP/dt < 0$.

La ecuación 2 se llama *ecuación diferencial logística* y el biólogo matemático holandés Verhulst la propuso, como un modelo para el crecimiento de la población mundial en la década de 1840. En la sección 9.5, desarrollaremos técnicas que nos capaciten para hallar soluciones explícitas de la ecuación logística pero, por ahora, podemos deducir características cualitativas de las soluciones directamente de la ecuación 2. En primer lugar, observemos que las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = K$ son soluciones porque, en cualquiera de los dos casos, uno de los factores del segundo miembro de la ecuación 2 es cero. (Es evidente que esto tiene sentido físico: si la población fuera 0 o se encontrara en la capacidad de contención ahí permanecerá.) Estas dos soluciones constantes se llaman *soluciones de equilibrio*.

Si la población inicial $P(0)$ se encuentra entre 0 y K, el segundo miembro de la ecuación 2 es positivo, de modo que $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si sobrepasa la capacidad de contención ($P > K$), entonces $1 - P/K$ es negativo, de donde $dP/dt < 0$ y la población decrece. En cualquiera de los dos casos, si la población tiende a la capacidad de contención ($P \to K$), entonces $dP/dt \to 0$, lo cual significa que la curva de población tiende a la horizontal. Por lo tanto, esperamos que las soluciones de la ecuación logística tengan gráficas similares a las de la figura 3. Note que las gráficas se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = K$.

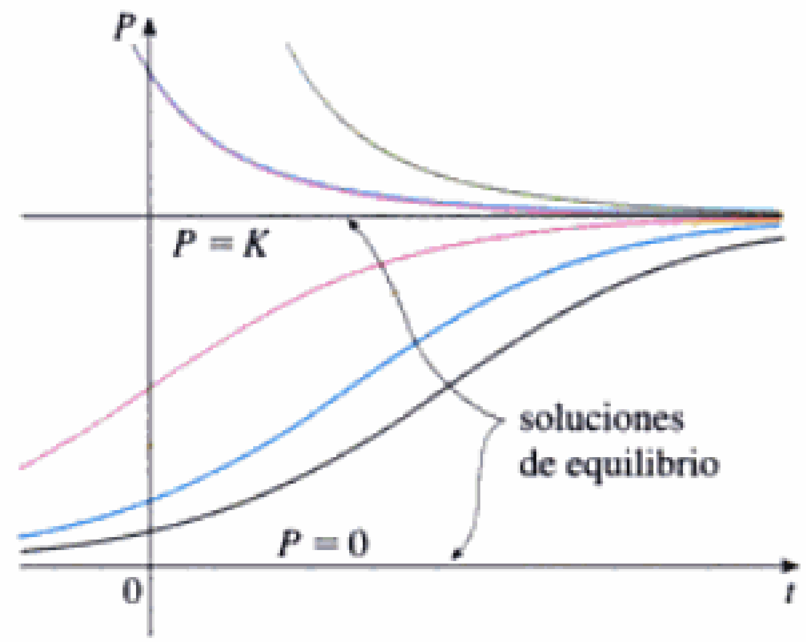


FIGURA 3
Soluciones de la ecuación logística

Modelo para el movimiento de un resorte

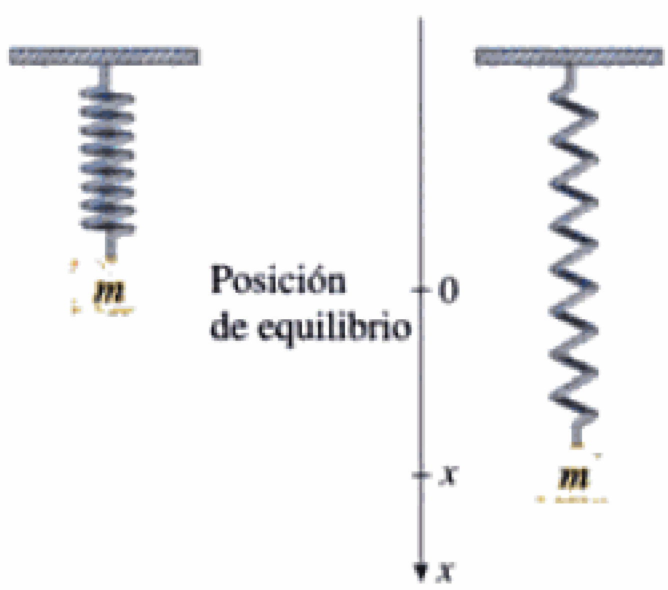


FIGURA 4

Ahora veamos un ejemplo de un modelo proveniente de la ciencia física. Consideremos el movimiento de un objeto con masa m en el extremo de un resorte vertical (como en la Fig. 4). En la sección 6.4 se analizó la ley de Hooke, la cual afirma que si se estira (o se comprime) el resorte x unidades desde su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x:

$$\text{fuerza de restitución} = -kx$$

donde k es una constante positiva (llamada *constante del resorte*). Si ignoramos cualesquiera fuerzas externas de resistencia (debidas a la resistencia del aire o a la fricción) entonces, por la segunda ley de Newton (la fuerza es igual a la masa multiplicada por la aceleración), tenemos

$$\boxed{3} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Éste es un ejemplo de una *ecuación diferencial de segundo orden* porque comprende segundas derivadas. Veamos qué podemos inferir de la forma de la solución directamente de la ecuación. Volvemos a escribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

lo cual expresa que la segunda derivada de x es proporcional a x pero tiene el signo opuesto. Conocemos dos funciones con esta propiedad: seno y coseno. De hecho, resulta que todas las soluciones de la ecuación 3 se pueden escribir como combinaciones de ciertas funciones seno y coseno. (Véase el Ejer. 3.) Esto no resulta sorprendente: esperamos que el resorte oscile alrededor de su posición de equilibrio y, por consiguiente, es natural que pensemos que intervienen las funciones trigonométricas.

Ecuaciones diferenciales generales

En general, una **ecuación diferencial** contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas. El **orden** de una ecuación diferencial es el correspondiente a la derivada de orden más alto que se tenga en la ecuación. Por tanto, las ecuaciones 1 y 2 son de primer orden y la ecuación 3 es de segundo orden. En las 3 la variable independiente se llama t y representa el tiempo pero, en general, la variable independiente no tiene que representar tiempo. Por ejemplo, cuando consideramos la ecuación diferencial

$$\boxed{4} \qquad y' = xy$$

se entiende que y es una función desconocida de x.

Se dice que una función f es una **solución** de una ecuación diferencial si ésta se satisface cuando se sustituyen $y = f(x)$ y sus derivadas en ella. Así pues, f es una solución de la ecuación 4 si

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos los valores de x en algún intervalo.

Cuando se nos pide que *resolvamos* una ecuación diferencial, se espera que hallemos todas las soluciones posibles de la ecuación. Ya hemos resuelto algunas ecuaciones diferenciales particularmente sencillas; a saber, las de la forma

$$y' = f(x)$$

Por ejemplo, sabemos que la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = x^3$$

es

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Pero, en general, resolver una ecuación diferencial no es un asunto fácil. No existe una técnica sistemática que nos permita resolver todas las ecuaciones diferenciales. Pero en la sección 9.2 veremos cómo dibujar gráficas aproximadas de las soluciones, incluso cuando no tengamos fórmula explícita; hay además métodos que nos permitirán hallar aproximaciones numéricas para las soluciones.

EJEMPLO 1 □ Demuestre que todos los miembros de la familia de funciones

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

son solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUCIÓN Usemos la regla del cociente con el fin de derivar la expresión para y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

EJEMPLO 2 Suponga que en el circuito simple de la figura 9 la resistencia es de 12Ω, la inductancia es de 4 H y una batería proporciona un voltaje constante de 60 V.

(a) Dibuje un campo direccional para la ecuación 1, con estos valores.
(b) ¿Qué puede decir acerca del valor límite de la corriente?
(c) Identifique cualesquiera soluciones de equilibrio.
(d) Si se cierra el interruptor cuando $t = 0$, de modo que la corriente arranca con $I(0) = 0$, use el campo direccional para dibujar la curva solución.

SOLUCIÓN

(a) Si ponemos $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$ en la ecuación 1, obtenemos

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

En la figura 10 se ve el campo direccional para esta ecuación diferencial

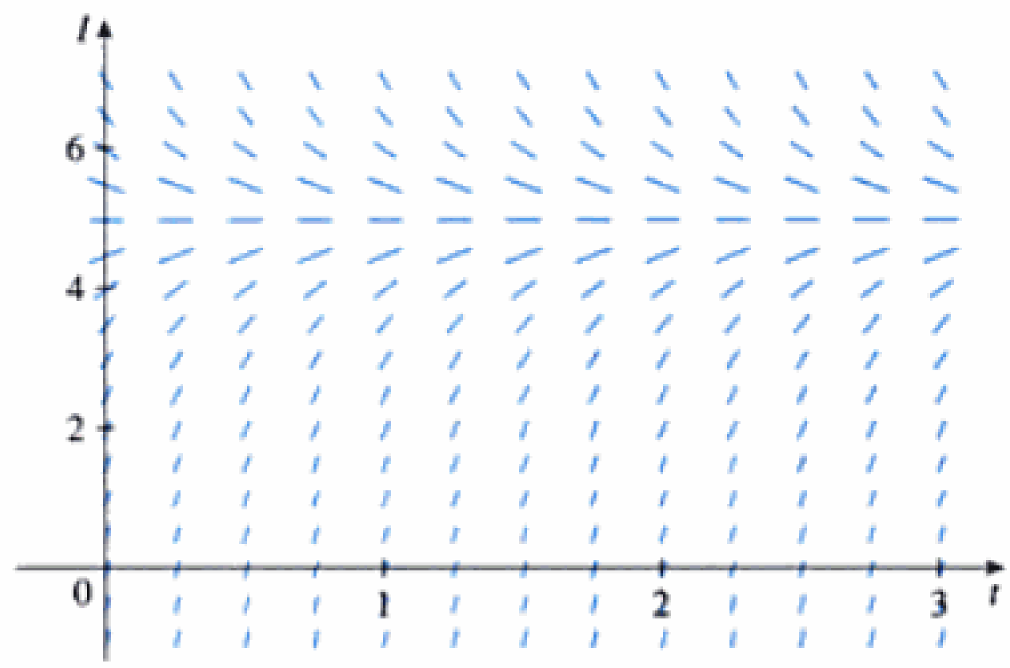


FIGURA 10

(b) A partir del campo direccional, se aprecia que todas las soluciones tienden al valor de 5 A; es decir

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 5$$

$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I$

(c) Se ve que la función constante $I(t) = 5$ es una solución de equilibrio. En efecto, a partir de la ecuación diferencial podemos comprobar esto directamente. Si $I(t) = 5$, entonces el segundo miembro es $dI/dt = 0$ y el segundo miembro es $15 - 3(5) = 0$.

(d) Usemos el campo direccional para dibujar la curva solución que pasa por (0, 0), como indica la línea continua en la figura 11.

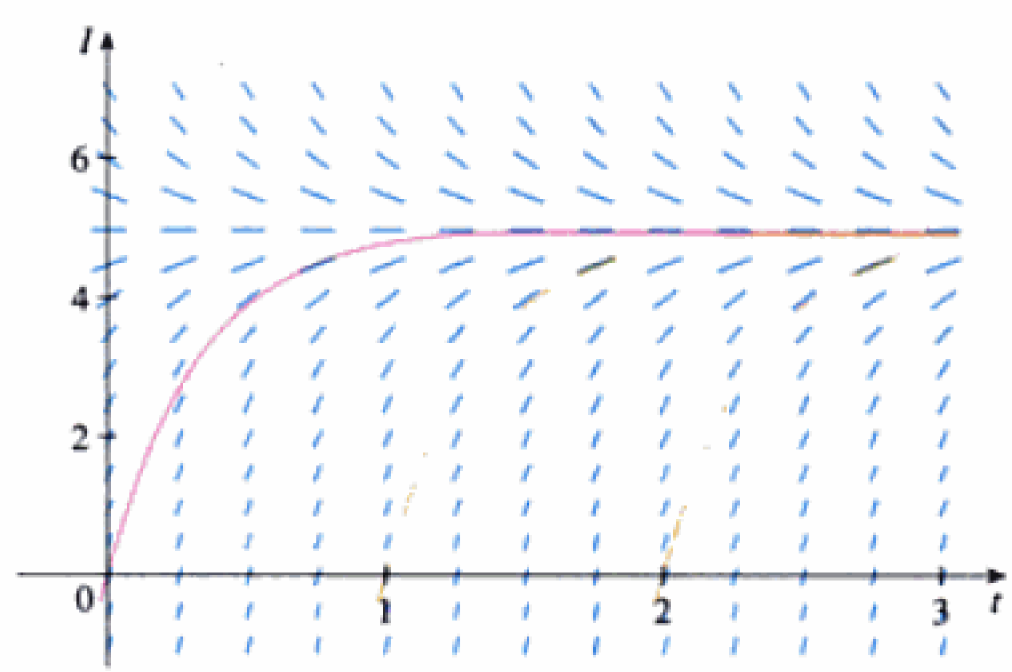


FIGURA 11

□

En la figura 10 advierta que los segmentos rectilíneos a lo largo de cualquier horizontal son paralelos. Esto se debe a que la variable t no aparece en el segundo miembro de la ecuación $I' = 15- 3I$. En general, una ecuación diferencial de la forma

$$y' = f(y)$$

en la que falta la variable independiente en el segundo miembro se conoce como **autónoma**. Para una ecuación de ese tipo, las pendientes correspondientes a dos puntos diferentes con la misma ordenada deben ser iguales. Esto significa que si conocemos una solución para una ecuación diferencial autónoma, podemos obtener una infinidad de otras con sólo desplazar la gráfica de la solución conocida hacia la derecha o la izquierda. En la figura 11 hemos mostrado las soluciones que resultan al mover la curva solución del ejemplo 2 una y dos unidades a la derecha. Corresponden a cerrar el interruptor en $t = 1$ y $t = 2$. Observe que el sistema se comporta igual en cada caso, para todo tiempo.

Método de Euler

Se puede aplicar la idea básica que se encuentra detrás de los campos direccionales con el fin de hallar aproximaciones numéricas para las soluciones de ecuaciones diferenciales. Ilustremos el método en el problema con valor inicial que usamos en la presentación de los campos direccionales:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

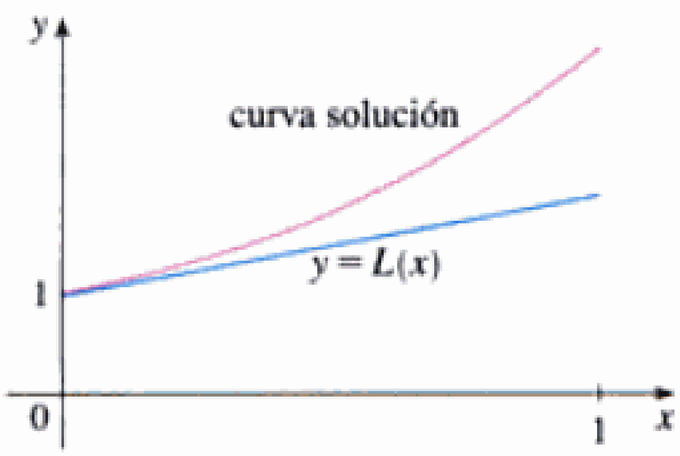


FIGURA 12
Primera aproximación de Euler

La ecuación diferencial dice que $y'(0) = 0 + 1 = 1$, de forma que la curva solución tiene la pendiente 1 en el punto (0, 1). Como una primera aproximación para obtener la solución, podríamos usar la aproximación lineal $L(x) = x + 1$. En otras palabras, la recta tangente en (0, 1) sirve como una aproximación burda de la curva solución (véase la Fig. 12).

La idea de Euler fue mejorar esta aproximación al avanzar sólo una corta distancia a lo largo de esta tangente y, a continuación, efectuar una corrección a medio camino al cambiar la dirección según lo indique el campo direccional. En la figura 13 se presenta lo que sucede si partimos a lo largo de la recta tangente, pero nos detenemos cuando $x = 0.5$. (Esta distancia horizontal recorrida se llama *tamaño del paso*.) Dado que $L(0.5) = 1.5$, tenemos $y(0.5) \approx 1.5$ y tomamos (0.5, 1.5) como el punto de partida para un nuevo segmento rectilíneo. La ecuación diferencial dice que $y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2$, por lo que usamos la función lineal

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

como una aproximación de la solución, para $x > 0.5$ (el segmento amarillo en la Fig. 13). Si disminuimos el tamaño del paso de 0.5 a 0.25, obtenemos una mejor aproximación de Euler que se presenta en la figura 14.

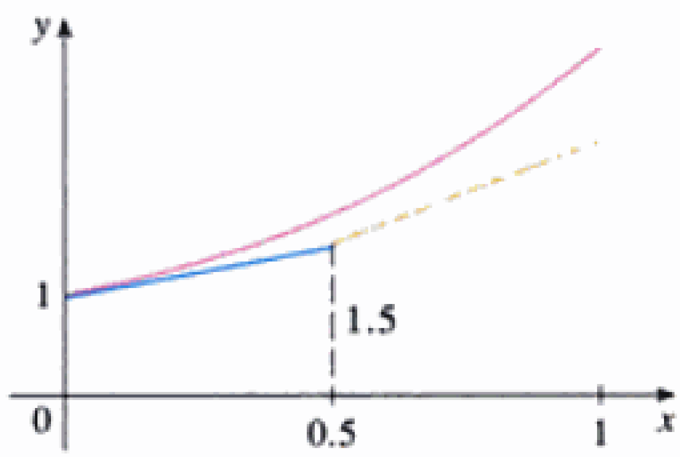


FIGURA 13
Aproximación de Euler con tamaño del paso de 0.5

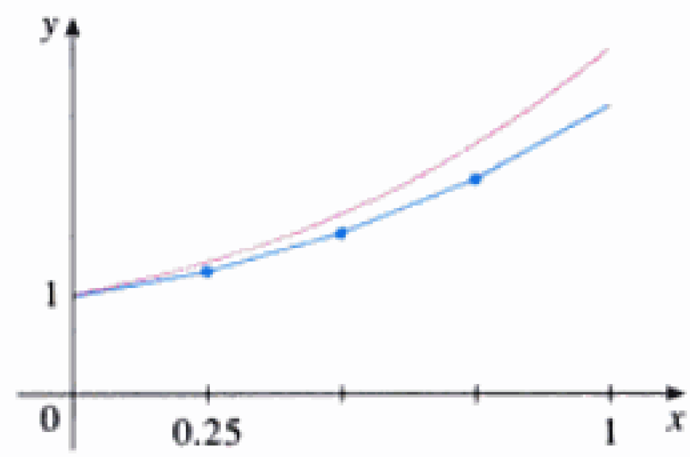


FIGURA 14
Aproximación de Euler con tamaño del paso de 0.25

En general, el método de Euler dice que se parta del punto que da el valor inicial y se avance en la dirección que indica el campo direccional. Deténgase después de un corto lapso, observe la pendiente en el nuevo lugar y avance en esta dirección. Vuelva a detenerse

Advierta que las estimaciones de Euler de la tabla parecen tender a límites; a saber, los valores verdaderos de $y(0.5)$ y $y(1)$. En la figura 16 se ilustran las gráficas de las aproximaciones de Euler con tamaños de paso 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01 y 0.005. Tienden a la curva solución exacta a medida que el tamaño del paso se acerca a 0.

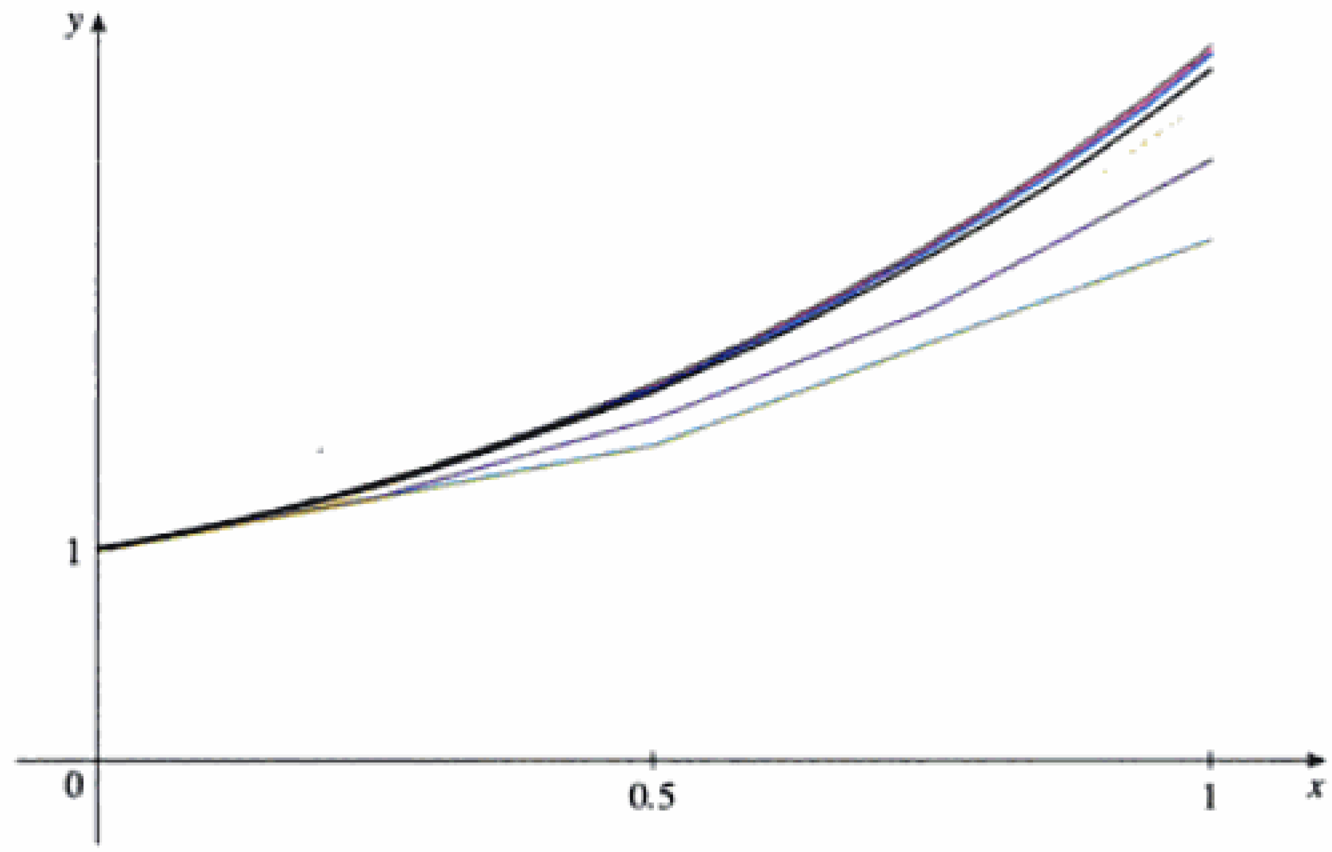


FIGURA 16
Aproximaciones de Euler que tienden a la solución exacta

EJEMPLO 4 □ En el ejemplo 2 se analizó un circuito eléctrico simple con resistencia de 12 Ω, inductancia de 4 H y una batería con voltaje de 60 V. Si se cierra el interruptor cuando $t = 0$, modelamos la corriente I en el instante t con el problema con valor inicial.

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime la corriente en el circuito medio segundo después de que se cierra el interruptor.

SOLUCIÓN Aplicamos el método de Euler con $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ y tamaño del paso $h = 0.1$ segundo:

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3 \cdot 0) = 1.5$$

$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3 \cdot 1.5) = 2.55$$

$$I_3 = 2.55 + 0.1(15 - 3 \cdot 2.55) = 3.285$$

$$I_4 = 3.285 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.285) = 3.7995$$

$$I_5 = 3.7995 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.7995) = 4.15965$$

De modo que la corriente después de 0.5 segundo es

$$I(0.5) \approx 4.16 \text{ A}$$ □

(c) ¿Existe una solución de equilibrio?
(d) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el campo direccional para dibujar la curva solución.
(e) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el método de Euler con tamaño del paso 0.1 para estimar la carga al medio segundo.

28. En el ejercicio 12 de la sección 9.1, consideramos la temperatura de una taza de café a 95 °C en un cuarto a 20 °C. Suponga que se sabe que el café se enfría con una rapidez de 1 °C por minuto cuando su temperatura es de 70 °C.
(a) ¿Cómo queda la ecuación diferencial en este caso?
(b) Dibuje un campo direccional y úselo para trazar la curva solución del problema con valor inicial. ¿Cuál es el valor límite de la temperatura?
(c) Use el método de Euler con paso $h = 2$ minutos para estimar la temperatura del café luego de 10 minutos.

9.3 Ecuaciones separables

Hemos considerado las ecuaciones diferenciales de primer orden desde un punto de vista geométrico (campos direccionales) y desde un punto de vista numérico (método de Euler). ¿Qué podemos decir del punto de vista simbólico? Sería muy bueno contar con una fórmula explícita para una solución de una ecuación diferencial. Por desgracia, no siempre es posible. Pero en esta sección examinaremos cierto tipo de ecuaciones diferenciales que *pueden* resolverse de manera explícita.

Una **ecuación separable** es una ecuación diferencial de primer orden en la cual la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x multiplicada por una función de y. En otras palabras, puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

El nombre *separable* proviene del hecho de que la expresión del segundo miembro se puede "separar" en una función de x y otra de y. En forma equivalente, si $f(y) \neq 0$ podríamos escribir

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver esta ecuación, la volvemos a escribir en la forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

□ James Bernoulli (en 1690), al resolver un problema acerca de los péndulos, y Leibniz (en una carta dirigida a Huygens, en 1691) fueron los primeros en aplicar la técnica para resolver las ecuaciones diferenciales separables. John Bernoulli explicó el método general en un artículo publicado en 1694.

de modo que todas las y están en uno de los miembros de la ecuación y todas las x están en el otro. Entonces integramos los dos miembros de la ecuación

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

La ecuación 2 define y implícitamente como una función de x. En algunos casos, es posible que podamos "despejar" y en términos de x.

La justificación del paso expresado en la ecuación 2 viene de la regla de sustitución

$$\begin{aligned}\int h(y)\,dy &= \int h(y(x))\,\frac{dy}{dx}\,dx \\ &= \int h(y(x))\,\frac{g(x)}{h(y(x))}\,dx \qquad \text{(de la ecuación 1)} \\ &= \int g(x)\,dx\end{aligned}$$

es decir $$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Observamos que la función $y = 0$ también es una solución de la ecuación diferencial dada. De modo que podemos escribir la solución general en la forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

donde A es una constante arbitraria ($A = e^C$, o bien $A = -e^C$, o $A = 0$). □

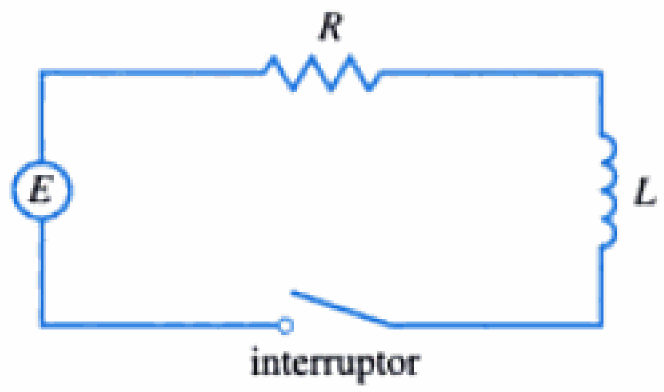


FIGURA 4

EJEMPLO 3 En la sección 9.2 modelamos la corriente $I(t)$ en el circuito eléctrico que se muestra en la figura 4 con la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encuentre una expresión para la corriente en el circuito, donde la resistencia es de 12 Ω, la inductancia es de 4 H, una batería suministra un voltaje constante de 60 V y el interruptor se cierra cuando $t = 0$. ¿Cuál es el valor límite de la corriente?

SOLUCIÓN Con $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$, la ecuación queda

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60$$

o $$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

y el problema con valor inicial es

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Reconocemos esta ecuación como separable y la resolvemos como sigue:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt$$

$$-\tfrac{1}{3}\ln|15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t}$$

En la figura 5 se muestra de qué manera la solución del ejemplo 3 (la corriente) tiende a su valor límite. Si se compara con la figura 11 de la sección 7.2, se ve que pudimos trazar una curva solución bastante exacta a partir del campo direccional.

Puesto que $I(0) = 0$, tenemos $5 - \frac{1}{3}A = 0$, de modo que $A = 15$ y la solución es

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

La corriente límite es

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t}$$

$$= 5 - 0 = 5$$ □

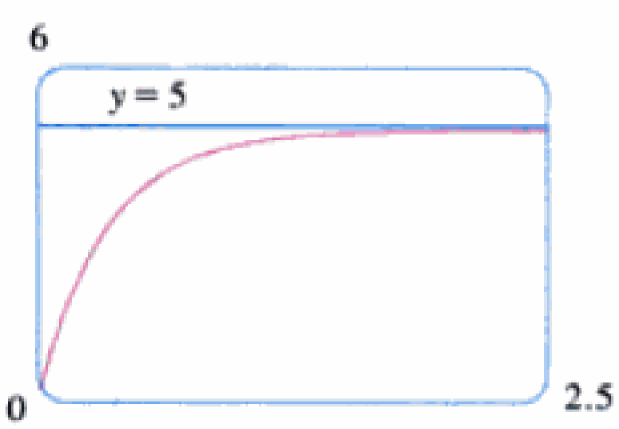


FIGURA 5

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que cruza con cada una de las curvas de la familia de manera ortogonal; es decir, forma ángulos rectos (véase la Fig. 6.). Por ejemplo, cada miembro de la familia $y = mx$ de rectas que pasan por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia $x^2 + y^2 = r^2$ de círculos concéntricos con centro en el origen (véase la Fig. 7). Decimos que las dos familias son trayectorias ortogonales una de la otra.

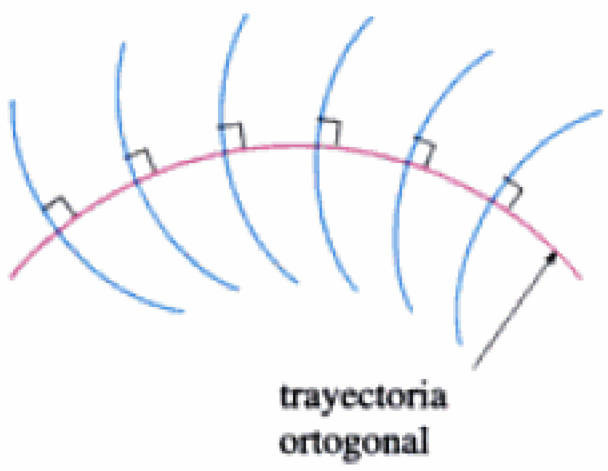


FIGURA 6

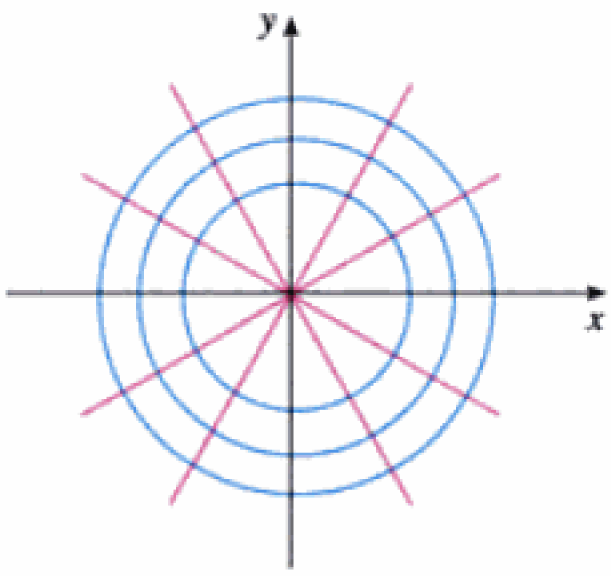


FIGURA 7

EJEMPLO 4 □ Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = ky^2$, donde k es una constante arbitraria.

SOLUCIÓN Las curvas $x = ky^2$ forman una familia de parábolas cuyo eje de simetría es el eje x. El primer paso es hallar una ecuación diferencial que satisfagan todos los miembros de la familia. Si derivamos $x = ky^2$, obtenemos

$$1 = 2ky\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Ésta es una ecuación diferencial, pero depende de k. Para eliminar k observamos que a partir de la ecuación de la parábola general dada $x = ky^2$, tenemos $k = x/y^2$, por consiguiente, la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}\,y}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Esto significa que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una de las parábolas es $y' = y/(2x)$. En una trayectoria ortogonal, la pendiente de la recta tangente debe ser la recíproca negativa de esta pendiente. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

Esta ecuación diferencial es separable y la resolvemos como sigue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

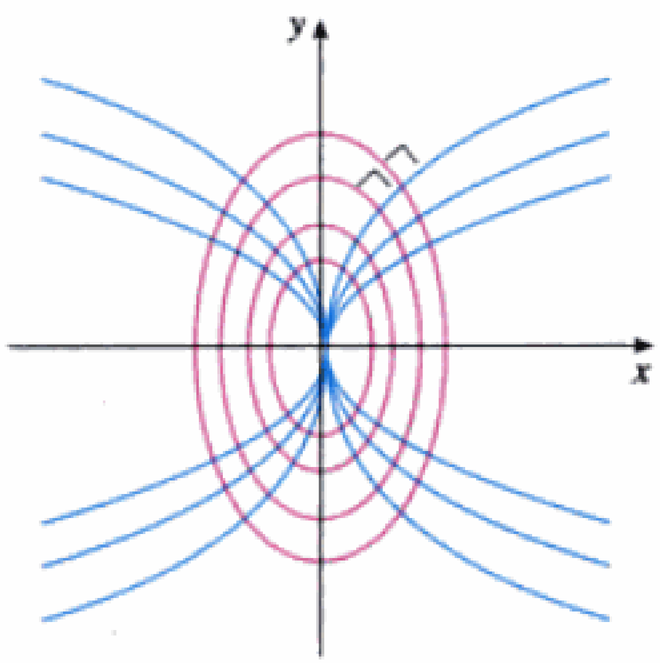


FIGURA 8

donde C es una constante positiva arbitraria. Así pues, las trayectorias ortogonales son la familia de elipses dadas por la ecuación 4 y que se ilustran en la figura 8. □

Las trayectorias ortogonales se presentan en diversas ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático, las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante; en la aerodinámica, las líneas de corriente son las trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales de la velocidad.

Problemas con mezclas

Un problema típico de mezclado comprende un tanque de capacidad fija lleno con una solución completamente mezclada de alguna sustancia (digamos, sal). Una solución de concentración dada entra al tanque a razón fija y la mezcla, por completo agitada, sale a una razón fija, la cual puede ser diferente a la de entrada. Si $y(t)$ denota la cantidad de sustancia en el tanque en el instante t, entonces $y'(t)$ es la razón a la cual se agrega esa sustancia menos la razón a la cual se extrae. La descripción matemática de esta situación a menudo conduce a una ecuación diferencial separable de primer orden. Podemos aplicar el mismo tipo de razonamiento para modelar diversidad de fenómenos: reacciones químicas, descarga de contaminantes en un lago, inyección de un medicamento en la corriente sanguínea.

EJEMPLO 5 Un tanque contiene 20 kg de sal disueltos en 5000 L de agua. Le entra salmuera con 0.03 kg de sal por litro de agua, a razón de 25 L/min. La solución se mantiene completamente mezclada y se drena del tanque con la misma rapidez. ¿Cuánta sal queda en el tanque después de media hora?

SOLUCIÓN Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos. Se nos da que $y(0) = 20$ y queremos hallar $y(30)$. Para esto encontramos una ecuación diferencial que satisfaga $y(t)$. Note que dy/dt es la razón de cambio de la cantidad de sal; así pues,

$$\frac{dy}{dt} = (\text{razón de entrada}) - (\text{razón de salida}) \tag{5}$$

donde (razón de entrada) es la razón a la cual la sal entra al tanque y (razón de salida) es la razón a la que sale del mismo. Tenemos

$$\text{razón de entrada} = \left(0.03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0.75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

El tanque siempre contiene 5000 L de líquido, de modo que la concentración en el instante t es $y(t)/5000$ (medida en kilogramos por litro). Puesto que la salmuera fluye hacia fuera a razón de 25L/min, tenemos

$$\text{razón de salida} = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

En la figura 9 se ilustra la gráfica de la función $y(t)$ del ejemplo 5. Advierta que a medida que pasa el tiempo, la cantidad de sal tiende a 150 kg.

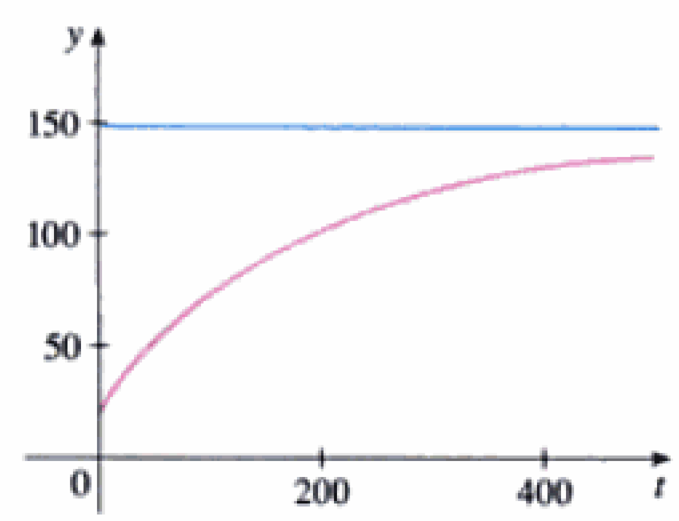


FIGURA 9

Por tanto, de la ecuación 5, obtenemos

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Si se resuelve esta ecuación diferencial separable, se obtiene

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Dado que $y(0) = 20$, tenemos $-\ln 130 = C$, por lo que

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Por lo tanto $$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Ya que $y(t)$ es continua y $y(0) = 20$ y el segundo miembro nunca es 0, deducimos que $150 - y(t)$ siempre es positivo. De donde, $|150 - y| = 150 - y$ y, por lo tanto

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

La cantidad de sal después de 30 min es

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$ □

9.3 Ejercicios

1–8 □ Resuelva la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x}}{4y^3}$

3. $yy' = x$

4. $y' = xy$

5. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1 + y^2}}$

6. $y' = \dfrac{xy}{2 \ln y}$

7. $\dfrac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

8. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

9–14 □ Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisfaga la condición inicial dada.

9. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(1) = 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + x}{xy}, \quad x > 0, \quad y(1) = -4$

11. $xe^{-t}\dfrac{dx}{dt} = t, \quad x(0) = 1$

12. $x + 2y\sqrt{x^2 + 1}\,\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1$

13. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

14. $\dfrac{dy}{dt} = te^y, \quad y(1) = 0$

15. Halle la ecuación de la curva que satisfaga $dy/dx = 4x^3y$ y cuya intersección con el eje y sea 7.

16. Encuentre una ecuación de la curva que pase por el punto $(1, 1)$ y cuya pendiente en (x, y) sea y^2/x^3.

17. Resuelva el problema con valor inicial $y' = y \operatorname{sen} x$, $y(0) = 1$ y grafique la solución.

18. Resuelva la ecuación $e^{-y}y' + \cos x = 0$ y grafique varios miembros de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución a medida que varía la constante C?

SAC **19.** Resuelva el problema con valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$ y trace la gráfica de la solución (si su SAC grafica funciones implícitas).

SAC **20.** Resuelva la ecuación $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ y trace la gráfica de varios miembros de la familia de soluciones (si su SAC grafica funciones implícitas). ¿Cómo cambia la curva solución a medida que varía la constante C?

SAC **21–22** □

(a) Obtenga un campo direccional para la ecuación diferencial con un SAC. Obtenga una impresión y úsela para trazar algunas curvas solución sin resolver la ecuación diferencial.

(b) Resuelva la ecuación diferencial.

(c) Use el SAC para trazar varios miembros de la familia de soluciones obtenida en el inciso (b). Compare los resultados con las curvas obtenidas en el inciso (a).

21. $y' = 1/y$

22. $y' = x^2/y$

23–26 □ Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Use un aparato graficador para trazar varios miembros de cada familia en una pantalla.

23. $y = kx^2$

24. $x^2 - y^2 = k$

25. $y = (x + k)^{-1}$

26. $y = ke^{-x}$

27. Resuelva el problema con valor inicial del ejercicio 27 de la sección 9.2 con el fin de hallar una expresión para la carga en el instante t. Encuentre el valor límite de la carga.

28. En el ejercicio 28 de la sección 9.2 analizamos una ecuación diferencial que modela la temperatura de una taza de café a 95 °C en un cuarto a 20 °C. Resuelva la ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para la temperatura del café en el instante t.

29. En el ejercicio 11 de la sección 9.1 formulamos un modelo para el aprendizaje en forma de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

donde $P(t)$ mide el rendimiento de alguien para adquirir una habilidad después de un tiempo de capacitación t, M es el nivel máximo de rendimiento y k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $P(t)$. ¿Cuál es el límite de esta expresión?

30. En una reacción química elemental, las moléculas sencillas de dos reactivos A y B forman una molécula del producto C: A + B → C. La ley de acción de masas afirma que la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B:

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

(Véase el ejemplo 4 de la sección 3.3.) De donde, si las concentraciones iniciales son [A] = a moles/L y [B] = b moles/L, y escribimos x = [C], entonces tenemos

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

SAC (a) Si se supone que $a \neq b$, encuentre x como función de t. Use un SAC para integrar.

(b) Encuentre $x(t)$ suponiendo que $a = b$. ¿Cómo se simplifica esta expresión para $x(t)$ si se sabe que [C] = $a/2$ después de 20 segundos?

31. Por vía intravenosa se administra una solución de glucosa en la corriente sanguínea, a tasa constante r. A medida que se agrega la glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina de la corriente sanguínea a una razón proporcional a la concentración en ese instante. Por tanto, un modelo para la concentración $C = C(t)$ de la solución de glucosa en la corriente sanguínea es

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

donde k es una constante positiva.

(a) Suponga que la concentración en el instante $t = 0$ es C_0. Determine la concentración en cualquier instante t resolviendo la ecuación diferencial.

(b) Si se supone que $C_0 < r/k$, encuentre $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete su respuesta.

32. Cierto país pequeño tiene 10 mil millones de dólares en circulación en papel moneda y cada día entran 50 millones de dólares en sus bancos. El gobierno decide introducir una nueva moneda, haciendo que los bancos reemplacen los billetes viejos con los nuevos conforme les lleguen. Denotemos con $x = x(t)$ la cantidad de la nueva moneda en circulación en el momento t, con $x(0) = 0$.

(a) Formule un modelo matemático en la forma de un problema con valor inicial que represente el "flujo" de la nueva moneda en circulación.

(b) Resuelva el problema con valor inicial planteado en el inciso (a).

(c) ¿Cuánto tiempo pasará para que los nuevos billetes representen 90% del circulante?

33. Un tanque contiene 1000 L de salmuera con 15 kg de sal disuelta y le entra agua pura a razón de 10 L/min. La solución se mantiene completamente mezclada y se drena con la misma rapidez. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de 20 minutos?

34. Un tanque contiene 1000 L de agua pura y le entra salmuera con 0.05 kg de sal por litro de agua a razón de 5 L/min, así como otra salmuera con 0.04 kg de sal por litro de agua a razón de 10 L/min. La solución se mantiene mezclada perfectamente y se drena del tanque con una rapidez de 15 L/min. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de una hora?

35. Cuando cae una gota de lluvia aumenta de tamaño, de modo que su masa en el instante t es función de t, $m(t)$. La razón de crecimiento de la masa es $km(t)$ para alguna constante positiva k. Cuando aplicamos la ley de Newton del movimiento a la gota de lluvia, obtenemos $(mv)' = gm$, donde v es la velocidad de la gota (dirigida hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad. La *velocidad terminal* de la gota de lluvia es $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encuentre una expresión para la velocidad terminal en términos de g y k.

36. Un objeto de masa m se desplaza en dirección horizontal a través de un medio que opone resistencia al movimiento con una fuerza que es función de la velocidad; es decir,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

donde $v = v(t)$ y $s = s(t)$ representan la velocidad y la posición del objeto en el instante t, respectivamente. Por ejemplo, piense en un bote que se mueve por el agua.

(a) Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad; es decir, $f(v) = -kv$, k una constante positiva. Sean $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$ los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier instante t. ¿Cuál es la distancia total que el objeto recorre a partir del instante $t = 0$?

(b) Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad; esto es f, $(v) = -kv^2$, $k > 0$. Sean v_0 y s_0 los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier instante t. ¿Cuál es la distancia total que el objeto recorre en este caso?

37. Sean $A(t)$ el área de un cultivo de tejido en el instante t y M el área final del tejido cuando completa el crecimiento. La mayor parte de la división celular ocurre en la periferia del tejido y el número de células en esa periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. De modo que se obtiene un modelo razonable para el crecimiento tisular si se supone que la razón de crecimiento del área es conjuntamente proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$

(a) Formule una ecuación diferencial y úsela para demostrar que se tiene el crecimiento más rápido cuando $A(t) = M/3$.

(b) Resuelva la ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $A(t)$. Integre con un SAC.

38. Según la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra es

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

donde $x = x(t)$ es la distancia del objeto arriba de la superficie en el instante t, R es el radio de la Tierra y g es la aceleración

3. Sea t_1 el tiempo que tarda la pelota en alcanzar su altura máxima. Demuestre que

$$t_1 = \frac{m}{p} \ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Encuentre este tiempo para una pelota con masa de 1 kg y una velocidad inicial de 20 m/s. Suponga que la resistencia del aire es $\frac{1}{10}$ de la velocidad.

4. Sea t_2 el tiempo en que la pelota cae de regreso a la Tierra. Para la pelota del problema 3, estime t_2 con una gráfica de la función de la altura $y(t)$. ¿Qué es más rápido, subir o bajar?

5. En general, no es fácil hallar t_2 porque es imposible resolver la ecuación $y(t) = 0$ de manera explícita. Sin embargo, podemos usar un método indirecto para determinar si es más rápido ascender o descender; determinemos si $y(2t_1)$ es positivo o negativo.

Demuestre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2 \ln x\right)$$

donde $x = e^{pt_1/m}$. Entonces demuestre $x > 1$ y la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

es creciente para $x > 1$. Use este resultado para decidir si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. ¿Qué concluye? ¿Es más rápido ascender o descender?

9.4 Crecimiento y desintegración exponenciales

Uno de los modelos para el crecimiento de la población que consideramos en la sección 9.1 se basó en la hipótesis de que la población crece con una rapidez proporcional a su tamaño:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

¿Es una hipótesis razonable? Suponga que tenemos una población (de bacterias, por ejemplo) con tamaño $P = 1000$ y que, en cierto momento, crece a razón de $P' = 300$ ejemplares por hora. Ahora, tenemos otras 1000 bacterias del mismo tipo y pongámoslas con la primera población. Cada mitad de la nueva población crece a razón de 300 especímenes por hora. Cabe esperar que en un inicio, la población total de 2000 aumente a razón de 600 bacterias por hora inicialmente (siempre que tengan lugar y nutrición suficientes). De manera que si duplicamos el tamaño, duplicamos la razón (tasa) de crecimiento. En general, parece razonable que la razón (tasa) de crecimiento sea proporcional al tamaño.

La misma hipótesis se aplica en otras situaciones. En física nuclear, la masa de una sustancia radiactiva disminuye a una razón proporcional a la masa. En química, la velocidad de una reacción unimolecular de primer orden es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta de ahorros, con interés compuesto de manera continua, crece con una razón proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el instante t y si la razón de cambio de y con respecto a t es proporcional a su magnitud $y(t)$ en cualquier instante, entonces

1 $$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es una constante. La ecuación 1 a veces recibe el nombre de **ley del crecimiento natural** (si $k > 0$), o bien, **ley de desintegración natural** (si $k < 0$). En virtud de que es una ecuación diferencial separable, podemos resolverla con los métodos de la sección 9.3:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C} = e^{C}e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

donde $A(= \pm e^{C}$ o $0)$ es una constante arbitraria. Para ver el significado de la constante A, observamos que

$$y(0) = Ae^{k\cdot 0} = A$$

Por lo tanto, A es el valor inicial de la función.

Debido a que la ecuación 1 se presenta con gran frecuencia en la naturaleza, resumiremos lo que acabamos de probar para su uso futuro.

2 La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = y_0$$

es

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Crecimiento de las poblaciones

¿Cuál es el significado de la constante de proporcionalidad k? En el contexto del crecimiento de las poblaciones podemos escribir

3
$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

La cantidad

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

es la razón de crecimiento dividida entre el tamaño de la población; se le llama **tasa relativa de crecimiento**. De acuerdo con (3), en lugar de decir, "la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población", podríamos aseverar, "la tasa relativa de crecimiento es constante". Entonces (2) expresa que una población con tasa relativa constante de crecimiento debe hacerlo en sentido exponencial. Advierta que la tasa relativa de crecimiento k aparece como el coeficiente de t en la función exponencial y_0e^{kt}. Por ejemplo, si

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

Estimamos que la población mundial en 1993 fue de

$$P(43) = 2520e^{0.0181(43)} \approx 5488 \text{ millones}$$

El modelo predice que la población en el año 2010 será de

$$P(60) = 2520e^{0.0181(60)} \approx 7465 \text{ millones}$$

La gráfica de la figura 3 hacer ver que el modelo es bastante exacto hasta la fecha, de modo que la estimación para 1993 es confiable. Pero el pronóstico par el 2010 es más arriesgado.

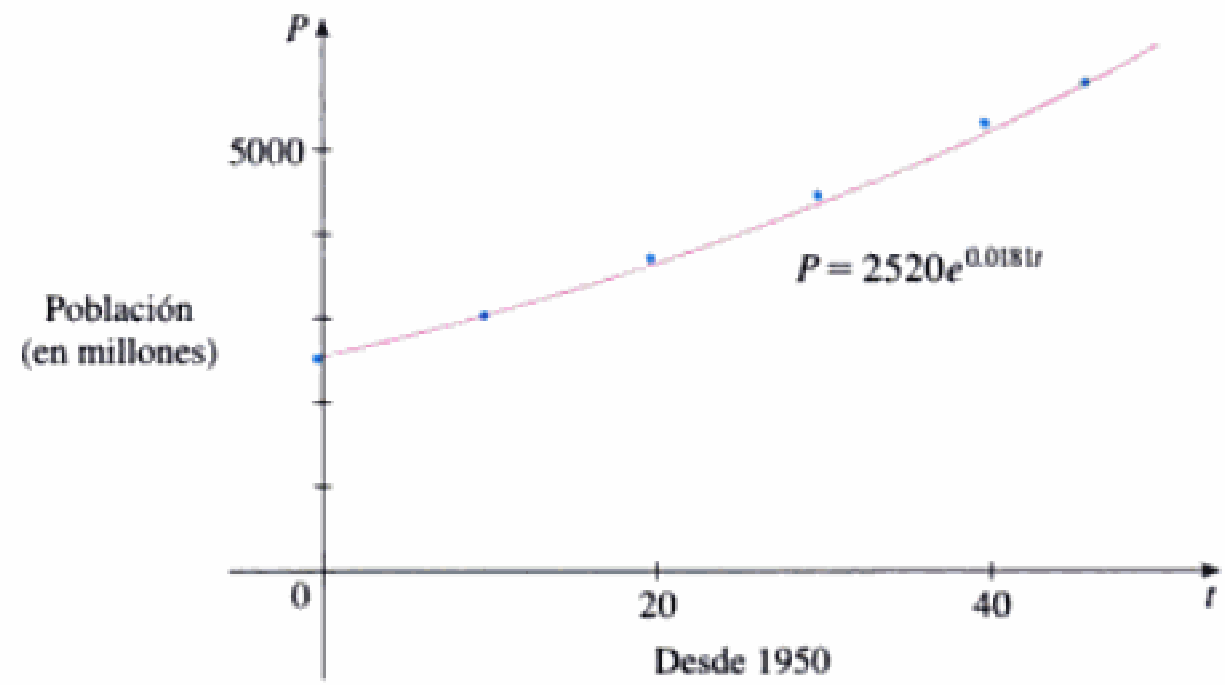


FIGURA 3
Un modelo para el crecimiento de la población mundial en la segunda mitad del siglo XX

□

Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas disminuyen por la emisión espontánea de radiación. Si $m(t)$ es la masa restante a partir de una masa inicial m_0 de la sustancia, después del tiempo t, a nivel experimental se ha encontrado que la rapidez relativa de desintegración

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

se ha encontrado experimentalmente constante. (Cuando dm/dt es negativo, la tasa de desintegración relativa es positiva.) Se sigue que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde k es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas disminuyen con una rapidez proporcional a la masa restante. Esto significa que podemos usar (2) para demostrar que la masa disminuye en forma exponencial:

$$m(t) = m_0e^{kt}$$

Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de la **vida media**, el tiempo requerido para que disminuya la mitad de cualquier cantidad dada.

EJEMPLO 3 □ La vida media del radio 226 ($^{226}_{88}$Ra) es de 1590 años.

(a) Una muestra de radio 226 tiene una masa de 100 mg. Encuentre una fórmula para la masa del $^{226}_{88}$Ra que queda después de t años.

(b) Halle la masa después de 1000 años, correcta hasta el miligramo más cercano.
(c) ¿Cuándo se reducirá la masa hasta 30 mg?

SOLUCIÓN

a) Sea $m(t)$ la masa del radio 226 (en miligramos) restante después de t años. Entonces $dm/dt = km$ y $y(0) = 100$, de modo que (2) nos da

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

Para determinar el valor de k, usemos el hecho de que $y(1590) = \frac{1}{2}(100)$. De donde,

$$100e^{1590k} = 50 \qquad \text{de modo que} \qquad e^{1590k} = \tfrac{1}{2}$$

y

$$1590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

Por lo tanto, $$m(t) = 100e^{-(\ln 2/1590)t}$$

Podríamos utilizar el hecho de que $e^{\ln 2} = 2$, con el fin de escribir la expresión para $m(t)$ en la forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

b) La masa después de 1000 años es

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2/1590)1000} \approx 65 \text{ mg}$$

c) Queremos hallar el valor de t tal que $m(t) = 30$; es decir,

$$100e^{-(\ln 2/1590)t} = 30 \qquad \text{de modo que} \qquad e^{-(\ln 2/1590)t} = 0.3$$

Resolvemos esta ecuación para t tomando el logaritmo natural de ambos miembros:

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

Así $$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762 \text{ años}$$ □

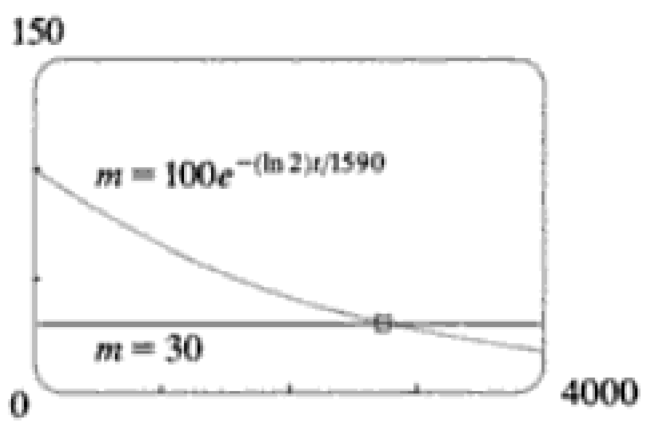


FIGURA 4

Como comprobación de nuestro trabajo en el ejemplo 3, usamos un aparato graficador para graficar $m(t)$ en la figura 4 con la recta horizontal $m = 30$. Estas curvas se cortan cuando $t \approx 2800$, lo cual concuerda con la respuesta del inciso (c).

Interés compuesto en forma continua

EJEMPLO 4 □ Si se invirtieron 1000 dólares a un interés de 6% compuesto anualmente, entonces, después de 1 año, el valor de la inversión es 1000(1.06) = 1060 dólares, luego de 2 años vale [1000(1.06)]1.06 = 1123.60 dólares y, después de t años, vale $1000(1.06)^t$ dólares. En general, si se invierte una cantidad A_0 a una tasa de interés r($r = 0.06$ en este ejemplo) entonces, luego de t años, vale $A_0(1 + r)^t$. Sin embargo, el interés suele componerse con más frecuencia, digamos, n veces al año. Entonces, en cada periodo de com-jardinero, girar y lanzarla al receptor con una velocidad inicial de 105 pies/s. El *manager* mide el tiempo de relevo del parador en corto (captura de la pelota, giro y lanzamiento) en medio segundo. ¿Cuán lejos del plato debe colocarse el parador en corto a fin de minimizar el tiempo total en que la pelota llegue al plato de *home*? ¿El *manager* debe inclinarse por un lanzamiento directo o uno de relevo? ¿Qué sucede si el parador en corto puede lanzar a 115 pies/s?

(c) ¿A que velocidad debe lanzar el parador en corto para que un lanzamiento de relevo tarde lo mismo que uno directo?

9.5 Ecuación logística

En esta sección analizamos con detalle un modelo para el crecimiento de la población, el modelo logístico, más elaborado que el crecimiento exponencial. Para esto usamos todas las herramientas a nuestra disposición: los campos direccionales y el método de Euler de la sección 9.2 y la solución explícita de las ecuaciones diferenciales separables de la sección 9.3. En los ejercicios investigamos otros modelos posibles para el crecimiento de la población, algunos de los cuales toman en cuenta la cosecha y el crecimiento dependiente de las estaciones.

Modelo logístico

Como se analizó en la sección 9.1, con frecuencia una población crece de manera exponencial en sus primeras etapas pero llega el momento en que se nivela y tiende a su capacidad de contención, en virtud de los recursos limitados. Si $P(t)$ es el tamaño de la población en el momento t, se supone que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{si } P \text{ es pequeño}$$

Esto expresa que en un inicio la tasa crecimiento está próxima a ser proporcional al tamaño. En otras palabras, la tasa de crecimiento es casi constante cuando la población es pequeña. Pero también queremos reflejar que la tasa relativa de crecimiento disminuye a medida que aumenta la población y se vuelve negativa si P sobrepasa su **capacidad de contención** K, la población máxima que el medio es capaz de sostener a la larga. La expresión más sencilla para la tasa relativa de crecimiento que incorpora estas hipótesis es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Si multiplicamos por P, obtenemos el modelo para el crecimiento de la población conocido como **ecuación logística diferencial**:

1 $$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$

En la ecuación 1, advierta que si P es pequeño en comparación con K, entonces P/K está cercano a 0 y, por consiguiente, $dP/dt \approx kP$. Pero si $P \to K$ (la población tiende a su capacidad de contención) entonces $P/K \to 1$, de modo que $dP/dt \to 0$. A partir de la ecuación 1 podemos deducir información acerca de si las soluciones crecen o decrecen. Si la población P se encuentra entre 0 y K, el segundo miembro de la ecuación es positivo, por lo cual $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si sobrepasa la capacidad de contención ($P > K$), entonces $1 - P/K$ es negativa, de modo que $dP/dt < 0$ y la población decrece.

Campos direccionales

Iniciemos nuestro análisis más detallado de la ecuación diferencial logística observando un campo direccional.

EJEMPLO 1 □ Trace un campo direccional para la ecuación logística con $k = 0.08$ y capacidad de contención $K = 1000$. ¿Qué puede deducir de las soluciones?

SOLUCIÓN En este caso, la ecuación diferencial logística es

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

En la figura 1 se ilustra un campo direccional para esta ecuación. Sólo mostramos el primer cuadrante porque las poblaciones negativas no tienen significado y nada más nos interesa qué sucede después de $t = 0$.

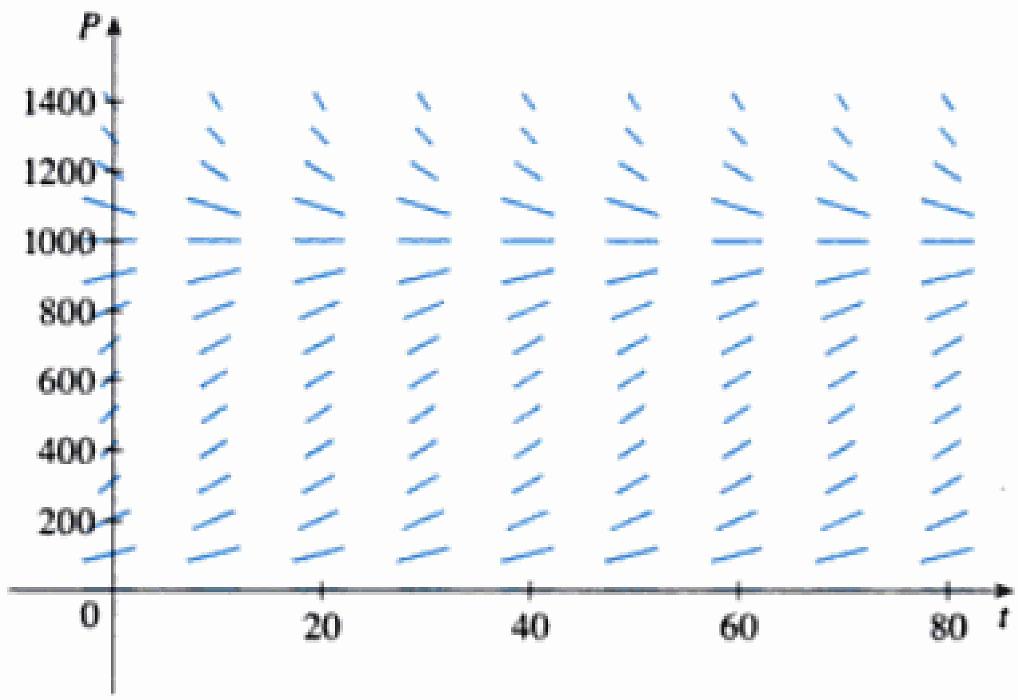


FIGURA 1
Campo direccional para la ecuación logística del ejemplo 1

La ecuación logística es autónoma (dP/dt sólo depende de P, no de t), de suerte que las pendientes son las mismas a lo largo de cualquier recta horizontal. Como era de esperarse, las pendientes son positivas para $0 < P < 1000$ y negativas para $P > 1000$.

Las pendientes son pequeñas cuando P está cerca de 0 o de 1000 (la capacidad de contención). Observe que las soluciones se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = 1000$.

En la figura 2 usamos el campo direccional para trazar las curvas solución con poblaciones iniciales $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ y $P(0) = 1300$. Advierta que las curvas solución que se inician debajo de $P = 1000$ son crecientes y las que comienzan arriba de $P = 1000$ son decrecientes. Las pendientes son más grandes cuando $P \approx 500$ y, por tanto, las curvas solución que se inician debajo de $P = 1000$ tienen puntos de inflexión cuando $P \approx 500$. De hecho, podemos probar que todas las curvas solución que se inician debajo de $P = 500$ tienen un punto de inflexión cuando P es exactamente 500 (véase el Ejerc. 9).

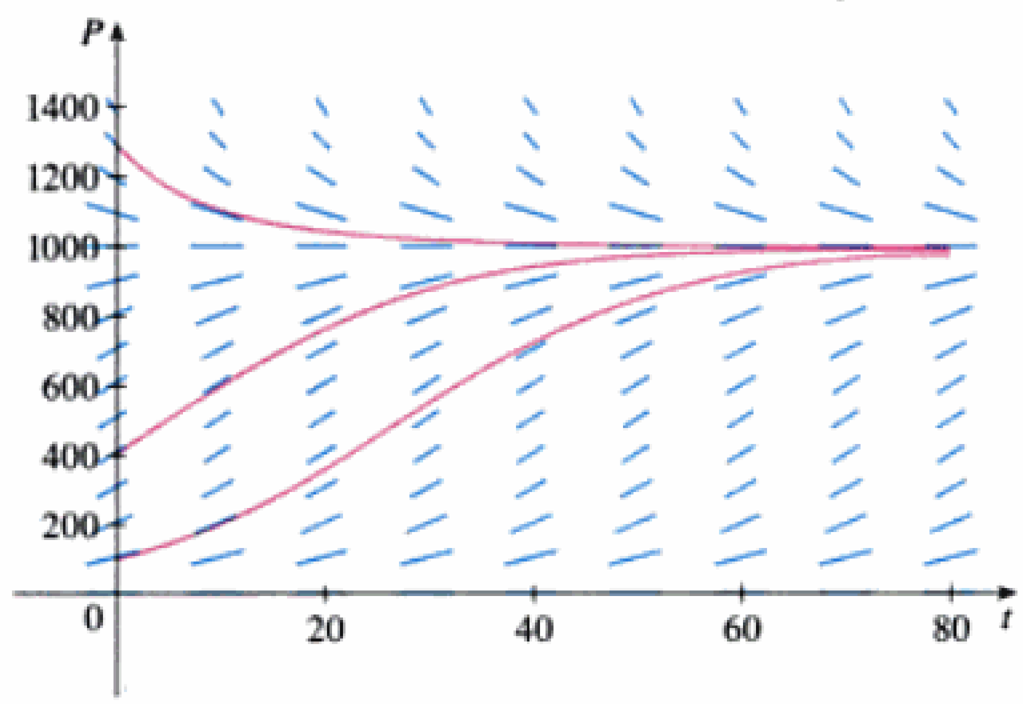


FIGURA 2
Curvas solución para la ecuación logística del ejemplo 1

□

Método de Euler

Ahora apliquemos el método de Euler para estimaciones numéricas de las soluciones de la ecuación logística en tiempos específicos.

EJEMPLO 2 Utilice el método de Euler con tamaños del paso de 20, 10, 5, 1 y 0.1 para estimar los tamaños de la población $P(40)$ y $P(80)$, donde P es la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100$$

SOLUCIÓN Con tamaño del paso $h = 20$, $t_0 = 0$, $P_0 = 100$ y

$$F(t, P) = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

obtenemos, aplicando la notación de la sección 9.2

$$P_1 = 100 + 20F(0, 100) = 244$$

$$P_2 = 244 + 20F(20, 244) \approx 539.14$$

$$P_3 = 539.14 + 20F(40, 539.14) \approx 936.69$$

$$P_4 = 936.69 + 20F(60, 936.69) \approx 1031.57$$

Por tanto, nuestras estimaciones para los tamaños de población en los tiempos $t = 40$ y $t = 80$ son

$$P(40) \approx 539 \qquad P(80) \approx 1032$$

Para tamaños del paso más pequeños, necesitamos programar una calculadora o una computadora. En la tabla siguiente se dan los resultados.

Tamaño del paso	Estimación de Euler de $P(40)$	Estimación de Euler de $P(80)$
20	539	1032
10	647	997
5	695	991
1	725	986
0.1	731	985

□

En la figura 3 se muestra una gráfica de las aproximaciones de Euler con tamaños del paso $h = 10$ y $h = 1$. Vemos que la aproximación de Euler con $h = 1$ es muy similar a la curva solución inferior que trazamos con un campo direccional (Fig. 2).

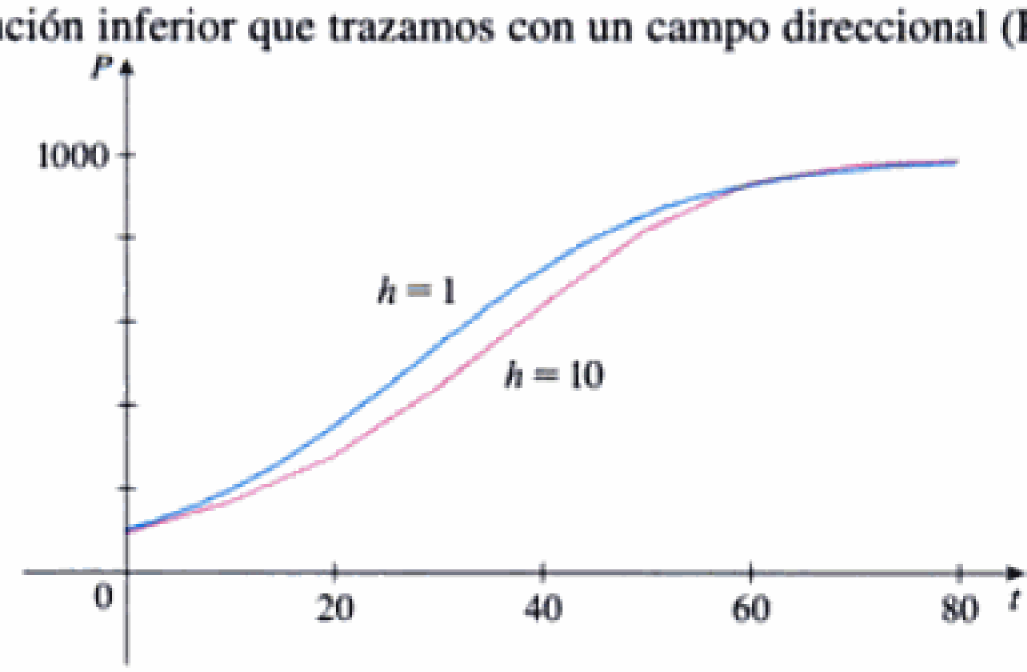


FIGURA 3
Aproximación de Euler de la curva solución del ejemplo 2

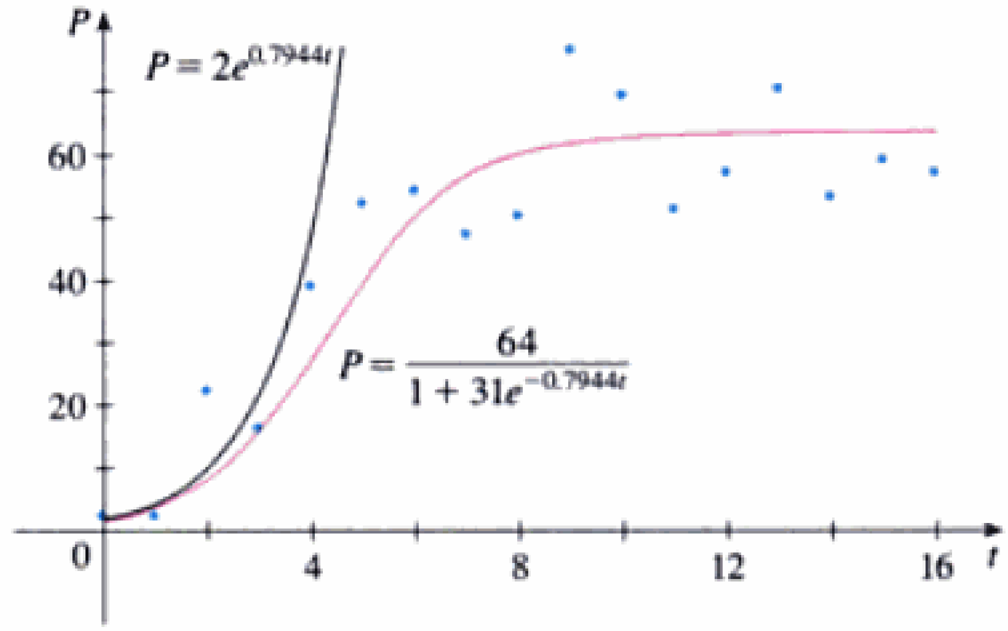


FIGURA 5
Modelos exponencial y logístico para los datos del *Paramecium*

Otros modelos para el crecimiento de las poblaciones

La ley del crecimiento natural y la ecuación diferencial logística no son las únicas ecuaciones propuestas para modelar el crecimiento de poblaciones. En el ejercicio 14 veremos la función del crecimiento de Gompertz y en los ejercicios 15 y 16 investigaremos los modelos de crecimiento dependiente de las estaciones.

Dos de los otros modelos son modificaciones del modelo logístico. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - c$$

se ha usado para modelar las poblaciones que están sujetas a la "cosecha" de un tipo o de otro. (Piense en una población de peces que se capturan a una razón constante.) Esta ecuación se examina en los ejercicios 11 y 12.

Para algunas especies existe un nivel mínimo m de la población, por debajo del cual la especie tiende a extinguirse. (Los adultos pueden no ser capaces de hallar parejas adecuadas.) Estas poblaciones se han modelado con la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

donde el factor adicional, $1 - m/P$, toma en cuenta las consecuencias de una población dispersa. (Véase el Ejerc. 13.)

9.5 Ejercicios

1. Suponga que una población se desarrolla según la ecuación logística

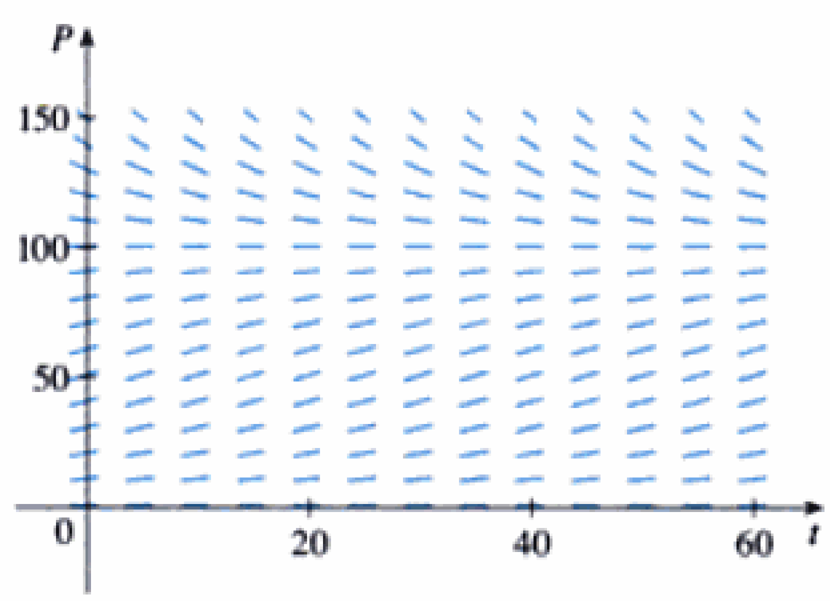
$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 0.0005P^2$$

donde t se mide en semanas.

(a) ¿Cuál es la capacidad de contención? ¿Cuál es el valor de k?

(b) Se muestra un campo direccional para esta ecuación. ¿Dónde están cerca de 0 las pendientes? ¿En dónde son más grandes? ¿Cuáles soluciones son crecientes y cuáles decrecientes?

(c) Use el campo direccional con el fin de trazar soluciones para las poblaciones iniciales de 20, 40, 60, 80, 120 y 140.



10. Para un valor fijo de K (digamos $K = 10$), la familia de funciones logísticas dadas por la ecuación 4 depende del valor inicial P_0 y de la constante de proporcionalidad k. Trace la gráfica de varios miembros de esta familia. ¿Cómo cambia la gráfica cuando P_0 varía? ¿Cómo se modifica cuando k varía?

11. Modifiquemos la ecuación diferencial logística del ejemplo 1 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - 15$$

(a) Supongamos que $P(t)$ representa una población de peces en el tiempo t, donde t se mide en semanas. Explique el significado del término -15.
(b) Trace un campo direccional para esta ecuación diferencial.
(c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?
(d) Use el campo direccional para trazar varias curvas solución. Describa qué sucede a la población de peces para diversas poblaciones iniciales.
(e) Resuelva explícitamente esta ecuación diferencial, aplicando las fracciones parciales o con un SAC. Use las poblaciones iniciales de 200 y 300. Grafique las soluciones y compárelas con los esquemas que obtuvo en el inciso d).

SAC **12.** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$

como un modelo para una población de peces, en donde t se mide en semanas y c es una constante.
(a) Trace campos direccionales para diversos valores de c con un SAC.
(b) A partir de los campos direccionales obtenidos en el inciso (a), determine los valores de c para los cuales existe por lo menos una solución de equilibrio. ¿Para cuáles valores de c la población de peces siempre se muere?
(c) Use la ecuación diferencial para probar lo que descubrió gráficamente en el inciso (b).
(d) ¿Qué recomendaría como límite para la captura semanal de esta población de peces?

13. Existe evidencia considerable que apoya la teoría de que para algunas especies existe una población mínima, m, tal que la especie se extinguirá si su tamaño cae por debajo de m. Esta condición se puede incorporar en la ecuación logística introduciendo el factor $(1 - m/P)$. Por tanto, el modelo logístico modificado se expresa mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

(a) Use la ecuación diferencial para demostrar que cualquier solución es creciente si $m < P < K$ y decreciente si $0 < P < m$.
(b) Para el caso en que $k = 0.08$, $K = 1000$ y $m = 200$, trace un campo direccional y úselo a fin de dibujar varias curvas solución. Describa qué sucede a la población con diversas poblaciones iniciales. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?
(c) Resuelva explícitamente la ecuación diferencial aplicando las fracciones parciales o con un SAC. Use la población inicial P_0.
(d) Utilice la solución hallada en el inciso (c) para demostrar que si $P_0 < m$, entonces la especie se extinguirá. [*Sugerencia*: demuestre que el numerador de su expresión para $P(t)$ es 0 para algún valor de t.]

14. Otro modelo para una función de crecimiento de una población limitada se da mediante la **función de Gompertz,** la cual es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c \ln\left(\frac{K}{P}\right)P$$

donde c es una constante y K es la capacidad de contención.
(a) Resuelva esta ecuación diferencial.
(b) Calcule $\lim_{t\to\infty} P(t)$.
(c) Grafique la función de crecimiento de Gompertz para $K = 1000$, $P_0 = 100$ y $c = 0.05$, y compárela con la función logística del ejemplo 3. ¿Cuáles son las semejanzas y las diferencias?
(d) Por el resultado del ejercicio 9, sabemos que la función logística crece con mayor rapidez cuando $P = K/2$. Use la ecuación diferencial de Gompertz para demostrar que su función crece más rápido cuando $P = K/e$.

15. En un **modelo de crecimiento dependiente de las estaciones**, se introduce una función periódica del tiempo para tomar en cuenta las variaciones relacionadas con las estaciones en la rapidez de crecimiento. Estas variaciones podrían obedecer, por ejemplo, a cambios provocados por las estaciones en la disponibilidad de alimento.
(a) Encuentre la solución del modelo de crecimiento dependiente de las estaciones

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

donde k, r y ϕ son constantes positivas.
(b) Grafique la solución para varios valores de k, r y ϕ para explicar cómo influyen los valores de estas constantes en la solución. ¿Qué puede decir de $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

16. Suponga que alteramos la ecuación diferencial del ejercicio 15 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

(a) Resuelva esta ecuación diferencial con la ayuda de una tabla de integrales o con un SAC.
(b) Grafique la solución para varios valores de k, r y ϕ. ¿Cómo influyen los valores de estas constantes en la solución? ¿Qué puede decir de $\lim_{t\to\infty} P(t)$ en este caso?

9.6 Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es aquella que puede expresarse de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

donde P y Q son funciones continuas sobre un intervalo dado. Este tipo de ecuación se presenta muy a menudo en varias ciencias como veremos.

Un ejemplo de una ecuación lineal es $xy' + y = 2x$ porque para $x \neq 0$, puede escribirse en la forma

$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \tag{2}$$

Observe que esta ecuación diferencial no es separable porque es imposible la expresión y' como el producto de una función de x y una función de y. Pero podemos efectivamente resolver la ecuación observando que, por la regla de la cadena,

$$xy' + y = (xy)'$$

y así podemos reescribir la ecuación como

$$(xy)' = 2x$$

Si ahora integramos ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$xy = x^2 + C \qquad \text{o} \qquad y = x + \frac{C}{x}$$

Si se nos hubiera dado la ecuación diferencial en la forma de la ecuación 2, hubiéramos tenido que multiplicar primero cada lado de la ecuación por x.

Ocurre que cualquier ecuación diferencial lineal puede resolverse en forma semejante multiplicando ambos lados de la ecuación 1 por una función apropiada $I(x)$ que se denomina *factor de integración*. Intentemos encontrar I de modo que el lado izquierdo de la ecuación 1 multiplicado por $I(x)$, venga a ser la derivada del producto $I(x)y$:

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \tag{3}$$

Si podemos encontrar dicha función I, enconces la ecuación (1) se convierte en

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Al integrar los dos lados, tendríamos

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)\,dx + C$$

por lo que la solución sería

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right] \tag{4}$$

Para encontrar tal función I, desarrollamos la ecuación 3 y cancelamos términos:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

Esta es una ecuación diferencial separable para I, la cual se resuelve de la siguiente manera:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

donde $A = \pm e^C$. Estamos buscando un factor de integración particular, y no el más general, de modo que tomamos $A = 1$ y utilizamos

$$\boxed{5} \qquad I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Así que una fórmula para la solución general de la ecuación 1 la proporciona la ecuación 4 en donde I está dada por la ecuación 5. Sin embargo, en vez de memorizar esta fórmula sólo recordemos la forma del factor de integración.

> Para resolver la ecuación diferencial lineal $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplicamos sus dos lados por el **factor de integración** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integramos ambos lados.

EJEMPLO 1 □ Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación dada es lineal, puesto que tiene la forma de la ecuación 1, con $P(x) = 3x^2$ y $Q(x) = 6x^2$. Un factor de integración es

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por e^{x^3}, tenemos

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

o

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

Al integrar ambos lados, tenemos

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$ □

□ La figura 1 muestra las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones del ejemplo 1. Observe que esta es una aproximación a 2 cuando $x \to \infty$.

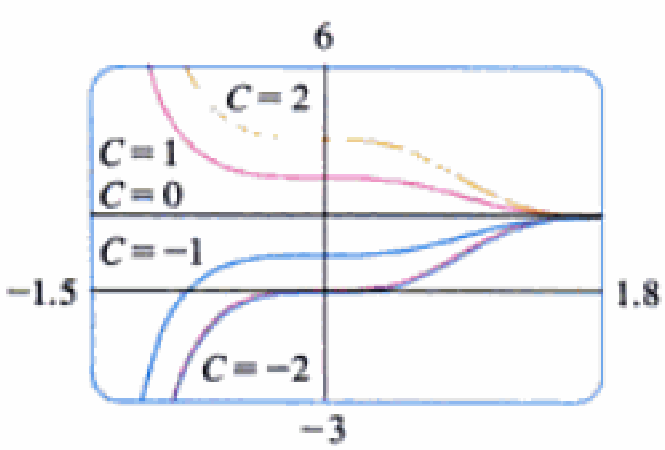


FIGURA 1

EJEMPLO 2 □ Determine la solución del problema con valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUCIÓN Primero debemos dividir ambos lados por el coeficiente de y', a fin de poner la ecuación diferencial en la forma estándar:

$$\boxed{6} \qquad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

El factor de integración es

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

La multiplicación de la ecuación 6 por x nos da

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad \text{o} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

□ En la figura 2 se ilustra la solución del problema con valor inicial del ejemplo 2.

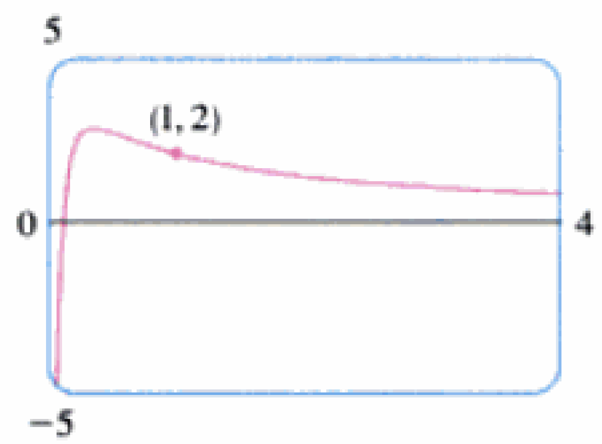


FIGURA 2

Así pues
$$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

por lo que
$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Puesto que $y(1) = 2$, tenemos que

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

En consecuencia, la solución para el problema con valor inicial es

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

□

EJEMPLO 3 □ Resuelve $y' + 2xy = 1$.

SOLUCIÓN La ecuación dada está en la forma estándar de una ecuación lineal. Al multiplicar por el factor de integración

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

obtenemos
$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

o
$$(e^{x^2}y)' = e^{x^2}$$

Por lo tanto
$$e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$$

□ Aunque las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 3 se expresan en términos de una integral, pueden graficarse mediante un sistema algebraico de cómputo (fig. 3).

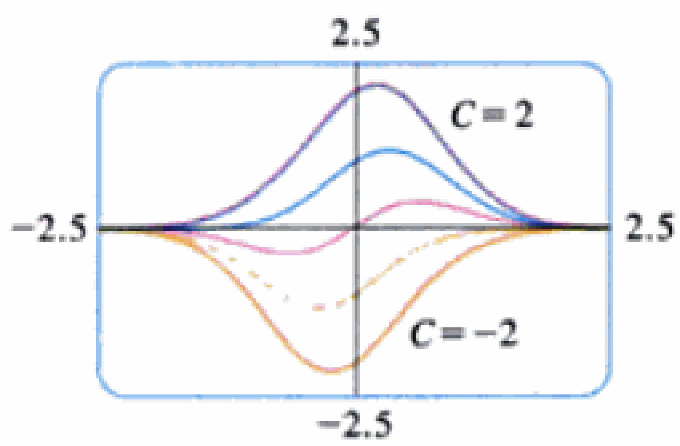


FIGURA 3

Recuerde de la sección 7.5 que $\int e^{x^2}\,dx$ no puede expresarse en términos de funciones elementales. Sin embargo, es una muy buena función, por lo que podemos dejar la respuesta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

Otra forma de escribir la solución es

$$y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt + Ce^{-x^2}$$

(Cualquier número puede elegirse para el límite inferior de integración.) □

Aplicación a los circuitos eléctricos

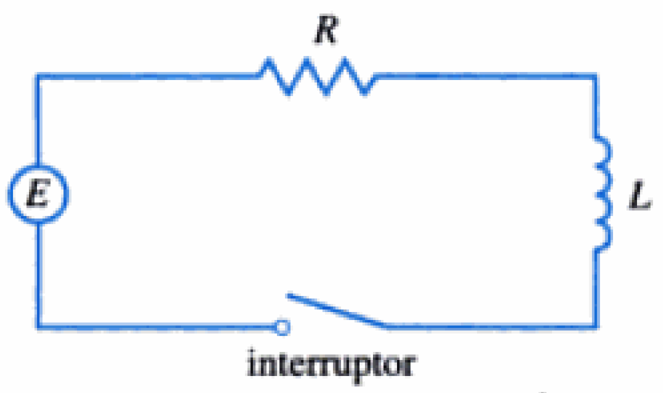


FIGURA 4

En la sección 9.2 se consideró el circuito eléctrico simple de la figura 4: una fuerza electromotriz (por lo general una batería o un generador) produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el instante t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henrys (H).

La ley de Ohm proporciona la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje ocasionada por el inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje es igual al voltaje porporcionado $E(t)$. Por lo que tenemos

$$\boxed{7} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

lo cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución proporciona la corriente I en el tiempo t.

□ La ecuación diferencial del ejemplo 4 es lineal y es separable, de modo que existe la alternativa de resolverla como ecuación separable (ejemplo 3 sección 9.3). Sin embargo, si reemplazamos la batería por un generador obtenemos una ecuación que es lineal pero no es separable (ejemplo 5).

EJEMPLO 4 □ Suponga que en el circuito simple de la figura 4, la resistencia es de 12 Ω y que la inductancia es de 4 H. Si una batería proporciona un voltaje constante de 60 V y el interruptor está cerrado cuando $t = 0$, de modo que la corriente comience con $I(0) = 0$, determine (a) $I(t)$, (b) la corriente después de 1 segundo, y (c) el valor límite de la corriente.

SOLUCIÓN

a) Si $L = 4$, $R = 12$, y $E(t) = 60$ en la ecuación 7, obtenemos el problema con valor inicial

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

o

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Al multiplicar por el factor de integración $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, obtenemos

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

Puesto que $I(0) = 0$, tenemos que $5 + C = 0$, así que $C = -5$ y

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

□ La figura 5 muestra la forma en que la corriente del ejemplo 4 se aproxima a su valor límite.

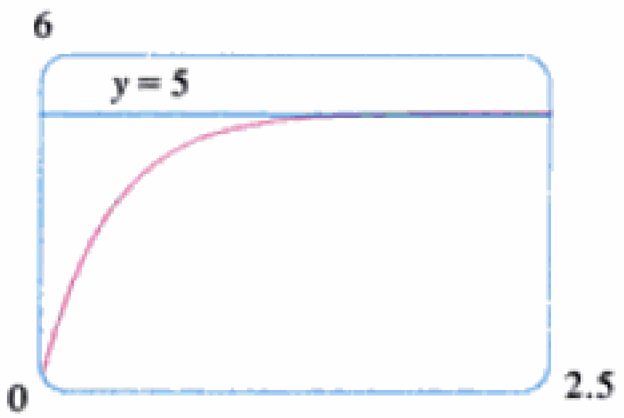


FIGURA 5

(b) Después de 1 segundo, la corriente es igual a

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75 \text{ A}$$

(c)
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} I(t) &= \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) \\ &= 5 - 5 \lim_{t\to\infty} e^{-3t} \\ &= 5 - 0 = 5 \end{aligned}$$ □

EJEMPLO 5 □ Suponga que la resistencia y la inductancia siguen siendo las mismas del ejemplo 4, pero que en lugar de la batería utilizamos un generador que produce un voltaje variable de $E(t) = 60 \operatorname{sen} 30t$ volts. Determine $I(t)$.

SOLUCIÓN En esta ocasión, la ecuación diferencial se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \operatorname{sen} 30t \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \operatorname{sen} 30t$$

El mismo factor de integración e^{3t} nos permite escribir

□ La figura 6 muestra la gráfica de la corriente cuando la batería se sustituye con un generador.

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t$$

Usando la fórmula 98 en la tabla de integrales, tenemos que

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t\,dt = 15\,\frac{e^{3t}}{909}(3 \operatorname{sen} 30t - 30 \cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + Ce^{-3t}$$

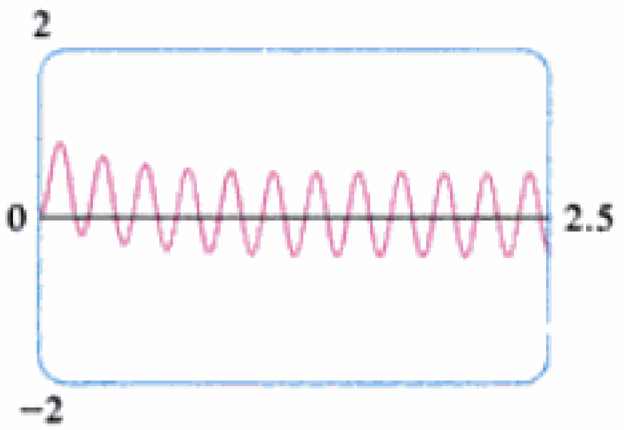


FIGURA 6

Puesto que $I(0) = 0$, obtenemos

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

así que
$$I(t) = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$$ □

9.6 Ejercicios

1–4 □ Determine si la ecuación diferencial es lineal.

1. $y' + e^x y = x^2 y^2$
2. $y + \operatorname{sen} x = x^3 y'$
3. $xy' + \ln x - x^2 y = 0$
4. $yy' = \operatorname{sen} x$

5–14 □ Resuelva la ecuación diferencial.

5. $y' + 2y = 2e^x$
6. $y' = x + 5y$
7. $y' - 2xy = x$
8. $xy' + 2y = e^{x^2}$
9. $y' \cos x = y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
10. $1 + xy = xy'$
11. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^2$
12. $\dfrac{dy}{dx} = x \operatorname{sen} 2x + y \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$
14. $xy' + xy + y = e^{-x}, \quad x > 0$

15–20 □ Resuelva el problema con valor inicial.

15. $y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 0$
16. $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(1) = 0$
17. $\dfrac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2 e^{t^2}, \quad v(0) = 5$

□ El matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) propuso las ecuaciones de Lotka-Volterra, como un modelo para explicar las variaciones en las poblaciones de tiburones y peces alimento en el mar Adriático.

Las ecuaciones dadas en (1) se conocen como **ecuaciones del depredador-presa** o **ecuaciones de Lotka-Volterra**. Una **solución** de este sistema de ecuaciones es un par de funciones $R(t)$ y $W(t)$ que describen las poblaciones de la presa y del depredador como funciones del tiempo. Debido a que este sistema está acoplado (R y W se presentan en las dos ecuaciones), no podemos resolver una de las ecuaciones y luego, la otra; tenemos que resolverlas de manera simultánea. Por desgracia, suele ser imposible hallar fórmulas explícitas para R y W como funciones de t. Sin embargo, podemos aplicar métodos gráficos para analizar las ecuaciones.

EJEMPLO 1 □ Suponga que las ecuaciones de Lotka-Volterra (1) describen las poblaciones de conejos y lobos, con $k = 0.08$, $a = 0.001$, $r = 0.02$ y $b = 0.00002$.
(a) Encuentre las soluciones constantes (llamadas **soluciones de equilibrio**) e interprete la respuesta.
(b) Halle una expresión para dW/dR a partir del sistema de ecuaciones diferenciales.
(c) Trace un campo direccional para la ecuación diferencial resultante en el plano RW. Luego úselo para trazar algunas curvas solución.
(d) Suponga que en algún punto en el tiempo hay 1000 conejos y 40 lobos. Dibuje la curva solución correspondiente y úsela para describir los cambios en los dos niveles de población.
(e) Utilice el resultado del inciso (d) para dibujar esquemas de R y W como funciones de t.

SOLUCIÓN

(a) Con los valores dados de k, a, r y b, las ecuaciones de Lotka-Volterra quedan

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

Tanto R como W son constantes si las dos derivadas son 0; es decir,

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

$R = 0$ y $W = 0$ dan una solución. (Esto tiene sentido: si no hay conejos o lobos, las poblaciones no crecen.) La otra solución constante es

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80 \qquad R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$$

De modo que las poblaciones de equilibrio consisten en 80 lobos y 1000 conejos. Esto significa que se requieren 1000 conejos para soportar una población constante de 80 lobos. No hay demasiados lobos (lo cual resultaría en menos conejos) ni pocos lobos (lo cual conduciría a más conejos).

b) Usamos la regla de la cadena para eliminar t:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR}\frac{dR}{dt}$$

de modo que

$$\frac{dW}{dR} = \frac{\dfrac{dW}{dt}}{\dfrac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

contrario a las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria fase? Si ponemos $R = 1000$ y $W = 40$ en la primera ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Ya que $dR/dt > 0$, concluimos que R crece en P_0 y, por consiguiente, nos movemos en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria fase.

Vemos que en P_0 no hay lobos suficientes para mantener un equilibrio entre las poblaciones, por lo que la población de conejos crece. Eso da por resultado más lobos y llega un momento en que hay tantos lobos que los conejos tienen tiempos difíciles para evitarlos. Como consecuencia, el número de conejos empieza a declinar (en P_1, donde estimamos que R alcanza su población máxima de alrededor de 2800). Esto significa que en algún tiempo posterior, la población de lobos empieza a caer (en P_2, donde $R = 1000$ y $W \approx 140$). Pero esto beneficia a los conejos, de modo que su población empieza a crecer más tarde (en P_3, donde $W = 80$ y $R \approx 210$). Con esto, llega el momento en que la población de lobos también empieza a crecer. Esto sucede cuando las poblaciones regresan a sus valores iniciales de $R = 1000$ y $W = 40$ y el ciclo se inicia una vez más.

(e) A partir de la descripción del inciso (d) acerca de cómo aumentan y disminuyen las poblaciones de conejos y de lobos, podemos trazar las gráficas de $R(t)$ y $W(t)$. Suponga que los puntos P_1, P_2 y P_3 de la figura 3 se alcanzan en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Entonces podemos graficar R y W como en la figura 4.

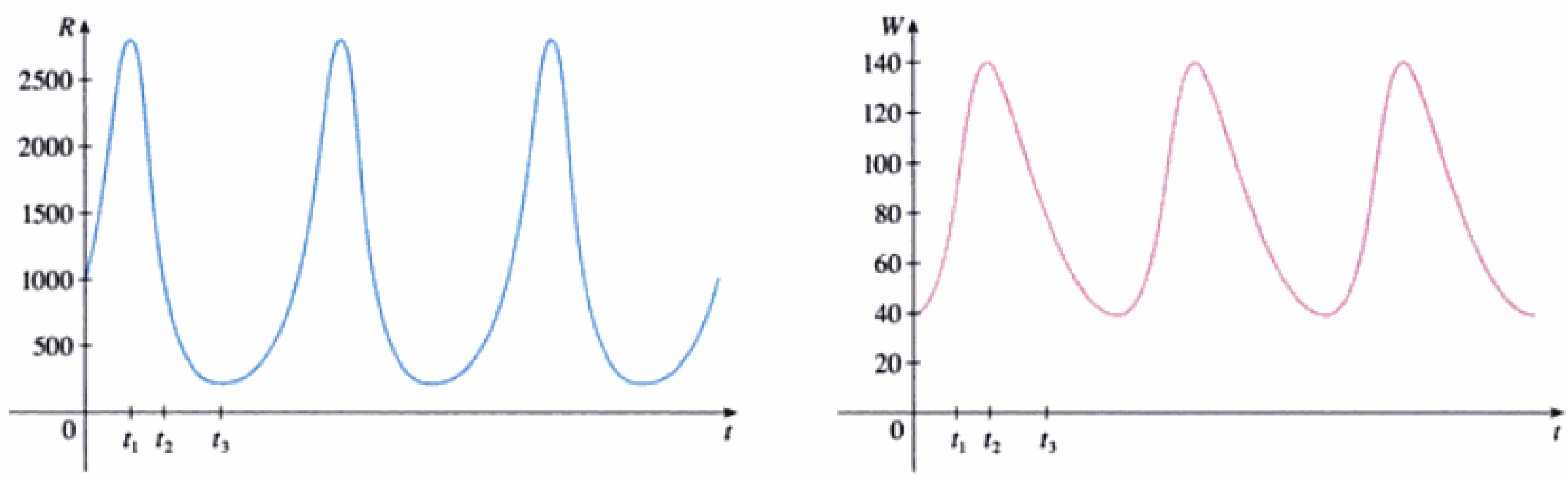


FIGURA 4
Gráfica de las poblaciones de conejos y de lobos como funciones del tiempo

Para comparar con más facilidad las gráficas, tracémoslas sobre los mismos ejes, pero con escalas diferentes para R y W (Fig. 5). Observe que los conejos alcanzan sus poblaciones máximas alrededor de un cuarto de ciclo antes que los lobos.

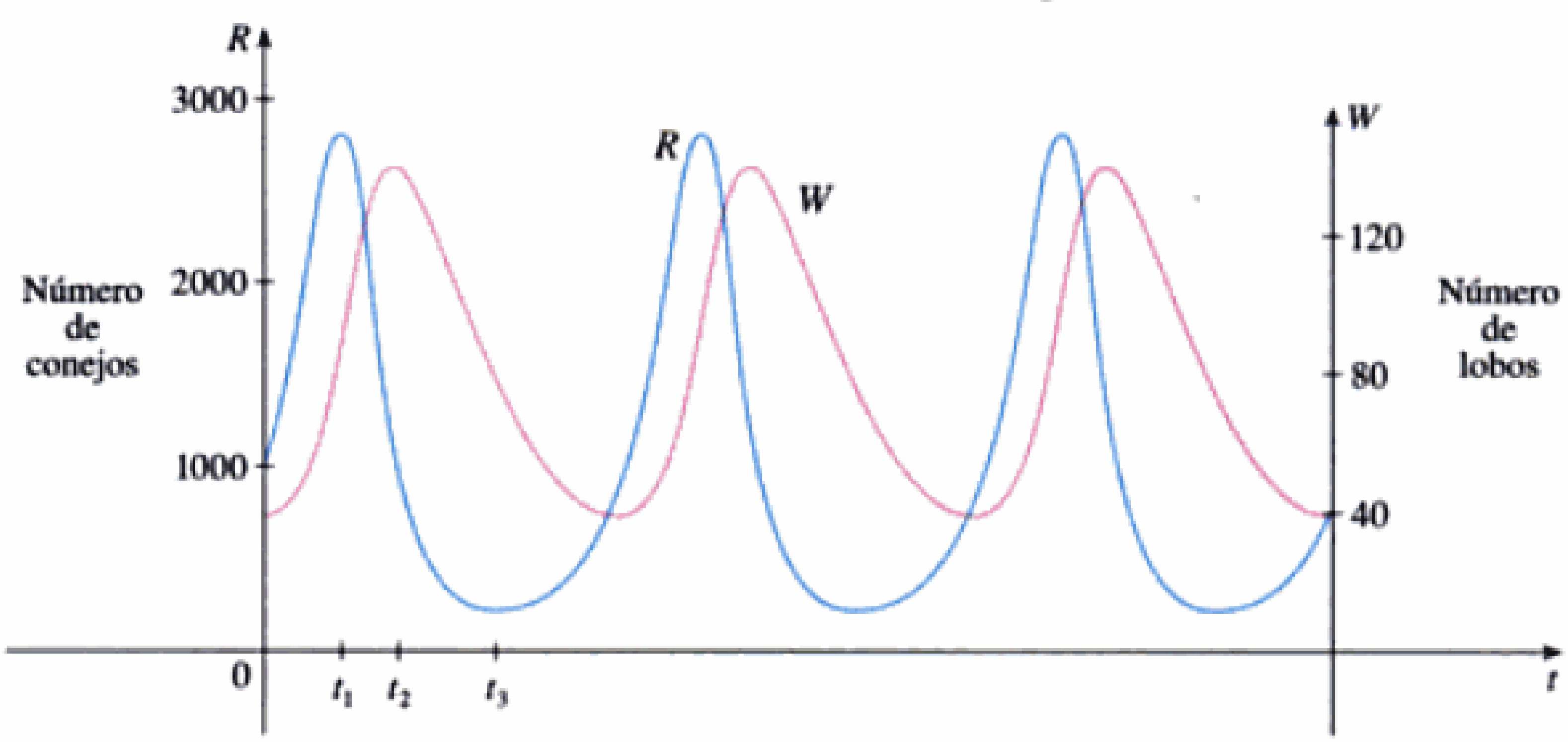


FIGURA 5
Comparación de las poblaciones de conejos y de lobos

MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Tel. (525)281-2906
editor@thomsonlearning.com.mx
México, D.F., MÉXICO

AMÉRICA DEL SUR
Tel./Fax (5411)4325-2236
thomson@thomsonlearning.com.ar
Buenos Aires, ARGENTINA

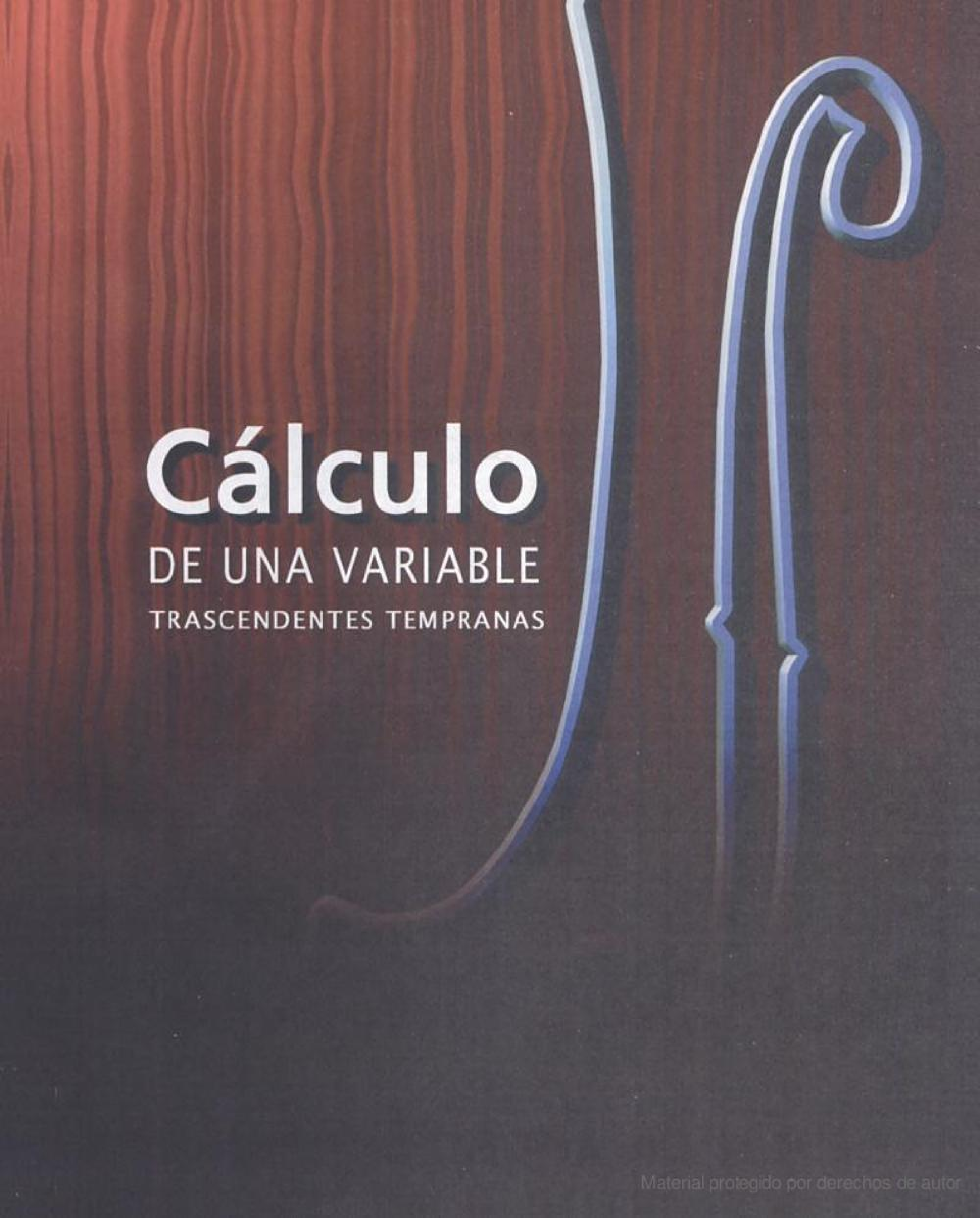
EL CARIBE
Tel. (787)758-7580
thomson@coqui.net
Hato Rey, PUERTO RICO

PACTO ANDINO
Tel.(571)340-9470
Fax.(571)340-9475
clithomson@andinet.com
Bogotá, COLOMBIA

THOMSON
LEARNING

ISBN 970-686-069-X

9 789706 860699



Cálculo

DE UNA VARIABLE

TRASCENDENTES TEMPRANAS

TRIGONOMETRÍA

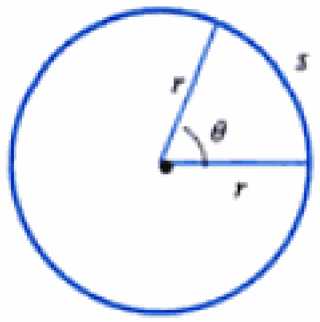
MEDICIÓN DE ÁNGULOS

π radianes $= 180°$

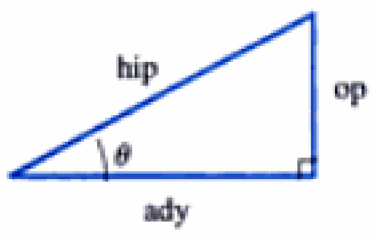
$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $\qquad$ 1 rad $= \dfrac{180°}{\pi}$

$s = r\theta$

(θ en radianes)



TRIGONOMETRÍA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}$

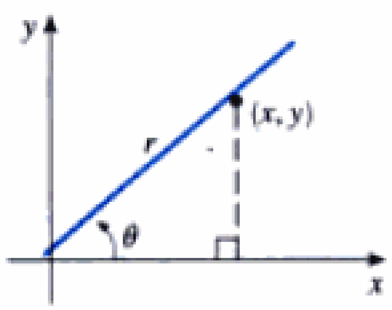
$\tan\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

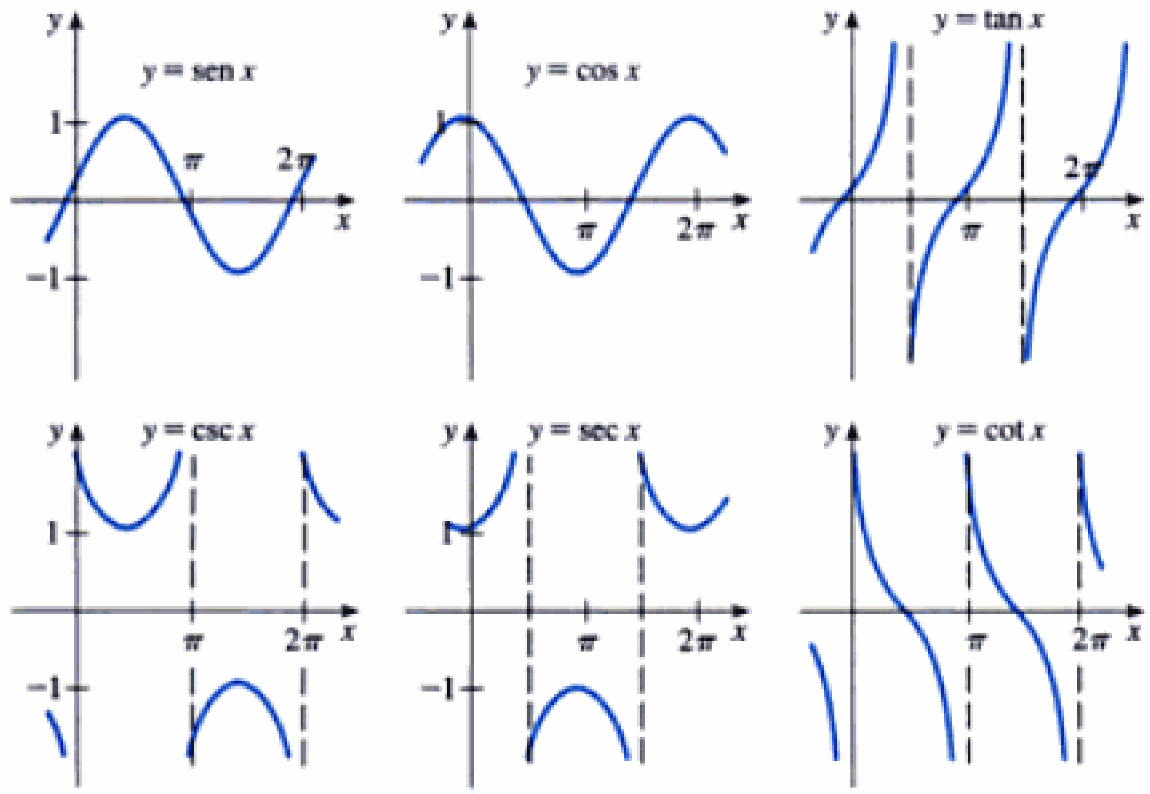
$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} \qquad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r} \qquad \sec\theta = \dfrac{r}{x}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \qquad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$



GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS IMPORTANTES

θ	radianes	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

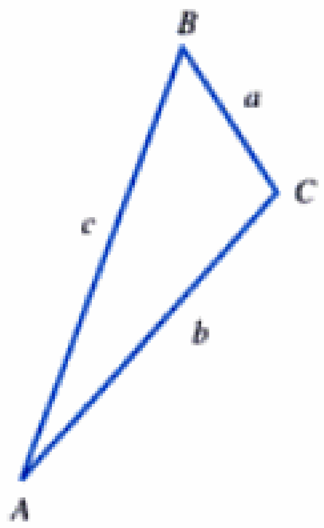
$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

LEY DE LOS SENOS

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$



LEY DE LOS COSENOS

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

FÓRMULAS DE SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x\cos y - \cos x\operatorname{sen} y$

$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

$\cos(x - y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

$\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$

FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

FÓRMULAS DE ÁNGULO MITAD

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

(d) Suponga que en el instante $t = 0$ se tienen 1000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la trayectoria fase correspondiente y úsela para describir cómo cambian las dos poblaciones.

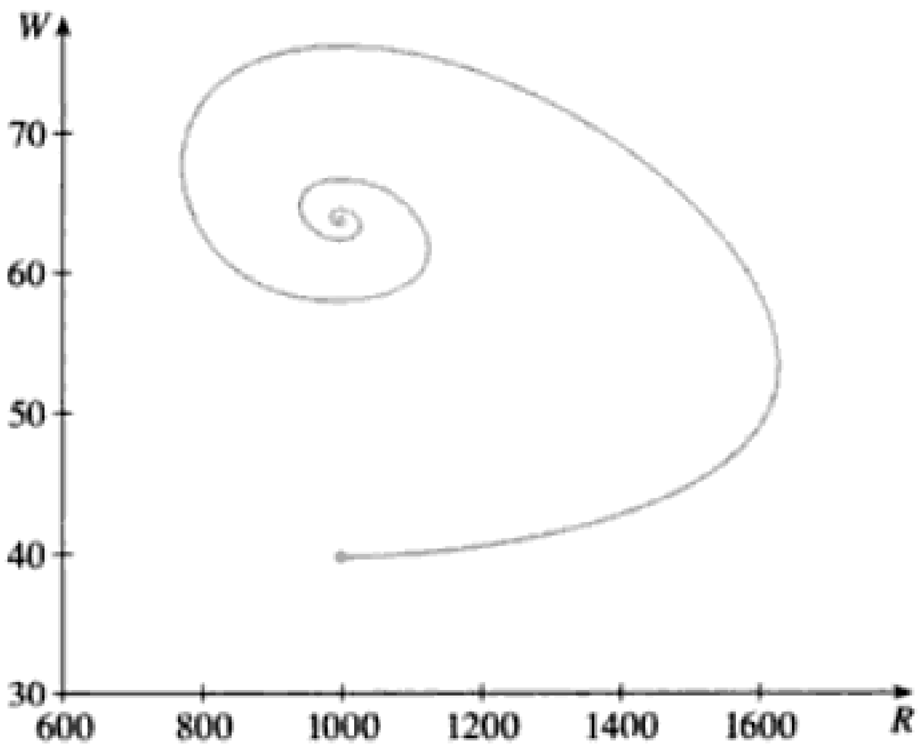
(e) Utilice el resultado del inciso (d) para dibujar esquemas aproximados de las poblaciones de pulgones y de mariquitas, como funciones de t. ¿Cómo se relacionan las gráficas?

9. En el ejemplo 1 usamos las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar las poblaciones de conejos y lobos. Modifiquemos esas ecuaciones como sigue:

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

(a) Según estas ecuaciones, ¿qué sucede a la población de conejos a falta de lobos?



(b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio y explique sus significados.

(c) En la figura se muestra la trayectoria fase que se inicia en el punto (1000, 40). Describa qué termina por suceder a las poblaciones de conejos y lobos.

(d) Grafique las poblaciones de lobos y conejos como funciones del tiempo.

10. En el ejercicio 8 modelamos las poblaciones de pulgones y mariquitas con un sistema de Lotka-Volterra. Suponga que modificamos esas ecuaciones como sigue:

$$\frac{dA}{dt} = 2A(1 - 0.0001A) - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

(a) Sin mariquitas, ¿qué predice el modelo acerca de los pulgones?

(b) Encuentre las soluciones de equilibrio.

(c) Halle una expresión para dL/dA.

(d) Use un SAC con el fin de trazar un campo direccional para la ecuación diferencial del inciso (c). Luego utilice el campo para dibujar un retrato fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias fase?

(e) Suponga que en el instante $t = 0$ se tienen 1000 pulgones y 2000 mariquitas. Trace la trayectoria fase correspondiente y úsela para describir cómo cambian las dos poblaciones.

(f) Utilice los resultados del inciso (e) para dibujar esquemas aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo se relacionan las gráficas?

9 Repaso

COMPROBACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una ecuación diferencial?
(b) ¿Qué es el orden de una ecuación diferencial?
(c) ¿Qué es una condición inicial?

2. ¿Qué puede decir de las soluciones de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ sólo con mirarla?

3. ¿Qué es un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$?

4. Explique cómo funciona el método de Euler.

5. ¿Qué es una ecuación diferencial separable? ¿Cómo la resuelve?

6. ¿Qué es una ecuación diferencial lineal de primer orden? ¿Cómo puede resolverla?

7. (a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley del crecimiento natural.
(b) ¿En qué circunstancias este modelo es apropiado para el crecimiento de las poblaciones?
(c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

8. (a) Escriba la ecuación logística.
(b) ¿En qué circunstancias este modelo es apropiado para el crecimiento de las poblaciones?

9. (a) Escriba las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar las poblaciones de peces alimento (F) y de tiburones (S)?
(b) ¿Qué dicen estas ecuaciones de cada población, en ausencia de la otra?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = -1 - y^4$ son funciones decrecientes.
2. La función $f(x) = (\ln x)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.
3. La ecuación $y' = x + y$ es separable.
4. La ecuación $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ es separable.
5. La ecuación $e^x y' = y$ es lineal.
6. La ecuación $y' + xy = e^y$ es lineal.
7. Si y es la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

entonces $\lim_{t\to\infty} y = 5$.

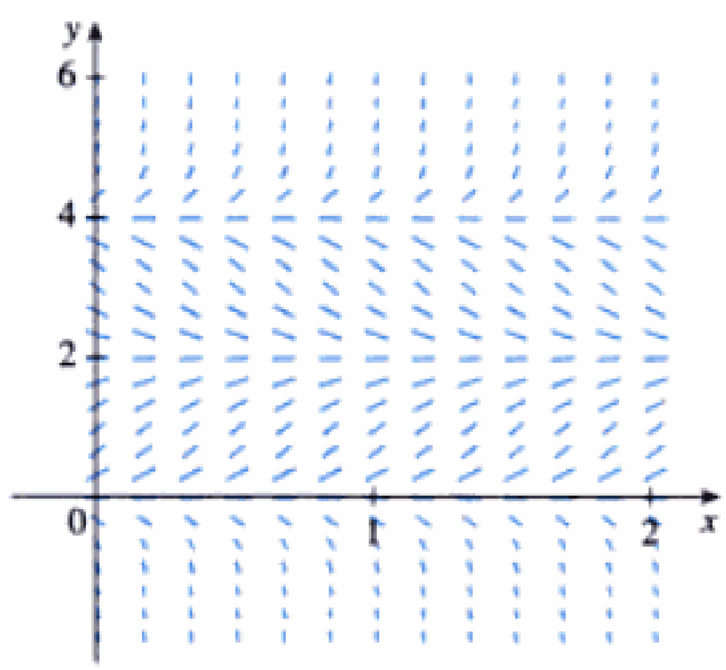
EJERCICIOS

1. (a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial

$$y' = y(y-2)(y-4)$$

Grafique las soluciones que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

(i) $y(0) = -0.3$ (ii) $y(0) = 1$
(iii) $y(0) = 3$ (iv) $y(0) = 4.3$



(b) Si la condición inicial es $y(0) = c$, ¿para cuáles valores de c se tiene que $\lim_{t\to\infty} y(t)$ es finito? ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

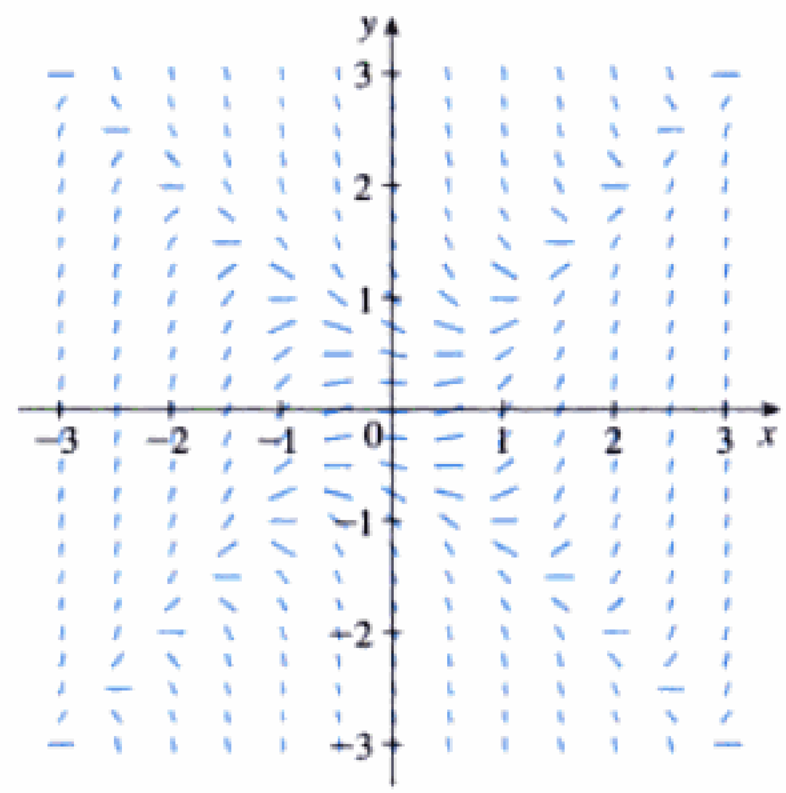
2. (a) Trace un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x/y$. Luego, úselo para trazar las cuatro soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$ y $y(-2) = 1$.

(b) Compruebe su respuesta del inciso (a) al resolver explícitamente la ecuación diferencial. ¿Qué tipo de curva es cada curva solución?

3. (a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 - y^2$. Grafique la solución del problema con valor inicial

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1$$

Estime el valor de $y(0.3)$ con su gráfica.



(b) Aplique el método de Euler, con tamaño del paso de 0.1, para estimar $y(0.3)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial obtenida en el inciso (a). Compare el resultado con su estimación del inciso (a).

(c) ¿En qué rectas se ubican los centros de los segmentos rectilíneos horizontales del campo direccional del inciso (a)? ¿Qué sucede cuando una curva solución cruza estas rectas?

4. (a) Aplique el método de Euler, con tamaño del paso de 0.2, para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valor inicial

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

(b) Repita el inciso (a) con tamaño del paso de 0.1.

(c) Encuentre la solución exacta de la ecuación diferencial y compare el valor en 0.4 con las aproximaciones de los incisos (a) y (b).

5–8 Resuelva la ecuación

5. $y^2 \dfrac{dy}{dx} = x + \operatorname{sen} x$
6. $y' + 2xy = 2x^3$
7. $xy' - 2y = x^3$
8. $y' = 2 + 2x^2 + y + x^2y$

Problemas especiales

1. Encuentre todas las funciones f tales que f' sea continua y

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}\,dt \qquad \text{para toda } x \text{ real}$$

2. Un estudiante olvidó la regla del producto para la derivación y cometió el error de pensar que $(fg)' = f'g'$. Sin embargo, tuvo la suerte de obtener la respuesta correcta. La función f que usó fue $f(x) = e^{x^2}$ y el dominio de su problema fue el intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$. ¿Cuál fue la función g?

3. Sea f una función con la propiedad de que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ y $f(a + b) = f(a)\,f(b)$, para todos los números reales a y b. Demuestre que $f'(x) = f(x)$ para toda x y deduzca que $f(x) = e^x$.

4. Encuentre todas las funciones f que satisfacen la ecuación

$$\left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}\,dx\right) = -1$$

5. Un ingeniero que planea una nueva planta de alumbre debe presentar algunas estimaciones a su compañía referentes a la capacidad del silo diseñado para contener mineral de bauxita hasta que se procese para obtener el alumbre. El mineral parece polvo de talco color rosa y se vierte desde un transportador en la parte superior del silo. Éste es un cilindro de 100 pies de altura con un radio de 200 pies. El transportador acarrea $60{,}000\pi$ pies^3/h y el mineral conserva una forma cónica cuyo radio es de 1.5 veces su altura.
   (a) Si, en cierto momento t, la pila tiene 60 pies de altura, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a la parte superior del silo?
   (b) La gerencia quiere saber cuánto lugar quedará en el área del piso del silo cuando la pila tenga 60 pies de alto. ¿Con cuánta rapidez aumenta el área del piso de la pila cuando ésta tiene esa altura?
   (c) Suponga que un cargador empieza a extraer el mineral a la razón de $20{,}000\pi$ pies^3/h, cuando la altura de la pila alcanza 90 pies. Suponga también que la pila conserva su forma. En estas condiciones, ¿cuánto tardará la pila en alcanzar la parte superior del silo?

6. Durante la mañana del 2 de febrero empezó a caer nieve y siguió de manera estable hacia la tarde. Una barredora de nieve empezó a limpiar la calle al mediodía, moviéndose con una rapidez constante. la barredora recorrió 6 km desde el mediodía hasta la 1 PM, pero sólo 3 km de la 1 P.M. hasta las 2 P.M. ¿Cuándo empezó a caer la nieve? [*Sugerencias:* para empezar, sea t el tiempo, en horas, después del mediodía; sea $x(t)$ la distancia recorrida por la barredora en el tiempo t; entonces la velocidad de la barredora es dx/dt. Sea b las horas antes del mediodía en que empezó a caer la nieve. Encuentre una expresión para la altura de la nieve en el tiempo t. Luego, utilice la información de que la rapidez de remoción R (en m^3/h) es constante.]

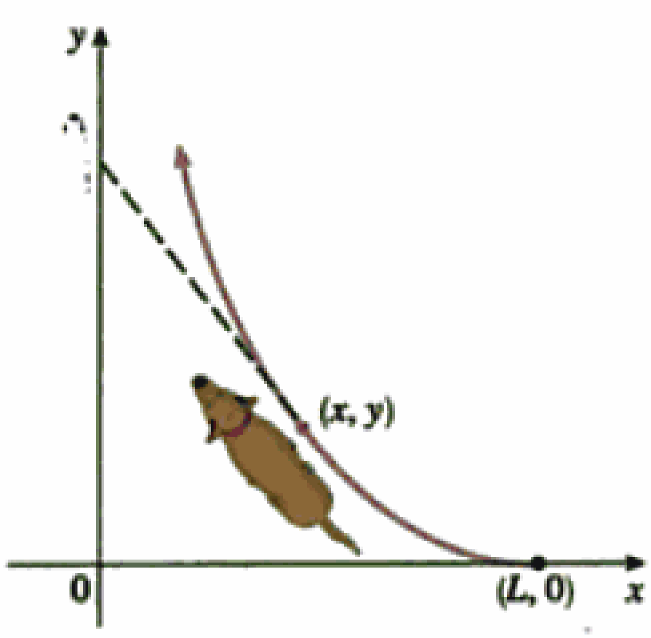


FIGURA PARA EL PROBLEMA 7

7. Un perro ve un conejo corriendo en línea recta por un campo abierto y corre a darle caza. En un sistema rectangular (como se ve en la figura), suponga que:
   (i) El conejo está en el origen y el perro se encuentra en el punto $(L, 0)$ en el instante en que lo ve por primera vez.
   (ii) El conejo corre hacia arriba del eje y y el perro siempre corre directo tras él.
   (iii) El perro corre a la misma velocidad que el conejo.
   (a) Demuestre que la trayectoria del perro es la gráfica de la función $y = f(x)$, donde y satisface la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

   (b) Determine la solución de la ecuación del inciso (a) que satisfaga las condiciones iniciales $y = y' = 0$ cuando $x = L$. [*Sugerencia:* haga $z = dy/dx$ en la ecuación diferencial y resuelva la ecuación diferencial de primer orden resultante para hallar z; a continuación, integre z para hallar y.]
   (c) ¿El perro captura el conejo?

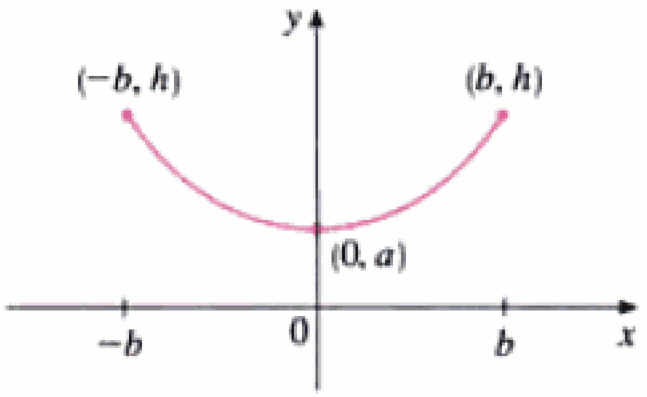


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

8. (a) Suponga que el perro del problema 7 corre dos veces más rápido que el conejo. Encuentre una ecuación diferencial para la trayectoria del perro. A continuación, resuélvala para hallar el punto en que captura al conejo.

(b) Suponga que la rapidez del perro es igual a la mitad de la rapidez del conejo. ¿Cuán cerca llegan a estar? ¿Cuáles son sus posiciones cuando se encuentran más próximos?

9. Cuando un cable flexible de densidad uniforme se suspende entre dos puntos fijos y cuelga por su propio peso, la forma $y = f(x)$ del cable debe satisfacer una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde k es una constante positiva. Considere el cable mostrado en la figura.

(a) Sea $z = dy/dx$ en la ecuación diferencial. Resuelva la ecuación de primer orden que resulta (en z) e integre para obtener y.

(b) Determine la longitud del cable.

10. Recuerde que la recta normal a una curva en un punto P de la curva, es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en el punto P. Halle todas las curvas que tienen la propiedad de que si se traza la recta normal en cualquier punto P, entonces el segmento de la normal que va desde P hasta la intersección con el eje x, es dividido en dos partes iguales por el eje y.